Aplicações de sinais

Prof. Raul T. Rato

DEEC - 2021

Começando:

Apresentação para a próxima aula:

Dedução do Kernel de Dirichlet

(DTFT do sinal K-N rectangular)

Considerações sobre Janelas … 4

Obra de referência: Understanding digital signal processing 3Ed, Lyons, 2011

DFT equation (rectangular form): →

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(2\pi nm/N) - j\sin(2\pi nm/N)]$$

DFT equation (exponential form): →

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}$$

Outros autores preferem usar o $\boldsymbol{k}$.

$X(m)$ = the mth DFT output component, i.e., $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, etc.,
m = the index of the DFT output in the frequency domain,
m = 0, 1, 2, 3, . . ., N–1,
$x(n)$ = the sequence of input samples, $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, etc.,
n = the time-domain index of the input samples, n = 0, 1, 2, 3, . . ., N–1,
N = the number of samples of the input sequence and the number of frequency points in the DFT output.

Notar que começa sempre em zero.

Considerações sobre Janelas … 4

sample and perform an 8-point DFT on a continuous input signal containing components at 1 kHz and 2 kHz, expressed as

$$x_{\text{in}}(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4)$$

$$x(n) = x_{\text{in}}(nt_s) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot nt_s) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot nt_s + 3\pi/4)$$

$f_s = 8000$ samples/second $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.3535, & x(1) &= 0.3535, \\ x(2) &= 0.6464, & x(3) &= 1.0607, \\ x(4) &= 0.3535, & x(5) &= -1.0607, \\ x(6) &= -1.3535, & x(7) &= -0.3535. \end{aligned}$$

Considerações sobre Janelas … 4

Pode ser interpretado
como um produto interno

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

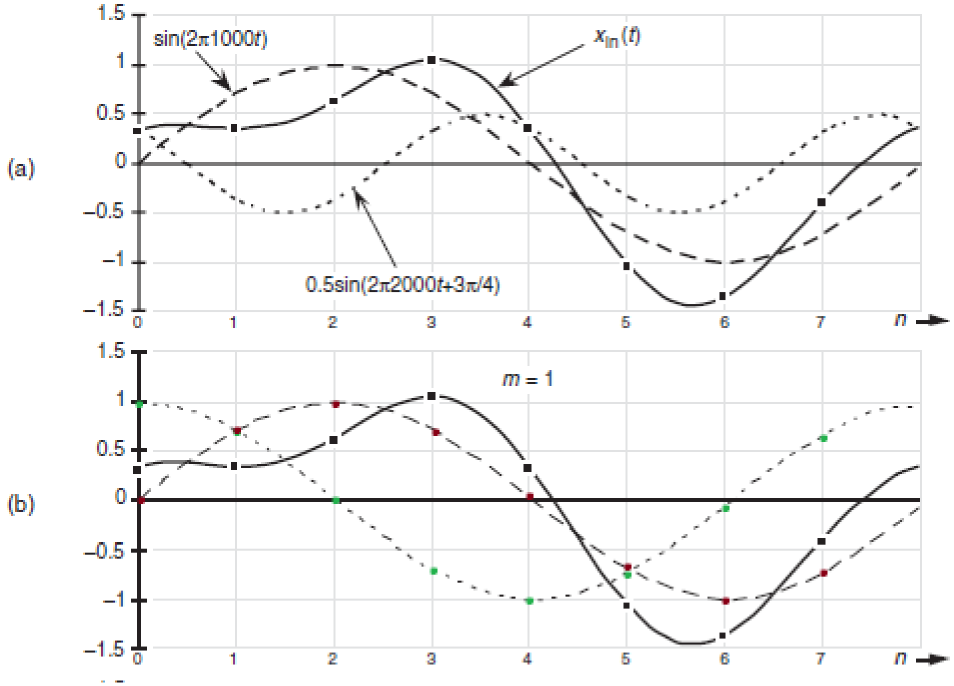
O escalar $X(m)$ é o resultado do produto interno entre o vector $x(n)$ e o vector $e^{-j2\pi\frac{m}{N}}(n)$

O escalar $X(m)$ é o resultado do produto interno entre o vector $x(n)$ e o vector $W_N^m(n)$

