

# Reconfiguration, probabilités et transitions de phase

Clément Legrand-Duchesne

14 mars 2025

## Parcours

2024-2025 Postdoc à Jagiellonian University, Cracovie

2021-2024 Thèse à Bordeaux avec Marthe Bonamy et Vincent Delecroix

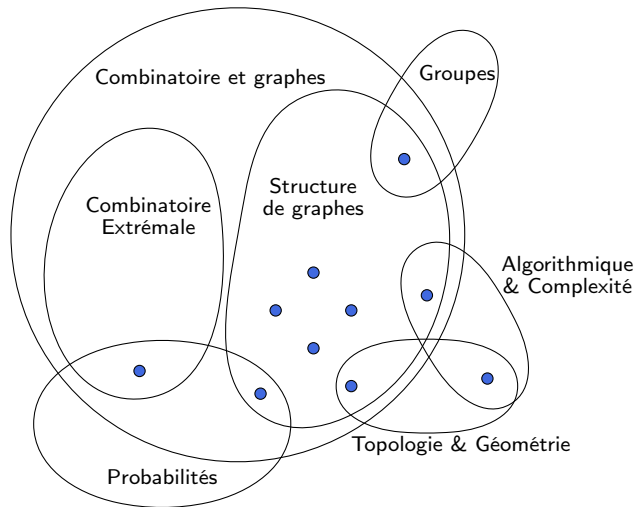
2017-2021 ENS de Rennes + Agrégation

## 10 articles (7 publiés)

- 2 JCTb
- 1 SIAM Discrete Mathematics
- 1 SIAM Computing
- 1 ICALP

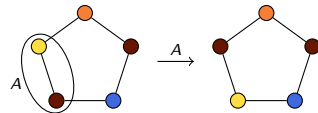
## Thèmes récurrents

- Coloration de graphe
- Reconfiguration



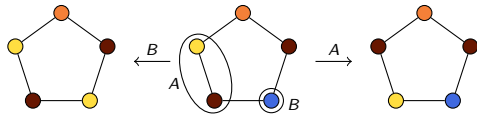
## Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



## Changements de Kempe (1879)

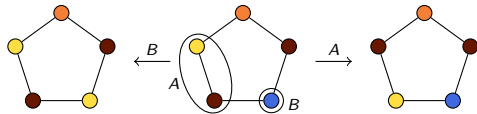
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



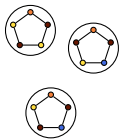
# Reconfiguration : Recoloration par Kempe

## Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



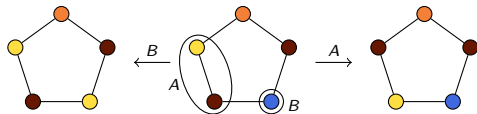
À quoi ressemble l'espace des colorations ?



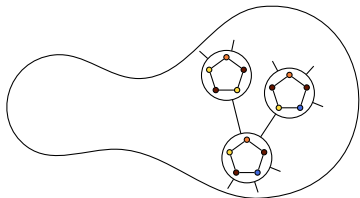
# Reconfiguration : Recoloration par Kempe

## Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale

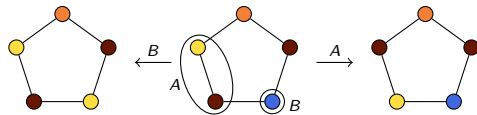
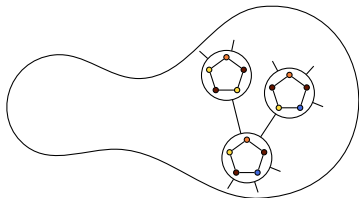


À quoi ressemble l'espace des colorations ?



## Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



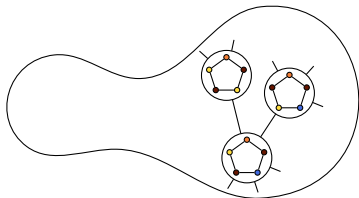
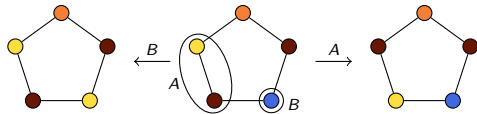
À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

# Reconfiguration : Recoloration par Kempe

## Changements de Kempe (1879)

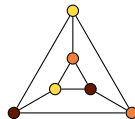
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

Coloration gelée

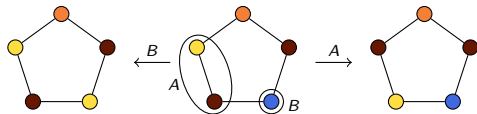


⇒ Non



## Changements de Kempe (1879)

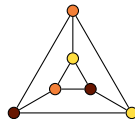
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



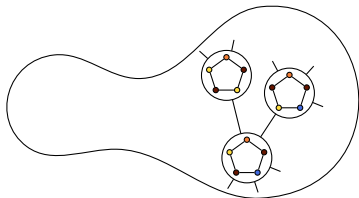
À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

Coloration gelée

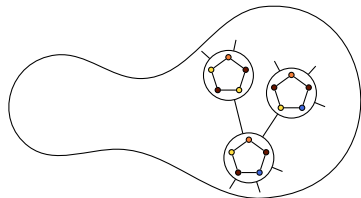
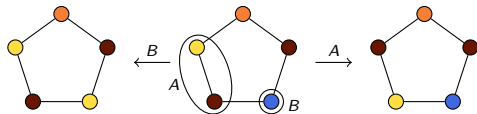


⇒ Non



## Changements de Kempe (1879)

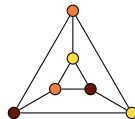
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

Coloration gelée



⇒ Non

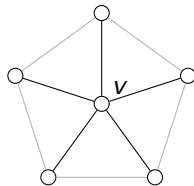
- Recherche d'une coloration optimale

## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5

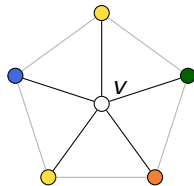


## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5

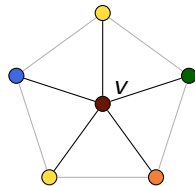


## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5

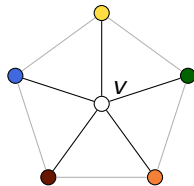


## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5

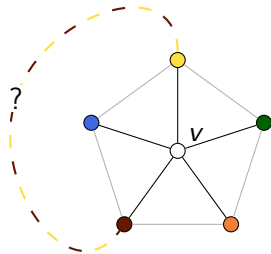


## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5

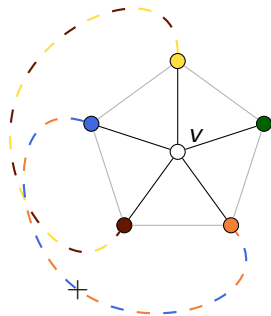


## Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet  $v$  de degré au plus 5





## Coloration

Planaire

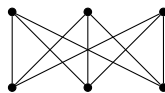
4

Appel et Haken (1976)

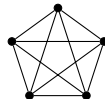
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire

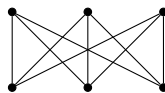
4

Appel et Haken (1976)

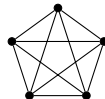
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire

4

Appel et Haken (1976)

Sans  $K_5$ -mineur

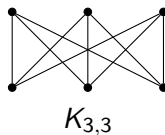
4

Wagner (1937)

# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



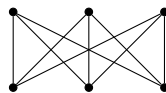
Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans $K_5$ -mineur	4	Wagner (1937)
Sans $K_t$ -mineur	$t - 1$ ?	Hadwiger (1943)

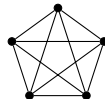
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans $K_5$ -mineur	4	Wagner (1937)
Sans $K_t$ -mineur	$t - 1$ ?	Hadwiger (1943)

Recoloration par Kempe

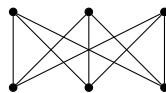
5

Meyniel (1978)

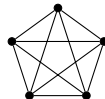
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans $K_5$ -mineur	4	Wagner (1937)
Sans $K_t$ -mineur	$t - 1$ ?	Hadwiger (1943)

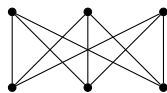
Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)

