

Reconfiguration, probabilités et transitions de phase

Clément Legrand-Duchesne

14 mars 2025

Parcours

2024-2025 Postdoc à Jagiellonian University, Cracovie

2021-2024 Thèse à Bordeaux avec Marthe Bonamy et Vincent Delecroix

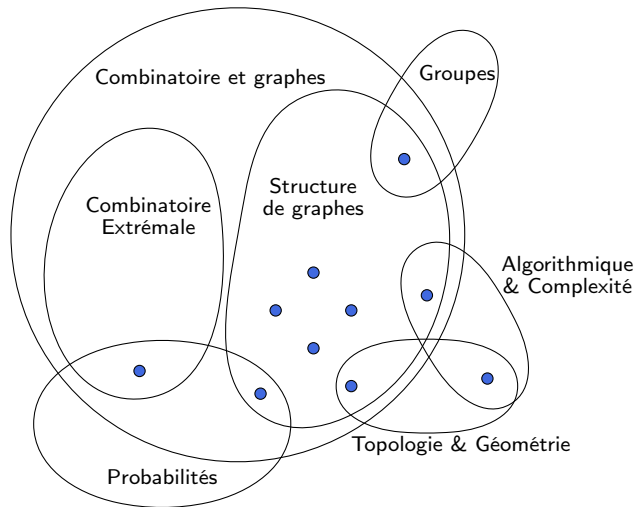
2017-2021 ENS de Rennes + Agrégation

10 articles (7 publiés)

- 2 JCTb
- 1 SIAM Discrete Mathematics
- 1 SIAM Computing
- 1 ICALP

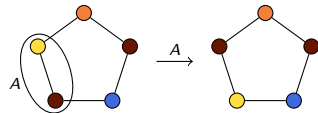
Thèmes récurrents

- Coloration de graphe
- Reconfiguration



Changements de Kempe (1879)

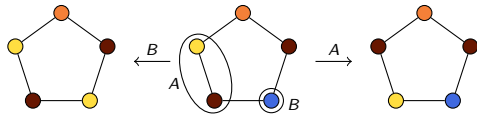
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



Reconfiguration : Recoloration par Kempe

Changements de Kempe (1879)

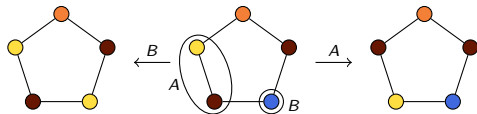
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



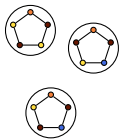
Reconfiguration : Recoloration par Kempe

Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



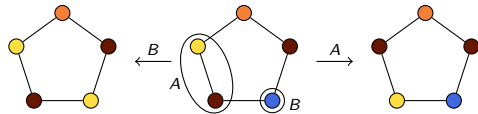
À quoi ressemble l'espace des colorations ?



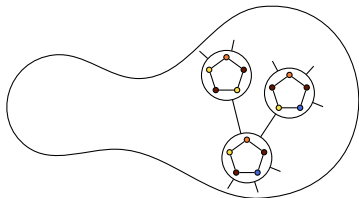
Reconfiguration : Recoloration par Kempe

Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



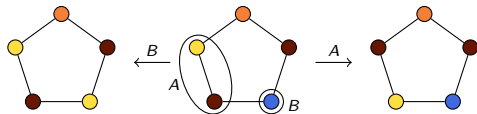
À quoi ressemble l'espace des colorations ?



Reconfiguration : Recoloration par Kempe

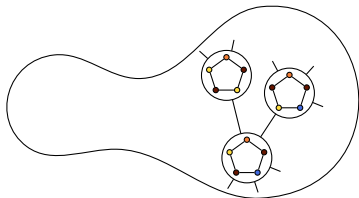
Changements de Kempe (1879)

Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



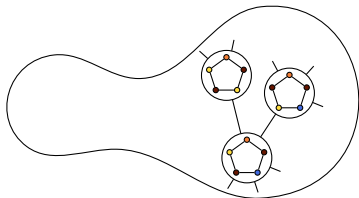
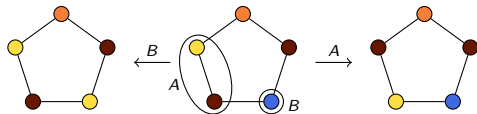
À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?



