



Trabalho 1:

Análise de Sistemas no Espaço

de Estados

Professor responsável: Paulo Gil

João Carvalho nº 49341

Nikita Dyskin nº 49541

Índice:

Introdução	3
Modelação analítica	4
Obtenção do modelo em espaço de estados	4
Análise da estabilidade do sistema	6
Forma canónica diagonal	8
Análise através da resposta temporal do sistema	10
Matriz de transição de estados	10
Solução da equação de estado em regime não forçado	12
Simulação da resposta temporal do sistema em anel aberto	13
Projecto de controlador por retroacção de estado	16
Especificações do controlador	16
Controlabilidade do sistema	17
Projecto do controlador com efeito integral	19
Simulação do sistema	21
Conclusão	26
Anexo	27

1. Introdução

Este trabalho tem como objectivos modelar o sistema da figura 1 em espaço de estados, analisar o seu comportamento dinâmico e fazer controlo por retroacção das variáveis de estado.

O sistema em estudo é constituído por três reservatórios, tendo os tanques 1 e 2 um diâmetro interno de 40 cm e o tanque 3 de 50 cm, duas eletrobombas no tanque 1 e no tanque 2, válvulas para regular o caudal e sensores de nível em todos os tanques.

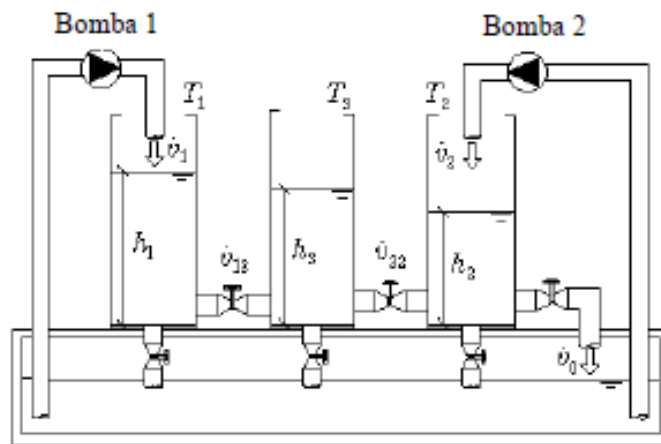


Figura 1-Sistema de vasos comunicantes

As electrobombas em funcionamento nominal, desprezando o efeito transitório, apresentam uma relação entre os caudais volúmicos v'_1 e v'_2 e as tensões aplicadas aos terminais das respectivas electrobombas, u_1 e u_2 , descrita por:

$$v'_1(t) = 20 \cdot 10^{-4} u_1(t), [m^3/s]$$

$$v'_2(t) = 20 \cdot 10^{-4} u_2(t), [m^3/s]$$

Os caudais volúmicos entre tanques adjacentes e os respectivos caudais volúmicos de descarga são genericamente descritos por

$$v'_{i,j}(t) = \eta_{i,j}(h_i(t) - h_j(t)), [m^3/s] \quad (1)$$

onde,

$$\eta_{1,3} = 4,0 \cdot 10^{-3}; \eta_{3,2} = 4,0 \cdot 10^{-3}; \eta_0 = 5,0 \cdot 10^{-3}; \eta_{3,0} = 3,0 \cdot 10^{-4}; [m^3/m.s] (descarga directa)$$

2. Modelação analítica

2.1. Obtenção do modelo em espaço de estados

O modelo em espaços de estados foi obtido através da aplicação da equação do princípio da conservação da massa, dado por:

$$m'_e - m'_s = \frac{dM}{dt} \quad (2)$$

Sendo:

$$m' = \rho v' \quad (3)$$

Considerando como variáveis de estado os níveis de líquido nos 3 tanques (h_1, h_2, h_3), como entradas (u_1 e u_2) a tensão eléctrica aplicada, em Volt, aplicada a cada electrobomba e como saídas os níveis nos tanques 1 e 2 e o caudal volumico de saída v'_0 , determinou-se então a dinâmica dos tanques na forma de equações diferenciais e posteriormente a obtenção dos respectivos modelos descritos em espaço de estados.