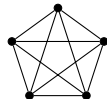
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans $K_5$ -mineur	4	Wagner (1937)
Sans $K_t$ -mineur	$t - 1$ ?	Hadwiger (1943)

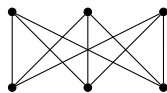
Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)
$t$ ?	Las Vergnas et Meyniel (1981)

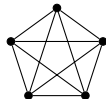
# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire  $\Leftrightarrow$  pas de  $K_{3,3}$  ni de  $K_5$ -mineur



$K_{3,3}$



$K_5$

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans $K_5$ -mineur	4	Wagner (1937)
Sans $K_t$ -mineur	$t - 1$ ?	Hadwiger (1943)

Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)
$t$ ?	Las Vergnas et Meyniel (1981)

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Faux : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $t$  suffisamment grand, il existe  $G$  sans  $K_t$ -mineur et non  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -recolorable



# *A recolouring version of Hadwiger's conjecture* (JCTb 2024)

Bonamy, Heinrich, **L-D**, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

# *A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)*

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

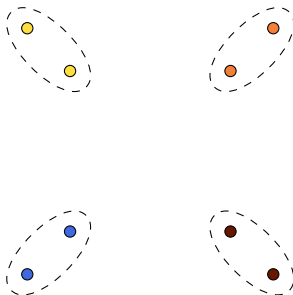
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée



# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

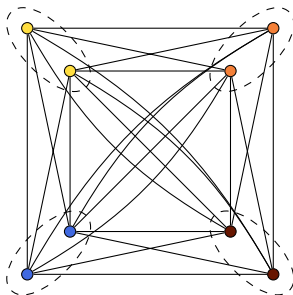
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée



# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

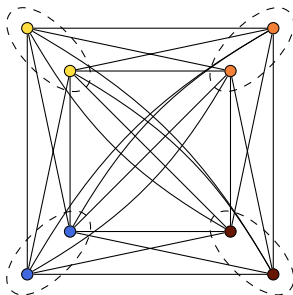
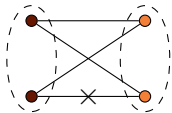
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée
- “sparsification” aléatoire :



# A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

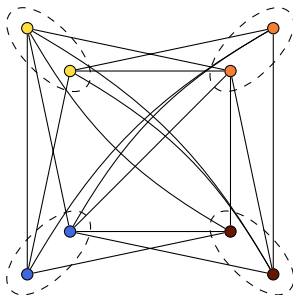
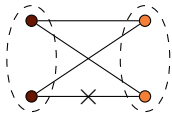
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans  $K_t$ -mineur avec une  $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée
- “sparsification” aléatoire :



$\rightsquigarrow$  baisse la densité :

- coloration reste gelée
- enlève les  $K_t$ -mineurs

## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant



## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?

## Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

## Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+  
Delecroix, L-D. 2025+

## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences de reconfiguration ?

## Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

## Connexité

## Diamètre

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+  
Delecroix, L-D. 2025+

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024  
Deschamps et al. SIDMA 2023  
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024  
Gomes et al. JCSS 2024

## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences de reconfiguration ?
- Échantillonnage aléatoire

## Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

## Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+  
Delecroix, L-D. 2025+

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024  
Deschamps et al. SIDMA 2023  
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024  
Gomes et al. JCSS 2024

travaux en cours

## Marche aléatoire

## Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

## À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences de reconfiguration ?
- Échantillonnage aléatoire
- Énumération via code de Gray ?

## Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

## Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+  
Delecroix, L-D. 2025+

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024  
Deschamps et al. SIDMA 2023  
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024  
Gomes et al. JCSS 2024

travaux en cours

1 article en cours de rédaction

## Marche aléatoire Hamiltonicité

## Principe

- Condition suffisante assurant une propriété  $P$

## Dirac (1952)

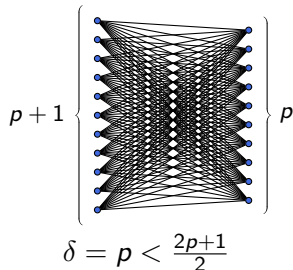
Tout graphe de degré min  $\delta \geq \frac{n}{2}$  a un cycle Hamiltonien