Changements de Kempe (1879)

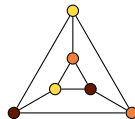
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

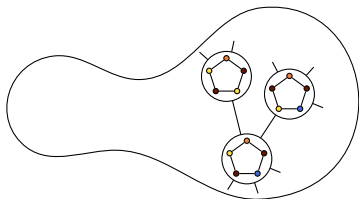
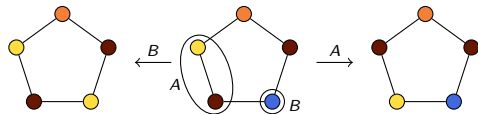
Coloration gelée



⇒ Non

Changements de Kempe (1879)

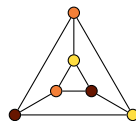
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

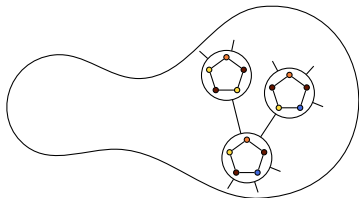
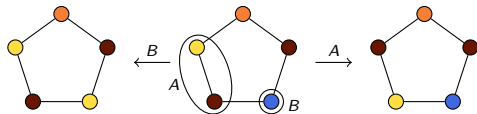
Coloration gelée



⇒ Non

Changements de Kempe (1879)

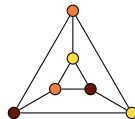
Inverser les couleurs dans une composante bicolore maximale



À quoi ressemble l'espace des colorations ?

- Est-ce que toutes les colorations sont équivalentes ?

Coloration gelée



⇒ Non

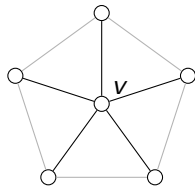
- Recherche d'une coloration optimale

Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5

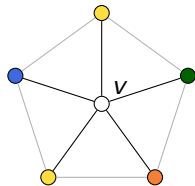


Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5

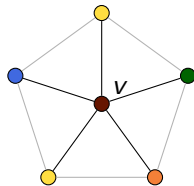


Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5

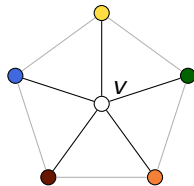


Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5

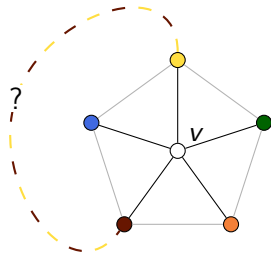


Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5

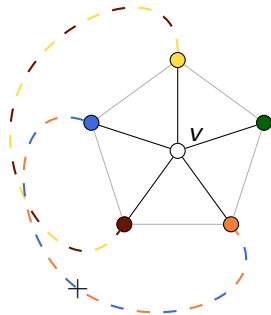


Théorème des 5 couleurs

Tout graphe planaire est 5-colorable

Preuve :

- Par récurrence
- Il existe un sommet v de degré au plus 5



Coloration

Planaire

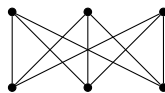
4

Appel et Haken (1976)

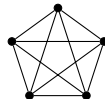
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire

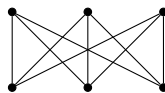
4

Appel et Haken (1976)

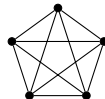
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire

4

Appel et Haken (1976)

Sans K_5 -mineur

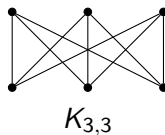
4

Wagner (1937)

A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



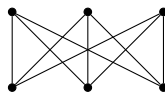
Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans K_5 -mineur	4	Wagner (1937)
Sans K_t -mineur	$t - 1$?	Hadwiger (1943)

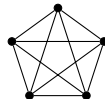
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans K_5 -mineur	4	Wagner (1937)
Sans K_t -mineur	$t - 1$?	Hadwiger (1943)

Recoloration par Kempe

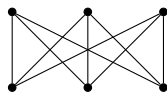
5

Meyniel (1978)

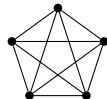
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans K_5 -mineur	4	Wagner (1937)
Sans K_t -mineur	$t - 1$?	Hadwiger (1943)

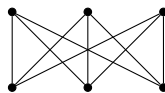
Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)

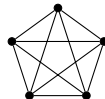
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans K_5 -mineur	4	Wagner (1937)
Sans K_t -mineur	$t - 1$?	Hadwiger (1943)

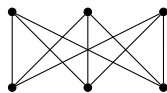
Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)
t ?	Las Vergnas et Meyniel (1981)

