step 1. 微分方程：

$$h'(t) = Ah(t) + Bx(t)$$

為一階線性非齊次微分方程

$h(t)$ 為狀態向量，A：系統矩陣

B：輸入矩陣，$x(t)$：輸入信號

先求齊次方程：$h'(t) = Ah(t)$

此為常係數線性微分方程，

一般解為 $h_{homogeneous}(t) = e^{At}h(0)$

其中 e^{At} 為矩陣指數函數，$h(0)$ 為初始條件

e^{At} 可用泰勒展开式計算：

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

求非齊次方程：

利用變參數法：

假設解為 $h(t) = e^{At} z(t)$

其中 $z(t)$ 為待定的變參數函數.

將假設解代入原微分方程：

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(e^{At} z(t))$$

$$= Ae^{At} z(t) + e^{At} z'(t)$$

$$= Ah(t) + Bx(t)$$

代入 $h(t) = e^{At} z(t)$

化簡後得到：$e^{At} z'(t) = Bx(t)$

解出 $z'(t) = e^{-At} Bx(t)$

對 $z'(t)$ 做積分：

$$\int_0^t z'(t)\,dt = z(t) - z(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Bx(\tau)\,d\tau$$

考慮 $h(0) = e^0 \cdot z(0) = z(0)$，可得：

$$z(t) = h(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bx(\tau)\,d\tau$$

將 $z(t)$ 代回 $h(t) = e^{At} z(t)$

$$h(t) = e^{At}\left[h(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bx(\tau)\,d\tau \right]$$

利用變數替換：

設 $u = t - \tau$，当 $\tau = 0$，$u = t$

当 $\tau = t$，$u = 0$

$\because \tau = t - u$，$d\tau = -du$

積分變成：

$$h(t) = e^{At}h(0) + e^{At}\int_t^0 e^{-A(t-u)} Bx(t-u)(-du)$$

$$= e^{At}h(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A(t-u)} Bx(t-u)\,du$$

進一步簡化： $e^{At} \cdot e^{-A(t-u)} = e^{A[t-t+u]}$

$$h(t) = e^{At}h(0) + \int_0^t e^{Au} Bx(t-u)\,du$$

把變數替換回去，改成 τ 而不是 u

$$h(t) = e^{At}h(0) + \int_t^0 e^{A(t-\tau)} Bx(\tau)(-d\tau)$$

$$h(t) = e^{At}h(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$

此為線性時不變系統在任意輸入 $x(t)$ 下的完整解

第一項 $e^{At}h(0)$ 為自由響應、初始條件的影響

第二項 $\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$ 為強迫響應，輸入信号的影響

step 2. zero order hold 零階保持假設

ZOH: 在離散時間點採樣後，輸入信號在兩個連續採樣點間保持為常數值

輸入值等於前一個採樣點的值，直到下一個採樣點到來。

以數學表示為

$x(\tau) = x(t\Delta) = x_t$，其中 $(t-1)\Delta \leq \tau < t\Delta$

Δ 為採樣間隔

t 為離散時間索引

τ 為連續時間變量

x_t 為在時間點 $t\Delta$ 採樣的離散輸入值

使用 ZOH 後，連續時間系統的輸入項 $Bx(\tau)$ 在每個時間步長內變為 Bx_t

在 ZOH 假設下，由於 $x(\tau) = x_t$ 在 $(t-1)\Delta \leq \tau <$

$t\Delta$ 的範圍內，可以將 $x(\tau)$ 視為常數 x_t 提取出來

$$\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)}\,d\tau \cdot Bx_t$$

簡化成更容易計算的形式

Step 3. 以 $h((t-1)\Delta)$ 表示 $h(t\Delta)$

需要將連續時間狀態方程的解改寫為遞迴形式，建立離散時間的基礎

連續時間微分方程的解：

$$h(t) = e^{At}h(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$

在 $t=t\Delta$ 時間，我們有：

$$h(t\Delta) = e^{At\Delta}h(0) + \int_0^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots ①$$

分割積分：將積分分成兩部分，從 0 到 $(t-1)\Delta$ 和 $(t-1)\Delta$

到 $t\Delta$

$$h(t\Delta) = e^{At\Delta}h(0) + \int_0^{(t-1)\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$
$$+ \int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$

