

Aplicações de sinais



Prof. Raul T. Rato

DEEC - 2021

Considerações sobre Janelas ... 5

Começando:

Apresentação para esta aula: (13 Abr)

Francisco José de Souza António 46159

Mostre a animação do sinal da aula anterior
quer com uma janela triangular
quer com uma de Hann

Considerações sobre Janelas ... 5

Exercício para fazer agora e responder pelo Chat do ZOOM:

a) São iguais ou diferentes as DTFT dos sinais

$$x_1[n] = [-a, b, 0, 0, 0];$$

$$x_2[n] = [-a, b, 0, 0, 0, 0]; \quad ?$$

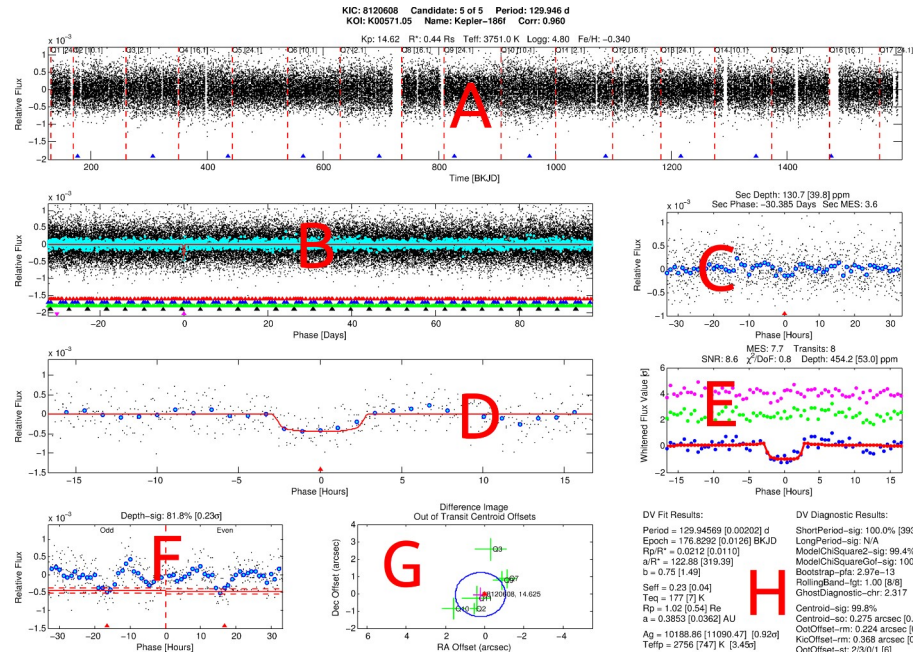
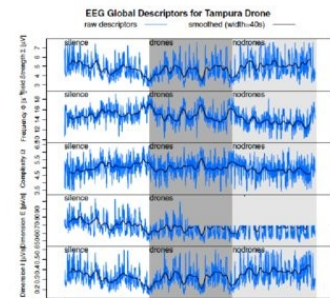
b) São iguais ou diferentes as DFT dos sinais

$$x_3[n] = [-a, b, 0];$$

$$x_4[n] = [-a, b, 0, 0, 0, 0, 0]; \quad ?$$

Considerações sobre Janelas ... 5

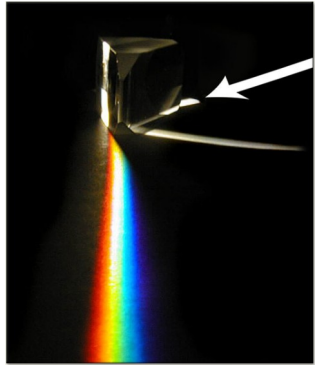
Um problema muito importante no processamento de sinais
– Considerado por vezes *O Problema Fundamental* –
é o de detectar a presença de um sinal fraco no seio do sinal recolhido



<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/DVOnePageSummaryPageCompanion-dr25-v7.html>



A perspectiva espectral

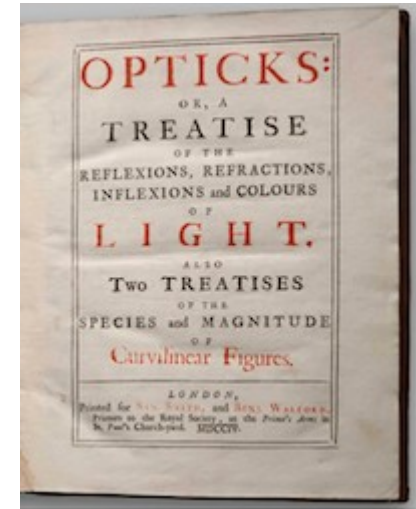


Newton introduziu a expressão ‘colour spectrum’

À época (Hook, ...) defendia-se que a luz branca ficava colorida por passar no vidro do prisma. Quanto mais vidro percorresse, mais colorida ficava, nunca podendo voltar a ser branca.

Fugindo da peste em Londres, Newton foi para o campo, onde entre outras coisas, procurou construir um telescópio.

Uma coisa leva a outra e teve de estudar a luz. Quando descobriu que a luz branca *reaparecia* quando o prisma juntava as cores, considerou **fantasmas** as cores presentes na luz branca. Tinha nascido o ‘**colour spectrum**’.



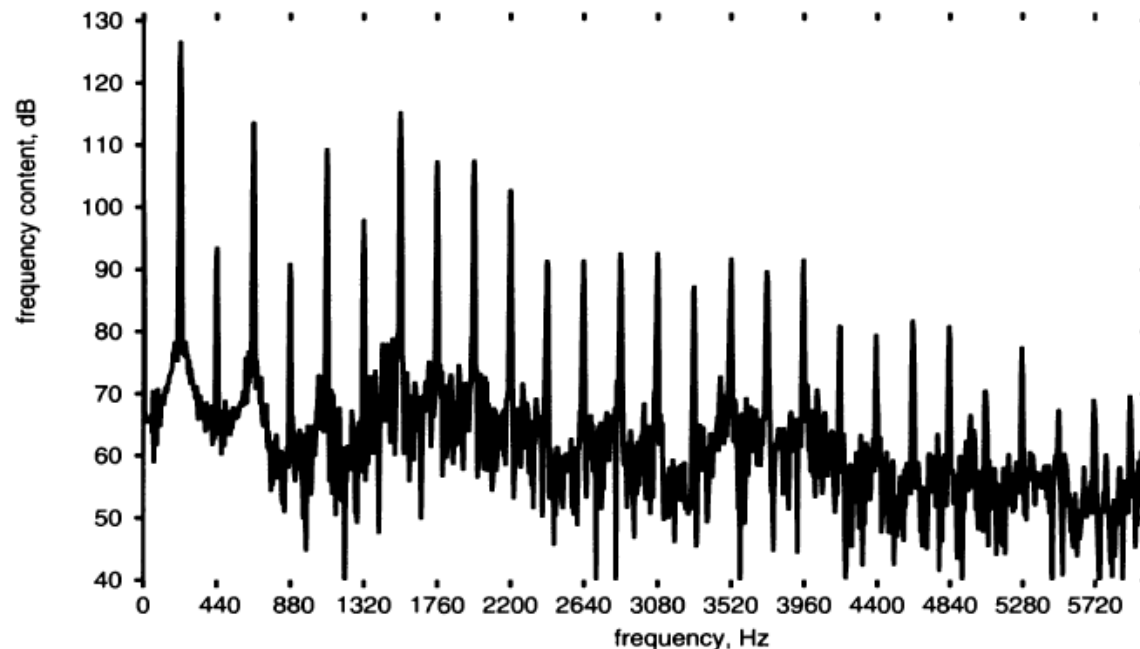
Newton, Isaac. 1730. *Opticks, or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and the Colours of Light*. London UK. 1704.