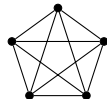
A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Wagner/Kuratowski (1937)

Planaire \Leftrightarrow pas de $K_{3,3}$ ni de K_5 -mineur



$K_{3,3}$



K_5

Coloration

Planaire	4	Appel et Haken (1976)
Sans K_5 -mineur	4	Wagner (1937)
Sans K_t -mineur	$t - 1$?	Hadwiger (1943)

Recoloration par Kempe

5	Meyniel (1978)
5	Las Vergnas et Meyniel (1981)
t ?	Las Vergnas et Meyniel (1981)

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Faux : Pour tout $\varepsilon > 0$, pour t suffisamment grand, il existe G sans K_t -mineur et non $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -recolorable

A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Bonamy, Heinrich, **L-D**, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

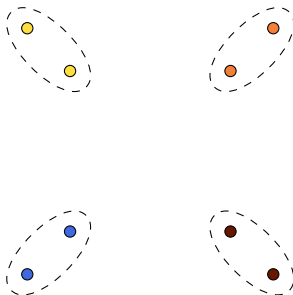
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée



A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

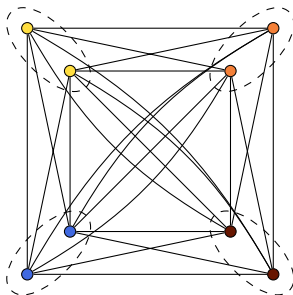
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée



A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

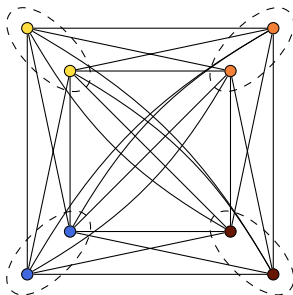
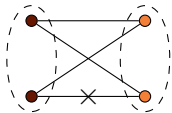
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée
- “sparsification” aléatoire :



A recolouring version of Hadwiger's conjecture (JCTb 2024)

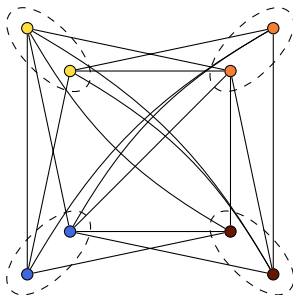
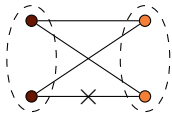
Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni (JCTb 2024)

Graphe aléatoire, sans K_t -mineur avec une $(\frac{3}{2} - \varepsilon)t$ -coloration gelée

peu de structure

structuré, peu dense

- coloration gelée
- “sparsification” aléatoire :



\rightsquigarrow baisse la densité :

- coloration reste gelée
- enlève les K_t -mineurs

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?

Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+
Delecroix, L-D. 2025+

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences reconfiguration ?

Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+
Delecroix, L-D. 2025+

Diamètre

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024
Deschamps et al. SIDMA 2023
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024
Gomes et al. JCSS 2024

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences reconfiguration ?
- Échantillonnage aléatoire

Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+
Delecroix, L-D. 2025+

Diamètre

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024
Deschamps et al. SIDMA 2023
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024
Gomes et al. JCSS 2024

Marche aléatoire

travaux en cours

Exemples :

- Colorations d'un graphe
- Rubik's Cube
- Allocation de tâches
- Plongements d'un nœud
- Surfaces à petits carreaux

À quoi ressemble l'espace d'états ?

- Équivalence des configurations ?
- Longueur des séquences reconfiguration ?
- Échantillonnage aléatoire
- Énumération via code de Gray ?

Applications

- Physique statistique : Modèle d'Ising/Potts
- Recherche opérationnelle
- Quantique
- Outil de preuve puissant

Connexité

Bonamy, Heinrich, L-D, Narboni. JCTb 2024
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025+
Delecroix, L-D. 2025+

Diamètre

Bonamy, Delecroix, L-D. EuJC 2024
Deschamps et al. SIDMA 2023
L-D, Rai, Tancer. SICOMP 2024
Gomes et al. JCSS 2024

travaux en cours

Marche aléatoire

Hamiltonicité

1 article en cours de rédaction

Principe

- Condition suffisante assurant une propriété P

Dirac (1952)

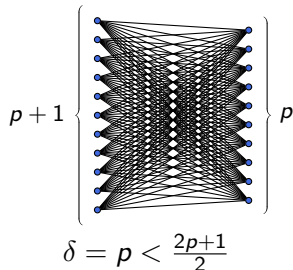
Tout graphe de degré min $\delta \geq \frac{n}{2}$ a un cycle Hamiltonien

