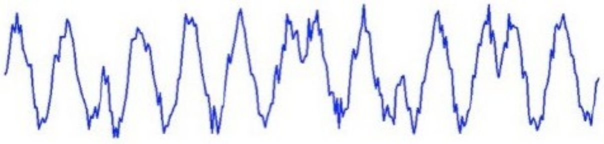
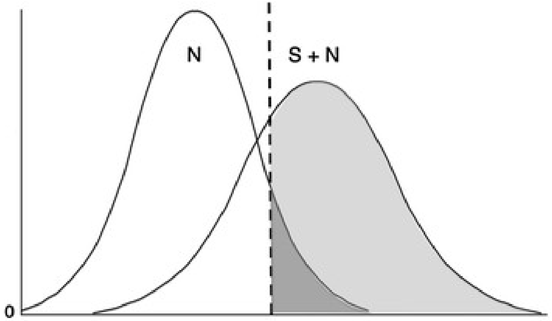
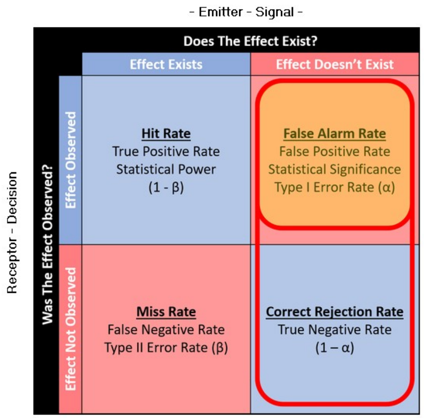
Aplicações de sinais

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6







Prof. Raul T. Rato

DEEC - 2021

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

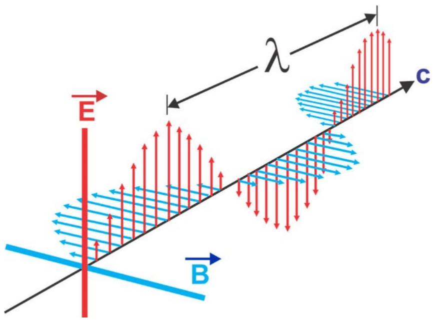
Começando:

Apresentação para esta aula: (13 Mai)

João Tiago Barata Pereira 52826

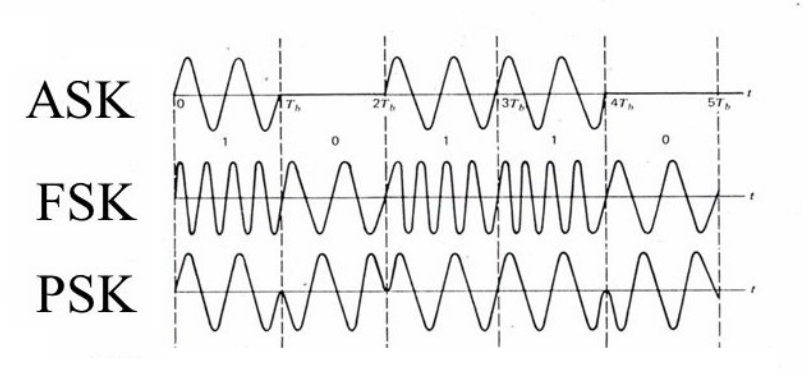
2 g) Apresente o gráfico, comparativo com a situação da aula de 11 Maio, da evolução da probabilidade de erro com o SNR, quando temos duas ôndulas aleatórias ortogonais (ao invés de antipodais)

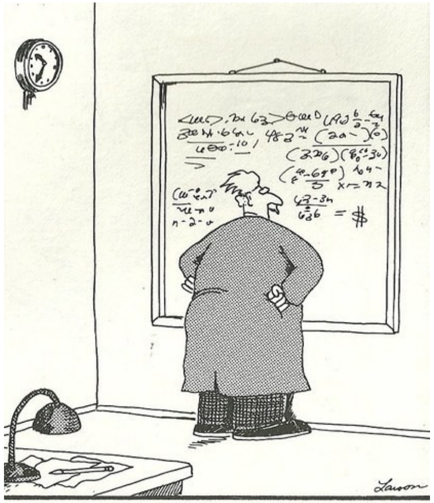
Faça variar o SNR entre -12 e 12 dBs



Não há informação sem suporte físico:

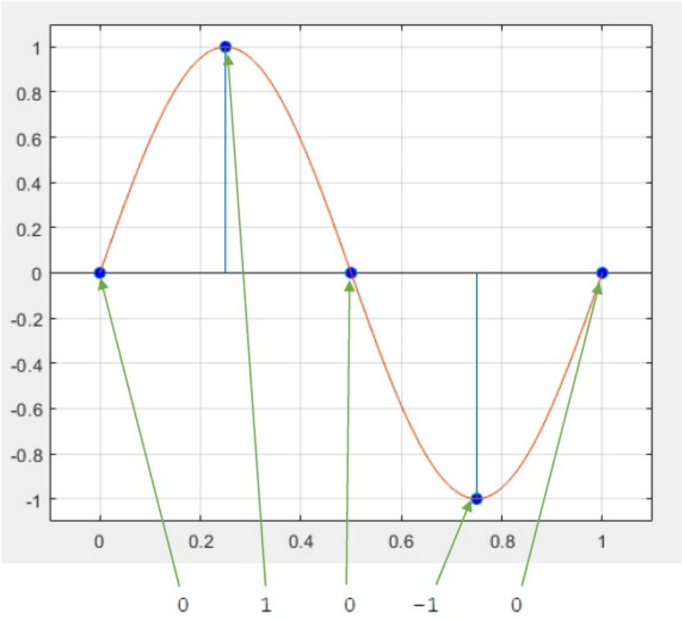
Tensão eléctrica V, campo $\vec{E}$, fotões, tempo, ...





Einstein discovers that time is actually money.

