Sujet choisi : Histoire de la résolution des équations du 3ème degré

Équation cubique et cube

Auteur : Cardan, *Ars Magna*, 1545

Dans le cadre du cours
Histoire des Sciences
Le 29 avril 2009

Johnny Horn

Table des matières :

Résumé :

La façon de résoudre une équation du 3ème degré a changé depuis l'Antiquité. Diverses méthodes ont été étudiées par des mathématiciens. Leur but était de les généraliser. Parmi eux, Cardan est devenu célèbre grâce à un de ses ouvrages, *Ars Magna*. Cet ouvrage explique comment résoudre l'équation du 3ème degré de manière géométrique et contient des formules qu'il a empruntées à un autre mathématicien italien, Tartaglia, qui les a découvertes avant lui et qu'il a nommées « formules de Cardan » . Nous allons étudier sa démonstration en cherchant en quoi elle lui est « propre » c'est-à-dire si elle est valable pour tous les équations que l'on rencontre...

1. Introduction

L'objectif du travail de ce semestre est d'étudier l'histoire de la résolution de l'équation du troisième degré de façon géométrique par différents mathématiciens du 16ème siècle. Mais, nous approfondirons le travail de Cardan. Même s'ils n'étaient pas les premiers (Archimède l'avait résolu de façon géométrique) à aborder le sujet, nous allons nous intéresser à la petite histoire et aux quelques découvertes de Khayyâm, Del Ferro, Tartaglia, et Cardan qui ont pris part à l'histoire des mathématiques et à l'évolution de la méthode de résolution d'équations de plusieurs façons. Nous avons étudié l'oeuvre monumentale de Cardan, intitulée *Ars Magna*, qui a été publiée en 1545. Cet ouvrage a été rédigé d'abord en latin, puis en anglais, il s'inspire du célèbre traité d'algèbre d'Al Khwarizmi et il était difficile à comprendre à l'époque car il était destiné aux mathématiciens savants... Cadran y a expliqué ses méthodes de résolution des équations comme : $x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+px^2=q$ et $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Nous allons étudier la première équation. On va découvrir une de ses formules. Mais est-elle valable pour toutes les équations du 3ème degré ? Combien de solutions la formule de Cardan donne-t-elle à l'équation du 3ème degré ? Résoudre l'équation cubique de manière géométrique équivaut-il à la résoudre de manière algébrique ? Qu'est-ce qui bloque ?

2. Découverte de l'équation du 3ème degré.

I. Evolution de l'équation

L'équation du 3ème degré a toujours existé, les Grecs de l'Antiquité la connaissaient déjà ! Mais les mathématiciens (Ménechme) l'ont résolue de manière géométrique et non algébrique : par intersection de courbes (paraboles, hyperboles, etc). Ces « manoeuvres » peuvent être difficiles à réaliser si on ne connaît pas l'aspect d'une équation... Des mathématiciens, comme Archimède, ont cherché à couper une sphère de rayon *R* par un plan. Ici, on n'étudiera pas ce problème.

Astronome, philosophe, poète et mathématicien perse, Omar Khayyâm (1048-1131) a étudié les équations du 3ème degré à coefficients strictement positifs mais il a été amené à en distinguer 25 ! Il a remplacé des coefficients par des lettres pour aboutir à des solutions par intersection de courbes... Par exemple, $x^3+ax=b$ [1], il a posé : $a=c^2$ et $b=c^2h$ et il a abouti à $y=\frac{x^2}{c}$ et $y^2=x(h-c)$ comme solution par intersection... Mais ce n'est pas son travail qui nous intéresse.

En 1494, à Venise, Luca Pacioli a publié un ouvrage intitulé *Summa* regroupant les principales connaissances mathématiques du début de la Renaissance. Cet ouvrage sera à l'origine de la découverte de la méthode de la résolution de l'équation du 3ème degré. Avant, on n'avait jamais vu les méthodes de résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$. Sur la dernière page de l'ouvrage, Pacioli a déclaré que la résolution de l'équation du troisième degré $ax^3+bx^2+cx+d=0$ était « *impossible à résoudre comme l'est celle du second degré* » !

