תרגיל בית 5

פתרו (באמצעות חישוב ידני, לא בקוד) את כל השאלות בגיליון זה

1. מסווג QDA חד-ממדי עם ערכים ידועים של הפרמטרים

נתון כי

$$P(x|y=0,\mu_0,\sigma_0^2)=\mathcal{N}(x|\mu_0,\sigma_0^2)$$

$$P(x|y=1,\mu_1,\sigma_1^2)=\mathcal{N}(x|\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$P(y=0)+P(y=1)=1$$

א. עבור $\mu_0=0,\mu_1=1,\sigma_0^2=\sigma_1^2=1$ $P(y=0)={}^1/_2$, חשבו את התחום של x בו מתקבל $\hat{y}=0$ על-ידי המסווג

$$\hat{y}_{\mathrm{ML}}=\underset{c\in\{0,1\}}{\operatorname{argmax}}\,P(x|y=c,\mu_c,\sigma_c^2)$$

$$\hat{y}_{\mathrm{MAP}}=\underset{c\in\{0,1\}}{\operatorname{argmax}}\,P(y=c|x,\mu_c,\sigma_c^2)$$

(הערה: שימו לב שעליכם להשתמש בחוק בייס כפי שראינו בהרצאה)

ב. חיזרו על סעיף א עבור $\sigma_1^2=10^6$ כאשר כל שאר הפרמטרים נותרו ללא שינוי.

ג. חיזרו על סעיף א עבור $P(y=0)={}^1/_8$ כאשר כל שאר הפרמטרים נותרו ללא שינוי.

2. מסווג QDA דו-ממדי עם ערכים ידועים של הפרמטרים

א. שאלה 4.22 בספר של Murphy

Exercise 4.22 QDA with 3 classes

Consider a three category classification problem. Let the prior probabilites:

$$P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = 1/3$$

The class-conditional densities are multivariate normal densities with parameters:

$$\mu_1 = [0,0]^T, \mu_2 = [1,1]^T, \mu_3 = [-1,1]^T$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Classify the following points:

a. $\mathbf{x} = [-0.5, 0.5]$

b. $\mathbf{x} = [0.5, 0.5]$

ב. חיזרו על סעיף א עבור $P(Y=1) = P(Y=2) = 0.4$ ו- $P(Y=3) = 0.2$
(שימו לב ש**הרוב המכריע** של החישובים מסעיף א ניתנים לשימוש חוזר בסעיף זה, ואינכם נדרשים לבצעם מחדש)

3. אימון מסווג QDA דו-מימדי (2 קבוצות)

נתון מידע המכיל 6 דוגמאות מסווגות $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})\}_{n=1}^{6}$ כמפורט להלן, כאשר וקטור המאפיינים הוא דו-ממדי והסיווג הוא בינארי $y_n = 1$ או $y_n = 0$

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, 0 \right), \left(\begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.8 \end{bmatrix}, 0 \right), \left(\begin{bmatrix} -1.3 \\ 1.3 \end{bmatrix}, 0 \right), \left(\begin{bmatrix} 2.8 \\ 1.7 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 3.1 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.6 \end{bmatrix}, 1 \right) \right\}$$

א. התאימו מסווג QDA המבוסס על שערוך סבירות מרבית למידע הנתון ע"פ השלבים הבאים. פרטו חישוביכם.

i. חשבו את שערוך סבירות מרבית של הממוצע $\mu_{0,ML}$, של מטריצת הקוואריאנס $\Sigma_{0,ML}$, ושל $\pi_{0,ML}$ עבור התיוג $y_n = 0$.

ii. חשבו את שערוך סבירות מרבית של הממוצע $\mu_{1,ML}$, של מטריצת הקוואריאנס $\Sigma_{1,ML}$, ושל $\pi_{1,ML}$ עבור התיוג $y_n = 1$.

ב. השתמשו במסווג שאימנתם בכדי לחשב את

i. $P\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix} \middle| y = 0\right) = \mathcal{N}\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix} \middle| \mu_{0,ML}, \Sigma_{0,ML}\right)$

ii. $P\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix} \middle| y = 1\right) = \mathcal{N}\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix} \middle| \mu_{1,ML}, \Sigma_{1,ML}\right)$

השתמשו בחוק בייס בכדי לחשב את $P\left(y = 1 \middle| x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix}, \Theta\right)$
כאשר $\Theta = \{\mu_{0,ML}, \sigma_{0,ML}^2, \pi_{0,ML}, \mu_{1,ML}, \sigma_{1,ML}^2, \pi_{1,ML}\}$ הוא אוסף כל הפרמטרים של המודל

ג. חיזרו על סעיף ב אם נתון לכם כי $P(y=0) = 3P(y=1)$

4. אימון מסווג QDA דו-מימדי (3 קבוצות)

נתון מידע המכיל 9 דוגמאות (לא מסווגות) $\mathcal{D}=\{\boldsymbol{x_n}\}_{n=1}^{9}$ כמפורט בטבלה הבאה, כאשר וקטור המאפיינים הוא בעל שני מימדים $\mathbb{R}^2 \in$ $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]$ והדוגמא ה-n-ית מיוצגת על ידי $\boldsymbol{x_n}=[x_{n,1},x_{n,2}]$

n	$x_{n,1}$	$x_{n,2}$	y_n
1	0	0	1
2	1	2	1
3	2	1	1
4	3	4	2
5	4	6	2
6	5	5	2
7	12	1	3
8	13	3	3
9	14	2	3

א. השתמשו במידע המתוייג ואמנו מסווג מסוג GDA. פרטו ונמקו חישוביכם.

ב. איך יסווג המסווג שאימנתם את הדוגמא החדשה $\boldsymbol{x_{10}}=[2,2]$?