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

Retirado de:

Ken Steiglitz
- *A Digital Signal Processing
Primer with Applications to
Digital Audio and Computer
Music*, pp 40, 1996



The frequency content (spectrum) of a note played on a clarinet.
The pitch is A at 220 Hz, and the frequency axis shows multiples of 440 Hz.

this plot was generated
with a 4096-point FFT using a Hamming window, and the original sound
was digitized at a sampling rate of 22,050 Hz.

Porque é que a perspectiva espectral é tão importante

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 1/5



Relembrando que a convolução é comutativa

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x[k] h[n-k] = \dots \\ &\dots = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h[k] x[n-k] = h[n] * x[n] \end{aligned}$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (1)$$

Porque é que a perspectiva espectral é tão importante

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 2/5

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (1)$$

Consideremos que $x[n] = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Considerações sobre Janelas ... 5

Porque é que a perspectiva espectral é tão importante

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 3/5

Consideremos que $x[n] = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Note-se que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$



Tem como resultado um número complexo H parametrizado por ω , pois o k é a variável muda do somatório



Defina-se:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega}) \quad (2)$$

Porque é que a perspectiva espectral é tão importante

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 4/5

Consideremos que $x[n] = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Podemos assim escrever

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Porque é que a perspectiva espectral é tão importante

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 5/5

Podemos assim escrever

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Este resultado é muito importante

Significa que as sinusóides são funções próprias dos SLITs

A passar por um SLIT, um sinal deforma-se.

Uma onda triangular, quadrada, ... não fica triangular, quadrada,

Mas uma sinusóide fica sinusóide



Se é detectada à saída, então é porque já lá estava à entrada!

A perspectiva espectral

O processo de conversão A/D é um processo de amostragem

É necessário garantir a correcta a relação entre o sinal original, em tempo contínuo, e o sinal obtido em tempo discreto.

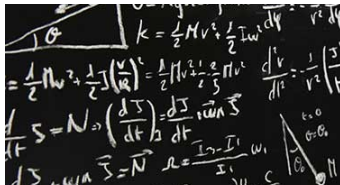
É necessário garantir a relação entre o espectro do sinal natural original, em tempo contínuo, e o espectro do sinal amostrado, em tempo discreto

Considerações sobre Janelas ... 5

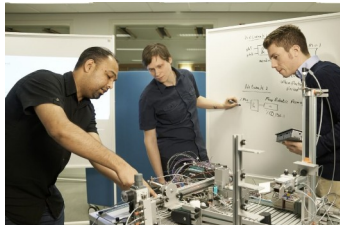
A perspectiva espectral

Quando se pretende utilizar um computador digital para realizar Análise Espectral a sinais naturais em tempo contínuo, potencialmente de duração infinita, é necessário converter o sinal em tempo contínuo para um sinal em tempo discreto, com um número **finito** de amostras

Esse processo de conversão é um processo de amostragem
NECESSARIAMENTE FINITO no tempo



Nunca vai ser possível reconstruir exactamente o sinal original!!
(A perspectiva do matemático)



Na prática é possível reconstruir o sinal com um erro aceitável
(A perspectiva do engenheiro)

A perspectiva espectral

Teorema da amostragem:

É sabido que, quando o sinal em tempo contínuo é de banda limitada (o que implica t infinito), então:

- a) Um sinal pode ser amostrado obtendo-se assim o sinal discreto .
- b) A partir do sinal discreto assim obtido, é “possível” reconstruir exactamente o sinal original.

A questão que se coloca é:

Como é que tal pode ser utilizado,
Como é que tal pode ser prático,
uma vez que o infinito é inatingível??

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

The DFT is performed on a finite number of samples

always implies a truncation of the signal in time. This truncation can be described mathematically as the application of an observation period, called a **window**, to the signal. In terms of samples, we can describe the truncation window as an all-ones function of a finite length.

$$w_N(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k < N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2)$$

When we select N samples for a DFT, it is implied that the signal is multiplied by this window up to N samples and then boom, rest are zeroed out. So N forms the length of the truncation window as well as the length of the signal. This is our default window *always* present whenever we talk about a finite number of samples of any signal. All finite signals are hence windowed signals as in Eq. (7.3). They are really an infinitely long signal multiplied by a window function.



Próximo slide

A perspectiva espectral

$$w_N(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k < N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2)$$

The default window in case of straight forward truncation is the *rectangular* window.

$$x_N[n] = w_N[n] x[n] \quad (7.3)$$

The effect of this multiplication in time domain is that the DFT of such a truncated (windowed) signal is the convolution of the true DFT of the signal with the DFT of the window function.

$$X_N[k] = W_N[k] * X[k] \quad (7.4)$$

A perspectiva espectral

$$X_N[k] = W_N[k] * X[k] \quad (7.4)$$

The rectangular window is called an *All-ones window* for its length. The N point DFT of this all-ones signal is the Diric function shown here. Note this is the DFT of just the rectangular window function.

$$W(\omega) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin N \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (7.5)$$

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

$$W(\omega) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin N\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (7.5)$$

The DFT of the truncated signal is from eq. (7.4) given by the convolution of the signal DFT with the Eq. (7.5), the Diric function. The DFT of a finite signal that is truncated (and all signals are) always has this Diric term in it.