$W_N^m \Leftrightarrow e^{-j2\pi\frac{m}{N}}$

$$X(m) = \langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{W_N^m} \rangle$$

Considerações sobre Janelas … 4

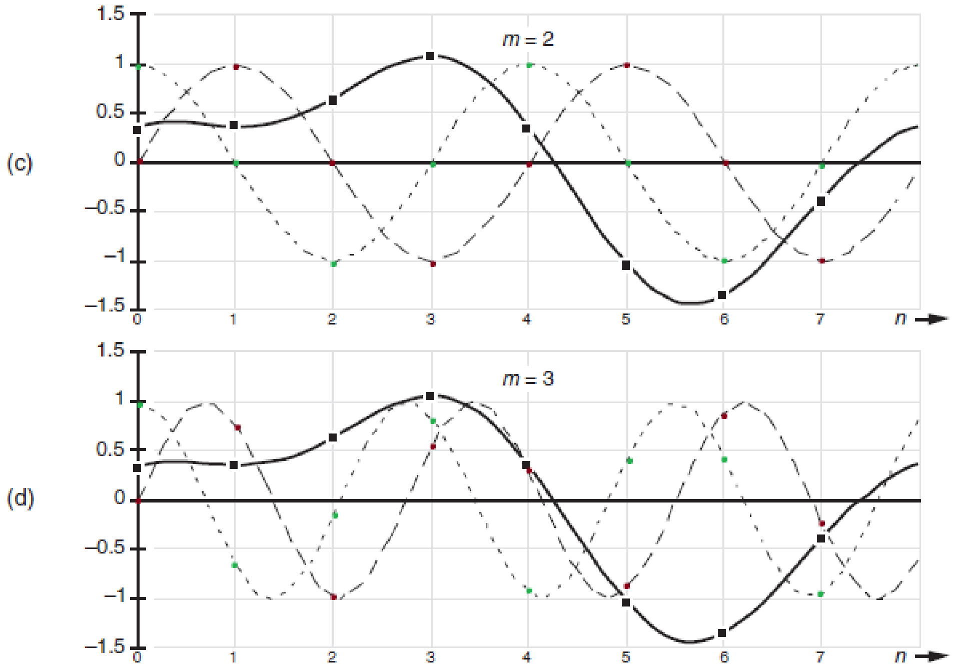


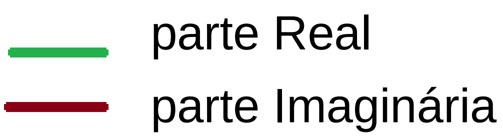
parte Real

parte Imaginária

(a) the input signal;
(b) the input signal and the $m = 1$

Considerações sobre Janelas … 4





(c) the input signal and the $m = 2$

(d) the input signal and the $m = 3$

Considerações sobre Janelas … 4

$$
\begin{aligned}
X(1) = {} & 0.3535 \cdot 1.0 && - j(0.3535 \cdot 0.0) && \leftarrow \textbf{this is the } n = 0 \textbf{ term} \\
& + 0.3535 \cdot 0.707 && - j(0.3535 \cdot 0.707) && \leftarrow \textbf{this is the } n = 1 \textbf{ term} \\
& + 0.6464 \cdot 0.0 && - j(0.6464 \cdot 1.0) && \leftarrow \textbf{this is the } n = 2 \textbf{ term} \\
& + 1.0607 \cdot -0.707 && - j(1.0607 \cdot 0.707) && \quad \ldots \\
& + 0.3535 \cdot -1.0 && - j(0.3535 \cdot 0.0) && \quad \ldots \\
& - 1.0607 \cdot -0.707 && - j(-1.0607 \cdot -0.707) && \quad \ldots \\
& - 1.3535 \cdot 0.0 && - j(-1.3535 \cdot -1.0) && \quad \ldots \\
& - 0.3535 \cdot 0.707 && - j(-0.3535 \cdot -0.707) && \leftarrow \textbf{this is the } n = 7 \textbf{ term}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & 0.3535 && + j0.0 \\
& + 0.250 && - j0.250 \\
& + 0.0 && - j0.6464 \\
& - 0.750 && - j0.750 \\
& - 0.3535 && - j0.0 \\
& + 0.750 && - j0.750 \\
& + 0.0 && - j1.3535 \\
& - 0.250 && - j0.250
\end{aligned}
$$

$$= 0.0 - j4.0 = 4 \angle -90^\circ.$$

E assim por aí em diante, m = 2, 3, …, 7.