Recorrendo às equações 1,2 e 3, temos:

Dinâmica do tanque 1:

$$mb'_1 - m'_{13} - m'_{10} = \frac{dM}{dt}$$

Substituindo:

$$m' = \rho v'$$

$$v'_{ij} = \eta'_{ij}(h_i - h_j)$$

Vem que:

$$\rho v'_1 - \rho v'_{13} - \rho v'_{10} = \frac{d}{dt}(\rho A_1 h_1) \Leftrightarrow v'_1 - \eta_{13}(h_1 - h_3) - \eta_{10}h_1 = A_1 h'_1 \Leftrightarrow$$

$$h'_1 = \frac{\eta_{13}}{A_1} h_1 + \frac{\eta_{13}}{A_1} h_3 - \frac{\eta_{10}}{A_1} h_1 + \frac{\eta_{10}}{A_1} h_1 + \frac{v'_1}{A_1} \Leftrightarrow$$

$$h'_1 = -\frac{1}{A_1}(\eta_{13} - \eta_{10})h_1 + \frac{\eta_{13}}{A_1}h_3 + \frac{1}{A_1}v'_1$$

Dinâmica do tanque 2:

$$mb'_2 - m'_{32} - m'_{20} = \frac{dM}{dt} \Leftrightarrow$$

Seguindo o mesmo método de substituições para o tanque 2, obtém-se:

$$h'_2 = -\frac{1}{A_2}(\eta_{32} + \eta_0)h_2 + \frac{\eta_{32}}{A_2}h_3 + \frac{1}{A_2}v'_2$$

Dinâmica do tanque 3:

Repetindo o método, vem por fim:

$$m'_{13} - m'_{30} - m'_{32} = \frac{dM}{dt} \Leftrightarrow$$

$$h'_3 = -\frac{1}{A_3}(\eta_{13} - \eta_{30} + \eta_{32})h_3 + \frac{\eta_{13}}{A_3}h_1 + \frac{\eta_{32}}{A_3}h_2$$

Sendo as saídas do sistema, os níveis de líquido do tanque 1, do tanque 2 e o caudal volúmico de saída, temos:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h_1(t) \\ y_2(t) &= h_2(t) \\ y_3(t) &= v'_0(t) = \eta_0 h_3(t) \end{aligned}$$

A dinâmica do sistema dada pelo conjunto de equações diferenciais pode ser escrita sob a forma de vectores e matrizes, resultando no modelo de estado que se segue. Que pode ser descrito de forma abreviada:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) - Bu(t) \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) - Du(t)$$

As equações anteriores, determinam o modelo de estado do sistema. Onde o vector x e as matrizes A, B e C são dadas por:

$$\begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.029 & 0 & 0.0318 \\ 0 & -0.0716 & 0.0318 \\ 0.0204 & 0.0204 & -0.0423 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0159 & 0 \\ 0 & 0.0159 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Sendo correspondentemente:

$$A = \begin{bmatrix} -0.029 & 0 & 0.0318 \\ 0 & -0.0716 & 0.0318 \\ 0.0204 & 0.0204 & -0.0423 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0159 & 0 \\ 0 & 0.0159 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Análise de estabilidade do sistema

Os valores próprios do sistema correspondem aos valores próprios da matriz A , obtidos através de:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 0.029 & 0 & 0.0318 \\ 0 & \lambda + 0.0716 & 0.0318 \\ 0.0204 & 0.0204 & \lambda + 0.0423 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo a expressão obtém-se a equação característica do modelo de estado.

$$\lambda^3 + 0.1439\lambda^2 + 0.0051\lambda + 2.4 * 10^{-5} = 0$$

Cuja solução é:

$$\lambda_1 = -0.00546$$

$$\lambda_2 = -0.04865$$

$$\lambda_3 = -0.0898$$

Como os valores próprios apresentam parte real <0 , conclui-se que o sistema é estável. Utilizando a função *eig()* do *Matlab* confirma-se a correcta obtenção dos valores próprios por métodos analíticos.

$$\lambda_1 = -0.0055$$

$$\lambda_2 = -0.0487$$

$$\lambda_3 = -0.0898$$

Podemos também confirmar no Matlab que o sistema é estável através da resposta impulsional, como podemos observar na figura 2.

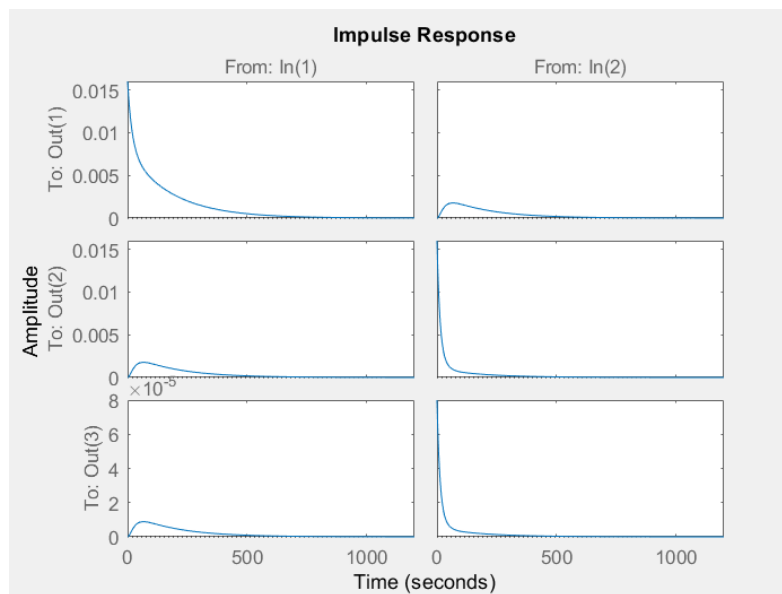


Figura 2-resposta impulsional do sistema

Os vectores próprios da matriz *A* são os vectores não nulos que são a solução da equação:

$$(\lambda_i I - A) \begin{matrix} \rightarrow \\ p_i \end{matrix} = 0 \quad (5)$$

Ao resolvermo-la obtemos:

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0.7670 \\ -0.2782 \\ -0.5780 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -0.7039 \\ 0.5745 \\ 0.4189 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} -0.2505 \\ -0.8459 \\ 0.4712 \end{bmatrix}$$

Recorrendo novamente à função *eig()* do *Matlab*, confirma-se que :

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0.7669 \\ -0.2782 \\ -0.5783 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -0.7035 \\ 0.5741 \\ 0.4189 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} -0.2503 \\ -0.8458 \\ 0.4712 \end{bmatrix}$$

2.3. Forma canónica diagonal

Procuramos agora encontrar uma matriz de transformação de semelhança que converta o sistema obtido anteriormente na forma canónica diagonal. Como os valores próprios da matriz A são valores não inteiros e distintos, consideramos que a matriz de transformação de semelhança é dada pela matriz constituída pelos vectores próprios.

$$T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} -0.7669 & -0.7035 & -0.2503 \\ -0.2782 & 0.5741 & -0.8458 \\ -0.5783 & 0.4189 & 0.4712 \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde, $\det(T) = 0.97$.

Como o determinante da matriz transformação é diferente de zero, conclui-se que é invertível, e, por isso podemos obter a forma canónica do sistema da seguinte forma:

$$A_d = T^{-1} \cdot A \cdot T \quad B_d = T^{-1} \cdot B \quad C_d = C \cdot T \quad (7)$$

Invertendo a matriz de transformação, obtém-se:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -5.4320 & -1.9703 & -6.4222 \\ 3.1127 & 1.8832 & 5.0337 \\ 3.8995 & 0.7440 & 5.5291 \end{bmatrix}$$

Assumindo a transformação de base,

$$X(t) = T \cdot z(t) \quad (8)$$

E tendo em conta a descrição do sistema em espaços de estados, verifica-se

$$\frac{d}{dt}Z(t) = A_d \cdot z(t) + B_d \cdot u(t)$$

$$y_z(t) = C_d \cdot z(t)$$

Fazendo os cálculos de transformação de base descritos em (6) para o sistema A, obtém-se:

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.0055 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0487 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0898 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} -0.0103 & -0.0037 \\ 0.0102 & 0.0084 \\ -0.0036 & -0.0120 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -0.7669 & -0.7035 & -0.2503 \\ -0.2782 & 0.5741 & -0.8458 \\ -0.0014 & 0.0029 & -0.0042 \end{bmatrix}$$

3. Análise através da resposta temporal do sistema

3.1. Matriz de transição de estados

A equação de estado homogénea corresponde à parte do sistema cuja evolução não depende duma excitação externa, dependendo assim, único e exclusivamente das condições iniciais $x(t_0) = x(0)$. Assim sendo, a solução do sistema homogéneo pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = \phi_t(t, t_0)x(t_0) \quad (9)$$

Sendo:

$$\phi_t(t) = e^{At}. \quad (10)$$

A matriz $\phi_t(t)$ pode ser calculada a partir de duas formas:

Método 1: Forma canónica diagonal

A matriz de transição de estados associada à forma canónica diagonal $\phi_d(t)$ é obtida da seguinte forma:

$$\phi_d(t) = e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{-0.0077t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.05t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.0077t} \end{bmatrix}$$

Agora, é possível obter a matriz de transição de estados através duma transformação de base, utilizando como matriz de transformação a matriz calculada em (6):

$$\phi(t) = T\phi_d(t)T^{-1} \quad (11)$$

Chegamos então ao resultado:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