$$X_N[k] = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin N\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} * X[k] \quad (7.6)$$



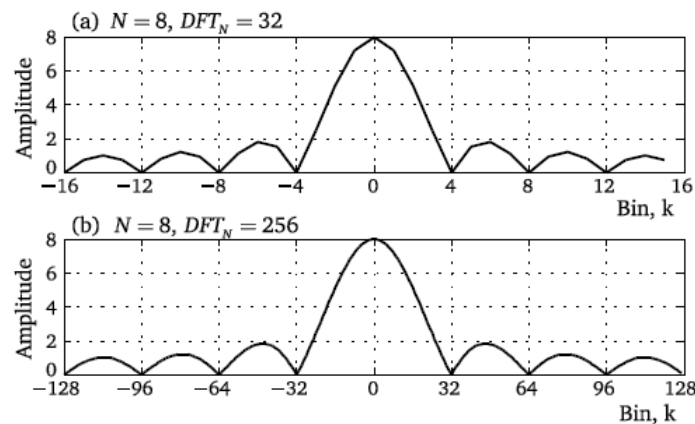
The finite-time DFT hence is a “convoluted” DFT and not the DFT of the real signal.

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

The finite-time DFT is a “convoluted” DFT and not the DFT of the real signal.

The rectangular window is everywhere

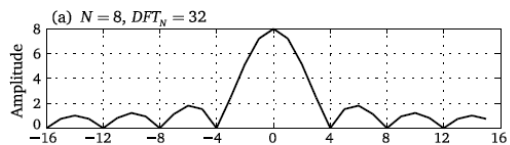


In Fig. 7.2(a) we see a 32-point DFT of an 8-point rectangular window.

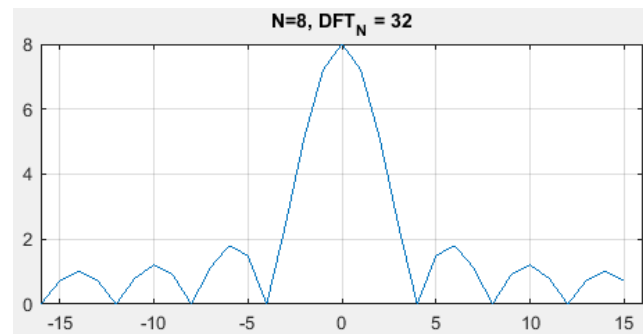
In Fig. 7.2 (b), we see the DFT of the same rectangular window but the 8 samples have been zero-padded for a 256-point DFT. Note that the height of the main lobe has not changed and neither has the number of side lobes.

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

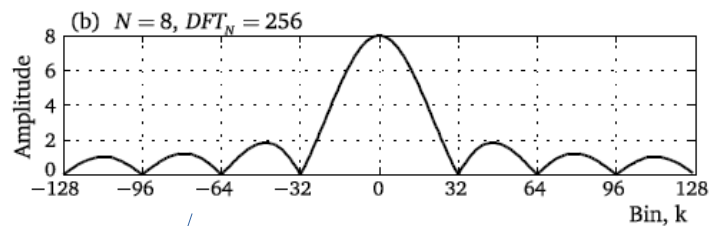


```
1 - clear
2 - close all
3 - clc
4 - %
5 - kxx= ones(8,1);
6
7 - kxxf32= fftshift(fft(kxx,32));
8 - bb32=(0:31)-16;
9 - plot(bb32,abs(kxxf32))
10 - grid on;
11 - axis([-16 16 0 8])
12 - title('N=8, DFT_N = 32');
```



Considerações sobre Janelas ... 5

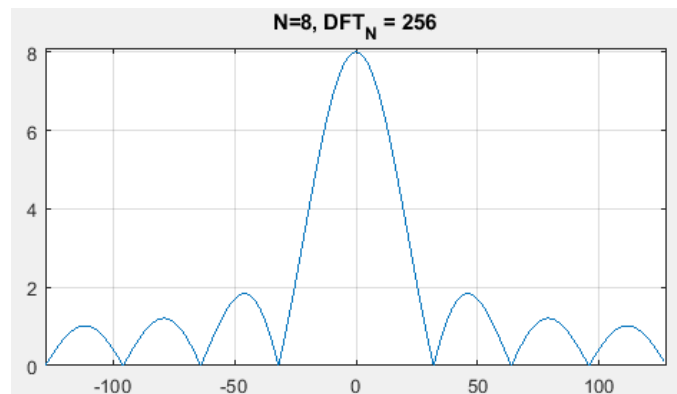
A perspectiva espectral



```

1 - clear
2 - close all
3 - clc
4 - %
5 - NN= 256;
6 - kxx= ones(8,1);
7
8 - kxxfNN= fftshift(fft(kxx,NN));
9 - bbNN=(0:(NN-1))-fix(NN/2);
10 - plot(bbNN,abs(kxxfNN))
11 - grid on;
12 - axis([-fix(NN/2) fix(NN/2) 0 8.1])
13 - title(sprintf('N=8, DFT_N = %d',NN));

```



Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

The number of side lobes hence is always equal to N . Here we do a 64 point DFT of a 16 sample window and we get 16 lobes, despite a smaller DFT size. (Counting the center one as 2 lobes.)

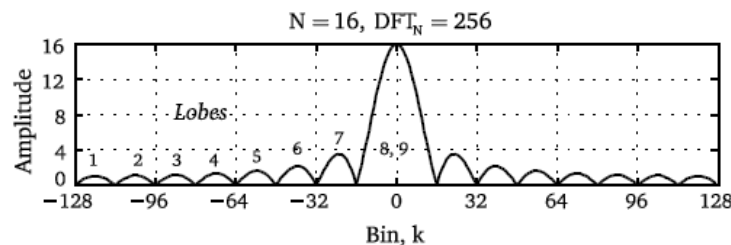
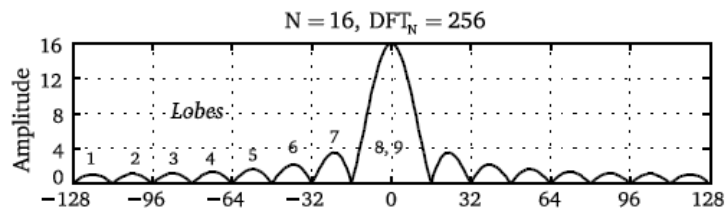


Figure 7.4, Window length 16 with DFT size = 256 gives us 16 lobes.

