Projet 1: Pavage de Penrose et Tours de Hanoi

Marco Freire, Clément Legrand-Duchesne

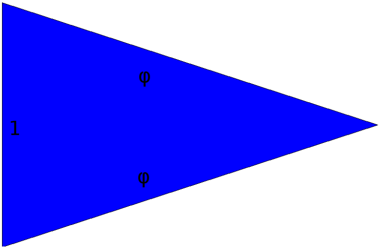
ENS de Rennes, Département Informatique 1A

29 septembre 2017

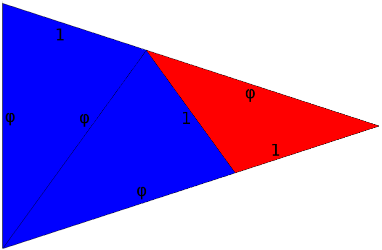
Plan

1. Pavage de Penrose
   - Principe
   - Implémentation
   - Améliorations
2. Tours de Hanoi
   - Principe
   - Implémentation
   - Améliorations

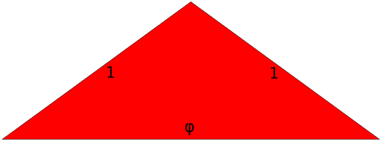
Principe du pavage



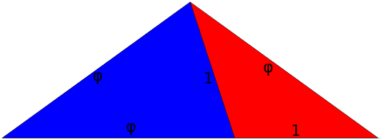
(a) Triangle d'or aigu



(b) Découpe en trois triangles d'or



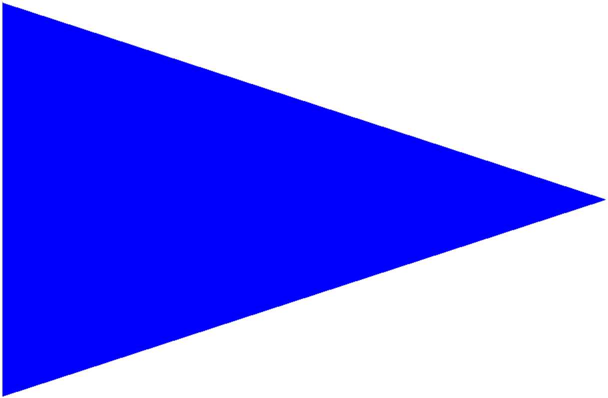
(c) Triangle d'or obtus



(d) Découpe en deux triangles d'or

Un premier algorithme

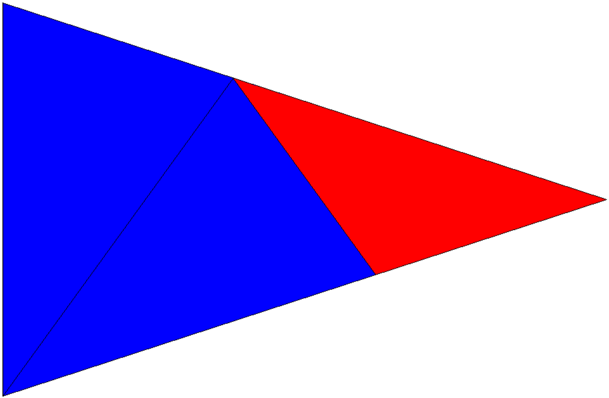
Découpe récursive en partant d'un grand triangle initial.



Execution de l'algorithme

Un premier algorithme

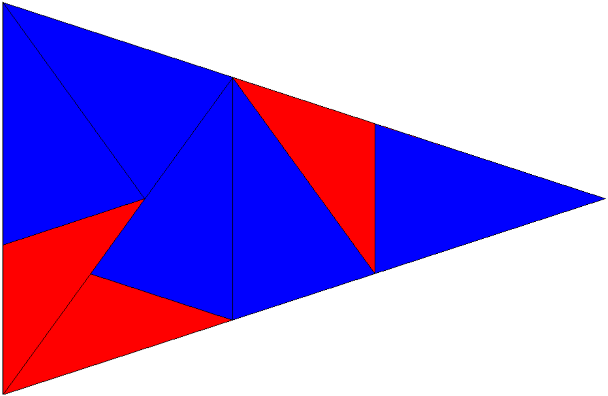
Découpe récursive en partant d'un grand triangle initial.



Execution de l'algorithme

Un premier algorithme

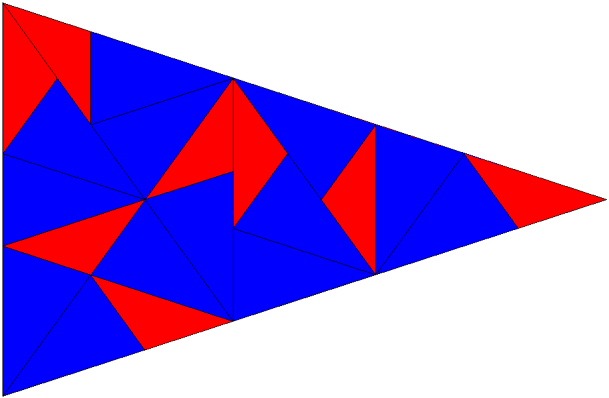
Découpe récursive en partant d'un grand triangle initial.



