

Tarea 1

Ejemplo de un problema inverso

Alumno: Johnny Godoy
Profesor: Axel Osses A.
Auxiliar: Jorge Aguayo

1. Problema en medicina

Queremos poder obtener una imagen de un plano interior del cuerpo humano sin requerir intervención quirúrgica. Se puede lanzar un rayo X en dirección de la recta L a una intensidad inicial I_0 , y medir su intensidad final I_1 al salir del cuerpo.

Este cambio de intensidad es dependiente de la atenuación del rayo en cada punto del cuerpo. Entonces, el objetivo es utilizar estas mediciones de cambios de intensidad para calcular la atenuación en cada punto del cuerpo, lo cual se utiliza como la imagen que queremos.

2. Modelamiento matemático

El modelo tiene los siguientes elementos:

- El cuerpo humano es un compacto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- La atenuación en un plano es $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte en Ω , con condiciones de regularidad por determinar
- Un rayo X es L una recta en \mathbb{R}^2 . Sea \mathcal{L} el conjunto de estas rectas.

Definimos entonces la transformada de Radon $R[\rho] : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ como tal:

$$R[\rho](L) := \int_L \rho(x) |dx|$$

Más concretamente, podemos parametrizar L según:

$$L_{t,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, n_\theta \rangle = t\}$$

Donde $n_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Esto nos da permite ver la transformada como $R : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(S^1 \times \mathbb{R})$, con la siguiente expresión:

$$R[\rho](t, \theta) = \int \rho(x) \delta(\langle x, n_\theta \rangle - t) dx$$

De acá podemos definir dos problemas [1]:

- Problema directo: Dado ρ , calcular $R[\rho]$
- Problema inverso: Dado $R[\rho]$, calcular ρ

Este problema está motivado por la Ley de Beer [2];, que vé al cambio de intensidad de un rayo en la recta L como la integral de la atenuación:

$$\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = R[\rho](L)$$

Esto significa que en el problema en medicina, podemos medir $R[\rho]$ en cualquier recta L , y obtener la imagen es calcular $\rho(\Omega)$, por lo cual se planteó como el problema inverso.

3. Desafíos matemáticos

Al resolver problemas inversos, existen tres problemas clásicos a discutir:

3.1. Inyectividad

Queremos demostrar que si $R[\rho_1] = R[\rho_2]$ casi en todas partes, entonces se cumple que $\rho_1 = \rho_2$ casi en todas partes.

Primero, notamos que la forma en que escribimos la transformada de Radon nos da la siguiente relación con la transformada de Fourier:

$$\int R[\rho](t, \theta) e^{-i\omega t} dt = \hat{\rho}(\omega n_\theta)$$

No solamente permite demostrar inyectividad, sino que podemos obtener una fórmula de inversión explícita [3]:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (R[\rho](\cdot, \theta) * h)(\langle x, n_\theta \rangle) d\theta$$

Donde h es tal que $\hat{h} = |\omega|$.

3.2. Estabilidad

Si nos mantenemos en la topología L^1 , no tenemos estabilidad. De hecho, existe un resultado desastroso [4]: Existe una secuencia $(\rho_n) \subseteq L^1 \cap C^\infty$, todas radiales a soporte en la bola unitaria tales que:

- ρ_n es acotada en L^1
- $R\rho_n \rightarrow 0$ tanto uniformemente como en sentido L^1
- ρ_n no converge en ningún punto, ni siquiera converge débilmente

Un resultado que sí podemos notar es que R^{-1} es continuo cuando se vé como operador desde $W_{\infty,0}^1$ a L_0^∞ (ahora usando la información de las derivadas además del soporte compacto).

Existen otros resultados que extienden la transformada de Radon para poder definir una convergencia de R^{-1} es una topología más débil, pero estos no se cubrirán en esta tarea.

3.3. Reconstrucción

La fórmula de inversión propuesta puede ser utilizada como algoritmo práctico de reconstrucción, con la mayor desventaja siendo el problema de inestabilidad antes mostrado.