Considerações sobre Janelas ... 5

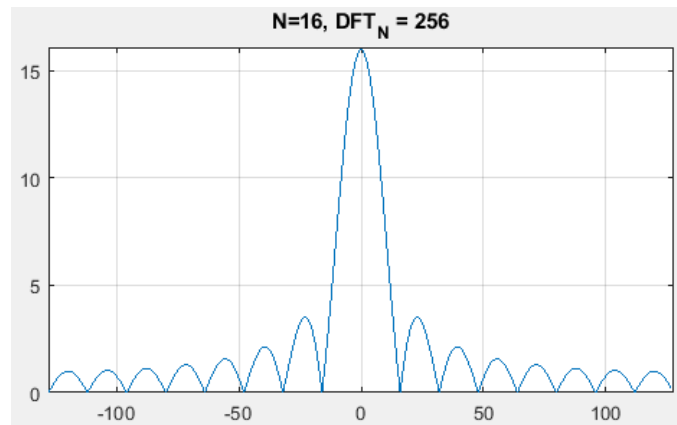
A perspectiva espectral



```

1 - clear
2 - close all
3 - clc
4 - %
5 - NN= 256;
6 - kxx= ones(16,1);
7 -
8 - kxxfNN= fftshift(fft(kxx,NN));
9 - bbNN=(0:(NN-1))-fix(NN/2);
10 - plot(bbNN,abs(kxxfNN))
11 - grid on;
12 - axis([-fix(NN/2) fix(NN/2) 0 16.1])
13 - title(sprintf('N=16, DFT_N = %d',NN));

```



Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

However, no matter how many side lobes we get, the difference in the height between the main lobe and the first side lobe (a ratio of powers, not magnitude) always stays at about 13.4 dB for the rectangular window. The first side lobe height is not a function of N . It is a nature of this window function. In fact the relative heights of the side lobes do not change with the length of the signal. There are more sidelobes but their relative heights do not change. The rate at which the sidelobes fall-off is an important parameter of this and all other window functions. The desired fall-off is quick.

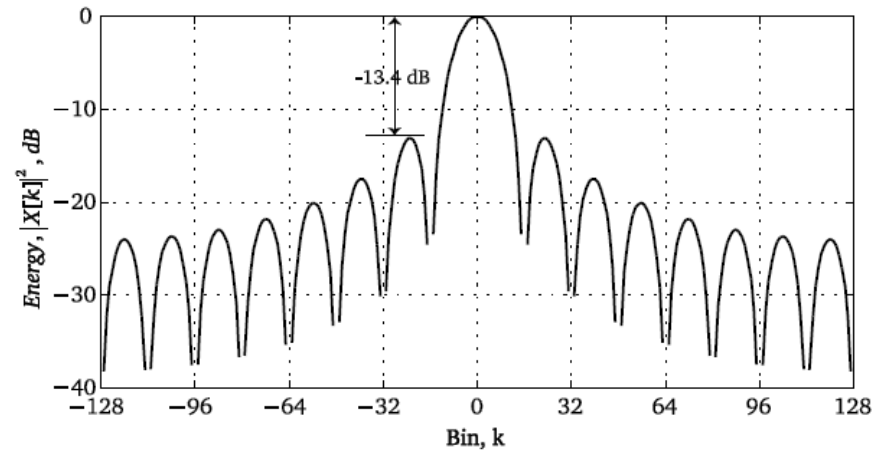


Figure 7.5 - The $20\log|X[k]|^2$ of a rectangular function in dBs.

A perspectiva espectral

What effect does this have on a signal and its DFT?

At best the effect of the rectangular window is benign when the length of the window is equal to samples per period times an integer number of periods of the signal to which it is applied. In such a case, you will not see any effect in the DFT. Let's say that the signal is a pure sinusoids of period N , then the DFT of a signal of length N or kN where k is an integer, will be exactly the same.

But when k is not an integer, we

will see the effect of the rectangular window in form of leakage. The rectangular window is called the default window because it is essentially always there for a finite length signal.

A big problem with our default window is that it can obscure small amplitude signals.

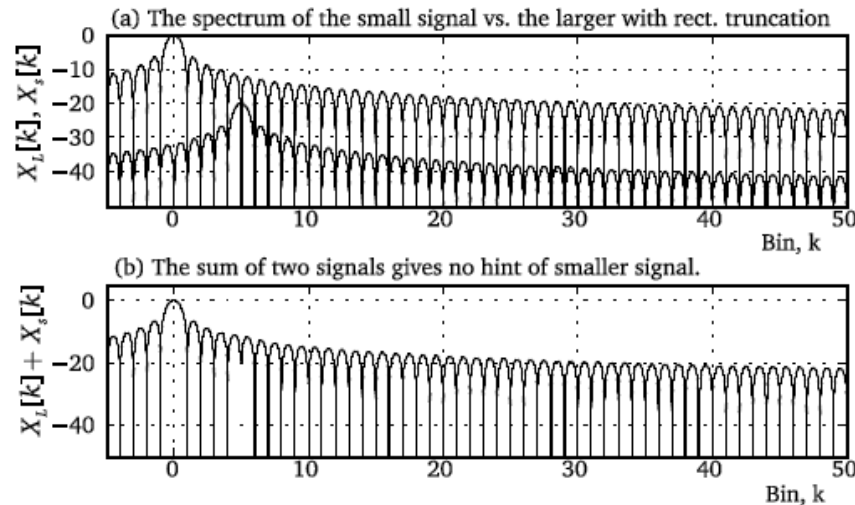


Cá está o problema fundamental

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

A big problem with our default window is that it can obscure small amplitude signals.



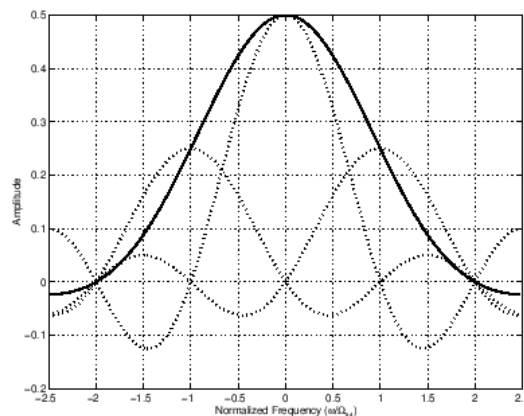
This is a problem. The side lobes of a rectangular signal are considered too high (we say, they don't roll-off fast enough.) for most applications such that they obscure smaller components of the signal. If there are spurious signals present in a signal, they are likely to cause distortion which can be heard but if not seen on the scope we may not realize they are there.