Vamos encarar as formas de onda como sinais discretos, preferencialmente de média nula.




```
clear
clc
close all
%
tt= 0:.25:1;
tt2= 0:0.01:1;
sx= sin(2*pi*tt);
sx2= sin(2*pi*tt2);

stem(tt,sx,'MarkerFaceColor', 'b');
hold on;
plot(tt2,sx2);
grid on;
axis([-0.1 1.1 -1.1 1.1]);
```

Exemplo de dois sinais discretos:

Sa= [1 -1 -1 1 1 -1 -1 1];

Sb= [1 -1 1 -1 -1 1 -1 1];

Notação de *bra* e *ket* (Dirac)

Notar que tanto Sa como Sb são de média nula e que são ortogonais: <Sa|Sb>=0

Vamos usar estes dois sinais para representar os dois valores lógicos *H* (High) e *L* (Low)

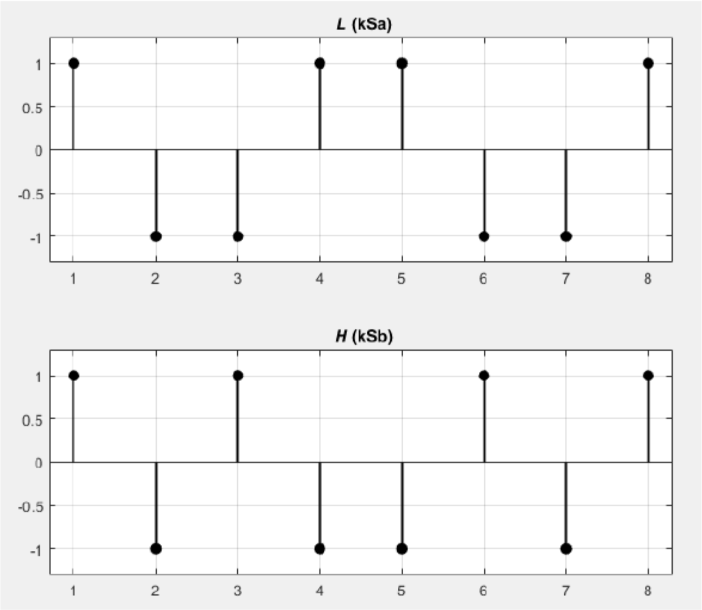
L = Sa = [1 -1 -1 1 1 -1 -1 1];

H = Sb = [1 -1 1 -1 -1 1 -1 1];

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

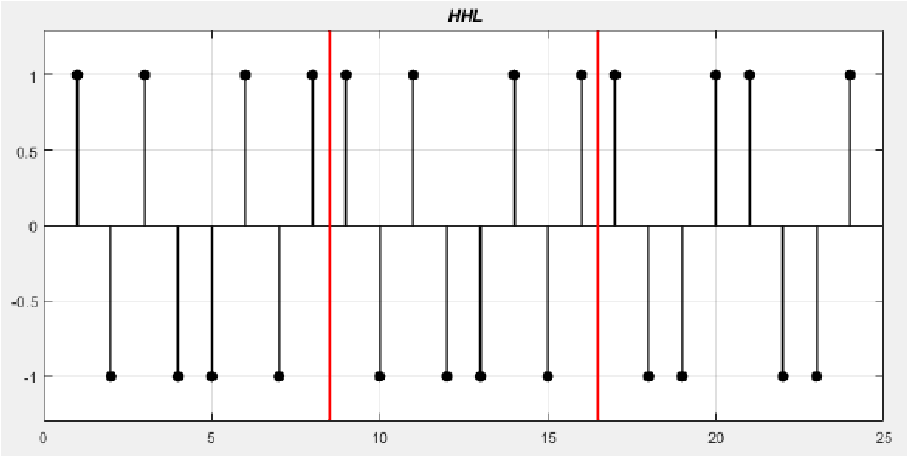
L = Sa = [1 -1 -1 1 1 -1 -1 1];

H = Sb = [1 -1 1 -1 -1 1 -1 1];



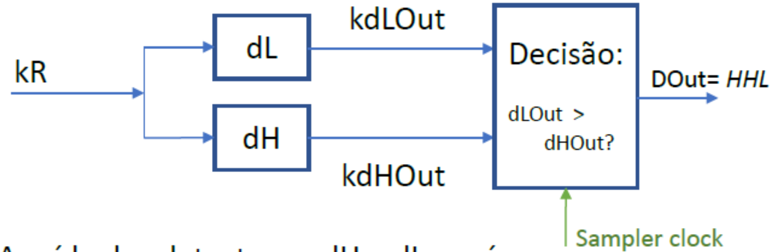

```
clear
clc
close all
%
kSa = [1    -1    -1     1     1    -1    -1     1]';
kSb = [1    -1     1    -1    -1     1    -1     1]';

subplot(2,1,1);
stem(kSa,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('{\it L} (kSa)');
grid on;
axis([0.7 8.3 -1.3 1.3]);

subplot(2,1,2);
stem(kSb,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('{\it H} (kSb)');
grid on;
axis([0.7 8.3 -1.3 1.3]);
```

A sequência binária kR= *HHL* será representada por:

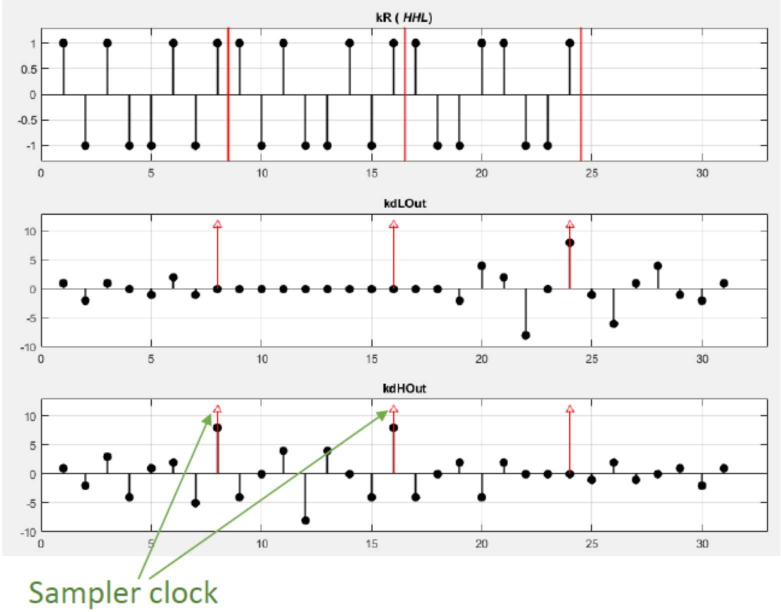



```
clear
clc
close all
%
kSa = [1    -1    -1     1     1    -1    -1     1]';
kSb = [1    -1     1    -1    -1     1    -1     1]';

kR= [kSb; kSb; kSa];

stem(kR,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('{\it HHL}');
grid on;
axis([0 25 -1.3 1.3]);

hold on
stem(8.5,  1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(8.5, -1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(16.5,  1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(16.5, -1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
```