Cette phrase a commencé à intéresser de grands mathématiciens. Et ces mathématiciens ont ensuite voulu relevé ce défi dans le contexte d'effervescence intellectuelle de ce début de XVIème siècle...

Vers 1515, Scipione del Ferro (1465-1526) (figure 1), un autre mathématicien italien, est le premier à avoir réussi à résoudre le cas $x^3+px=q$ mais il n'a rien publié...

1 http://www.math93.com/equation.htm


Del Ferro

Figure 1


Tartaglia

Figure 2

Vingt ans plus tard, Niccolo Fontana[2] (figure 2), dit Tartaglia, à son tour, est parvenu à résoudre cette même équation dans le cas où p et q sont positifs mais il n'a rien publié non plus, dans le but de gagner des défis avec d'autres grands mathématiciens en utilisant ses formules.

En 1539, Girolamo Cardano a appris l'exploit de Tartaglia...

2 http://xavier.hubaut.info/coursmath/bio/tartagli.htm

II. Qui est Cardan ?

Gérolamo Cardano[3] (figure 3) ou, de son nom francisé, Jérôme Cardan est un médecin, mathématicien, inventeur et astrologue italien. Il est né à Pavie en 1501 et mort à Rome en 1576. Son nom est actuellement bien connu grâce à sa formule permettant de résoudre plusieurs types d'équations cubiques.

Cardan

Figure 3

Il était le fils illégitime d'un docte mathématicien milanais, ami de Léonard de Vinci. Son père lui appris les mathématiques. Puis, il a poursuivi ses études de médecine aux universités de Pavie et de Padoue. Dès sa jeunesse, il était célèbre comme astrologue et mage. En 1534, il enseignait les mathématiques et la médecine à l'Université de Milan et de Bologne. De 1562 à 1570, il était professeur à l'université de Bologne mais, suspecté d'hérésie, il est jeté en prison et perd le droit d'enseigner et de publier. Il retourne donc à Rome et y finit ses jours.

De manière générale, on peut lui attribuer quelques découvertes en physique, en chimie et en mathématiques et plus particulièrement, la découverte de la formule de résolution algébrique des équations cubiques.

En effet, à partir de 1539, Girolano Cardano a commencé à se passionner pour la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

D'ailleurs, après avoir appris l'exploit de Tartaglia, Cardan s'est douté que ce dernier avait trouvé la solution au problème qui occupait beaucoup de mathématiciens depuis des années. Il se décide donc à trouver un moyen pour le faire venir à Milan. Usant de sa notoriété, il l'a invité trompeusement à Milan pour pouvoir discuter de cette découverte. Arrivé à Milan, après plusieurs entretiens, Tartaglia lui dévoile en 1539 sa méthode de résolution en lui faisant promettre de ne jamais la divulguer sans son autorisation. Cardan se met alors au travail avec un de ses élèves, Lodovico Ferrari, pour généraliser la méthode de résolution de l'équation $x^3+px=q$ où p et q sont positifs. Cependant, il décide de se baser sur les travaux de Tartaglia pour pouvoir les prolonger. Alors, il entreprend une étude systématique de l'équation du troisième degré et cherche à montrer que les procédures de Tartaglia conduisent au bon résultat. Quelques années plus tard, Jérôme Cardan trouva une nouvelle formule plus générale pour la résolution de tous les types d'équations de degré trois.

3 http://fr.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

En fait, ce mathématicien a résolu des équations cubiques de la forme :

$x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+px^2=q$ et $ax^3+bx^2+cx+d=0$ où p et q sont des entiers naturels.

En plus, à cette époque, avec cette nouvelle méthode, cet Italien a pu entamer une petite partie de la découverte des nombres imaginaires qui ne seront malheureusement pas acceptés avant le 19ème siècle.