Caso no áudio

A perspectiva espectral

GENERALIZED HAMMING WINDOW FAMILY

The *generalized Hamming window family* is constructed by multiplying a rectangular window by one *period* of a cosine. The benefit of the cosine tapering is *lower side-lobes*. The price for this benefit is that the *main-lobe* *doubles in width*. Two well known members of the generalized Hamming family are the *Hann* and *Hamming* windows.



Construction of the generalized Hamming window transform as a superposition of three shifted *aliased sinc* functions.

The sum of

all three dotted waveforms gives the solid line. We see that

- there is some cancellation of the side lobes, and
- the width of the main lobe is doubled.

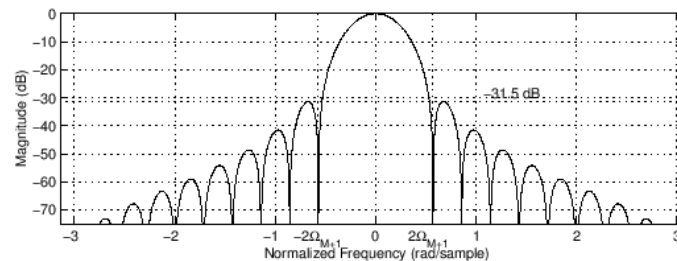
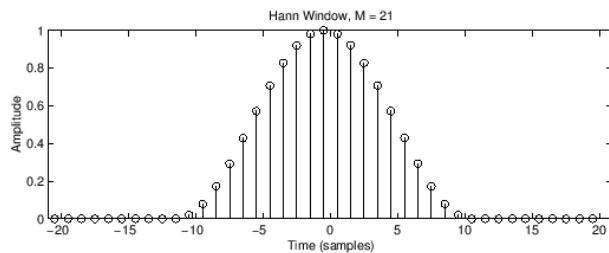
Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

HANN OR HANNING OR RAISED COSINE

The Hann window can be seen as one **period** of a cosine "raised" so that its negative peaks just touch zero (hence the alternate name "raised cosine"). Since it reaches zero at its endpoints with zero slope, the discontinuity leaving the window is in the second derivative, or the *third term* of its **Taylor series expansion** at an endpoint. As a result, the **side lobes** roll off approximately **18 dB** per octave. In addition to the greatly accelerated roll-off rate, the first side lobe has dropped from **-13 dB** (rectangular-window case) down to **-31.5 dB**.

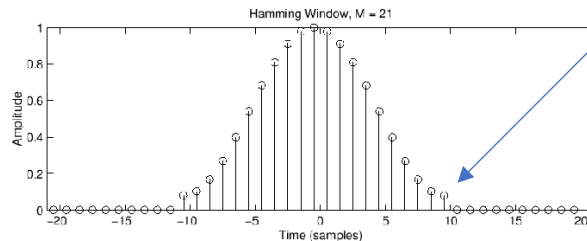
The Hann window (`hanning(21)`) and its **DTFT**.



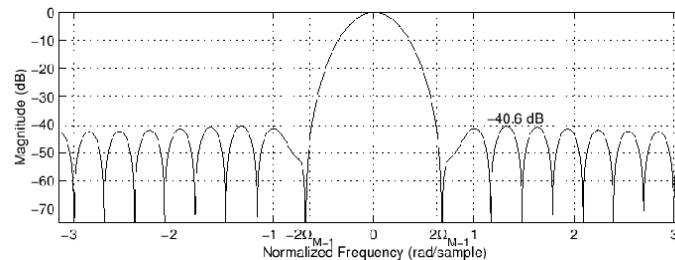
Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

HAMMING WINDOW



Notar



A Hamming window and its transform.

The Hamming window and its **DTFT** magnitude are shown. Like the **Hann window**, the Hamming window is also one **period** of a raised cosine. However, the cosine is raised so high that its negative peaks are *above zero*, and the window has a *discontinuity in amplitude* at its endpoints (stepping discontinuously from 0.08 to 0). This makes the side-lobe roll-off rate very slow (asymptotically **-6 dB/octave**). On the other hand, the worst-case side lobe plummets to **-41 dB**, which is the purpose of the Hamming window. This is 10 dB better than the Hann case and 28 dB better than the rectangular window.

Considerações sobre Janelas ... 5

Um trabalho clássico:

PROCEEDINGS OF THE IEEE, VOL. 66, NO. 1, JANUARY 1978

51

On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform

FREDRIC J. HARRIS, MEMBER, IEEE

TABLE I
WINDOWS AND FIGURES OF MERIT

WINDOW	HIGHEST SIDE- LOBE LEVEL (dB)	SIDE- LOBE FALL- OFF (dB/OCT)	COHERENT GAIN	EQUIV. NOISE BW (BINS)	3.0-dB BW (BINS)	SCALLOP LOSS (dB)	WORST CASE PROCESS LOSS (dB)	6.0-dB BW (BINS)	OVERLAP CORRELATION (PCNT)	
									75% OL	50% OL
RECTANGLE	-13	-6	1.00	1.00	0.89	3.92	3.92	1.21	75.0	50.0
TRIANGLE	-27	-12	0.50	1.33	1.28	1.82	3.07	1.78	71.9	25.0
$\text{COS}^2(x)$	$\alpha = 1.0$	-23	0.64	1.23	1.20	2.10	3.01	1.65	75.5	31.8
HANNING	$\alpha = 2.0$	-32	0.50	1.50	1.44	1.42	3.18	2.00	65.9	16.7
	$\alpha = 3.0$	-39	0.42	1.73	1.66	1.08	3.47	2.32	56.7	8.5
	$\alpha = 4.0$	-47	0.38	1.94	1.86	0.86	3.75	2.59	48.6	4.3
HAMMING	-43	-6	0.54	1.36	1.30	1.78	3.10	1.81	70.7	23.5
RIESZ	-21	-12	0.67	1.20	1.16	2.22	3.01	1.59	76.5	34.4
RIEMANN	-26	-12	0.59	1.30	1.26	1.89	3.03	1.74	73.4	27.4

Considerações sobre Janelas ... 5

Um trabalho clássico:

RIEMANN		-26	-12	0.59	1.30	1.26	1.89	3.03	1.74	73.4	27.4
DE LA VALLE- POUSSIN		-53	-24	0.38	1.92	1.82	0.90	3.72	2.55	49.3	5.0
TUKEY	$\alpha = 0.25$	-14	-18	0.88	1.10	1.01	2.96	3.39	1.38	74.1	44.4
	$\alpha = 0.50$	-15	-18	0.75	1.22	1.15	2.24	3.11	1.57	72.7	36.4
	$\alpha = 0.75$	-19	-18	0.63	1.36	1.31	1.73	3.07	1.80	70.5	25.1
BOHMAN		-46	-24	0.41	1.79	1.71	1.02	3.54	2.38	54.5	7.4
POISSON	$\alpha = 2.0$	-19	-6	0.44	1.30	1.21	2.09	3.23	1.69	69.9	27.8
	$\alpha = 3.0$	-24	-6	0.32	1.65	1.45	1.46	3.64	2.08	54.8	15.1
	$\alpha = 4.0$	-31	-6	0.25	2.08	1.75	1.03	4.21	2.58	40.4	7.4
HANNING- POISSON	$\alpha = 0.5$	-35	-18	0.43	1.61	1.54	1.26	3.33	2.14	61.3	12.6
	$\alpha = 1.0$	-39	-18	0.38	1.73	1.64	1.11	3.50	2.30	56.0	9.2
	$\alpha = 2.0$	NONE	-18	0.29	2.02	1.87	0.87	3.94	2.65	44.6	4.7
CAUCHY	$\alpha = 3.0$	-31	-6	0.42	1.48	1.34	1.71	3.40	1.90	61.6	20.2
	$\alpha = 4.0$	-35	-6	0.33	1.78	1.50	1.36	3.83	2.20	48.8	13.2
	$\alpha = 5.0$	-30	-6	0.28	2.06	1.68	1.13	4.28	2.53	38.3	9.0
GAUSSIAN	$\alpha = 2.5$	-42	-6	0.51	1.39	1.33	1.69	3.14	1.86	67.7	20.0
	$\alpha = 3.0$	-55	-6	0.43	1.64	1.55	1.25	3.40	2.18	57.5	10.6
	$\alpha = 3.5$	-69	-6	0.37	1.90	1.79	0.94	3.73	2.52	47.2	4.9
DOLPH- CHEBYSHEV	$\alpha = 2.5$	-50	0	0.53	1.39	1.33	1.70	3.12	1.85	69.6	22.3
	$\alpha = 3.0$	-60	0	0.48	1.51	1.44	1.44	3.23	2.01	64.7	16.3
	$\alpha = 3.5$	-70	0	0.45	1.62	1.55	1.25	3.35	2.17	60.2	11.9
	$\alpha = 4.0$	-80	0	0.42	1.73	1.65	1.10	3.48	2.31	55.9	8.7
KAISER- BESSEL	$\alpha = 2.0$	-46	-6	0.49	1.50	1.43	1.46	3.20	1.99	65.7	16.9
	$\alpha = 2.5$	-57	-6	0.44	1.65	1.57	1.20	3.38	2.20	59.5	11.2
	$\alpha = 3.0$	-69	-6	0.40	1.80	1.71	1.02	3.56	2.39	53.9	7.4
	$\alpha = 3.5$	-82	-6	0.37	1.93	1.83	0.89	3.74	2.57	48.8	4.8

Considerações sobre Janelas ... 5

Um trabalho clássico:

KAISER-BESSEL	$\alpha = 2.0$	-46	-6	0.49	1.50	1.43	1.46	3.20	1.99	65.7	16.9
	$\alpha = 2.5$	-57	-6	0.44	1.65	1.57	1.20	3.38	2.20	59.5	11.2
	$\alpha = 3.0$	-69	-6	0.40	1.80	1.71	1.02	3.56	2.39	53.9	7.4
	$\alpha = 3.5$	-82	-6	0.37	1.93	1.83	0.89	3.74	2.57	48.8	4.8
BARCILON-TEMES	$\alpha = 3.0$	-53	-6	0.47	1.56	1.49	1.34	3.27	2.07	63.0	14.2
	$\alpha = 3.5$	-58	-6	0.43	1.67	1.59	1.18	3.40	2.23	58.6	10.4
	$\alpha = 4.0$	-68	-6	0.41	1.77	1.69	1.06	3.52	2.36	54.4	7.6
EXACT BLACKMAN		-51	-6	0.46	1.57	1.52	1.33	3.29	2.13	62.7	14.0
BLACKMAN		-58	-18	0.42	1.73	1.66	1.10	3.47	2.35	56.7	9.0
MINIMUM 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-67	-6	0.42	1.71	1.66	1.13	3.45	1.81	57.2	9.6
* MINIMUM 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-92	-6	0.36	2.00	1.90	0.83	3.86	2.72	46.0	3.8
* 61 dB 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-61	-6	0.45	1.61	1.56	1.27	3.34	2.19	61.0	12.6
74 dB 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS		-74	-6	0.40	1.79	1.74	1.03	3.56	2.44	53.9	7.4
4-SAMPLE $\alpha = 3.0$ KAISER-BESSEL		-69	-6	0.40	1.80	1.74	1.02	3.56	2.44	53.9	7.4

Considerações sobre Janelas ... 5

Conselhos práticos:

Types of Windows for Spectral Leakage Treatment

Window	Signal Type and Description	Applications
Rectangular (no window)	Transient signals that are shorter than the length of the window; truncates a window to within a finite time interval.	Order tracking, system analysis (frequency response measurements) with pseudorandom excitation, separation of two tones with frequencies very close to each other, but with almost equal amplitudes
Hanning	Transient signals that are longer than the length of the window	General-purpose applications, system analysis (frequency response measurements) with random excitation
Hamming	Transient signals that are longer than the length of the window; a modified version of the Hanning window that is discontinuous at the edges	Often used in speech signal processing
Triangle	Window that is the shape of a triangle	No special applications
Blackman	Transient signals; similar to Hanning and Hamming windows but adds one additional cosine term to reduce ripple	
Flat Top	Has the best amplitude accuracy of all the windows but comes at the expense of frequency selectivity	Accurate single tone amplitude measurements when there are no nearby frequency components