Com os respectivos membros:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 0.066e^{-0.090t} + 0.492e^{-0.051t} + 0.442e^{-0.008t} \\ \phi_{12} &= 0.202e^{-0.090t} - 0.386e^{-0.051t} + 0.183e^{-0.008t} \\ \phi_{13} &= 0.584e^{-0.0078t} - 0.398e^{-0.051t} - 0.1795e^{-0.090t} \\ \phi_{21} &= 0.202e^{-0.090t} - 0.386e^{-0.051t} + 0.183e^{-0.008t} \\ \phi_{22} &= 0.062e^{-0.090t} + 0.302e^{-0.051t} + 0.076e^{-0.008t} \\ \phi_{23} &= 0.312e^{-0.005t} - 0.555e^{-0.090t} - 0.239e^{-0.008t} \\ \phi_{31} &= 0.373e^{-0.008t} - 0.386e^{-0.051t} - 0.183e^{-0.090t} \\ \phi_{32} &= 0.199e^{-0.051t} - 0.354e^{-0.0898t} + 0.153e^{-0.008t} \\ \phi_{33} &= 0.312e^{-0.090t} + 0.206e^{-0.051t} + 0.482e^{-0.008t} \end{aligned}$$

Método 2 (confirmação): Transformada de Laplace

Considerando condições iniciais não nulas, pode-se escrever:

$$\phi_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad (11)$$

Fazendo os cálculos, obtém-se:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{array}{ccc} \frac{s^2+0.114s}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{0.001}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{0.032s+0.002}{s^3+0.148s^2+0.006s} \\ \frac{0.001}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{s^2+0.0767s+0.001}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{0.032s+0.002}{s^3+0.148s^2+0.006s} \\ \frac{0.020s+0.001}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{0.020s+0.001}{s^3+0.148s^2+0.006s} & \frac{s^2+0.106s+0.002}{s^3+0.148s^2+0.006s} \end{array}$$

Aplicando o operador Transformada de Laplace inverso, vem que:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

Com respectivos membros:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 0.066e^{-0.090t} + 0.492e^{-0.051t} + 0.442e^{-0.008t} \\ \phi_{12} &= 0.202e^{-0.090t} - 0.386e^{-0.051t} + 0.183e^{-0.008t} \\ \phi_{13} &= 0.584e^{-0.0078t} - 0.398e^{-0.051t} - 0.1795e^{-0.090t} \\ \phi_{21} &= 0.202e^{-0.090t} - 0.386e^{-0.051t} + 0.183e^{-0.008t} \\ \phi_{22} &= 0.062e^{-0.090t} + 0.302e^{-0.051t} + 0.076e^{-0.008t} \\ \phi_{23} &= 0.312e^{-0.005t} - 0.555e^{-0.090t} - 0.239e^{-0.008t} \\ \phi_{31} &= 0.373e^{-0.008t} - 0.386e^{-0.051t} - 0.183e^{-0.090t} \\ \phi_{32} &= 0.199e^{-0.051t} - 0.354e^{-0.0898t} + 0.153e^{-0.008t} \\ \phi_{33} &= 0.312e^{-0.090t} + 0.206e^{-0.051t} + 0.482e^{-0.008t} \end{aligned}$$

Obtendo-se então a validade do primeiro método.

3.2. Solução da equação de estado em regime não forçado

A equação de estado em regime não forçado partindo da representação do sistema na forma canônica diagonal tem a seguinte forma:

$$z(t) = \phi_d(t)z(t_0) \quad (12)$$

Considerando: $z(t_0) = [h_{10} \quad h_{20} \quad h_{30}]^T$

$$x(t) = \phi_d(t)x(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} e^{-0.0077t}h_{10} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.05t}h_{20} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.0077t}h_{30} \end{bmatrix}$$

3.3. Simulação da resposta temporal do sistema em anel aberto

Considerando condições iniciais nulas e recorrendo às funções do *Matlab step()*, calculou-se a resposta ao degrau unitário do sistema em anel aberto.

Resposta ao degrau unitário:

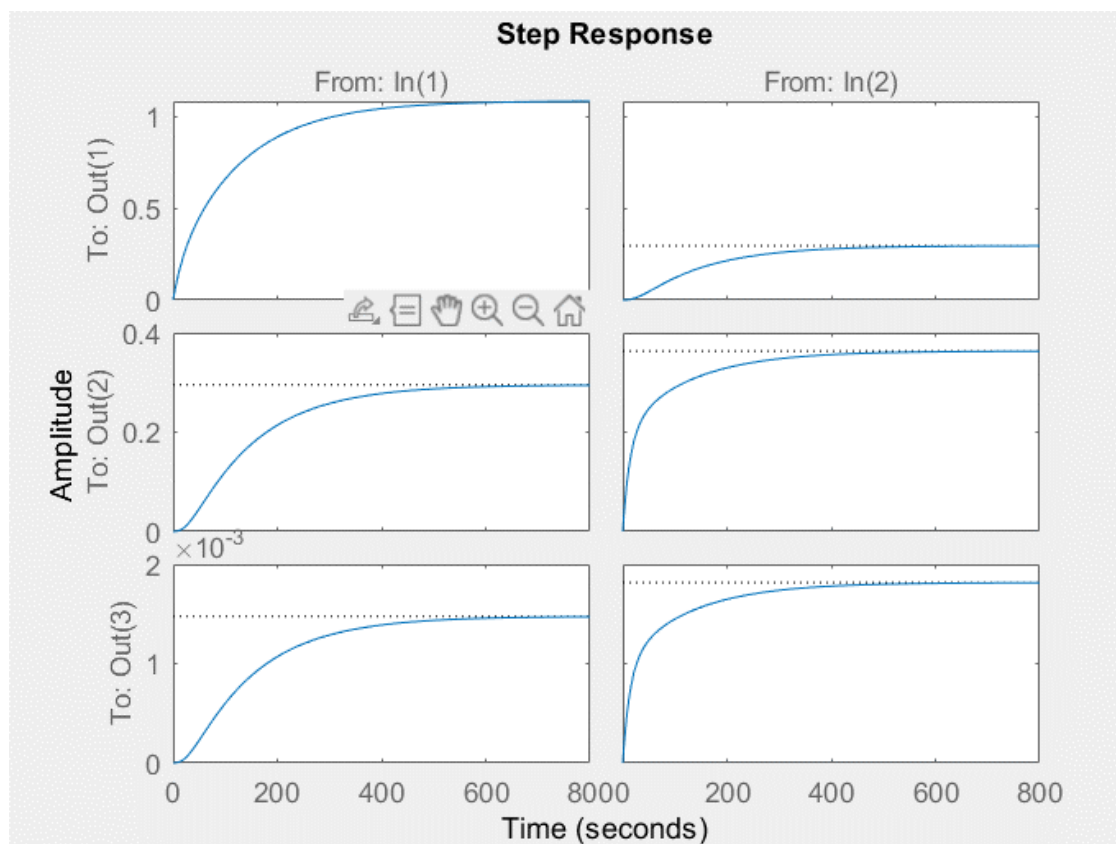


Figura 3 – Resposta ao degrau unitário do sistema

Agora, utilizando a função do *Matlab lsim()*, assumindo condições iniciais $x(t_0) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T \text{m}$, com as electrobombas em repouso (regime não forçado), observou-se o sistema a convergir para a origem. Para a simulação, utilizou-se um horizonte temporal de 2000 segundos, obteve-se a seguinte resposta:

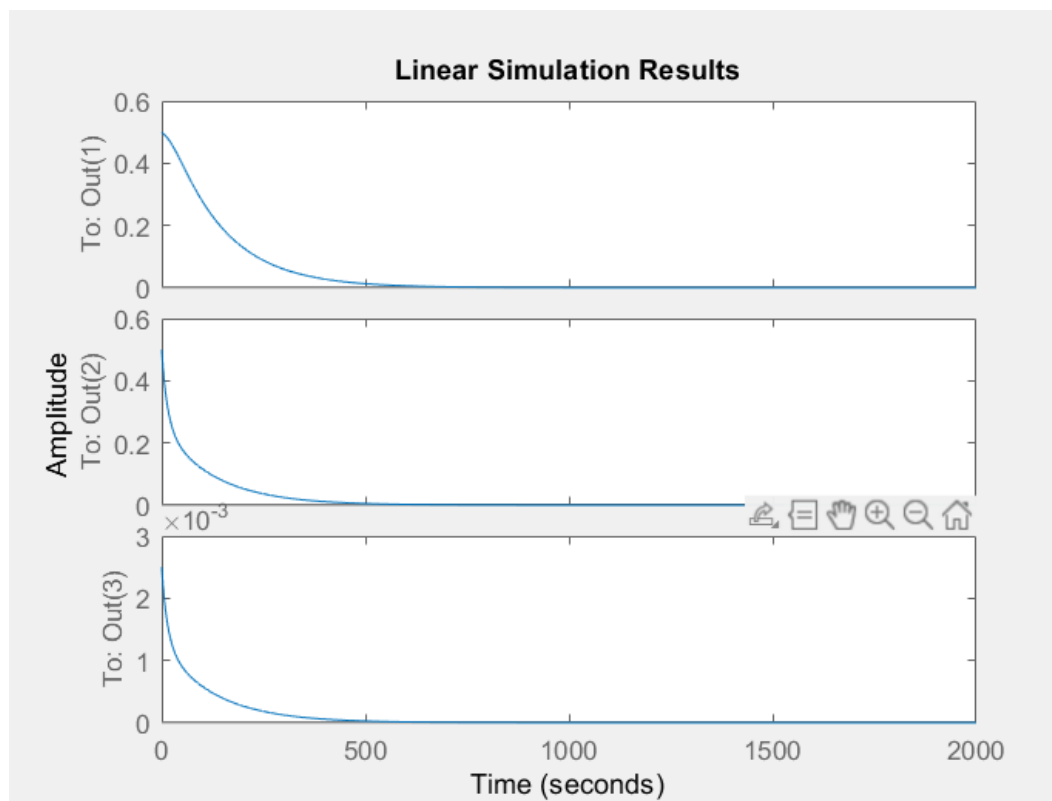


Figura 3 – Simulação do sistema em anel aberto, em regime não forçado com condições iniciais não nulas