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

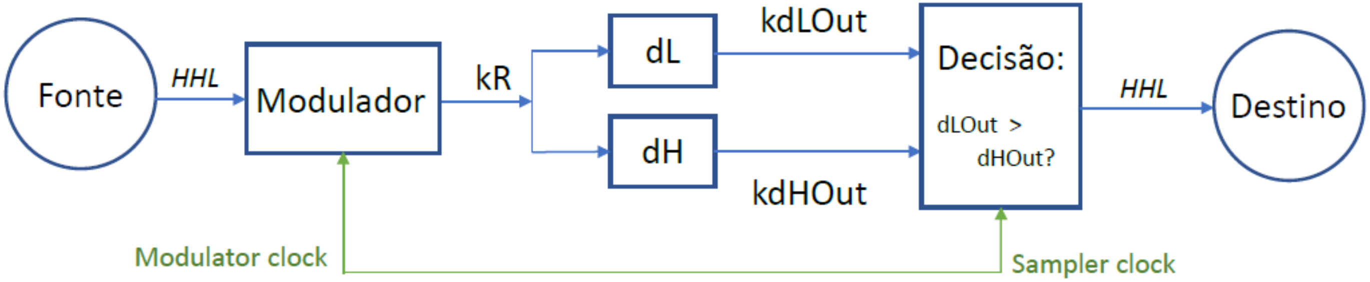


A saída dos detectores, dH e dL, será:




```
clear
clc
close all
%
kSa = [1    -1    -1     1     1    -1    -1     1]';
kSb = [1    -1     1    -1    -1     1    -1     1]';
kR= [kSb; kSb; kSa];
kdL= flip(kSa); kdH= flip(kSb);

kdLOut= conv(kR, kdL); kdHOut= conv(kR, kdH);

subplot(3,1,1)
stem(kR,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('kR ({\it HHL})'); grid on; axis([0 33 -1.3 1.3]);
hold on
stem(8.5,  1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(8.5, -1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(16.5,  1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(16.5, -1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(24.5,  1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);
stem(24.5, -1.29 ,'.r', 'LineWidth',1.5);

subplot(3,1,2)
stem(kdLOut,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('kdLOut'); grid on; axis([0 33 -10 13]);
hold on
stem(8,  11 ,'^r', 'LineWidth',.5);
stem(16, 11 ,'^r', 'LineWidth',.5);
stem(24, 11 ,'^r', 'LineWidth',.5);

subplot(3,1,3)
stem(kdHOut,'k', 'MarkerFaceColor', 'k', 'LineWidth',1.5);
title('kdHOut');
grid on;
axis([0 33 -10 13]);
hold on
stem(8,  11,'^r', 'LineWidth',.5);
stem(16, 11,'^r', 'LineWidth',.5);
stem(24, 11,'^r', 'LineWidth',.5);
```

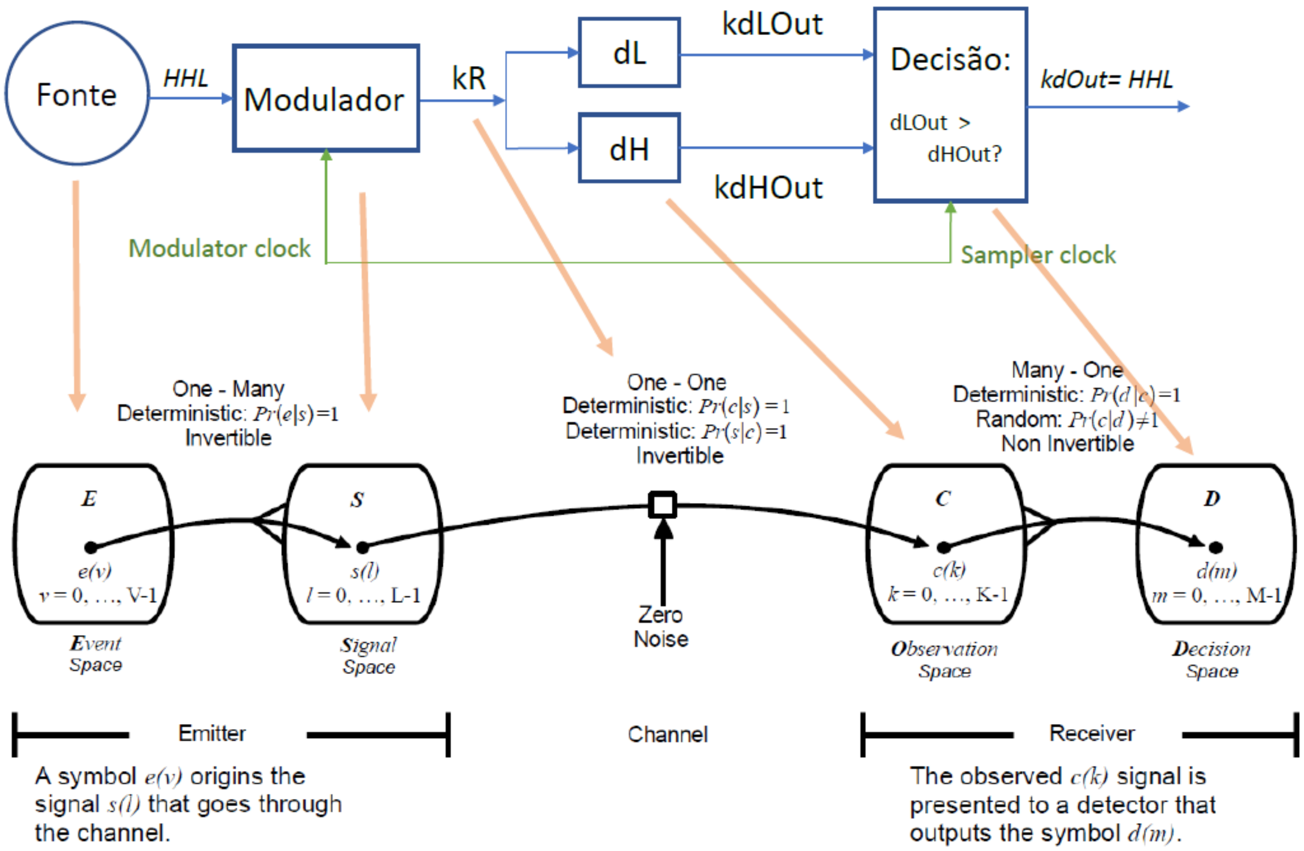
Esquema geral síncrono (situação ideal, sem ruído):



