
Pruebas de Estabilidad Estructural

4.1. Pruebas de Estabilidad Estructural en Modelos de Componentes

Para introducir la definición de Estabilidad Estructural en los modelos de Componentes, suponga el modelo de regresión lineal

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_{i,t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.1)$$

donde $\varepsilon_t \sim iid N(0, \sigma^2)$. Si los parámetros β_i no fueran constantes sino que cambiaran con el tiempo t , de manera aleatoria o no, se colocaría

$$Y_t = \beta_{0,t} + \sum_{i=1}^k \beta_{i,t} X_{i,t} + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

y quedaría definido un modelo con coeficientes variables. Nótese que (4.1) también se puede escribir como

$$Y_t = \underline{X}_t' \underline{\beta} + \varepsilon_t$$

con $\underline{X}_t = (1, X_{t,1}, X_{t,2}, \dots, X_{t,k})' \in \mathbb{R}^{1+k}$ y $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^{1+k}$, vector de parámetros. En el caso que los parámetros varíen en el tiempo el modelo quedaría

$$Y_t = \underline{X}_t' \underline{\beta}_t + \varepsilon_t.$$

Definición 4.1.1. *Estabilidad Estructural.* Si se asume el modelo de coeficientes variables (4.2), la estabilidad estructural del modelo se define como la hipótesis nula de que los coeficientes se mantengan constantes en el tiempo $\beta_{i,t} \equiv \beta_i$. La alterna es que algún $\beta_{i,t}$ cambie con t .

$$\begin{aligned} H_0 &: \forall i = 1, \dots, k, \beta_{i,t} \equiv \beta_i \\ H_1 &: \exists i, \beta_{i,t} \not\equiv \beta_i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ejemplo 4.1.1. *Algunos ejemplos de cambio estructural en la literatura, debidos a intervenciones en fechas específicas, son*

- *EL nivel del rio Nilo, serie anual, con un cambio en 1898 con la primera represa de Ashwan.*
- *El número de muertes en accidentes automovilísticos mensuales en Gran Bretaña. La introducción del uso obligatorio del cinturón de seguridad en Enero 31 de 1983 cambió la serie mediante una intervención que disminuyó el nivel. En Harvey and Durbin [1986] se hace un análisis completo utilizando modelos estructurales.*
- *En Box and Tiao [1975, pag. 70] se exponen dos intervenciones en la ciudad de Los Angeles: la apertura de la autopista Golden State Freeway y la entrada en vigencia de la ley 63 que reducía la proporción de hidrocarburos en la gasolina. Ambas intervenciones se esperaba que produjeran un efecto en los niveles de contaminación del aire en los inicios de la década de 1960, medidos en la serie de ppm horaria de O_3 .*
- *El efecto de los atentados de 11 de Septiembre de 2001 en New York y Washington, en el número de turistas que ingresaron a varios países (ver Haywood and Randal [2006])*
- *El efecto de medidas de restricción de porte de armas de fuego en el número de homicidios por tal causa en varias ciudades.*

Dos técnicas para chequear el supuesto de estabilidad estructural son

1. La estimación recursiva de los parámetros del modelo. La idea básica de este tipo de pruebas es esta observación en Diebold [1999, pág. 92]

“Con frecuencia, las relaciones comerciales y económicas varían con el tiempo. Los procedimientos recursivos de estimación nos permiten evaluar y rastrear los parámetros variables en el tiempo, y, en consecuencia, son útiles para elaborar y evaluar diversos modelos de pronósticos.”

2. Las pruebas CUSUM, CUSUMSQ, MOSUM.

El objetivo al aplicar estas técnicas es asegurar que el modelo para pronósticos es estable. En caso de inestabilidad estructural, los pronósticos con un modelo de regresión global podrían no ser confiables. En este caso sería recomendable utilizar los procedimientos del Capítulo 5, como Holt-Winters, el modelo de espacio de estados en §5.5, pag.95. También un modelo de regresión no paramétrica como Loess.