De seguida calculou-se a trajectória de estado nos 3 planos, descrita na base dos vectores de estado. O resultado foi:

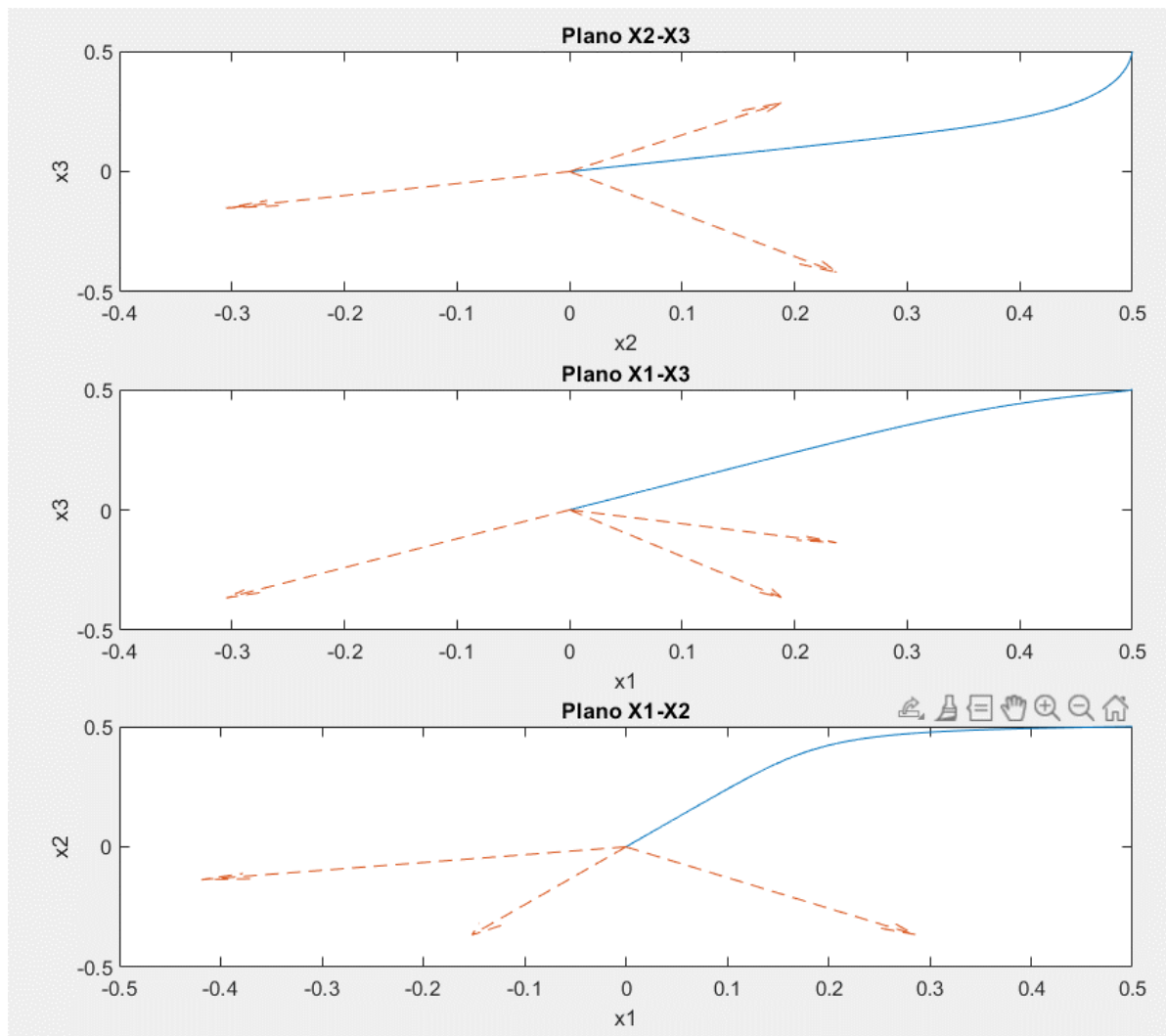


Figura 3 – Trajetória de estado no 3 planos

4. Projecto de controlador por retroacção de estado

4.1 Especificações do controlador

Finalmente, procede-se ao projecto de um controlador por retroacção de estado com e sem efeito integral.