從 $e^{At\Delta}h(0)$ 提出 $e^{A\Delta}$

$$e^{At\Delta}h(0) = e^{A\Delta}(e^{A(t-1)\Delta}h(0))$$

第1個積分項提出 $e^{A\Delta}$

$$\int_0^{(t-1)\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$
$$= e^{A\Delta}\int_0^{(t-1)\Delta} e^{A((t-1)\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$$

合併後取出 $e^{A\Delta}$

$$e^{A\Delta}[\underbrace{e^{A(t-1)\Delta}h(0) + \int_0^{(t-1)\Delta} e^{A((t-1)\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau}_{h((t-1)\Delta)}]$$

因此 $h(t\Delta) = e^{A\Delta}h((t-1)\Delta) + \int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\,d\tau$

狀態 $h(t\Delta)$ 部分是由前一狀態 $h((t-1)\Delta)$ 演化而來

step 4. 利用 ZOH 評估剩餘積分

$$\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\, d\tau$$

根據 ZOH 假設，在時間間隔 $(t-1)\Delta \le \tau < t\Delta$ 內，

輸入信號 $x(\tau)$ 保持常數值 x_t

$$x(\tau) = x_t \quad \text{for} \quad (t-1)\Delta \le \tau < t\Delta$$

將輸入項從積分中提取出來

$$\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)} Bx(\tau)\, d\tau = \int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)}\, d\tau\, Bx_t$$

因此需要計算 $\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)}\, d\tau$

利用變數替換 $u = t\Delta - \tau$，這樣 τ 改變時，

u 也跟著改變

當 $\tau = (t-1)\Delta$ 時，$u = t\Delta - (t-1)\Delta = \Delta$

當 $\tau = t\Delta$ 時，$u = t\Delta - t\Delta = 0$

此外 $d\tau = -du$，所以邊界和微分項要調整

$$\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)}d\tau = \int_{\Delta}^{0} e^{Au} - du = \int_{0}^{\Delta} e^{Au}du$$

計算矩陣指數積分，矩陣指數函數的積分

可表示為 $\int e^{Au}du = A^{-1}e^{Au}+C$ ，其中C為積分常數

因此，

$$\int_{0}^{\Delta} e^{Au}du = A^{-1}e^{Au}\Big|_{0}^{\Delta} = A^{-1}(e^{A\Delta}-e^{0}) = A^{-1}(e^{A\Delta}-I)$$

代回原積分.

$$\int_{(t-1)\Delta}^{t\Delta} e^{A(t\Delta-\tau)}Bx(\tau)d\tau$$

$$= A^{-1}(e^{A\Delta}-I)\cdot Bx_t = [A^{-1}(e^{A\Delta}-I)B]x_t$$

完整的狀態方程表達式

$$h(t\Delta) = e^{A\Delta}h((t-1)\Delta) + [A^{-1}(e^{A\Delta}-I)B]x_t$$

因A可能為不可逆矩陣，為提高穩定性，改寫

表達式為

$$A^{-1}(e^{A\Delta}-I) = (\Delta A)^{-1}(e^{\Delta A}-I)\Delta$$

而B項可以改寫成：

$$[A^{-1}(e^{A\Delta}-I)B] = [(\Delta A)^{-1}(e^{\Delta A}-I)\cdot\Delta B]$$

當 $\Delta \to 0$ 時，$(e^{\Delta A}-I)/\Delta A \to I$，避免了 A^{-1} 的計算

why? $e^{\Delta A}$ 用泰勒展開式展開

$$= I + \Delta A + \frac{(\Delta A)^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Delta A)^k}{k!}$$

計算 $\frac{e^{\Delta A}-I}{\Delta A} = \frac{\Delta A + \frac{(\Delta A)^2}{2!} + \cdots}{\Delta A}$

$$= I + \frac{\Delta A}{2!} + \frac{(\Delta A)^2}{3!} + \cdots$$

當 $\Delta \to 0$ 時，$\frac{e^{\Delta A}-I}{\Delta A} = I$

Step 5 確定離散參數：

令 $h_t = h(t\Delta)$

$$\bar{A} = e^{A\Delta}$$

$$\bar{B} = (\Delta A)^{-1}(e^{\Delta A} - I)\Delta B$$

得證 $h_t = \bar{A} h_{t-1} + \bar{B} x_t$