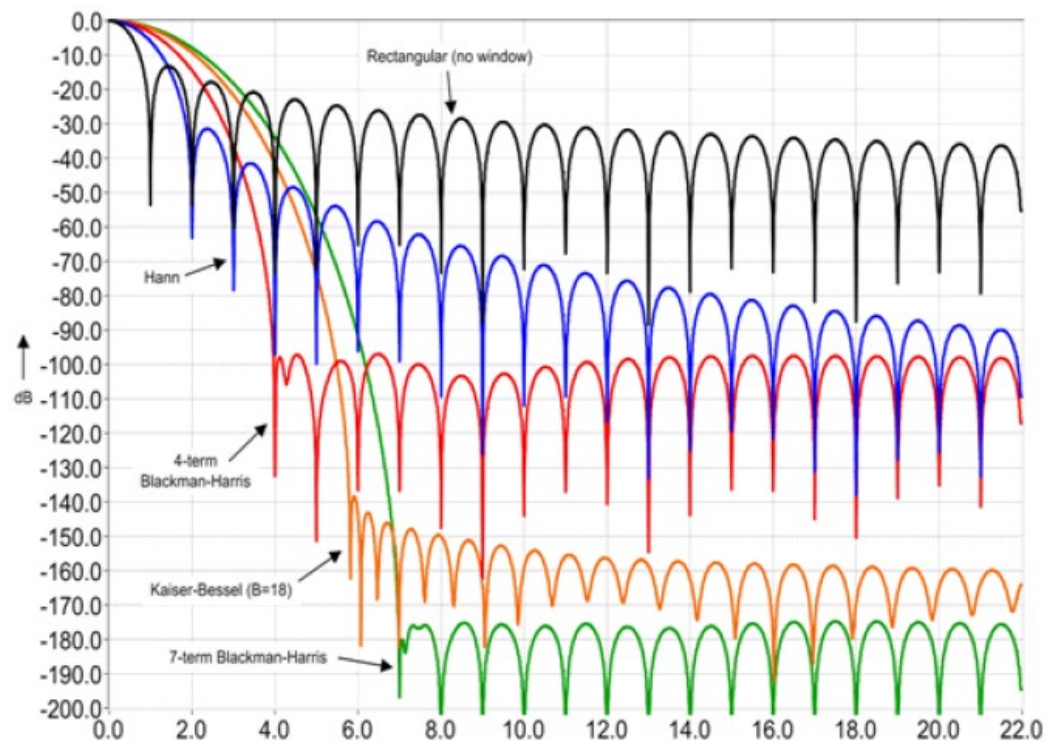
Note In many cases, you might not have sufficient prior knowledge of the signal, so you need to experiment with different windows to find the best one.

- In general, the **Hanning window** is satisfactory in 95 percent of cases. It has good frequency resolution and reduced spectral leakage.

Normalmente, todos os fabricantes de analisadores espectrais fornecem uma tabela destas

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral



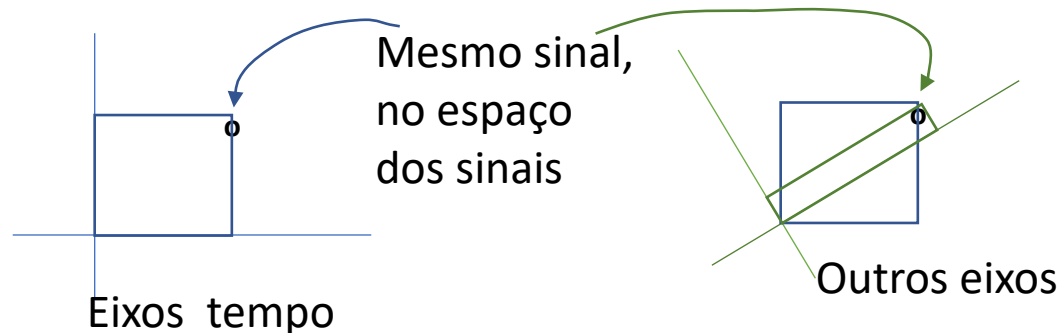
Notar o compromisso: Quanto mais baixos são os lóbulos laterais (menor “leakage”, infiltração, repasse) maior a largura espectral do lóbulo central

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

Porque é que não se pode ter boa resolução no tempo (janela curta) e boa resolução na frequência (riscas nítidas)?

Porque são sistemas de eixos distintos.



Porque é que as frequências são tão importantes?
Porquê logo esses eixos?

Estamos a reveritar o slide 11

A perspectiva espectral

Eigen Stuff – Vamos falar de “eigen”

“Eigen”, no sentido do termo inglês “own”, ou do termo português “próprio”



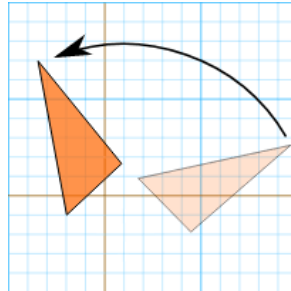
Bengaleiro do museu Van Gogh, Amsterdão, 2020

A perspectiva espectral

Eigen Stuff – Vamos falar no uso matemático do conceito “eigen” no âmbito das transformações, operações, aplicações...

Para os pontos do plano, , uma transformação possível é a Rotação.

Quando um objecto matemático é transformado noutro, há certas características que variam



Uma rotação muda o valor das coordenadas do ponto vértice.

Para cada ponto em , uma dada rotação transforma cada ponto objecto origem num ponto imagem resultado.

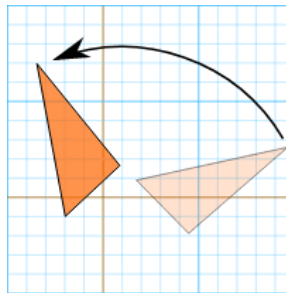
A perspectiva espectral

Eigen Stuff – Estamos a falar no uso matemático do conceito “eigen” no âmbito das transformações, operações, aplicações...

Importante

Quando um objecto matemático é transformado noutra, há certas características que não variam

Os ângulos de um triângulo são invariantes numa rotação.



Para uma dada transformação, as características invariantes são específicas, próprias (eigen) dessa transformação.

Uma rotação muda os valores das coordenadas dos vértices, mas não muda o valor dos ângulos definidos pelos vértices.

Considerações sobre Janelas ... 5

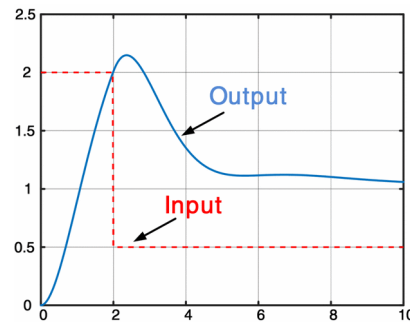
A perspectiva espectral

Normalmente, trabalhamos com SLITs.

Consideremos que à entrada de um SLIT, H , está o sinal de entrada x , o Input .

Na saída teremos o sinal de Output y

O que normalmente acontece é que x e y têm formas assaz diferentes.