Cardan a respecté la parole donnée à Tartaglia et n'a pas dévoilé la méthode, mais lorsqu'il apprit que Scipione Del Ferro était le premier algébriste qui l'avait trouvée, il a considéré que la promesse donnée ne valait plus rien. Il a donc décidé de publier, en 1545, à Nüremberg, en Allemagne, ses résultats dans son ouvrage resté célèbre, *Ars Magna.* Cet ouvrage était très difficile à lire et s'adressait à un public d'initiés puisqu'il était écrit en latin. En fait, dans ce dernier, Cardan a mentionné et expliqué la partie de la formule, dite « formule de Cardan », qui avait été découverte par Tartaglia. D'ailleurs, quand ce dernier a appris la diffusion de cette méthode, une violente querelle[4] entre les deux s'est déclenchée au cours de laquelle Tartaglia a failli perdre la vie.

4 Plus d'informations sur le conflit : http://www.math93.com/Tartaglia-Cardan.htm

1. Travail de Cardan

I. Démonstration

Cardan a pu résoudre l'équation suivante du 3ème degré : $x^3+6x=20$ grâce à un cube de côtés *AC*, *AF*, *AE*, *EC*... qui sont équidistants les uns aux autres.

Dessinons ce cube de côté inconnue et considérons-le tel que $GH=x$:

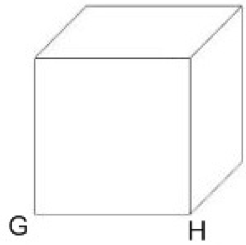


Figure 4

On complète ce cube avec des parallélépipèdes et un petit cube (figure 5)[5]. Et la différence entre les cubes *AE* et *CL* est 20 et $AC\times BC=2$. On choisit $AB=GH$ et on va poser $x=AB$, $u=AC$ et $v=BC$. Et on ajoute un autre petit cube qui est de même côté que le cube *DC* :

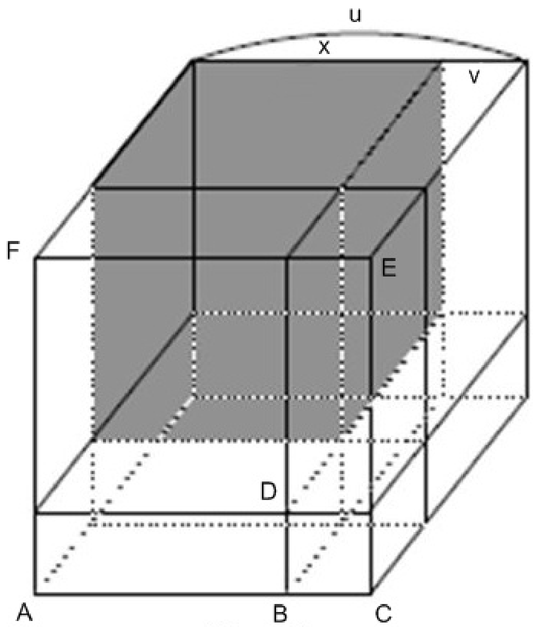


Figure 5

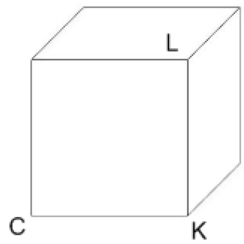


Figure 6

<u>Idée de base : cherchons *p* et *q* en fonction de *u* et *v*.</u>

On cherche les volumes des parallélépipèdes et des cubes dans le cube (figure 5).

On choisit *AB* = *GH* et on pose $AB=x$

Le cube *DC* a pour volume $V_{DC}=v^2=BC^2$ et le cube *DF* $V_{DF}=x^2=AB^2$.

D'une part, d'après le dessin (figure 5), on constate que le parallélépipède *DA* est aussi le

5 Figure 5 pris sur un site : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_09.doc

parallélépipède *DE*, et qu'il y a un autre parallélépipède identique derrière le cube *DC*. On a donc 3 parallélépipèdes identiques dont le volume est $x v^2$. Appelons V_p la somme des 3 « petits » parallélépipèdes et on a : $V_p = 3 x v^2 = 3(AB \times BC^2)$.

Maintenant, on détermine le volume du parallélépipède *DF*. La figure 5 nous permet de connaître son volume et de nous faire savoir que c'est le même « corps » que deux autres parallélépipèdes (sous le cube *GH* et à droite de ce cube), c'est-à-dire les mêmes formes. Nommons V_g la somme des « grands » parallélépipèdes. D'ailleurs, $V_g = 3 v x^2 = 3(BC \times AB^2)$.