Sincronismo:
Modulator clock = Sampler clock

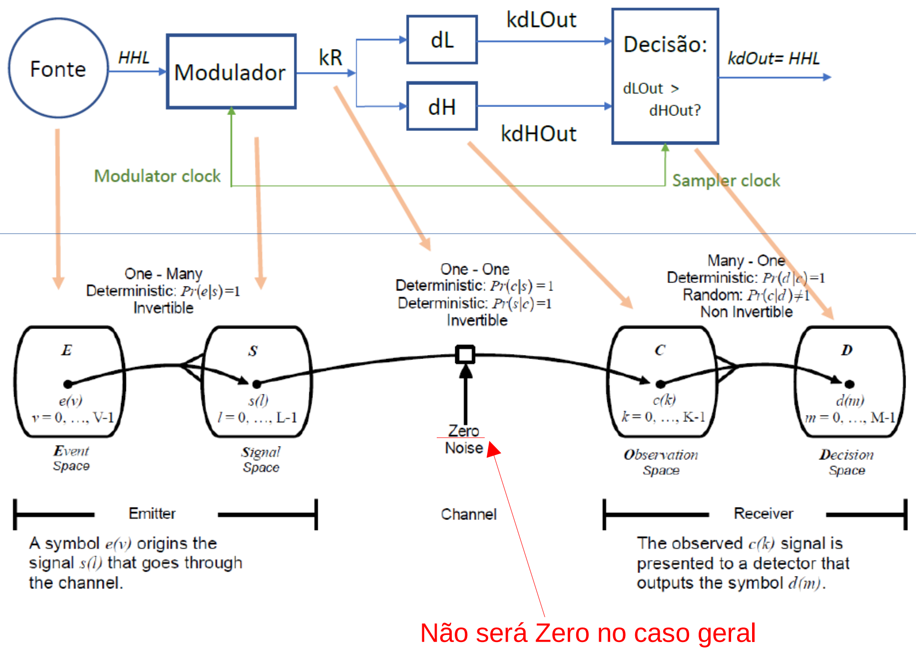
Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

Esquema geral síncrono (situação ideal, sem ruído):



Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

Esquema geral síncrono (situação ideal, sem ruído):

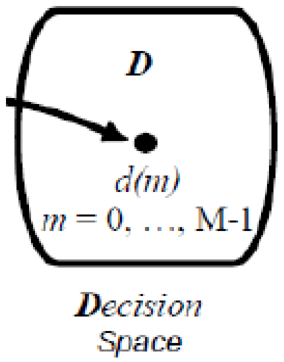


Notar bem como este esquema é absolutamente geral.

O emissor pode ser qq coisa, p. ex. um fenómeno natural, ou uma montagem artificial ...

O detector (decisor) pode ser qq coisa, p. ex. um classificador baseado numa rede neuronal, ou um comparador feito com um AmPop, ...

Notar bem como este esquema é absolutamente geral.



O detector (decisor) pode ser qq coisa, p. ex. um classificador baseado numa rede neuronal, ou um comparador feito com um AmPop, ...

Há um problema de engenharia que anda por estas paragens.
É encontrado na construção do D.

Também se intui uma questão de distâncias, pois dois pontos “próximos” devem originar a mesma decisão.

Vamos tecer considerações sobre distâncias e aproveitá-las para ajudar na resolução do problema de engenharia.

O que significa $p_H \equiv p(dOut = H) = 0.6$?

Significa que, em cada dez sampler clock ticks, dOut= *H* seis vezes.

E tal implica que:

$p_L \equiv p(dOut = L) = 0.4$,

pois a condição de normalização das probabilidades obriga a que $p_L + p_H = 1$

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

O que significa $p_H \equiv p(dOut = H) = 0.6$?

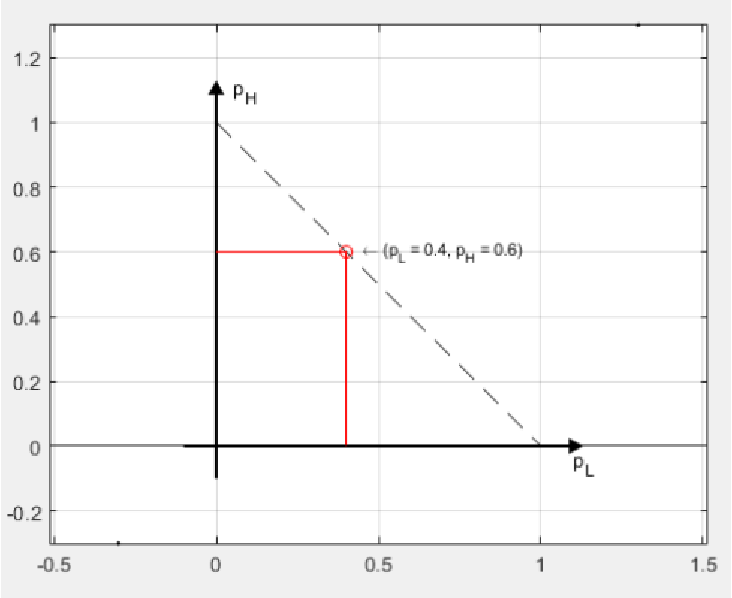
Significa que, em cada dez sampler clock ticks, dOut= *H* seis vezes.