IMPORTANTE

Mas podem acontecer casos em que o sinal de saída tem a mesma forma que o de entrada, a menos de uma constante, K , multiplicativa: $y[n] = K x[n]$

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

Normalmente, trabalhamos com SLITs.

Consideremos que à entrada de um SLIT, $h[n]$, está o sinal de entrada, o Input $x[n]$.
Na saída teremos o sinal de Output $y[n] = h[n] * x[n]$

IMPORTANTE

Podem acontecer casos em que o sinal de saída tem a mesma forma que o de entrada, a menos de uma constante, K , multiplicativa.

Considere o sinal $x[n] = [\dots, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots] = (-1)^n$

Considere o SLIT $h[n] = [a, b, c]$

a) Calcule $y[n]$, quando $h[n] = [2, 0, -1]$

b) Mostre que $y[n] = Kx[n]$, onde $K = \dots$ (Nota: K = número calculado usando a, b e c)

$$p + q - v = y(q)$$

$$[u]x = [u]x(e)$$

Considerações sobre Janelas ... 5

A perspectiva espectral

Normalmente, trabalhamos com SLITs.

IMPORTANTE

Podem acontecer casos em que o sinal de saída tem a mesma forma que o de entrada, a menos de uma constante, K , multiplicativa.

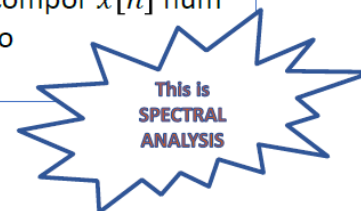
Quando, num SLIT, a saída $y[n]$ tem a mesma forma, a menos de uma constante multiplicativa K , que a entrada $x[n]$, diz-se que o sinal de entrada é um vector próprio, *eigen vector*, do SLIT.

E também se diz que a constante K é um valor próprio, *eigen value*.

Nota: No contexto desta matéria as expressões “*eigen vector*” e “*eigen function*” são sinónimas. Por vezes prefere-se falar de **vectores próprios**, noutras vezes fala-se de **funções próprias**. Mas são os mesmos objectos matemáticos.

A importância do eigen

A linearidade faz com isto seja muito importante, pois será possível decompor $x[n]$ num somatório de vectores próprios, e calcular $y[n]$ a partir do somatório do efeito que cada correspondente valor próprio provoca.



A perspectiva espectral

Sinais e SLITs: o ponto de vista de ω . 5/5

Desta forma, quando $x[n] = e^{j\omega n}$, podemos escrever que:

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (3)$$

Sendo que $H(\cdot)$, o *eigenvalue*, é um número complexo

Significa isto que a exponencial complexa é uma função própria de um SLIT.

Emerge na saída do SLIT com a mesma forma,
apenas multiplicada pelo seu valor próprio

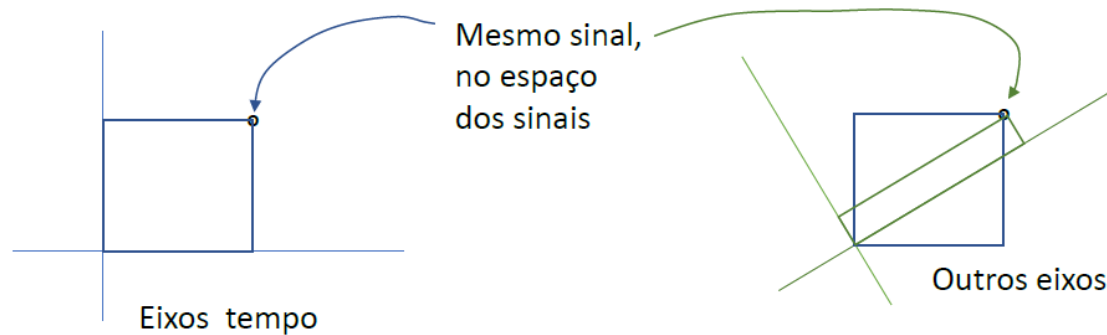
Notar que este slide é igual ao slide 11

A perspectiva espectral

De volta ao compromisso tempo frequência:

Porque é que não se pode ter boa resolução no tempo (janela curta) e boa resolução na frequência (riscas nítidas)?

Porque são sistemas de eixos distintos.



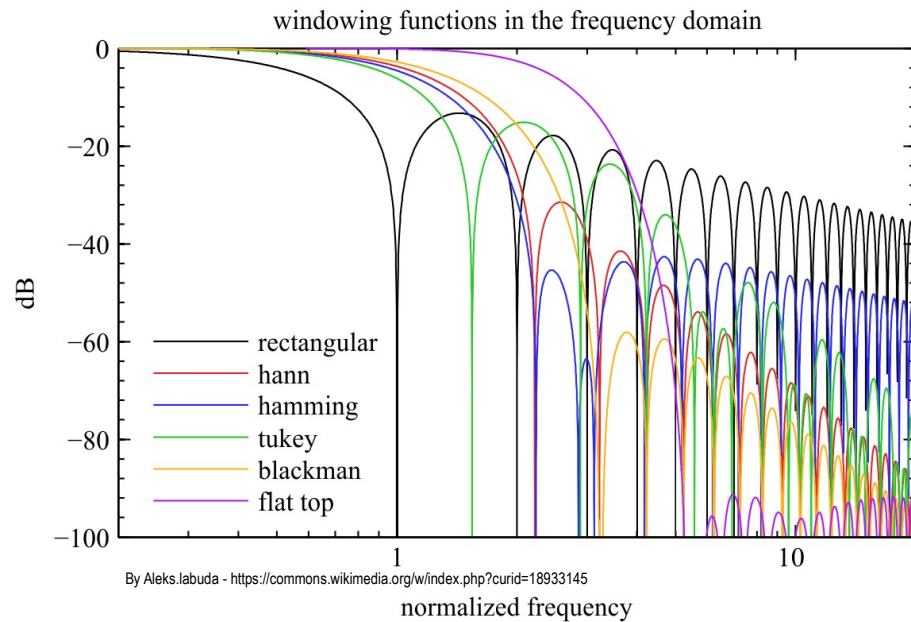
Considerações sobre Janelas ... 5

Terminando:

Apresentação para a próxima aula: (15 Abr)

- Para uma mesma duração temporal, ordene justificadamente da maior para a menor energia na primeira banda lateral (sidelobe) as seguintes janelas:
 - a) Gaussiana
 - b) Rectangular
 - c) Triangular
 - d) Hamming
 - e) Hanning

Considerações sobre Janelas ... 5



Janelas há muitas....

OBRIGADO