Principe

- Condition suffisante assurant une propriété P
- Étude des cas pathologiques

Dirac (1952)

Tout graphe de degré min $\delta \geq \frac{n}{2}$ a un cycle Hamiltonien



Principe

- Condition suffisante assurant une propriété P
- Étude des cas pathologiques

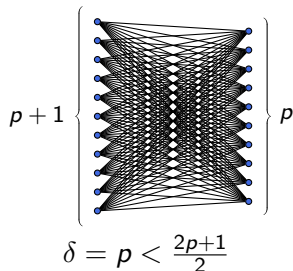
Dirac (1952)

Tout graphe de degré min $\delta \geq \frac{n}{2}$ a un cycle Hamiltonien

Phénomène de supersaturation

Au dessus du seuil :

- très grand nombre de solutions de P (ex : $\frac{n!}{2^n}$ cycles Hamiltoniens)
- solutions “uniformément réparties” : un sous-graphe aléatoire vérifie encore P avec grande probabilité



Principe

- Condition suffisante assurant une propriété P
- Étude des cas pathologiques

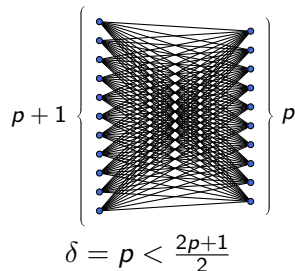
Dirac (1952)

Tout graphe de degré min $\delta \geq \frac{n}{2}$ a un cycle Hamiltonien

Phénomène de supersaturation

Au dessus du seuil :

- très grand nombre de solutions de P (ex : $\frac{n!}{2^n}$ cycles Hamiltoniens)
- solutions “uniformément réparties” : un sous-graphe aléatoire vérifie encore P avec grande probabilité



Bastide, L-D, Müyesser. 2025+

Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?

Anastos, Frieze. RSA 2020
Bousquet et.al. IGT 2025
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?

Anastos, Frieze. RSA 2020
Bousquet et.al. IGT 2025
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?
- Cas pathologiques pour la reconfiguration ?

Anastos, Frieze. RSA 2020

Bousquet et.al. IGT 2025

Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

Axe 1 : Transition de phase de l'espace d'état

Objectif 1 : Interprétation de la supersaturation via la reconfiguration

- Graphe de reconfiguration des solutions (presque) connexe ?
- Cas pathologiques pour la reconfiguration ?

Anastos, Frieze. RSA 2020
Bousquet et.al. IGT 2025
Buys, Kang, van den Heuvel. 2025+

- Problèmes de Dirac
- Problèmes de Turán

Objectif 2 : Obstructions à un espace d'états connexe

- Principales obstructions connues = configurations gelées
- Si $P \neq NP/PSPACE$, il existe d'autres obstructions. Lesquelles ?

Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

Axe 2 : Reconfiguration et probabilités

Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

Recoloration de graphes sans grandes cliques induites
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025

Objectif 3 : Échantillonnage aléatoire

Méthodes d'analyse pour chaînes de Markov avec opération non-locale

- Méandres
- Colorations d'arêtes via Kempe
- Surfaces à petits carreaux
- Coloration via Kempe

Objectif 4 : Reconfiguration et preuves probabilistes

- Preuves probabilistes s'adaptent mal à la reconfiguration
- Robustesse : peu de chances de donner des configurations gelées

- ~> Trouver des preuves constructives via la reconfiguration
- ~> Adapter la méthode probabiliste à la reconfiguration
- ~> Nouvelles obstructions

Recoloration de graphes sans grandes cliques induites
De Meyer, L-D, León, Planken, Tamitegama. 2025

G-SCOP (Grenoble)

Louis Esperet, Aurélie Lagoutte, Moritz Mühlenthaler, Alantha Newman, András Sebő et Zoltán Szigeti

LIRIS (Villeurbanne)