Dado que encontrar una transformada de Radon no es un problema difícil, otra manera de reconstrucción es resolver el problema de optimización [5]:

$$\min_{\rho} \|R[\rho] - \tilde{R}\|^2$$

Con \tilde{R} la transformada medida. El problema de esta forma sigue siendo inestable, así que es posible considerar además estrategias de regularización para mejorar el desempeño contra el ruido. Por ejemplo, podemos resolver el siguiente problema, parametrizado por $\lambda > 0$ regularizador:

$$\min_{\rho} \|R[\rho] - \tilde{R}\|^2 + \lambda \|\rho\|^2$$

4. Desafíos ingenieriles

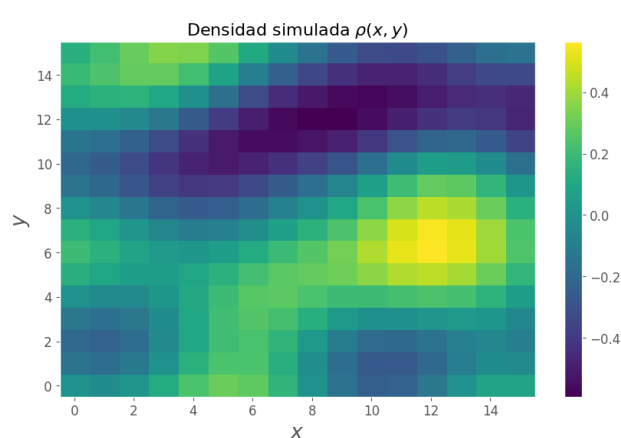
Existen varios desafíos de realizar una tomografía. En particular:

- Las imágenes deben ser de alta resolución para ser de mayor utilidad. Esto aumenta el costo de cualquier algoritmo
- Los rayos X tienen efectos dañinos en el paciente si la dosis es demasiado alta. La reconstrucción debe requerir pocos rayos para poder usarse factiblemente. En particular, la fórmula de inversión no es viable sin discretizar la integral en muy pocos ángulos. [6]
- Para cada plano que queramos representar, se requiere lanzar rayos en una variedad de ángulos, tales que estos puedan dar la información necesaria en la reconstrucción.

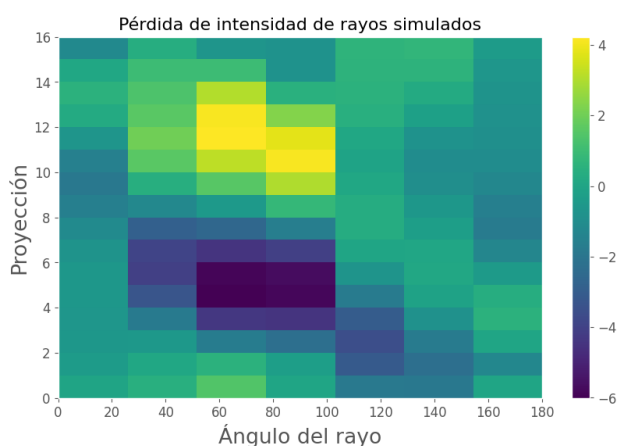
5. Simulaciones

Incluyo simulaciones en Python de una reconstrucción con la siguiente metodología:

- Generar una imagen de 16×16 pixeles a través de ruido de Perlin.
- Calcular la transformada de Radon con el módulo *scikit-image* [7]
- Recuperar la imagen inicial resolviendo el problema de optimización antes mostrado (sin regularización) y con el método de transformada de Radon inversa de *scikit-image* para comparar estos métodos
- Agregar ruido de alta frecuencia y baja amplitud a las transformadas
- Comparar de nuevo las metodologías, agregando optimización regularizada



(a) Densidad generada con ruido de Perlin, a reconstruir



(b) Transformada de Radon de la densidad, nuestras mediciones.