Execution de l'algorithme

Un premier algorithme

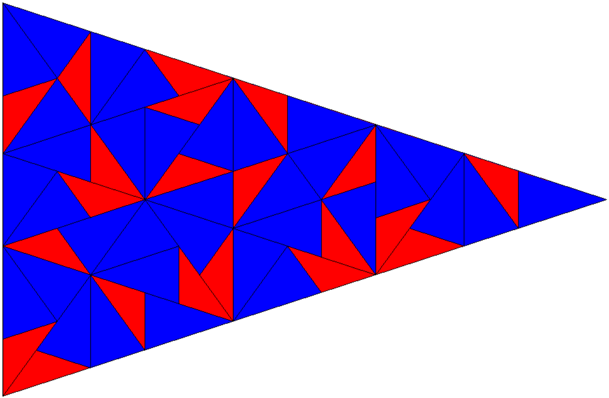
Découpe récursive en partant d'un grand triangle initial.



Execution de l'algorithme

Un premier algorithme

Découpe récursive en partant d'un grand triangle initial.



Execution de l'algorithme

Limite du premier algorithme

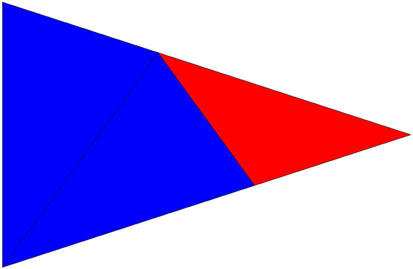
Algorithme assez limité :

- parcours en profondeur de l'arbre des découpes ;
- chaque côté des triangles est tracé deux fois ;
- le remplissage des triangles efface les bordures si celles ci ont été tracées avant.

Travail sur des flottants jusqu'à l'affichage : évite les problèmes d'arrondis.

Tracé unique des côtés

Afin de ne tracer qu'une fois chaque coté du triangle, on ne dessine que les séparations internes à chaque nouvelle génération.



Affichage successif de chacune des générations

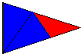
Parcours largeur :

- permet d'afficher chaque génération successivement sans tout recalculer ;
- complexité mémoire importante (nécessite une structure file) ;
- impossibilité de colorier les triangles à chaque génération sans effacer les cotés de ceux dessinés lors de la précédente génération.

Plusieurs parcours profondeur successifs :

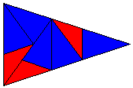
- complexité mémoire faible mais algorithme deux fois plus long ;
- Possibilité de colorier les triangles et de ne tracer leurs côtés qu'une seule fois ;
- homothétie plus facilement implémentable.