4.2. Estimación recursiva de parámetros

El procedimiento de estimación recursiva de parámetros consiste en asumir el modelo de coeficientes variables (4.2)

$$Y_t = \beta_{0,t} + \sum_{i=1}^k \beta_{i,t} X_{i,t} + \varepsilon_t,$$

y, en lugar de utilizar todos los datos para la estimación, se utilizan los k primeros datos y se estiman los parámetros $\hat{\beta}_{i,k}$. Luego se utilizan los $k+1$, y se estiman los $\hat{\beta}_{i,k+1}$, y así sucesivamente, hasta utilizar los T datos. Los parámetros obtenidos $\hat{\beta}_{i,t}$ $t = k, \dots, T$ se denominan Estimadores Recursivos.

Para implementar en R la estimación recursiva se utilizan las siguientes instrucciones. Suponga que se trata de un modelo con tendencias lineal y estacional, dado por $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^{s-1} \delta_j I_j(t) + \epsilon_t$, $t = 1, \dots, T$. El total de parámetros es $k = 2 + s - 1$. Se toma un número inicial de datos k un poco mayor de $2 + s - 1$, por ejemplo, $k = 2 + s - 1 + 10$, para tratar de evitar fluctuaciones en los estimadores por poca información, y se corre el siguiente programa.

```
#-----programación de los estimadores recursivos
k = 2+s-1+10
n = T-k
parm = mat.or.vec(n, (2+s-1))
for(j in 1:n){
```

```

yj = y[1:(k+j)]
tj = t[1:(k+j)]
Itj = It[1:(k+j),]
mod.j = lm(yj ~ tj + Itj)
parm[j,] = t(mod.j$coefficient)
}
colnames(parm)=c("beta.0", "beta.1",
"delta.1", "delta.2", "delta.3")
plot.ts(parm)

```

Ejemplo 4.2.1. Con base en el Ejemplo 3.7.1, pag. 63, de la serie de producción trimestral de cemento, la gráfica de los estimadores recursivos de los 5 parámetros para el modelo con tendencia lineal y variables indicadoras estacionales (3.19), pag. 63, están en la Figura 4.1.

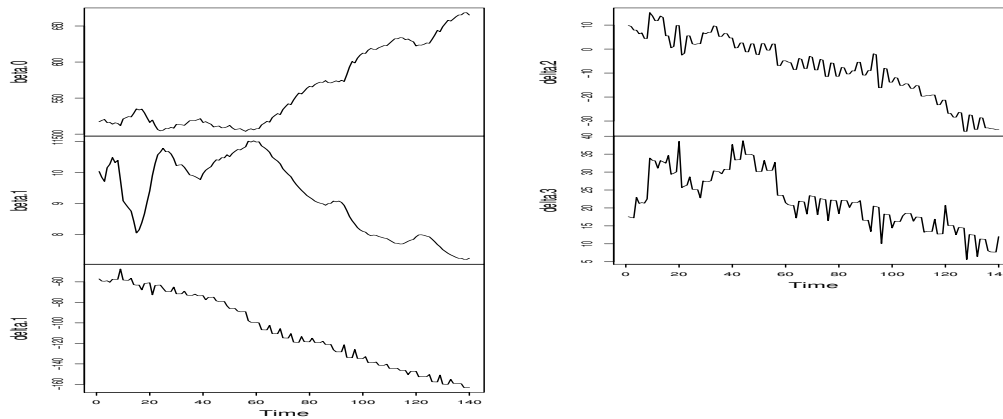


Figura 4.1: Estimadores Recursivos para el Modelo de Producción de Cemento

Lo que puede concluirse de esta figura es que se aprecia un cambio en las trayectorias de los estimadores, por ejemplo en β_0 , en β_1 y en δ_3 . Por tanto, se puede concluir de este diagnóstico que existe evidencia de inestabilidad estructural en el modelo.

4.3. Pruebas CUSUM

Las pruebas CUSUM y CUSUM cuadrado fueron introducidas por Brown et al. [1975] para chequear la hipótesis nula de estabilidad estructural de un modelo de regresión lineal, dada en (4.3). Son herramientas estándar en el análisis de series económicas. El estadístico CUSUM de la prueba se define como sigue.

Para cada $t = k, k + 1, \dots, T - 1$ se calcula el valor estimado,

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_{0,t} + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_{j,t} X_{j,t},$$

donde $\hat{\beta}_{j,t}$ son los estimadores recursivos, y se forma el Residual Recursivo

$$\hat{\varepsilon}_{t+1,t} = Y_{t+1} - \hat{Y}_t. \quad (4.4)$$

Si σ^2 es la varianza de error ε_t , se puede probar que

$$\hat{\varepsilon}_{t+1,t} \sim N(0, \sigma^2 r_t), \quad (4.5)$$

donde

$$r_t = 1 + \underline{X}'_{t+1} \left(\sum_{j=1}^t \underline{X}_j \underline{X}'_j \right)^{-1} \underline{X}_{t+1}, \quad (4.6)$$

con \underline{X}_t vectores fila.