Ces six parallélépipèdes représentent le second facteur de l'équation du 3ème degré.

$V_p + V_g = 3(AB \times BC^2) + 3(BC \times AB^2) = px$

On sait que la différence entre le volume du cube *AE* et le volume du petit cube *DC* est *q* soit $V_{AE} - V_{DC} = 20$ ou $AC^3 - CK^3 = 20$ car $AC^3 = AE^3$ et $BC^3 = CK^3$ C'est cette équation qui nous sera utile. On sait aussi que 20 est la somme des volumes *DA*, *DE* et *DF*.

Par conséquent, on a $V_{DA} + V_{DE} + V_{DF} = 20$.

On vient de trouver :

$V_g = 3(BC \times AB^2)$

$V_p = 3(AB \times BC^2)$

$V_{DF} = GH^3 = AB^3$

Par somme, on a : $V_{DA} + V_{DE} + V_{DF} = 3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2) + AB^3 = 20$

Or, $AC^3 - CK^3 = 20$

D'où, $3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2) + AB^3 = 20 = AC^3 - CK^3$

Soit $3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2) + AB^3 + CK^3 = AC^3$

Or, on sait que le volume du cube *CB* est aussi le volume du cube *CL* car ils ont les mêmes côtés.

Donc, on a :

$$3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2) + AB^3 + BC^3 = AC^3$$

soit $AB^3 = AC^3 - BC^3 - 3 BC \times AB^2 - 3 AB \times BC^2$

D'autre part, pourquoi $AC \times BC = 2$? D'où cette équation provient-elle ? On va chercher un autre parallélépipède :

On peut assembler les six parallélépipèdes précédents en un seul parallélépipède (figure 7)[6].

6 Figure également pris sur : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_09.doc

Déterminons le volume de ce parallélépipède. Un parallélépipède a pour volume le produit de sa hauteur , sa longueur et sa largeur.

Soit : $V=u\times x\times(v+v+v)$

Or, $u=x+v$

D'où,

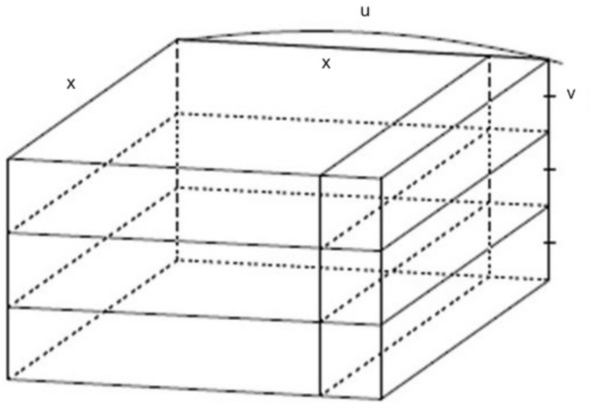


Figure 7

$$V=(x+v)\times x\times(v+v+v)=(x+v)\times x\times 3v=3vx^2+3xv^2$$

On a déjà vu que $3vx^2+3xv^2$ est le second facteur. Donc, comme $p=6$, $u\times x\times 3v=6x$ soit $AC\times AB\times 3BC=6AB$ On a bien : $AC\times BC=2$ soit $uv=2$ On retiendra cette équation.

Par conséquent, on a $uv=2$ et $u^3-v^3=20$ où on cherchera *u* et *v*.

Maintenant, on cherche à revenir à l'équation donnée dans la première partie afin de vérifier qu'on n'a pas fait de mauvais pas.

On vient de démontrer que $AC\times AB\times 3BC=6AB$ et que $3BC\times AB^2+3AB\times BC^2=6AB$

Comme $u=x+v$ soit $x=u-v$ soit $AB=AC-BC$.