Para ambos os controladores, pretende-se que forcem o sistema a que tenha erro estático nulo na resposta ao degrau com 0.8 de amplitude, tempo de estabelecimento a 5% inferior a 60% (escolheu-se 50%) do tempo dominante de estabelecimento do sistema em anel aberto e que tenha sobreelevação nula.

Para que o tempo de estabelecimento seja cumprido, começa-se por calcular o tempo de estabelecimento dominante do sistema em anel aberto, com o auxílio da função *Matlab stepinfo()*, cujo valor é $t_{s[5\%]} = 399 \text{ s}$, que multiplicado por 50%, é 199.5. O polo dominante, para que o sistema tenha tal dinâmica, é calculado através da expressão:

$$D\omega_n = \frac{3}{t_{s[5\%]}} \quad (13)$$

Como se pretende que a resposta do sistema tenha sobreelevação nula, a parte imaginária dos polos é nula.

4.2. Controlabilidade do sistema

Para os projectos dos controladores, considerou-se o sistema SISO, apenas com a electrobomba 1 a funcionar e com a observação do nível de h_2 :

```
A_asiso =  
  -27.0239e-003    0.0000e+000    25.9845e-003  
    0.0000e+000   -57.1659e-003    25.9845e-003  
    25.9845e-003    25.9845e-003   -51.9690e-003
```

```
B_asiso =  
    7.7953e-003  
    0.0000e+000  
    0.0000e+000
```

```
C_asiso =  
    0.0000e+000    1.0000e+000    0.0000e+000
```

Cujo polinómio característico é dado por

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0.136\lambda^2 + 0.004\lambda + 0.023\lambda$$

Construindo a matriz de controlabilidade $S = [B_{\text{siso}} \mid A_{\text{siso}}B_{\text{siso}} \mid A_{\text{siso}}^2B_{\text{siso}}]$:

```
S =  
    7.7953e-003   -210.6603e-006    10.9562e-006  
    0.0000e+000    0.0000e+000     5.2634e-006  
    0.0000e+000   202.5580e-006   -16.0006e-006
```

Verifica-se que a sua característica é igual a 3, pelo que o par (A,B) é completamente controlável.

4.3. Projecto do controlador por retroacção de estado com ganho adicional

Pela expressão (13), consideram-se os valores próprios desejados do sistema que respeitam as condições pretendidas para a dinâmica, como sendo:

$$\lambda = [-0.015 - 0.075 - 0.120]$$

Cujo polinómio característico é dado por:

$$Q^*(\lambda) = \lambda^3 + 0.21\lambda^2 + 0.012\lambda + 0.136\lambda$$

Pretende-se agora dimensionar o vector de ganhos K, calculado a partir de $Q(\lambda) = |\lambda I - (A - BK)|$, com $K = (K_1 \ K_2 \ K_3)$ e toma a seguinte forma:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + (0.0077k_1 + 0.136)\lambda^2 + (0.0002k_3 + 0.00085k_1 + 0.004)\lambda + (0.000002k_1 + 0.000005k_2 + 0.000001k_3 + 0.000002)$$

Pela dimensão do sistema, torna-se um esforço hercúleo calcular analiticamente a solução, pelo que se utiliza a função de *Matlab acker()* que calcula o vector de ganhos K de retroacção que colocam o sistema com os valores próprios pretendidos, sendo ele:

$$K = [9.54 \quad -3.43 \quad -3.46]$$

O cálculo do ganho adicional tem como objectivo compensar o ganho estático do sistema em anel fechado. O gajo adicional é calculado a partir do seguinte sistema:

$$\begin{matrix} N_x \\ N_u \end{matrix} = \begin{pmatrix} A_{siso} & B_{siso} \\ C_{siso} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3.4 \\ 1 \\ 2.2 \\ 4.45 \end{matrix}$$

Pelo que,

$$N = (N_u + KN_x) = 25.84$$

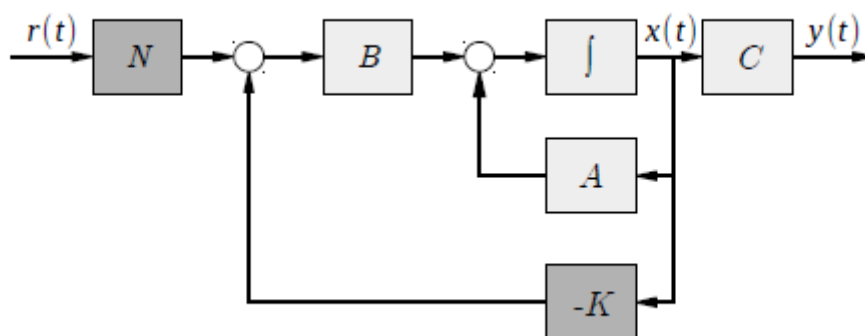


Figura 4 – Arquitectura do controlo de seguimento com ganho adicional

4.4 Projecto do controlador com efeito integral

A inclusão do efeito integral no controlador por retroacção de variáveis de estado, torna-se desta forma bastante simples, se pensarmos que basta adicionar uma variável extra ao sistema cuja derivada é dada pelo erro de controlo, que depois é integrada e multiplicada por um ganho e de seguida somada com o estado de retroacção multiplicado por um ganho. Ficando então o sistema estendido, escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ -D \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{pmatrix} + Du(t)$$