E tal implica que:

$p_L \equiv p(dOut = L) = 0.4$,

pois a condição de normalização das probabilidades obriga a que $p_L + p_H = 1$

Diagramaticamente:




```
clear
clc
close all
%
%Canvas
plot(-0.3, -0.3, '.k'); hold on;
plot( 1.3,  1.3, '.k'); grid on; axis equal;

%Axis
%xAxis
plot([-.1 1.1], [0, 0],'k', 'LineWidth',1.5);
plot( 1.1, 0,'>k', 'MarkerFaceColor', 'k' );
sTxt = 'p_L'; text(1.1, -.05,sTxt);
%yAxis
plot([0, 0], [-.1 1.1], 'k','LineWidth',1.5);
plot( 0, 1.1, '^k', 'MarkerFaceColor', 'k');
sTxt = 'p_H'; text( +.05, 1.1, sTxt);

%Probability locus
plot([0 1], [1 0], '--k');

%Probability (PL,pH)
plot([0, 0.4], [ 0.6 0.6], 'r', 'LineWidth',0.5);
stem( 0.4,  0.6, 'r', 'LineWidth',0.5);
sTtxt = '\leftarrow (p_L = 0.4, p_H = 0.6)';
text(0.45, 0.6, sTtxt,'FontSize',8);
```

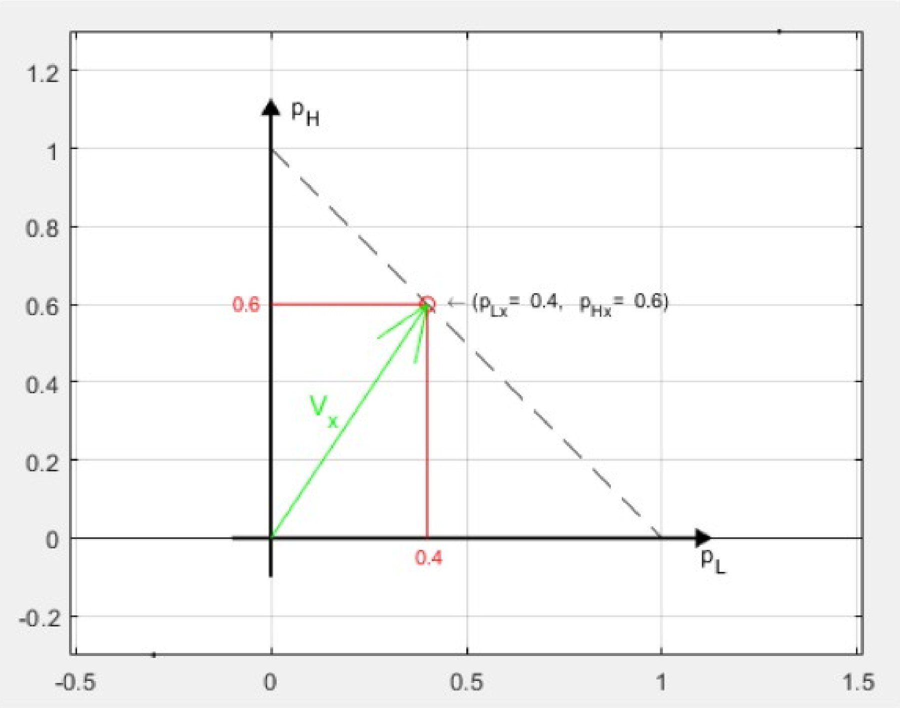
Não confundir:

O vector de sinal, que tem N amostras

com

O vector de probabilidades binárias, que tem dois valores: (p_L, p_H)

Consideremos o vector das probabilidades: $V_x = [p_{L_x}, p_{H_x}]$

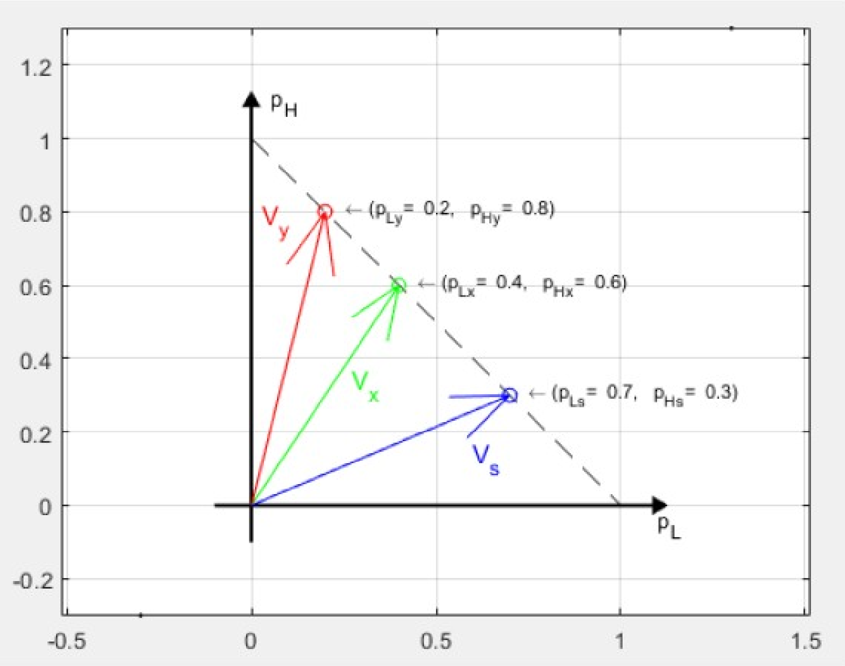


Podemos considerar que V_x é um
vector de probabilidade unitária, ou normalizada.

```
clear; clc, close all
%
%Canvas
plot(-0.3, -0.3, '.k'); hold on;
plot( 1.3,  1.3, '.k'); grid on; axis equal;

%Axis
%xAxis
plot([-.1 1.1], [0, 0],'k', 'LineWidth',1.5);
plot( 1.1, 0,'>k', 'MarkerFaceColor', 'k' );
sTxt = 'p_L'; text(1.1, -.05,sTxt);
%yAxis
plot([0, 0], [-.1 1.1], 'k','LineWidth',1.5);
plot( 0, 1.1, '^k', 'MarkerFaceColor', 'k');
sTxt = 'p_H'; text( +.05, 1.1, sTxt);

%Black Probability locus
plot([0 1], [1 0], '--k');

%Red Probability (PL,pH)
plot([0, 0.4], [ 0.6 0.6], 'r', 'LineWidth',0.5);
stem( 0.4,  0.6, 'r', 'LineWidth',0.5);
sTtxt = '\leftarrow (p_L_x=  0.4,   p_H_x=  0.6)';
text(0.45, 0.6, sTtxt,'FontSize',8);
text(0.37, -0.05, '0.4','FontSize',8,'Color','r');
text(-0.1, 0.6, '0.6','FontSize',8,'Color','r');

%Green Vector
compass(0.4, 0.6,'g');
text(0.1, 0.33, 'V_x','FontSize',11,'Color','g');
```