On remplace AB par $AC-BC$ dans la dernière équation et on a :

$$3BC\times(AC-BC)^2+3(AC-BC)\times BC^2=6AB$$

soit $6AB=3BC\times(AC^2-2AC\times BC+BC^2)+3AC\times BC^2-3BC^3$

soit $6AB=3BC\times AC^2-6AC\times BC^2+3BC^3+3AC\times BC^2-3BC^2$

On a donc : $6AB=3BC\times AC^2-3AC\times BC^2$

On remarque que : $AC^3-BC^3=20$ et $AB^3=AC^3-BC^3+3(AC\times BC^2)-3(BC\times AC^2)$

soit $AB^3+3(BC\times AC^2)-3(AC\times BC^2)=20$

On vient de trouver $6AB=3BC\times AC^2-3AC\times BC^2$ et on a ainsi :

$$AB^3+6AB=20 .$$

On a bien : $GH^3+6GH=20$.

II. Une des formules de Cardan[7]

D'après la démonstration, on a trouvé :

$AC^3-BC^3=20$ et $AC\times CK=2$ avec $BC=CK$

Afin de faciliter les calculs, on pose $u=AC$ et $v=BC$.

Par conséquent, on a $u^3-v^3=20$ et $u\,v=2$ où on va chercher *u* et *v*.

$u^3=(\frac{2}{v})^3$ et $u^3=20+v^3$

On remplace u^3 par $\frac{8}{v^3}$ dans $u^3=20+v^3$: $\frac{8}{v^3}=20+v^3$ soit $8=20\,v^3+v^6$ soit

$v^6+20\,v^3-8=0$

De même pour v^3 , $u^6-20\,u^3-8=0$

Posons $z=-v^3$ et on a : $z^2-20\,z-8=0$

et $z'=u^3$ et on a : $z'^2-20z'-8=0$.

Ce sont des équations du second degré. On va utiliser la méthode actuelle que Cardan a utilisée lui aussi...

L'équation $X^2-20\,X-8=0$ a pour déterminant $432=4\times 108$ et pour solutions :

$z_1=10-\sqrt{108}$ et $z_2=10+\sqrt{108}$

Or, $z=-v^3$

$-v^3=10-\sqrt{108}$ soit $v^3=\sqrt{108}-10$ donc $v=\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

ou $-v^3=10+\sqrt{108}$ soit $v^3=-10-\sqrt{108}$ donc $v=\sqrt[3]{-10-\sqrt{108}}$ qui ne convient pas car elle n'est pas définie ($-10-\sqrt{108}<0$).

et $z=u^3$

$u^3=10-\sqrt{108}$ soit $u=\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$ ou $u^3=10+\sqrt{108}$ soit $u=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$

D'après la figure 5, $u=x+v$

On a donc : $x=u-v$ et donc deux solutions possibles : $x_1=\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

et $x_2=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ mais, comme, $x=AB>0$, on « rejette » x_1 .

Donc l''équation du 3ème degré a pour unique solution $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

7 http://fr.wikipedia.org/wiki/Formules_de_Cardan

Ces calculs permettent de donner une formule de Cardan : l'équation $x^3+px=q$ a pour discriminant $\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ et a pour unique solution $x=\sqrt[3]{\sqrt{\Delta}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\Delta}-\frac{q}{2}}$!

III. « cas irréductible »

Qu'est-ce qui se passe si *Δ* est négatif c'est-à-dire si *p* est négatif ? Ce sont des obstacles que l'on rencontre. Dans la formule donnée, on constate que *q* peut être négatif car, pour tout *r* réel, $r^2 \geqslant 0$. Par contre, *p* doit être positif...

Par exemple, l'équation[8] $x^3 - 9x + 8 = 0$ équivaut $x^3 - 9x = -8$ et appliquons-la à la formule de Cardan : elle a pour discriminant $\frac{(-8)^2}{2} + \frac{(-9)^3}{3} = -211$ et a pour solution $x = \sqrt[3]{\sqrt{-211} - \frac{8}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{-211} + \frac{8}{2}}$. Cette solution ne convient pas car $\sqrt{-211}$ n'est pas définie...