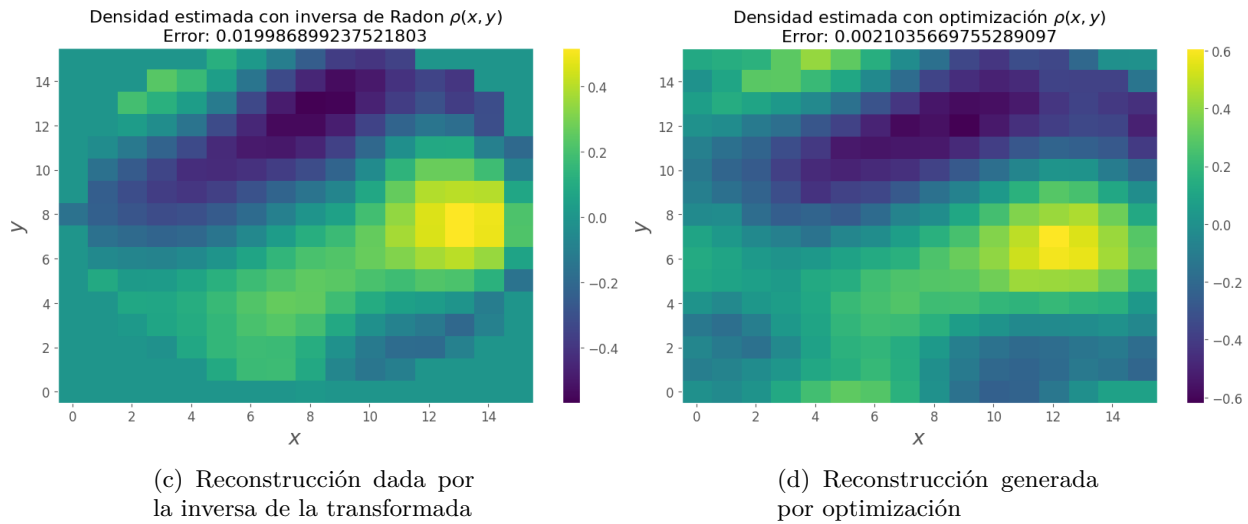


Figura 1: Reconstrucción por distintos algoritmos.

Acá la inversión con optimización logró un error de orden 10^{-3} en 30 segundos, mientras que la inversión de la transformada logró un error de 10^{-1} en 0.5 segundos.

Se intentó utilizar la solución de la transformada como mejor inicialización del optimizador, y aumentar el número de rayos para mejorar la inversión, pero ninguno de estos dos métodos ayudó.

Luego, se agregó ruido de alta frecuencia a nuestras mediciones:

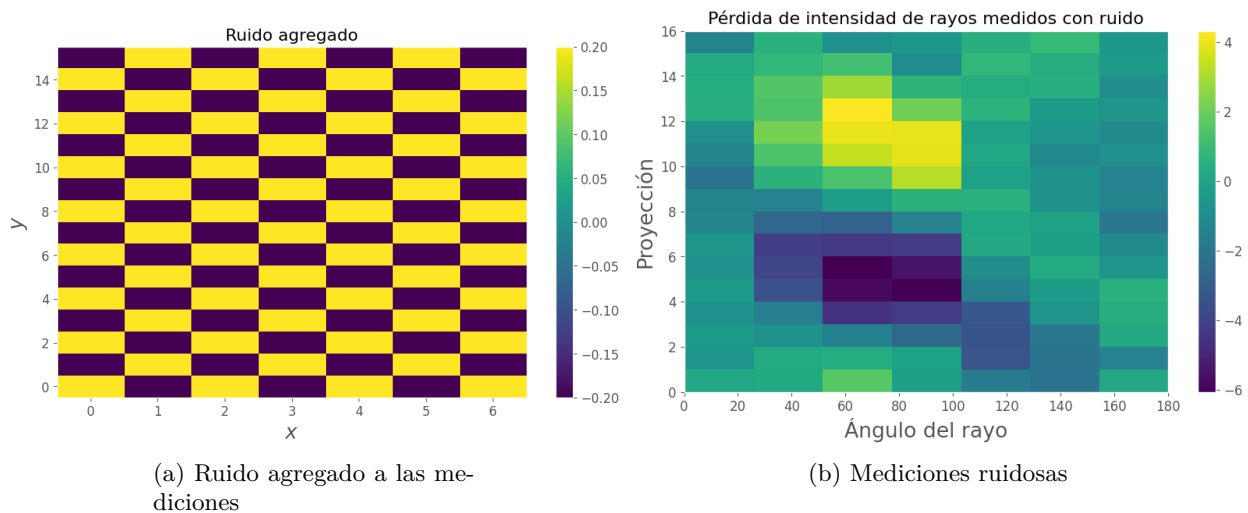


Figura 2: Ruido de alta frecuencia para probar estabilidad.