## Principe

- Condition suffisante assurant une propriété  $P$
- Étude des cas pathologiques

## Dirac (1952)

Tout graphe de degré min  $\delta \geq \frac{n}{2}$  a un cycle Hamiltonien



## Principe

- Condition suffisante assurant une propriété  $P$
- Étude des cas pathologiques

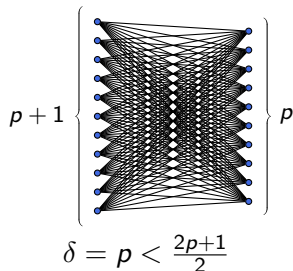
## Dirac (1952)

Tout graphe de degré min  $\delta \geq \frac{n}{2}$  a un cycle Hamiltonien

## Phénomène de supersaturation

Au dessus du seuil :

- très grand nombre de solutions de  $P$  (ex :  $\frac{n!}{2^n}$  cycles Hamiltoniens)
- solutions “uniformément réparties” : un sous-graphe aléatoire vérifie encore  $P$  avec grande probabilité



## Principe

- Condition suffisante assurant une propriété  $P$
- Étude des cas pathologiques

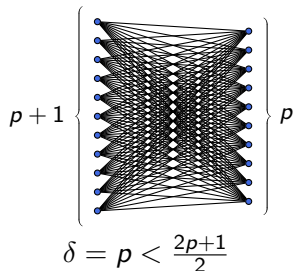
## Dirac (1952)

Tout graphe de degré min  $\delta \geq \frac{n}{2}$  a un cycle Hamiltonien

## Phénomène de supersaturation

Au dessus du seuil :

- très grand nombre de solutions de  $P$  (ex :  $\frac{n!}{2^n}$  cycles Hamiltoniens)
- solutions “uniformément réparties” : un sous-graphe aléatoire vérifie encore  $P$  avec grande probabilité



Bastide, L-D, Müyesser. 2025+



# Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

## Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?

Anastos, Frieze. RSA 2020  
Bousquet et.al. IGT 2025  
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

# Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

## Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?

Anastos, Frieze. RSA 2020

Bousquet et.al. IGT 2025

Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

# Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

## Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?
- Cas pathologiques pour la reconfiguration ?

Anastos, Frieze. RSA 2020  
Bousquet et.al. IGT 2025  
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

# Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

## Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?
- Cas pathologiques pour la reconfiguration ?

Anastos, Frieze. RSA 2020  
Bousquet et.al. IGT 2025  
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

## Objectif 2 : Obstructions à un espace d'états connexe

- Principales obstructions connues = configurations gelées
- Si  $P \neq NP/PSPACE$ , il existe d'autres obstructions. Lesquelles ?

### Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

### Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

### Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

## Axe 2 : Reconfiguration et probabilités

### Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

### Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

Recoloration de graphes sans grandes cliques induites  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025

### Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

### Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

- ~> Trouver des preuves constructives via la reconfiguration
- ~> Adapter la méthode probabiliste à la reconfiguration
- ~> Nouvelles obstructions

Recoloration de graphes sans grandes cliques induites  
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025



## G-SCOP (Grenoble)

Louis Esperet, Aurélie Lagoutte, Moritz Mühlenthaler, Alantha Newman, András Sebő et Zoltán Szigeti

## LIRIS (Villeurbanne)

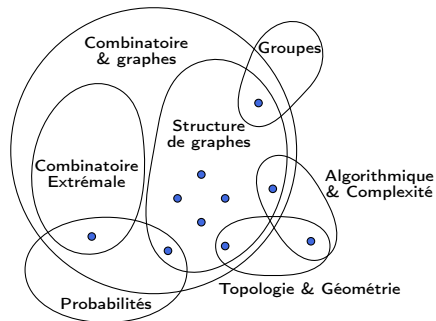
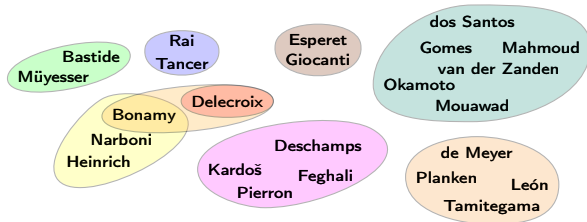
Nicolas Bousquet, Laurent Feuilloley et Théo Pierron