Definición 4.3.1 (Residuales Recursivos estandarizados). *Los residuales recursivos estandarizados se definen como*

$$W_{t+1,t} = \frac{\hat{\varepsilon}_{t+1,t}}{\hat{\sigma} \sqrt{r_t}}, \quad (4.7)$$

donde $\hat{\sigma}^2 = MSE$ y se tiene que $W_{t+1,t} \sim i.i.d. N(0, 1)$.

Definición 4.3.2 (CUSUM). *La suma acumulada de los residuos recursivos estandarizados ó CUSUM, se define como*

$$CUSUM_t = \frac{1}{\sigma_W} \sum_{i=1}^t W_{i+1,i}, \quad t = k, k + 1, \dots, T - 1, \quad (4.8)$$

donde

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^{T-1} (W_{i+1,i} - \bar{W})^2}{T - k}}, \quad \bar{W} = \frac{1}{T - k} \sum_{i=k}^{T-1} W_{i+1,i}.$$

La región de aceptación de la prueba CUSUM para la hipótesis (4.3) es el interior de una región (ó banda) limitada por 2 líneas rectas. Si la gráfica de los residuales CUSUM permanece dentro de esta banda entonces no se rechaza la hipótesis nula de estabilidad estructural. La expresión para las rectas es

$$\pm a \left(\sqrt{T - k} + 2 \frac{t - k}{\sqrt{T - k}} \right), \quad t = k, k + 1, \dots, T \quad (4.9)$$

con $a = 0.948$ para un nivel $\alpha = 0.05$. En la Figura 4.2 se muestran los dos casos posibles.

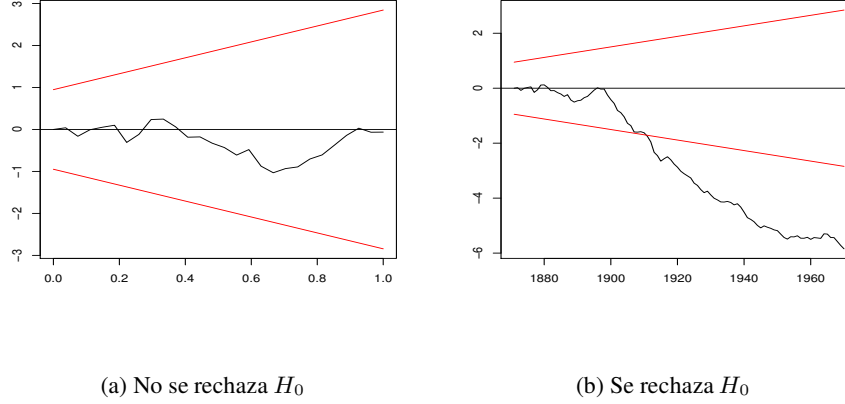


Figura 4.2: Región de Rechazo de la Prueba $CUSUM$.

Definición 4.3.3. El estadístico $MOSUM$, basado en una media de residuales recursivos ó residuales MCO, sobre una ventana móvil, se define con las cantidades: $m = T - k - 1$ y $0 < h < 1$, la proporción de datos en la ventana móvil, como

$$MOSUM_j = \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{[hm]}} \left| \sum_{t=k+j+1}^{k+j+[hm]} W_{t+1,t} \right|, 0 \leq j \leq m - [hm] \quad (4.10)$$

La región de aceptación de la prueba $MOSUM$ para la hipótesis (4.3) es el interior de una región (ó banda) limitada por 2 líneas horizontales. Si la gráfica de $MOSUM$ permanece dentro de esta banda entonces no se rechaza la hipótesis nula de estabilidad estructural. Los detalles están en Chu et al. [1995, pag. 606]. En este artículo se hace la anotación de que la prueba $MOSUM$ puede ser más sensible a los cambios estructurales por el hecho de estar basada en una ventana móvil y no en la totalidad de los datos.