Version definitive avec homthétie



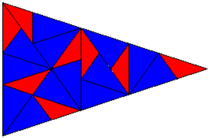
Execution de l'algorithme

Version definitive avec homthétie



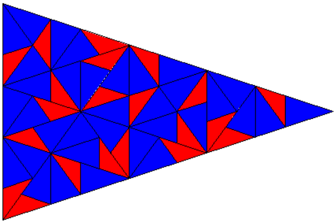
Execution de l'algorithme

Version definitive avec homthétie



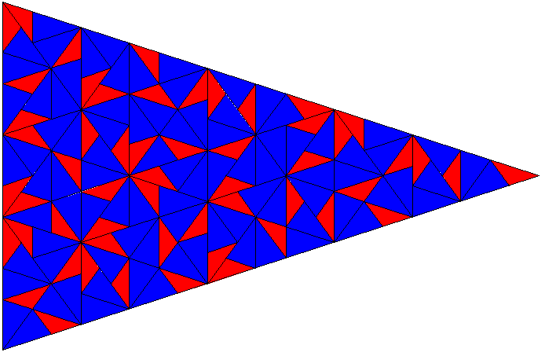
Execution de l'algorithme

Version definitive avec homthétie



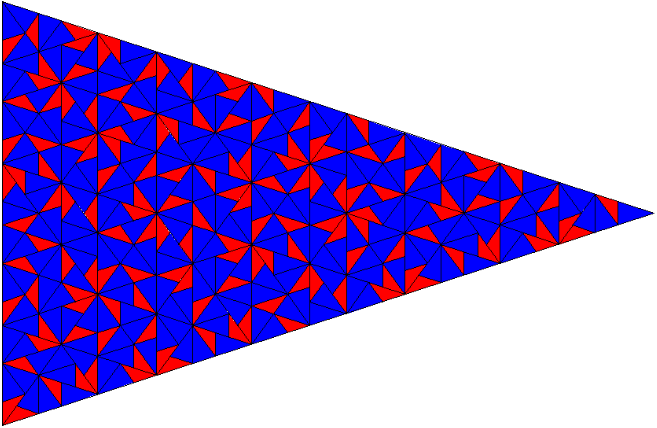
Execution de l'algorithme

Version definitive avec homthétie



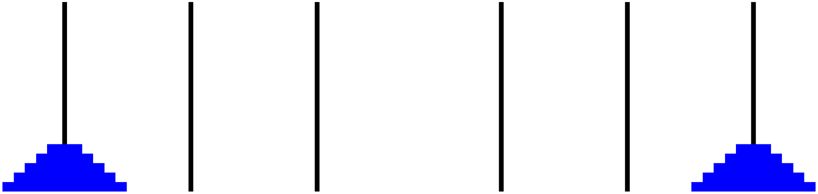
Execution de l'algorithme

Version definitive avec homthétie



Execution de l'algorithme

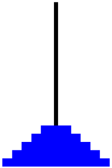
Principe du jeu



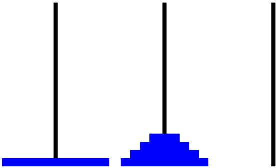
(a) État initial (b) État final

Le joueur doit déplacer les n disques initiaux du premier piquet au dernier en réalisant un seul mouvement à la fois, et avec la contrainte suivante : aucun disque ne peut être empilé à aucun moment sur un disque de taille inférieure.

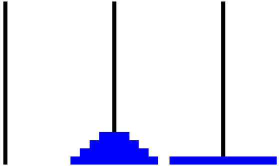
Algorithme simple



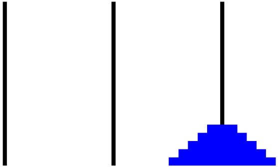
(a) État initial



(b) Étape 1



(c) Étape 2



(d) État final

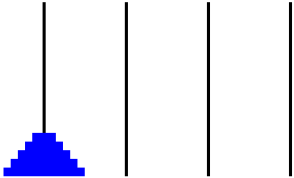
Calcul du nombre de déplacements

Initialisation $M(0) = 1$

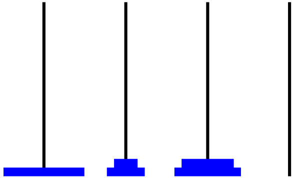
Relation de récurrence $M(n) = 2M(n-1) + 1$

Relation générale $M(n) = 2^n - 1$

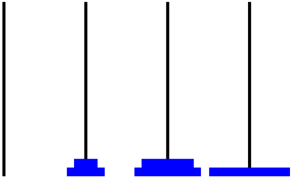
Algorithme généralisé



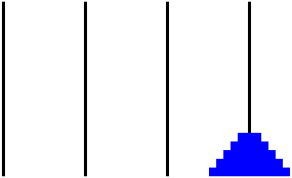
(a) État initial



(b) Étape 1



(c) Étape 2



(d) État final

Choix et extensions

La situation globale est représentée par un tableau de piles.

Extensions créées :

- affichage graphique ;
- généralisation du problème à p piquets.

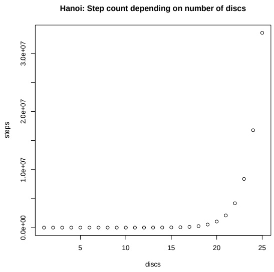
Problèmes rencontrés

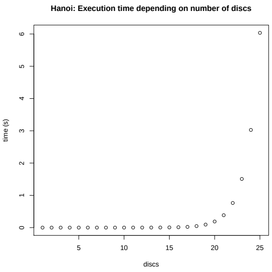
Différents problèmes :

1. premier algorithme non-généralisable ;
2. généralisation de l'affichage.

Algorithme simple

Le nombre de déplacements de disques effectués pas l'algorithme dans le cas où il n'y a que trois piquets est optimal.

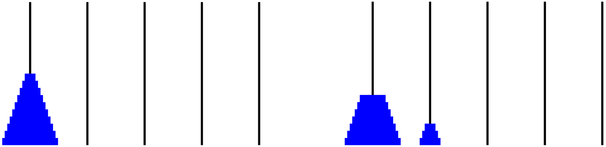




Les résultats expérimentaux sont en accord avec le calcul théorique :le nombre de mouvements le temps d'exécution sont fonction exponentielle du nombre initial de disques.

Algorithme généralisé

À ce jour, la solution optimale des Tours de Hanoi à plus de quatre piquets est un problème ouvert.
L'algorithme ici utilisé n'utilise pas la totalité de piquets libres.



(a) État 1 (b) État 2

Dans cette situation, pour passer d'un état à l'autre, uniquement le dernier piquet est utilisé pour stocker des disques, alors que les autres pourraient être utilisés de façon à effectuer moins de mouvements.