Daqui a necessidade de um algoritmo rápido … … FFT

Relações de simetria na DFT:

Simetrias pares: A parte real de X(m) é par. O valor absoluto de X(m) é par.

Simetrias ímpares: A parte imaginária de X(m) é ímpar. A fase de X(m) é ímpar.

Relembrar:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
s & = & s_{\mathrm{RE}} & + & s_{\mathrm{RO}} & + & i s_{\mathrm{IE}} & + & i\, s_{\mathrm{IO}} \\
\Big\Updownarrow \mathcal{F} & = & \Big\Updownarrow \mathcal{F} & + & \Big\Updownarrow \mathcal{F} & + & \Big\Updownarrow \mathcal{F} & + & \Big\Updownarrow \mathcal{F} \\
S & = & S_{\mathrm{RE}} & + & i\, S_{\mathrm{IO}} & + & i S_{\mathrm{IE}} & + & S_{\mathrm{RO}}
\end{array}
$$

E : Even (Par)
O : Odd (Ímpar)

Num sinal real a parte ímpar no tempo dá origem à parte ímpar imaginária na frequência

Inversão espectral:

The discrete spectrum of any digital signal can be inverted by multiplying the signal's discrete-time samples by a sequence of alternating plus ones and minus ones (1, –1, 1, –1, etc.), indicated in the literature by the succinct expression $(-1)^n$.

in the DSP literature be aware that some clever authors may represent the $(-1)^n$ sequence with its equivalent expressions of

$$(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$$

multiplication of real signal samples by $(-1)^n$ flips the positive-frequency band of interest, from zero to $+f_s/2$ Hz, where the center of the flipping is $f_s/4$ Hz.

Likewise, the multiplication flips the negative frequency band of interest, from $-f_s/2$ to zero Hz, where the center of the flipping is $-f_s/4$ Hz

---

Qualquer componente DC (zero Hz) presente será transladada para a frequência π ($+f_s/2$) ou equivalentemente para $-\pi$ ($-f_s/2$).

A componente em π ($f_s/2$) será a nova componente DC.

DFT LEAKAGE

Vazamento espectral, espalhamento espectral

DFTs are constrained to operate on a finite set of N input values, sampled at a sample rate of f_s, to produce an N-point transform whose discrete outputs are associated with the individual analytical frequencies $f_{\text{analysis}}(m)$, with

$$f_{\text{analysis}}(m) = \frac{mf_s}{N}, \text{where } m = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

If the input has a signal component at some intermediate frequency between our analytical frequencies of mf_s/N, say $1.5f_s/N$, this input signal will show up to some degree in *all* of the N output analysis frequencies of our DFT!

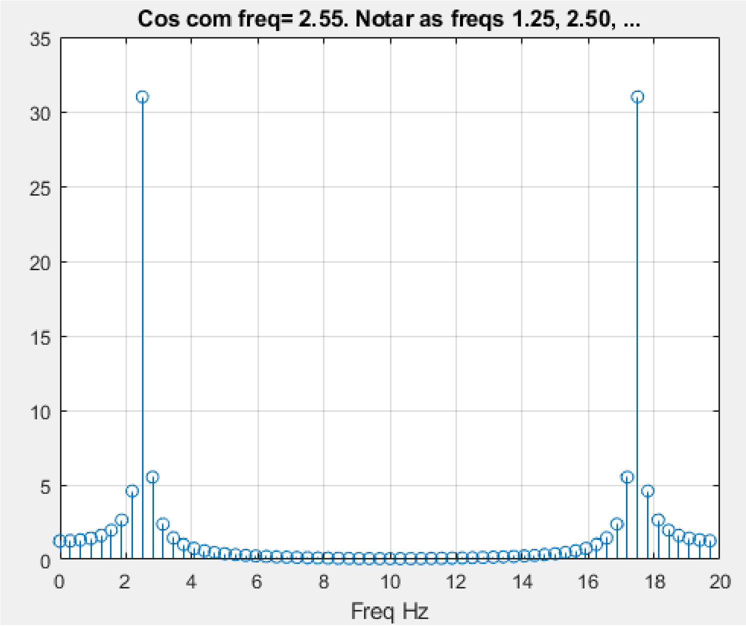
(Mostrar a animação em Matlab)