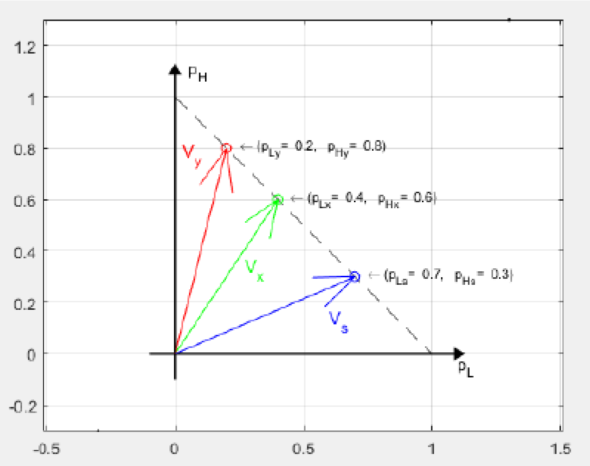
Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

Consideremos vários vectores de probabilidades



Sob uma certa perspectiva,
os vectores V_x, V_y, V_s são todos "unitários",
pois em todos eles
a somas das componentes (= probabilidades) dá UM.

```
clear; clc, close all
%
%Canvas
plot(-0.3, -0.3, '.k'); hold on;
plot( 1.3,  1.3, '.k'); grid on; axis equal;

%xAxis
plot([-.1 1.1], [0, 0],'k', 'LineWidth',1.5);
plot( 1.1, 0,'>k', 'MarkerFaceColor', 'k' );
sTxt = 'p_L'; text(1.1, -.05,sTxt);
%yAxis
plot([0, 0], [-.1 1.1], 'k','LineWidth',1.5);
plot( 0, 1.1, '^k', 'MarkerFaceColor', 'k');
sTxt = 'p_H'; text( +.05, 1.1, sTxt);
%Black Probability locus
plot([0 1], [1 0], '--k');

%Green Vector
compass(0.4, 0.6,'g'); text(0.27, 0.33, 'V_x','FontSize',11,'Color','g');
plot( 0.4,  0.6, 'go', 'LineWidth',0.5);
sTtxt = '\leftarrow (p_L_x=  0.4,   p_H_x=  0.6)';
text(0.45, 0.6, sTtxt,'FontSize',8);

%Red Vector Vy
compass(0.2, 0.8,'r'); text(0.03, 0.78, 'V_y','FontSize',11,'Color','r');
plot( 0.2,  0.8, 'ro', 'LineWidth',0.5);
sTtxt = '\leftarrow (p_L_y=  0.2,   p_H_y=  0.8)';
text(0.25, 0.8, sTtxt,'FontSize',8);

%Blue Vector Vs
compass(0.7, 0.3,'b'); text(0.6, 0.13, 'V_s','FontSize',11,'Color','b');
plot( 0.7,  0.3, 'bo', 'LineWidth',0.5);
sTtxt = '\leftarrow (p_L_s=  0.7,   p_H_s=  0.3)';
text(0.75, 0.3, sTtxt,'FontSize',8);
```



A noção intuitiva de extensão de um vector é formalizada recorrendo ao conceito de NORMA: Um vector será mais ou menos extenso conforme a sua norma seja maior ou menor

Sob uma certa perspectiva,
os vectores V_x, V_y, V_s são todos "unitários",
pois em todos eles
a somas das componentes (= probabilidades) dá UM.

Uma norma em que os vectores V_x, V_y, V_s são todos unitários é a norma L_1.

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Relembrar:

A norma de um vector $\boldsymbol{x}$ é qualquer escalar $\|\boldsymbol{x}\|$ tal que:

a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

b) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \ sse \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

c) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$, onde α é um escalar

d) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

Normas L_p para $\boldsymbol{x} = (x_1, \ x_2, \cdots, x_N)$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

onde $p \geq 1$ é um número real.

---

a) Qual é a norma L_1 do vector x_a= [0.3 0.4   0.3]?

b) Qual é a norma L_1 do vector x_b= [3 -4   3]?

c) Qual é a norma L_1 do vector x_c= [-3 -4   3]?

d) Qual é a norma L_1 do vector x_d= x_b+ x_c?

e) Qual é a norma L_2 do vector x_e= [3 4]?

Normas e distâncias:

Relembrar: O que é uma ***distância*** entre sinais (vistos como pontos N-dimensionais)

a) A distância $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ entre dois sinais (pontos) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ é sempre um número real não negativo, só sendo nula quando os dois sinais são o mesmo.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

b) A distância é simétrica, pois é igual em ambos os sentidos

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

c) A distância satisfaz a desigualdade triangular

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

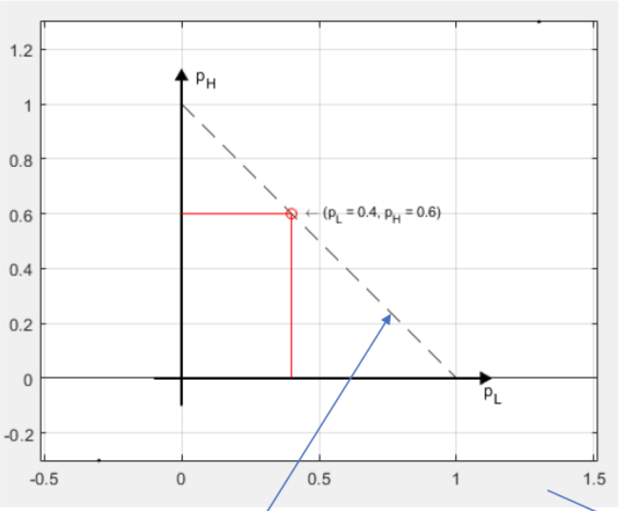
Qualquer norma "induz" uma distância. (Nem todas as distâncias são baseadas em normas...)