## LIP (Lyon)

Édouard Bonnet, Carl Feghali, Jean-Florent Raymond, Stéphan Thomassé, Nicolas Trotignon et Rémi Watrigant

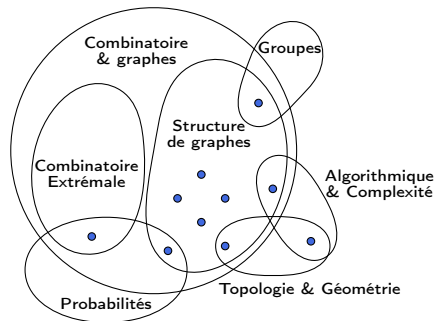
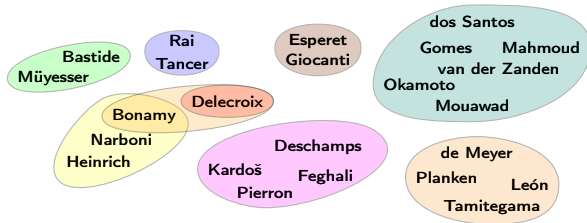
# Curriculum vitae (thèse en 2024)

- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



# Curriculum vitae (thèse en 2024)

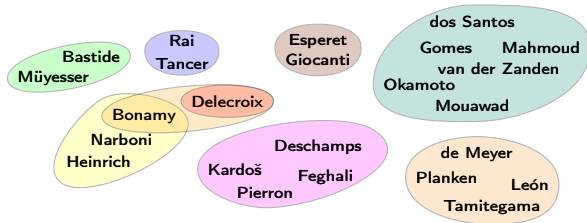
- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



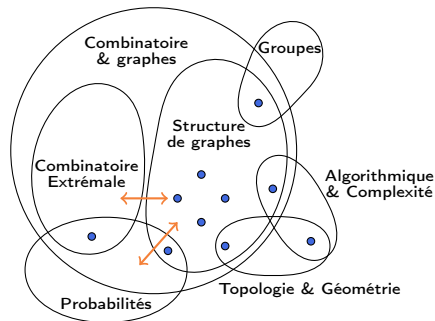
- co-organisation du séminaire d'équipe
- organisation workshop (Édimbourg 2026)
- 2 (co)-encadrements d'étudiants

# Curriculum vitae (thèse en 2024)

- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



- co-organisation du séminaire d'équipe
- organisation workshop (Édimbourg 2026)
- 2 (co)-encadrements d'étudiants