Considerações sobre Janelas … 4

```
clear
close all
clc
%
qNN= 64;
qFs= 20;

bFreq= 0:0.05:(qFs/2);

ktt= ((0:63)')/qFs;
kff= qFs*( ((0:(qNN-1))')/qNN) ;

for ff= bFreq
    kSs= cos(2*pi*ff*ktt);
    kSsfa= abs(fft(kSs));
    stem(kff, kSsfa);
    title(sprintf('Cos com freq= %4.2f. Notar as freqs 1.25, 2.50, ...', ff));
    grid  on
    xlabel('Freq Hz');
    pause
end
```

Código para a animação em Matlab

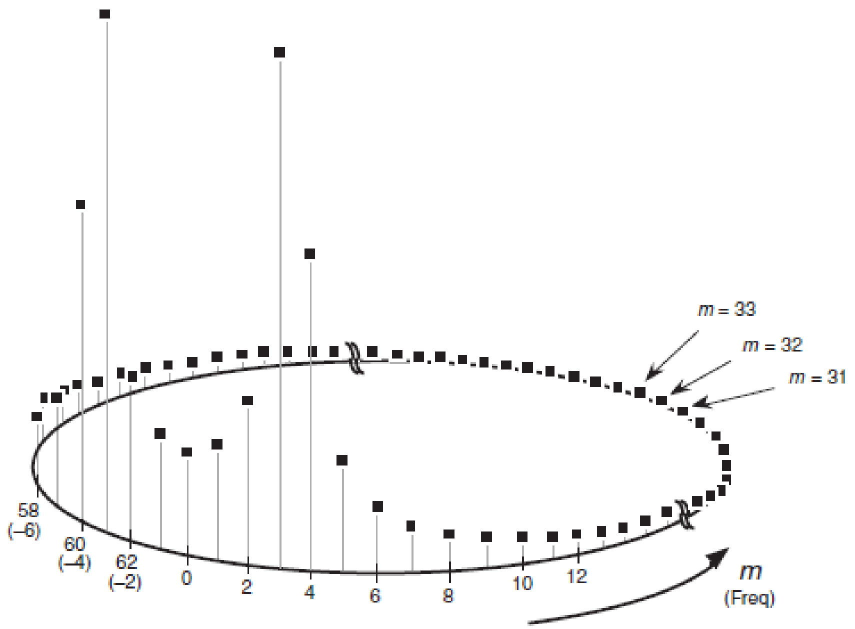
Considerações sobre Janelas … 4



We say that input
signal energy shows up in all of the DFT's output *bins*.

Engineers often refer to
DFT samples as "bins." So when you see, or hear, the word *bin* it merely
means a frequency-domain sample.