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Tem-se que $p_H \equiv p(dOut = H) = 0.6$

E que $p_L \equiv p(dOut = L) = 0.4$



Lugar geométrico do pontos à distância UM da origem

Normas l_p para vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, \ x_2, \cdots, x_N)$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

onde $p \geq 1$ é um número real.

As correspondentes distâncias serão:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

Na distância euclideana $p = 2$

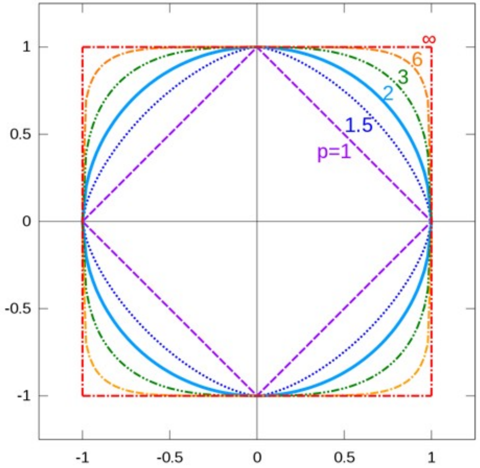
Neste caso $p = 1$
(Taxi cab distance ou Manhattan distance)

Q: O que é uma bola de raio r centrada na origem?

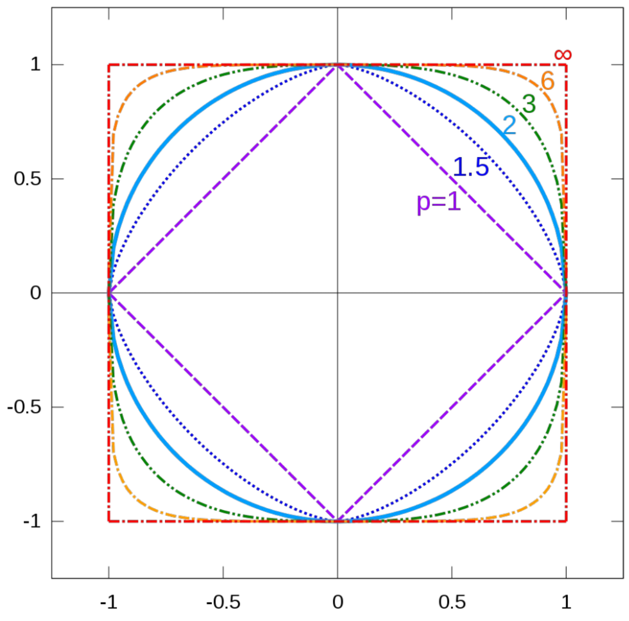
R: É o lugar geométrico dos pontos até à distância r da origem

Depende da norma

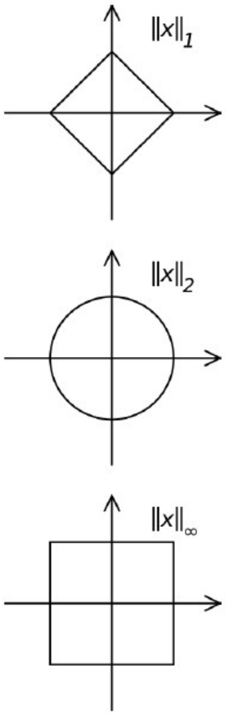
O caso das Normas p:
Bolas unitárias para vários valores de p



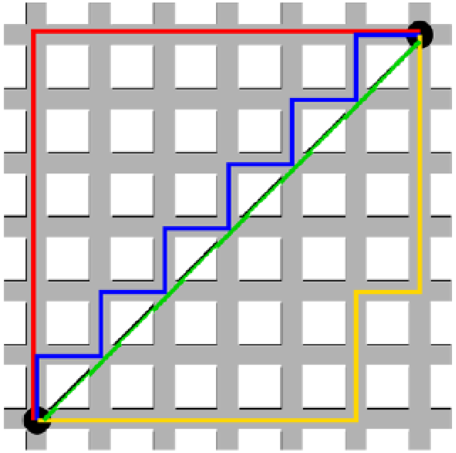
Vendo com mais detalhe:



Algumas p-bolas de raio UM:

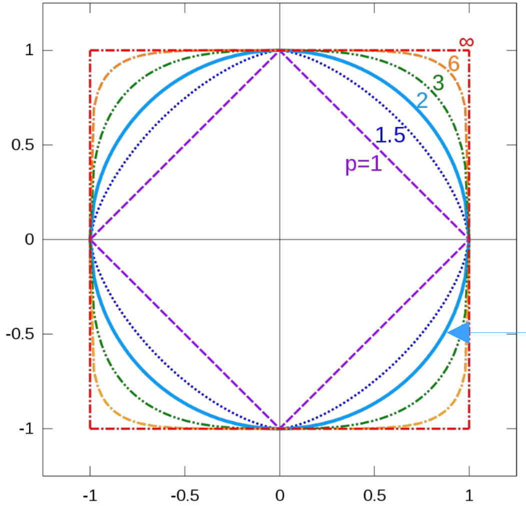


Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6



Verde:
Distância euclideana (p=2) entre dois pontos.

Outras cores:
Distância Taxicab (p=1) entre dois pontos



Só esta (n=2) é que tem a circunferência como fronteira

A distância p=2 (Euclideana) é aquela em que a norma do vector é invariante relativamente a rotações em torno da origem
Nas outras distâncias, p≠2 , a norma não é invariante quando o vector roda com centro na origem.

Revisão rápida:

Comprimento do vector – Norma do vector

Afastamento entre pontos – Distância

Estes dois conceitos, que são diferentes, acabam por se interpenetrar quando se considera o comprimento do vector como a distância da origem à "ponta" do mesmo ...