Al correr los algoritmos anteriores en este caso, el error de las soluciones se duplica. En el caso de optimización pasa de 2.1×10^{-3} a 5.23×10^{-3} . Para reducir esto, consideramos el modelo regularizado antes mencionado con $\lambda = 2^{-7}$, reduciendo el error a 4.35×10^{-3} :

Densidad estimada con optimización regularizada $\rho(x,y)$ con mediciones ruidosas
Error: 0.004356861094162961

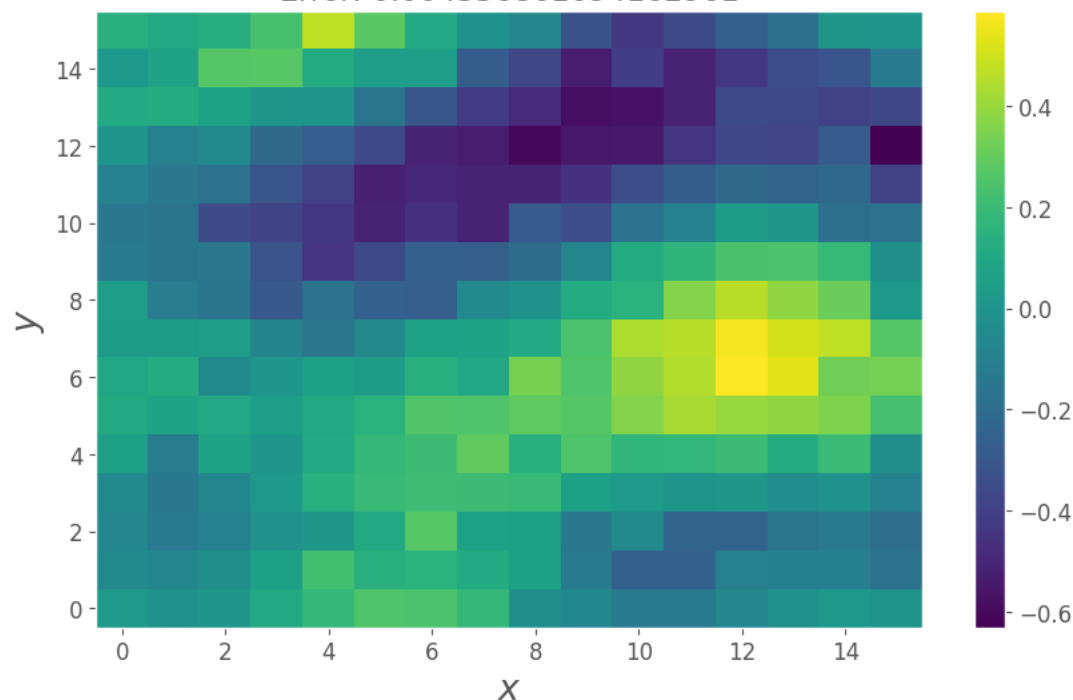


Figura 3: Mejorando la estabilidad a través de regularización

El repositorio con las simulaciones, y con este informe, se encuentra en <https://github.com/johnny-godoy/tomografia-computarizada>

Referencias

- [1] Kirsch, A., Examples of Inverse Problems. Springer Nature, 2022.
- [2] Ketcham, R., “X-ray computed tomography (ct).”, https://serc.carleton.edu/research_education/geochemsheets/techniques/CT.html.
- [3] Candes, E., “The inverse radon transform.”, <https://candes.su.domains/teaching/math262/Lectures/Lecture10.pdf>.
- [4] Herman, G. T. y Natterer, F., On the Well-Posedness for the Radon Transform. Springer-, 1981.
- [5] Candes, E., “Regularized inversion.”, <https://candes.su.domains/teaching/math262/Lectures/Lecture11.pdf>.
- [6] Herman, G. T., An Overview of The Process of a CT. Springer, 2012.
- [7] van der Walt, S., Schönberger, J. L., Nunez-Iglesias, J., Boulogne, F., Warner, J. D., Yager, N., Gouillart, E., Yu, T., y the scikit-image contributors, “scikit-image: image processing in python,” PeerJ, vol. 2, p. e453, 2014, [doi:10.7717/peerj.453](https://doi.org/10.7717/peerj.453).