Definición 4.3.4. El estadístico $CUSUMSQ$, la suma acumulada de residuos recursivos cuadrados, se define como

$$CUSUMSQ_t = \frac{\sum_{i=k}^t W_{i+1,i}^2}{\sum_{i=k}^T W_{i+1,i}^2}, \quad t = k, k+1, \dots, T \quad (4.11)$$

Si existe estabilidad estructural la gráfica de $CUSUMSQ_t$ versus t es una línea recta. Períodos en los cuales aumente la inestabilidad se notarán apartados de esta línea. Sin embargo, el siguiente comentario de A. Zeileis es importante (¹):

¹<https://stat.ethz.ch/pipermail/r-help/2005-January/064022.html>

“The CUSUMSQ test is more appropriate if you want to detect changes in the variance (rather than the conditional mean)”.

Aunque el estadístico $CUSUMSQ_t$ es fácil de programar, los valores críticos no están disponibles en R.

4.4. Implementación en R: la librería strucchange

La librería strucchange, ver Zeileis et al. [2002] y Zeileis et al. [2003], implementa las pruebas CUSUM y MOSUM de cambios estructurales en modelos de regresión. Sin embargo, no implementa la prueba CUSUMSQ.

Funciones de la librería

1. **recresid**: Calcula los residuales recursivos estandarizados, $W_{t+1,t}$ en (4.7). La suma acumulada de éstos es el CUSUM. La instrucción en R para calcularlos es `rrc = recresid(y ~ t + It)`.
2. **efp**: Calcula los residuales recursivos estandarizados junto con la región de aceptación (Bandas). Hay dos versiones. Una utiliza los residuales recursivos y otra con base en los residuales de la regresión por Mínimos Cuadrados. Nótese que no se introdujeron éstos. Las instrucciones en R son, respectivamente,

```
prueba.cusum1 = efp( y ~ t + It, type = "Rec-CUSUM")
plot(prueba.cusum1)
```

```
prueba.cusum2 = efp(y ~ t + It, type = "OLS-CUSUM")
plot(prueba.cusum2)
```

3. **sctest**: Calcula la prueba formal de la hipótesis nula de estabilidad estructural, y depende del tipo de residuales que se utilicen para calcular, residuales recursivos ó residuales de Mínimos Cuadrados.

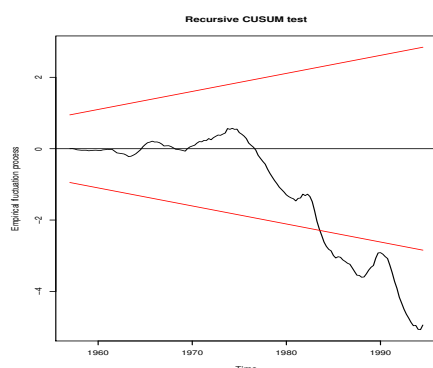
```
sctest(prueba.cusum1)
sctest(prueba.cusum2)
```

Ejemplo 4.4.1. Con base en el Ejemplo (3.7.1), pag. 63, de la serie de producción trimestral de cemento, la gráfica del estadístico CUSUM para el modelo con tendencia lineal y variables indicadoras estacionales (3.19), pag. 63, está en la Figura 4.3.

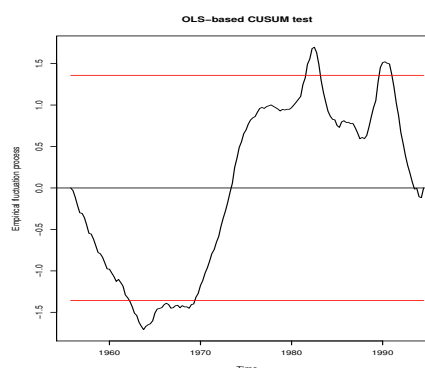
A partir de los resultados en la Figura 4.3 se rechazaría la hipótesis nula de estabilidad estructural en el modelo, ya que el estadístico CUSUM se sale de las bandas de confianza. Igual conclusión con la prueba MOSUM, que está en la Figura 4.4. La conclusión es que el modelo (3.19), pag. 63 detecta un cambio estructural en la serie.