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

Vamos interpretar com sinais o facto de que $\langle V_x | e_{H^N} \rangle = p_H$,

O emissor e o receptor estão sincronizados (Situação síncrona).
Entre *clock ticks* a separação é T_b, a duração de um bit.
Na mensagem Mx, o número total de bits é N.
Cada bit só pode assumir um dos dois valores lógicos *H* ou *L*.
Cada valor lógico tem como base de suporte um sinal com B amostras.
O intervalo temporal entre amostras é $T_s = \frac{T_b}{B}$

Concretizando: N= 10, $T_s = 1$, B= 8

L = Sa = [1 -1 -1 1 1 -1 -1 1];

H = Sb = [1 -1 1 -1 -1 1 -1 1];

Mx= *HHLHHLLHHL* → Sx= [Sb, Sb, Sa, Sb, Sb, Sa, Sa, Sb, Sb, Sa];

$$V_x = e_{S_x} = \frac{S_x}{\sqrt{\langle S_x | S_x \rangle}}$$

$$e_{H^N} = \frac{H^N}{\sqrt{\langle H^N | H^N \rangle}} = \frac{{S_b}^N}{\sqrt{\langle {S_b}^N | {S_b}^N \rangle}}$$

Cuidado aqui: L_2 versus L_1

```
clear
clc
close all
%
kSa = [1     -1     -1      1      1     -1     -1      1]';
kSb = [1     -1      1     -1     -1      1     -1      1]';
kSx= [kSb; kSb; kSa; kSb; kSb; kSa; kSa; kSb; kSb; kSa];
keSx= kSx/sqrt(kSx'*kSx);

kHN= [kSb; kSb; kSb; kSb; kSb; kSb; kSb; kSb; kSb; kSb];
keHN= kHN/sqrt(kHN'*kHN);

ProbH= keSx'*keHN;
disp(ProbH)
```

0.60000

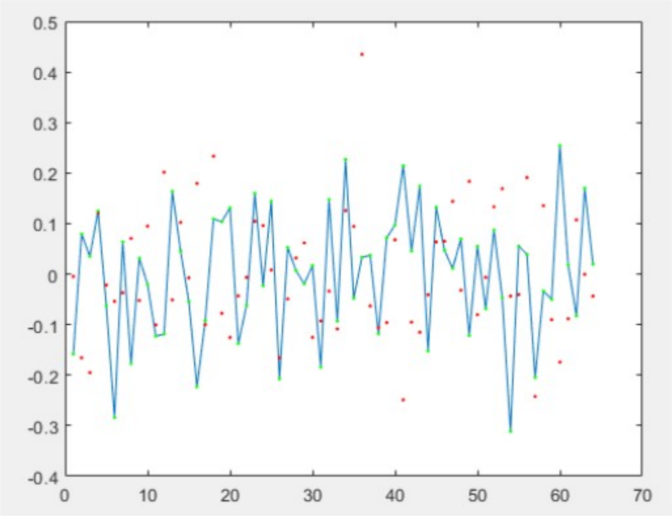
Na prática o sinal não é processado como um todo, pois N >> 10.
É processado bit a bit, sendo somados os resultados e divididos por N.

E se houver ruído?

Tópicos sobre Detecção e Estimação … 6

Consideremos uma situação geral - Modulador:

```
%Faz09GerarSignalMx
clear; clc; close all
%
BB= 64;          %Numero de amostras por bit
NN= 20000;       %Numero total de bits L e H
pH= 0.6;         %Probabilidade de H

MM= BB*NN;        %Comprimento do sinal mensagem

%Geracao do Sa para L, e do Sb para H - Media nula
kSaRaw= randn(BB,1); kSbRaw= randn(BB,1);
kSam= kSaRaw-mean(kSaRaw); kSbm= kSbRaw-mean(kSbRaw);
kSa= kSam/sqrt(kSam'*kSam);
kSbo= kSbm- (kSbm'*kSa)*kSa;
kSb= kSbo/sqrt(kSbo'*kSbo);

%Geração da mensagem binaria aleatorio
kMb= (rand(NN,1)<pH);

%Geracao do sinal mensagem
kMx= zeros(MM,1);
for nn=1:NN
    if kMb(nn)
        kTTb= kSb;  %Its H
    else
        kTTb= kSa;  %Its L
    end
    qStart= 1+(nn-1)*BB;          %Modulator clock
    qEnd= qStart+ BB -1;
    kMx(qStart:qEnd)= kTTb;
end

save MxFull kMx kSa kSb kMb
save Mx kMx kSa kSb

%Done - - -
plot(kMx(1:BB)); hold on; plot(kSa,'r.'); plot(kSb,'g.');  %Visual first
```



Consideremos uma situação geral - Receptor:

```
%Faz10DetectSignalMb
clear; clc; close all
%
load MxFull  %get kSa, kSb, kMx, kMb
BB= numel(kSa);
MM= numel(kMx);

NN= fix(MM/BB);     %Number of bits

kMbOut= -ones(NN,1);     %Init to -1;
for nn=1:NN
    qStart= 1+(nn-1)*BB;        %This is the sampler clock
    qEnd= qStart+ BB -1;
    kTTb=  kMx(qStart:qEnd);
    if (kTTb'*kSa)> (kTTb'*kSb)
       kMbOut(nn)= 0;
    else
       kMbOut(nn)= 1;
    end
end

%Verify
disp(sum(kMbOut == -1));      %Should be zero
disp(sum(kMbOut == kMb));     %Should be NN
```

Terminando:

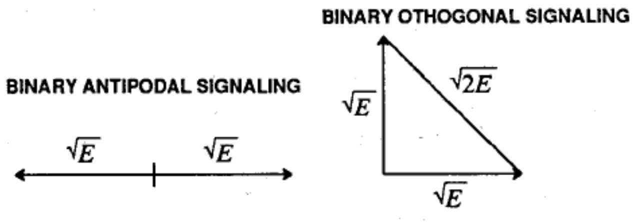
Apresentação para a próxima aula: (18 Mai)

Adapte o código anterior para incluir ruído gaussiano e estime pHr para o sinal que recebeu em função do pHe emitido e do SNR em dBs.

Analize as situações extremas:

Para SNRs muito negativos,
qual é a dependência funcional entre pHr e pHe?

Para SNRs muito positivos,
qual é a dependência funcional entre pHr e pHe?


BINARY OTHOGONAL SIGNALING
BINARY ANTIPODAL SIGNALING
$\sqrt{E}$
$\sqrt{E}$
$\sqrt{2E}$
$\sqrt{E}$
$\sqrt{E}$

OBRIGADO