On peut inverser *px* et *q* dans l'équation mais l'extrait, sur lequel nous nous basons, vise à donner une solution de l'équation de type $x^3 + px = q$; un autre extrait[9] qui porte sur l'équation de type $x^3 + q = px$ pourrait répondre à cette question. Or, les nombres complexes[10] ne sont pas encore inventés. A cette époque, les mathématiciens ne les connaissent pas encore. Les formules de Cardan sont à l'origine de la découverte des nombres complexes.

8 Empruntée à http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_09.doc
9 p 104
10 http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_complexes

5. Conclusion :

Au fil du temps, les mathématiciens ont essayé de chercher des méthodes les plus simples possibles pour résoudre l'équation cubique, surtout de manière géométrique, avec intersection de courbes... « *Summa* » de Luca Paciola a provoqué chez les mathématiciens l'interrogation sur l'annonce de l'auteur de l'impossibilité de résoudre l'équation du 3ème degré. Cela a commencé à les intéresser et ils se sont lancés dans la recherche. Après la découverte par Del Ferro et Tartaglia, Cardan a publié un ouvrage *Ars Magna*, composé des « formules de Cardan », qui permet de trouver la seule solution de l'équation cubique. Cet ouvrage explique des méthodes de la résolution de plusieurs types d'équations. Mais les formules de Cardan $x=\sqrt[3]{\sqrt{\Delta}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\Delta}-\frac{q}{2}}$ où $\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ ne peuvent être appliquées que dans les équations où les coefficients sont strictement positifs ou que si Δ est supérieur ou égal à 0. Avant le 18ème siècle, les nombres complexes ne sont pas encore inventés. Nous avons étudié le cas où des solutions ne sont pas incluses dans $\mathbb{C}$: Cardan a pris donc des coefficients strictement positifs et il a trouvé de bons résultats mais une solution unique. De plus, les mathématiciens ont rencontré des obstacles et se sont interrogés sur ce problème. Actuellement, on peut trouver au plus trois solutions qui sont incluses dans $\mathbb{R}$ et/ou $\mathbb{C}$.

Bibliographie :

J.L.AUDIRAC, *Vie et œuvre des grands mathématiciens*, Magnard, Paris, 1990.

Etienne
A.DAHAN-DALMEDICO/J.PEIFFER, *Une histoire des mathématiques*, Seuil, Paris, 1986.

B. HAUCHECORNE et D. SURATEAU, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipse, Paris, 1996.

Références :

Histoire de l'équation (sous pdf) : http://mediamaths.fr/pdf/equation.pdf (le 19 avril 2009)

Cas irréductibles (sous pdf) : http://www.latp.cahen.u-3mrs.fr/Enseignement/Pol/Pol3.pdf (le 19 avril 2009)

http://bibli.ec-lyon.fr/exl-doc/patrimoine/11171V02/PDF/FA11171V02_ING00582.pdf (le 19 avril 2009)

Formule de cardan : http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/pf/node22.html (le 19 avril 2009)

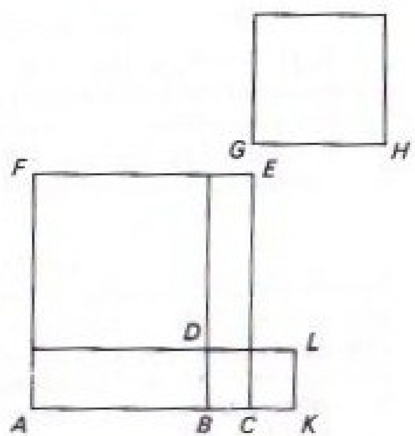
Annexe : *Ars Magna, or the Rules of Algebra*, G. Cardano, translated by T. Richard Witmer, Dover Publications, Inc., New York, 1545.

CHAPTER XI

On the Cube and First Power Equal to the Number

Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in reponse to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.

DEMONSTRATION



For example, let GH^3 plus six times its side GH equal 20, and let AE and CL be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of AC, the side [of one], and CK, the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x].