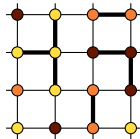


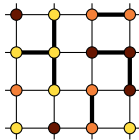
## I. Reconfiguration extrême

1. Supersaturation via reconfiguration
2. Obstructions à la reconfiguration

## II. Reconfiguration et probabilités

3. Échantillonnage aléatoire
4. Preuves probabilistes

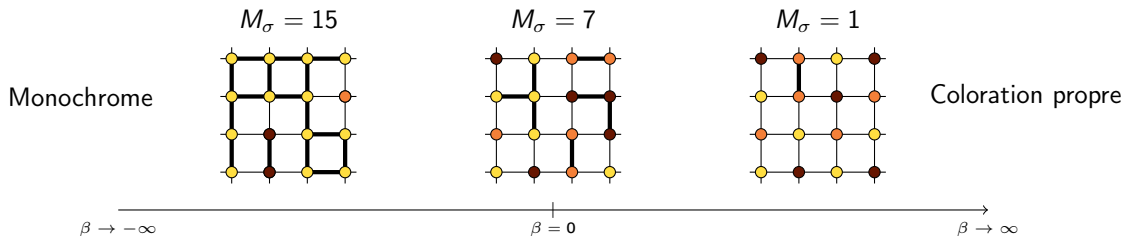




## Modèle de Potts

$\mathbb{P}(\sigma)$  proportionnelle à  $e^{-\beta M_\sigma}$

# Physique statistique : modèle de Potts

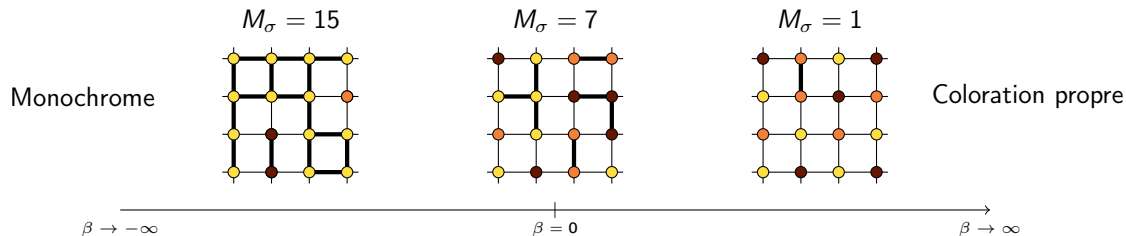


## Modèle de Potts

$\mathbb{P}(\sigma)$  proportionnelle à  $e^{-\beta M_\sigma}$

- Régime ferromagnétique si  $\beta < 0$
- Régime antiferromagnétique si  $\beta > 0$

# Physique statistique : modèle de Potts



## Modèle de Potts

$\mathbb{P}(\sigma)$  proportionnelle à  $e^{-\beta M_\sigma}$

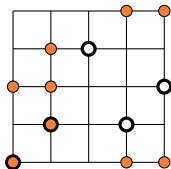
- Régime ferromagnétique si  $\beta < 0$
- Régime antiferromagnétique si  $\beta > 0$

## Échantillonnage aléatoire

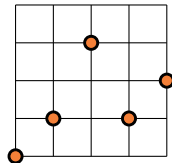
- Glauber dynamics
- Wang, Swendsen, Kotecký dynamics



Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023

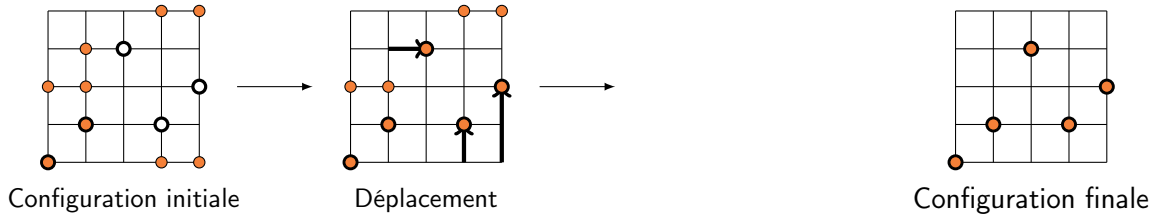


Configuration initiale



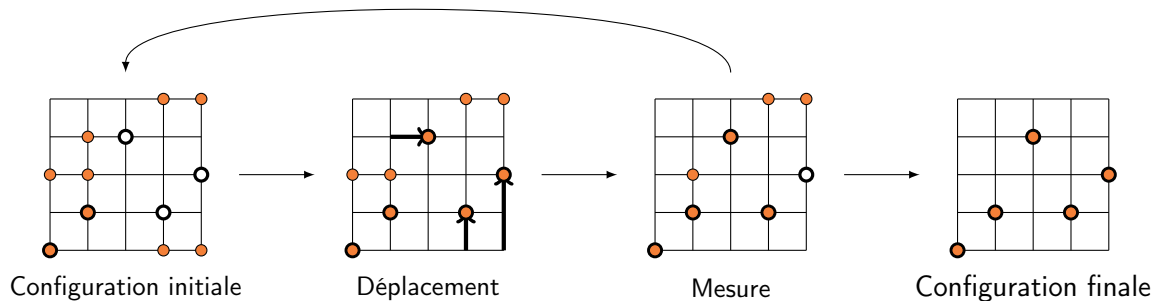
Configuration finale

Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023



- Déplacements des atomes un par un, sans se rencontrer

Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023



- Déplacements des atomes un par un, sans se rencontrer
- Les atomes peuvent être perdus entre deux mesures