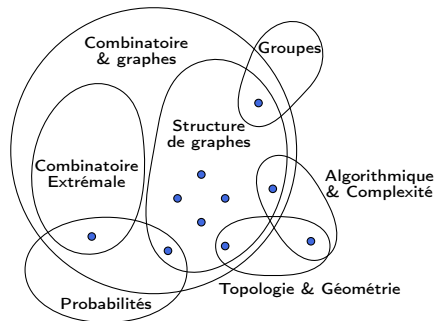
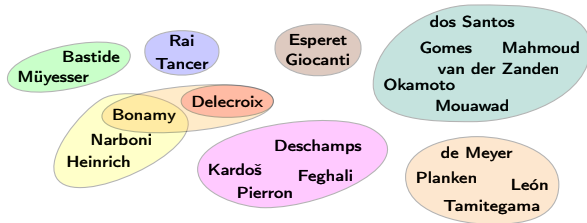
Nicolas Bousquet, Laurent Feuilloley et Théo Pierron

LIP (Lyon)

Édouard Bonnet, Carl Feghali, Jean-Florent Raymond, Stéphan Thomassé, Nicolas Trotignon et Rémi Watrigant

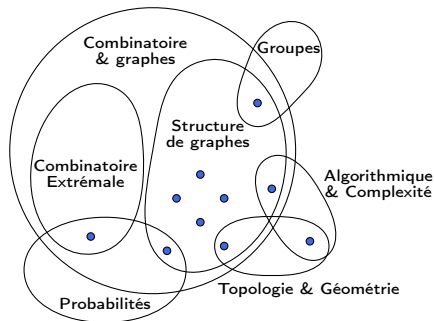
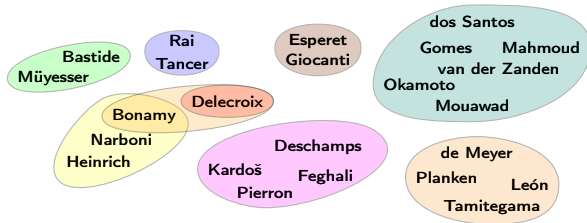
Curriculum vitae (thèse en 2024)

- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



Curriculum vitae (thèse en 2024)

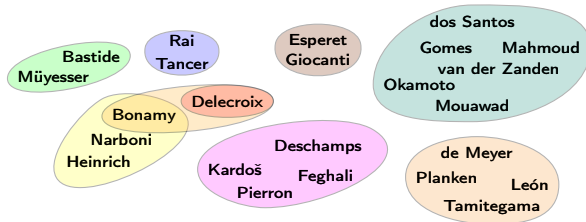
- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



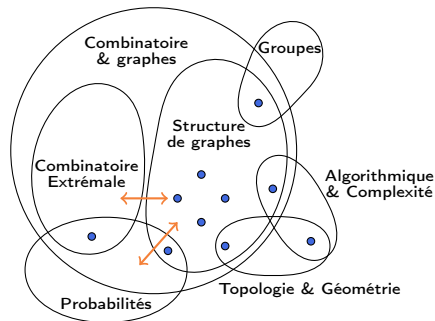
- co-organisation du séminaire d'équipe
- organisation workshop (Édimbourg 2026)
- 2 (co)-encadrements d'étudiants

Curriculum vitae (thèse en 2024)

- 10 articles (dont 2 JCTb, SIDMA, SICOMP, ICALP)
- 33 exposés
- 4 mois de visites de recherche (2.5 à l'étranger)
- 24 coauteur·e·s (12 à l'étranger, 10 juniors)



- co-organisation du séminaire d'équipe
- organisation workshop (Édimbourg 2026)
- 2 (co)-encadrements d'étudiants