In accordance with the first proposition of the sixth chapter of this book, I complete the bodies DA, DC, DE, and DF; and as DC represents BC^3, so DF represents AB^3, DA represents $3(BC \times AB^2)$ and

DE represents $3(AB \times BC^2)$.[1] Since, therefore, $AC \times CK$ equals 2, $AC \times 3CK$ will equal 6, the coefficient of x; therefore $AB \times 3(AC \times CK)$ makes $6x$ or $6AB$,[2] wherefore three times the product of AB, BC, and AC is $6AB$. Now the difference between AC^3 and CK^3 — manifesting itself as BC^3, which is equal to this by supposition — is 20, and from the first proposition of the sixth chapter is the sum of the bodies DA, DE, and DF. Therefore these three bodies equal 20.

Now assume that BC is negative:

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2),$$

by that demonstration. The difference between $3(BC \times AC^2)$ and $3(AC \times BC^2)$, however, is [three times] the product of AB, BC, and

[1] 1570 and 1663 vary considerably from here on to the end of the demonstration. They read:

We will have, therefore, four propositions, two of which have already been mentioned — namely, that $AC \times CK$ or CB is 2 and that the difference between AC^3 and CB^3 is 20. The third can be deduced from these and is that, since the product of $3AB \times BC \times AC$ is equal to the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA and that $3AB \times AC \times BC$ is $6AB$ for, from the first proposition, the product of AC and CB is 2, therefore three times this is 6, and this product times AB is $6AB$. This, however, is the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA. The fourth [proposition], which derives from the second and third corollaries in the sixth chapter, [is] that DF [i.e., AB^3] is the difference between $AC^3 + 3(AC \times CB^2)$ and $CB^3 + 3(CB \times AC^2)$. Let, therefore, α be AC^3, β BC^3 [the text has ABC^3], γ $3CB \times AC^2$, δ $3AC \times CB^2$, ϵ the difference between α and β, ζ the difference between γ and δ, and η [1570 has β; 1663's character is illegible] the difference between $\alpha + \delta$ and $\beta + \gamma$. Therefore [there is what appears to be a superfluous *cum* inserted at this point] ϵ is composed of $\zeta + \eta$ [1570 again has a β and again 1663's character is illegible], as can readily be demonstrated numerically and by example as shown in the margin. But ϵ is 20, from the second assumption, ζ is $6AB$, and η [1570's character is illegible and 1663 has θ] is AB^3. Therefore, $AB^3 + 6AB$ — that is, plus $6x$, for AB is the root of its cube — is equal to 20. Therefore, since $GH^3 + 6GH$ [the text has $BH^3 + 6BH$ here and the next place it occurs] is equal to 20, GH^3+6GH will be equal to AB^3+6AB. Hence AB is x and this is the difference between two sides the product of which is 2 and the cubes of which differ by 20, which was to be demonstrated. From this we construct the rule.

$$20 \left| \begin{matrix} 24 & 1 \\ 4 & 14 \end{matrix} \right| 13 \left| \begin{matrix} 25 \\ 18 \end{matrix} \right| 7$$

As it is obvious from the preceding the text of 1570 and 1663 is quite corrupt. These items are especially bothersome:

(1) the *differentia DE et DA* which occurs twice. To make sense, we have either to assume, as I have here, that *differentia* is an error for *aggregatum* or that, in the earlier definitions of DA as *triplus CB in quadratum AB* and of DE as *triplus, AB in quadratum BC*, AB should be replaced by AC. Either is consistent with the later development of the argument.

(2) the *cubus abc* which I read as a typographical error for *cubus bc*.

(3) the confusion between eta, beta, and theta at various points.

(4) the misprinting of BH for GH at four places.

[2] *fient 6 res AB, seu sextuplum AB.*

AC. Therefore, since this, as was demonstrated, is equal to $6AB$, add $6AB$ to the product of $3(AC \times BC^2)$, making $3(BC \times AC^2)$. But since BC is negative, it is now clear that $3(BC \times AC^2)$ is negative and the remainder which is equal to it is positive. Therefore,

$$3(CB \times AB^2) + 3(AC \times BC^2) + 6AB = 0.^3$$

It will be seen, therefore, that as much as is the difference between AC^3 and BC^3, so much is the sum of

$$AC^3 + 3(AC \times CB^2) + 3(-CB \times AC^2) + (-BC^3) + 6AB.$$

This, therefore, is 20 and, since the difference between AC^3 and BC^3 is 20, then, by the second proposition of the sixth chapter, assuming BC to be negative,