Considerações sobre Janelas … 4



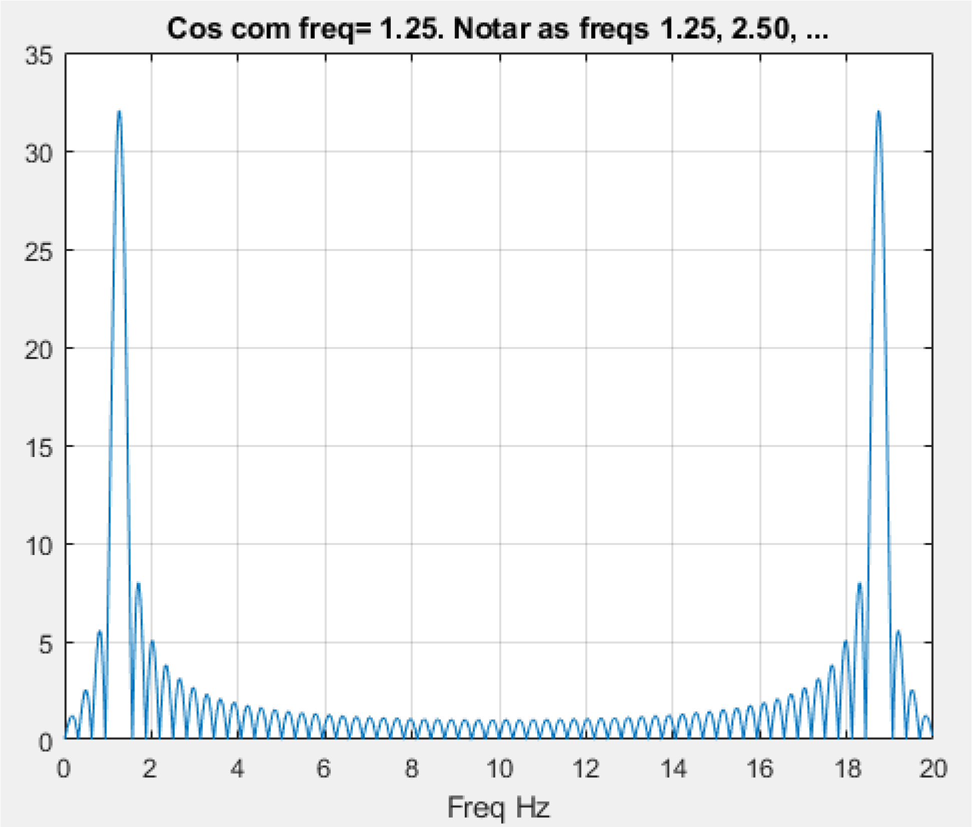
Cyclic representation of the DFT's spectral replication when the DFT input is 3.4 cycles per sample interval.

Considerações sobre Janelas … 4

```
clear
close all
clc
%
qNN= 1024;
qFs= 20;

bFreq= 0:0.05:(qFs/2);

ktt= ((0:63)')/qFs;
kff= qFs*( ((0:(qNN-1))')/qNN) ;

for ff= bFreq
    kSs= cos(2*pi*ff*ktt);
    kSsfa= abs(fft(kSs, qNN));
    plot(kff, kSsfa);
    title(sprintf('Cos com freq= %4.2f. Notar as freqs 1.25, 2.50, ...', ff));
    grid  on
    xlabel('Freq Hz');
    pause
end
```

Código para a animação em Matlab, mas com zero padding

Considerações sobre Janelas … 4

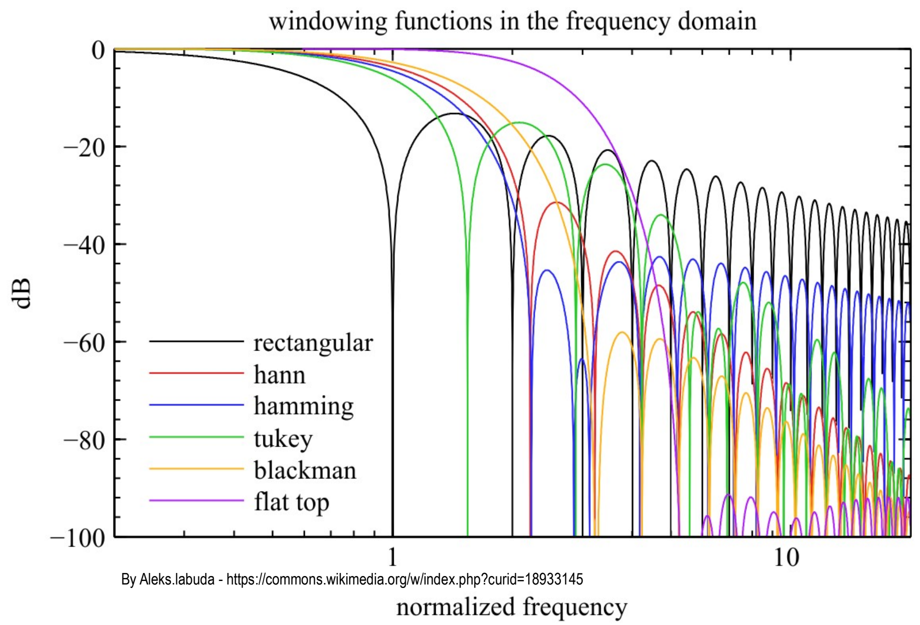


Terminando:

Apresentação para a próxima aula: (13 Abr)

Mostre a animação do sinal desta aula
quer com com uma janela triangular
quer com uma de Hann

Considerações sobre Janelas … 4



Janelas há muitas….

OBRIGADO