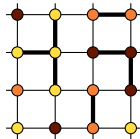


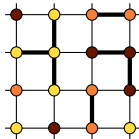
I. Reconfiguration extrême

1. Supersaturation via reconfiguration
2. Obstructions à la reconfiguration

II. Reconfiguration et probabilités

3. Échantillonnage aléatoire
4. Preuves probabilistes

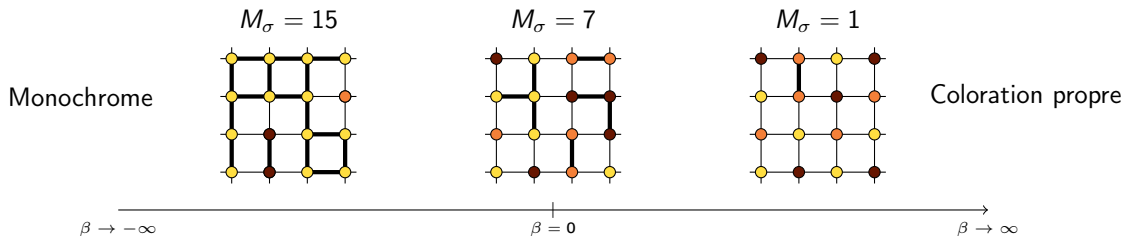




Modèle de Potts

$\mathbb{P}(\sigma)$ proportionnelle à $e^{-\beta M_\sigma}$

Physique statistique : modèle de Potts

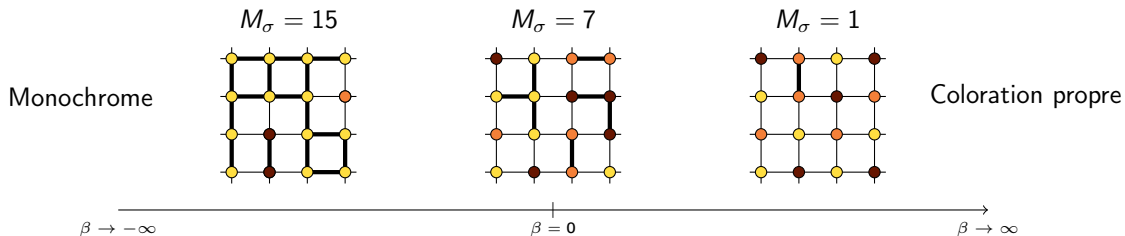


Modèle de Potts

$\mathbb{P}(\sigma)$ proportionnelle à $e^{-\beta M_\sigma}$

- Régime ferromagnétique si $\beta < 0$
- Régime antiferromagnétique si $\beta > 0$

Physique statistique : modèle de Potts



Modèle de Potts

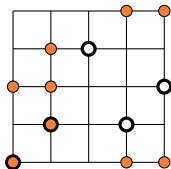
$\mathbb{P}(\sigma)$ proportionnelle à $e^{-\beta M_\sigma}$

- Régime ferromagnétique si $\beta < 0$
- Régime antiferromagnétique si $\beta > 0$

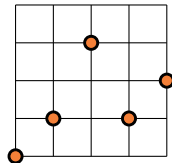
Échantillonnage aléatoire

- Glauber dynamics
- Wang, Swendsen, Kotecký dynamics

Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023

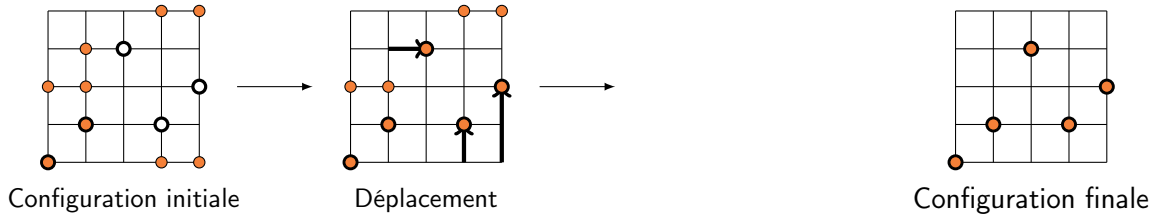


Configuration initiale



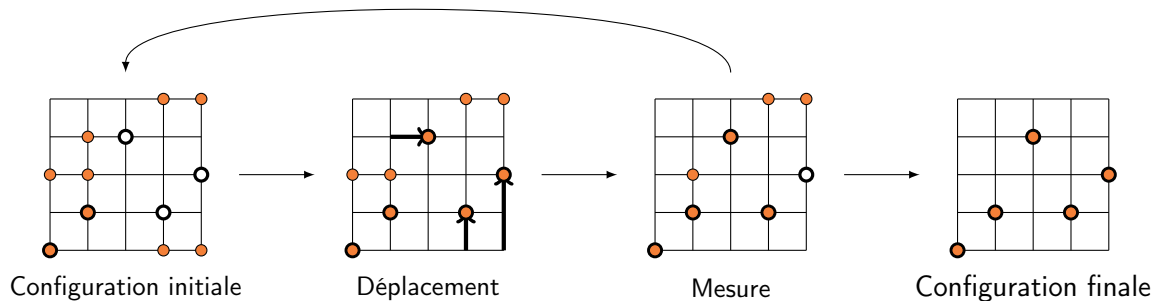
Configuration finale

Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023



- Déplacements des atomes un par un, sans se rencontrer

Cimring, El Sabeh, Bacvanski, Maaz, El Hajj, Nishimura, Mouawad, Cooper. 2023



- Déplacements des atomes un par un, sans se rencontrer
- Les atomes peuvent être perdus entre deux mesures