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times BC^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2).$$

Therefore since we now agree that

$$AB^3 + 6AB^4 = AC^3 + 3(AC \times BC^2) + 3(-BC \times AC^{2\,5}) + (-BC^3) + 6AB,$$

which equals 20, as has been proved, they [i.e., $AB^3 + 6AB$] will equal 20. Since, therefore,

$$AB^3 + 6AB = 20,$$

and since

$$GH^3 + 6GH = 20,$$

it will be seen at once and from what is said in I, 35 and XI, 31 of the *Elements* that GH will equal AB. Therefore GH is the difference between AC and CB. AC and CB, or AC and CK, the coefficients, however, are lines containing a surface equal to one-third the coefficient of x and their cubes differ by the constant of the equation. Whence we have the rule:

Rule

Cube one-third the coefficient of x; add to it the square of one-half the constant of the equation; and take the square root of the whole. You will duplicate[6] this, and to one of the two you add one-half the number you have already squared and from the other you subtract one-half the same. You will then have a *binomium* and its *apotome*. Then,

[3] *faciunt nihil.*

[4] The text has a spare *cum* at this point, as though something more were to be added.

[5] 1545 has AB^2.

[6] 1545 has *seminabis*; 1570 and 1663 have *semabis*. The former, corrected to read *geminabis* in accord with later passages, is followed here.

subtracting the cube root of the *apotome* from the cube root of the *binomium*, the remainder [or] that which is left is the value of x.[7]

For example,

$$x^3 + 6x = 20.$$

Cube 2, one-third of 6, making 8; square 10, one-half the constant; 100 results. Add 100 and 8, making 108, the square root of which is $\sqrt{108}$. This you will duplicate: to one add 10, one-half the constant, and from the other subtract the same. Thus you will obtain the *binomium* $\sqrt{108} + 10$ and its *apotome* $\sqrt{108} - 10$. Take the cube roots of these. Subtract [the cube root of the] *apotome* from that of the *binomium* and you will have the value of x:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}^{\,8} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Again,

$$x^3 + 3x = 10.$$

Cube 1, one-third of 3, and 1 results; square 5, one-half of 10, and 25 results; add 25 and 1, making 26; add 5 to and subtract it from the square root of this. You will thus form the *binomium* $\sqrt{26} + 5$ and its *apotome* $\sqrt{26} - 5$; whence x equals $\sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$. Here you have the proof:

	$\sqrt[3]{\sqrt{26} + 5}$	$-\sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$[9]
The cubes of the parts: (As is evident, the sum of these is 10.)	$(\sqrt{26} + 5)$	$-(\sqrt{26} - 5)$
The squares of the parts:	$\sqrt[3]{51 + \sqrt{2600}}$[10]	$\sqrt[3]{51 - \sqrt{2600}}$
Three times the squares of the parts:	$\sqrt[3]{1377 + \sqrt{1,895,400}}$[11]	$\sqrt[3]{1377 - \sqrt{1,895,400}}$[12]
The parts themselves:	$-\sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$	$+\sqrt[3]{\sqrt{26} + 5}$
The products of the parts and three times their squares:	$+\sqrt[3]{\sqrt{49,299,354} + 6885 - \sqrt{47,385,000} - 7020}$	$-\sqrt[3]{\sqrt{49,299,354} - 6885 - \sqrt{47,385,000} + 7020}$

[7] I.e., if $x^3 + ax = N$, $x = \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (N/2)^2} + N/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (N/2)^2} - N/2}$.

[8] 1570 and 1663 have R *b: cub:* R 108 *p:* 10, the *b:* being a misprint for *v:*.

[9] 1570 and 1663 have $\sqrt[3]{\sqrt{27} - 5}$.

[10] 1570 and 1663 have $\sqrt[3]{51 + \sqrt{2900}}$.

[11] 1570 and 1663 have $\sqrt[3]{1277 - \sqrt{1,895,400}}$.

[12] 1570 and 1663 have $\sqrt[3]{1377 - \sqrt{1,865,400}}$.