La prueba formal, con un nivel de significación de 5 %, confirma el rechazo de la hipótesis nula de estabilidad.

	estadistico	valor.p
Rec-CUSUM	1.703042	1.781954e-05
OLS-CUSUM	1.708886	5.814298e-03
Rec-MOSUM	2.246572	1.000000e-02
OLS-MOSUM	2.098502	1.000000e-02



(a) prueba CUSUM residuales recursivos



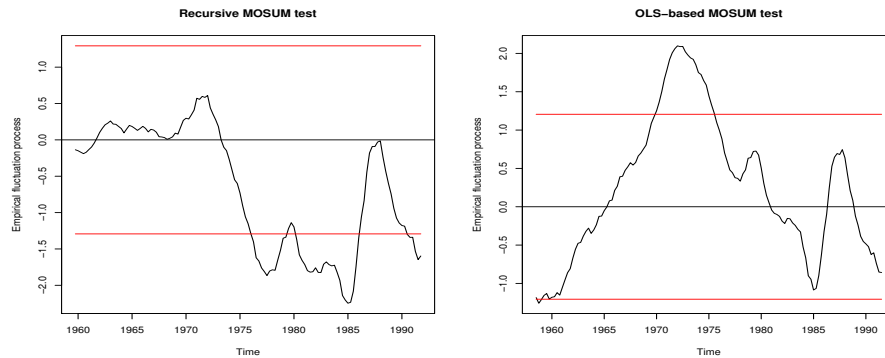
(b) prueba CUSUM residuales ols

Figura 4.3: Resultados prueba CUSUM gráfica

El código R siguiente muestra la programación de los comandos con los cuales se generaron los análisis y las gráficas del ejemplo anterior.

Código R 4.4.1.

```
#----programa en R para analisis de estabilidad estructural
#----con la serie de produccion de cemento en Australia, trimestral
library(strucchange)
library(forecast)
library(lmtest)
```

(a) prueba MOSUM residuales recursivos

(b) prueba MOSUM residuales mco

Figura 4.4: Resultados prueba MOSUM gráfica

```

E = read.table("cementq.dat",
header = TRUE)
attach(E)
y = ts(y,frequency=4,start=c(1956,1),end=c(1994,3))

#----modelo con tendencia lineal y estacionalidad
T = length(y)
t = seq(1,T)
It = seasonaldummy(y)
mod1 = lm(y ~ t + It)
summary(mod1)

#--- pruebe Durbin-Watson
dwtest(y ~ t + It)

#----estimacion recursiva de parametros
k = 2 + frequency(y) -1 + 10
n = T-k
parm = mat.or.vec(n, 5)
for(j in 1:n){
  yj = y[1:(k+j)]
  tj = t[1:(k+j)]

```

```

Itj = It[1:(k+j),]
mod.j = lm(yj ~ tj + Itj)
parm[j,] = t(mod.j$coefficient)
}
#-----grafica de las trayectorias
colnames(parm)=c("beta.0",
"beta.1","delta.1","delta.2",
"delta.3")
plot.ts(parm,main="")

#-----pruebas cusum graficas

prueba.cusum1 = efp(y ~ t + It, type = "Rec-CUSUM")
plot(prueba.cusum1)

prueba.cusum2 = efp(y ~ t + It, type = "OLS-CUSUM")
plot(prueba.cusum2)

prueba.cusum3 = efp(y ~ t + It, type = "Rec-MOSUM")
plot(prueba.cusum3)

prueba.cusum4 = efp(y ~ t + It, type = "OLS-MOSUM")
plot(prueba.cusum4)

#----pruebas cusum formales con valor p

#----pruebas cusum formales con valor p
B1=sctest(prueba.cusum1)
B2=sctest(prueba.cusum2)
B3=sctest(prueba.cusum3)
B4=sctest(prueba.cusum4)
B = rbind(c(B1$statistic,B1$p.value),
c(B2$statistic,B2$p.value),
c(B3$statistic,B3$p.value),
c(B4$statistic,B4$p.value))
colnames(B)=c("estadistico","valor.p")
rownames(B)=c("Rec-CUSUM","OLS-CUSUM","Rec-MOSUM","OLS-MOSUM")
(B)

```

Observación: La prueba CUSUM asume el supuesto de incorrelación de los errores, $Corr(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t+k}) = 0$ para $k \neq 0$. Para decidir si se cumple este supuesto se utiliza el valor del estadístico Durbin-Watson (esta prueba se define en el capítulo 7). Si está cercano a 2 se acepta el supuesto, si no, se rechaza. En caso de rechazar el supuesto, Diebold [1999, pág 101, nota 10] afirma que no conviene realizar la prueba de estabilidad estructural. Una razón es que cuando hay autocorrelación de $\hat{\varepsilon}_t$, los errores estandar de los coeficientes, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$, no son confiables. En el Ejemplo siguiente la prueba Durbin-Watson produce el resultado

```
DW = 0.3871, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

luego, los residuos estructurales están autocorrelacionados y las pruebas CUSUM pueden perder validez. Nótese que el estadístico DW es mucho menor de 2.0.

4.5. Identificación del punto de quiebre

La función `breakpoints` permite identificar los puntos de quiebre ó cambio estructural. Suponga el modelo $Y_t = \underline{X_t}'\beta + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, T$. Se asumen m puntos de quiebre o de cambio estructural en los cuales los coeficientes cambian de un valor a otro, permaneciendo constantes entre estos puntos. Los puntos de quiebre son $t_j, j = 1, \dots, m$, y cumplen

$$Y_t = \underline{X_t}'\beta_j + \varepsilon_t, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.12)$$

Los índices j de los puntos de quiebre se estima con la función `breakpoints`. Pero el número de puntos de quiebre, m , debe escogerse apriori. Por ejemplo, para que estime $m = 2$ puntos se utilizan las instrucciones:

```
bp.n = breakpoints(y2 ~ t + It, breaks=2)
summary(bp.n)
B = bp.n$extract.breaks(bp.n$RSS.table, breaks=2)
```

En el vector **B** están las observaciones que corresponden a cambios estructurales.

```
#----encontrar el punto de quiebre: determinar 2 puntos posibles
bp.n = breakpoints(y ~ t + It, breaks=2)
summary(bp.n)
```

```

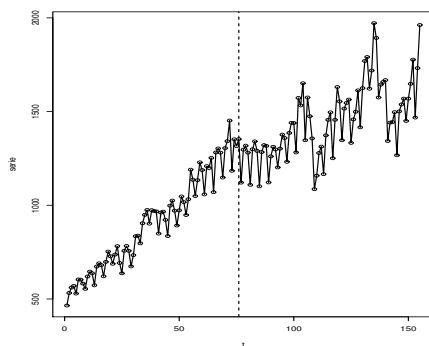
B= bp.n$extract.breaks(bp.n$RSS.table,breaks=2)

#---- grafica de cusum con punto de quiebre
rcres = recresid(y ~ t + It)
plot(cumsum(rcres),type='l')
abline(v=B[1],lty=2,lwd=2)
abline(v=B[2],lty=2,lwd=2)

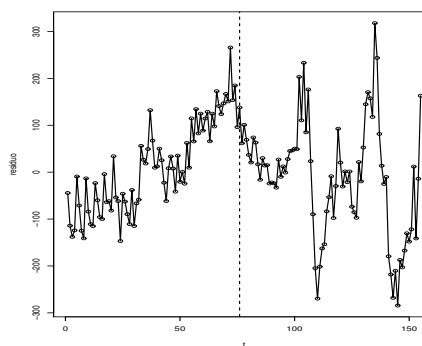
r1 = mod1$residuals
#----grafica de residuos OLS con punto de quiebre
plot(t,r1,type='o',ylab='residuo')
abline(v=B[1],lty=2,lwd=2)
abline(v=B[2],lty=2,lwd=2)

#----grafica de la serie con punto de quiebre
plot(t,y,type='o',ylab='serie')
abline(v=B[1],lty=2,lwd=2)
abline(v=B[2],lty=2,lwd=2)

```



(a) Con la Serie



(b) Con los residuos

Figura 4.5: Punto de Quiebre 1974-Q4 en la Serie y en los Residuos

El punto de quiebre se detecta en el cuarto trimestre de 1974 (la observación número 76). Ver el código en R anterior para la aplicación de la función `breakpoints`. En este caso concluimos que los pronósticos con este modelo pueden no ser válidos. Entonces preferimos los pronósticos con un modelo adaptativo como Holt-Winters, ó el Modelo de Componentes

Estructurales de Harvey (5.5). También es posible ampliar el modelo de descomposición para incluir una intervención que modele el cambio en la observación 76. Pero el análisis de intervenciones es tema de otro capítulo.