Como a matriz $D=0$ obtemos o sistema estendido:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{siso} & 0 \\ -C_{siso} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_{siso} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = [C_{siso} \quad 0]$$

Sendo o sistema original controlável, o sistema estendido também o é. Deste modo, podemos calcular a matriz de ganhos K .

Escolhe-se como valores próprios com base na expressão (13), mas desta vez, como o sistema estendido é de quarta ordem, adicionamos um polo extra 1 década depois do polo dominante, para que este não condicione a dinâmica pretendida do sistema. Ficamos então com o conjunto de valores próprios:

$$\lambda = [-0.015 - 0.075 - 0.120 - 0.150]$$

Calculando o polinómio característico do sistema estendido, obtemos:

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 0.360\lambda^3 + 0.043\lambda^2 + 0.002\lambda + 0.020$$

E como polinómio característico do sistema com a dinâmica pretendida, temos que:

$$Q^*(\lambda) = \lambda^4 + 0.148\lambda^3 + 0.006\lambda^2 + 0.035\lambda$$

Podemos finalmente calcular o vector K_z , como sendo:

$$K_z = [-0.02 \ 0.033 \ -0.037 \ -0.2012]$$

Com recurso à função *Matlab ctrb()*, calcula-se a matriz de controlabilidade S.

$$S = \begin{bmatrix} 15.9155e-003 & -544.6014e-006 & 28.9558e-006 & -1.7802e-006 \\ 0.0000e+000 & 0.0000e+000 & 10.3205e-006 & -1.5286e-006 \\ 0.0000e+000 & 324.2278e-006 & -24.8001e-006 & 1.8485e-006 \\ 0.0000e+000 & 0.0000e+000 & 0.0000e+000 & -10.3205e-006 \end{bmatrix}$$

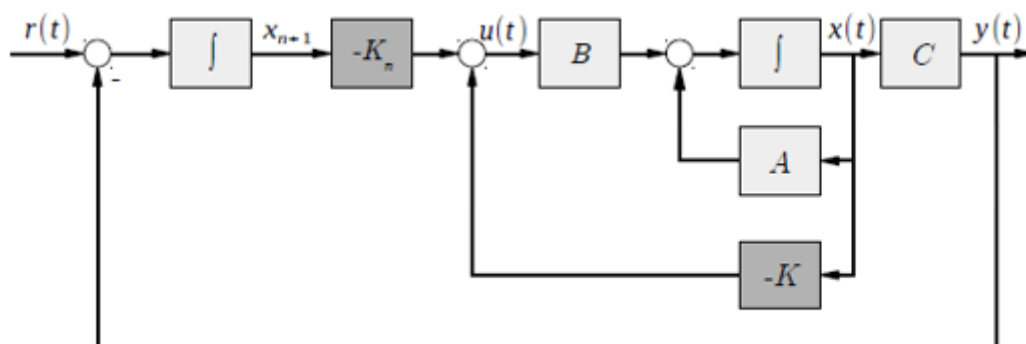
A partir do sistema estendido em anel aberto, obtemos a matriz modal.

$$M = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.043 & 0.36 & 1 \\ 0.043 & 0.36 & 1 & 0 \\ 0.36 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vem finalmente que:

$$\bar{K} = K_z * (S.M)^{-1} = (13.370 \ 39.739 \ 42.501 \ 1.981)$$

Vem então que:



Em que a matriz de ganhos $-K_n = 1.981$ e a matriz de ganhos $-K = (13.370 \quad 39.739 \quad 42.501)$

4.5. Simulação do sistema

Para a simulação do sistema utilizou-se a *Toolbox Simulink* do *Matlab*. Simulou-se o sistema com o controlador de retroacção de estado com ganho de compensação e o controlador com retroacção de estado e efeito integral. Para ambas as arquitecturas, simulou-se primeiro sem perturbações e de seguida com uma perturbação de uma constante multiplicativa 0.8 na matriz de entrada.

Controlador com retroacção de variáveis de estado com ganho adicional:

No *Simulink* contruiu-se o seguinte diagrama de blocos:

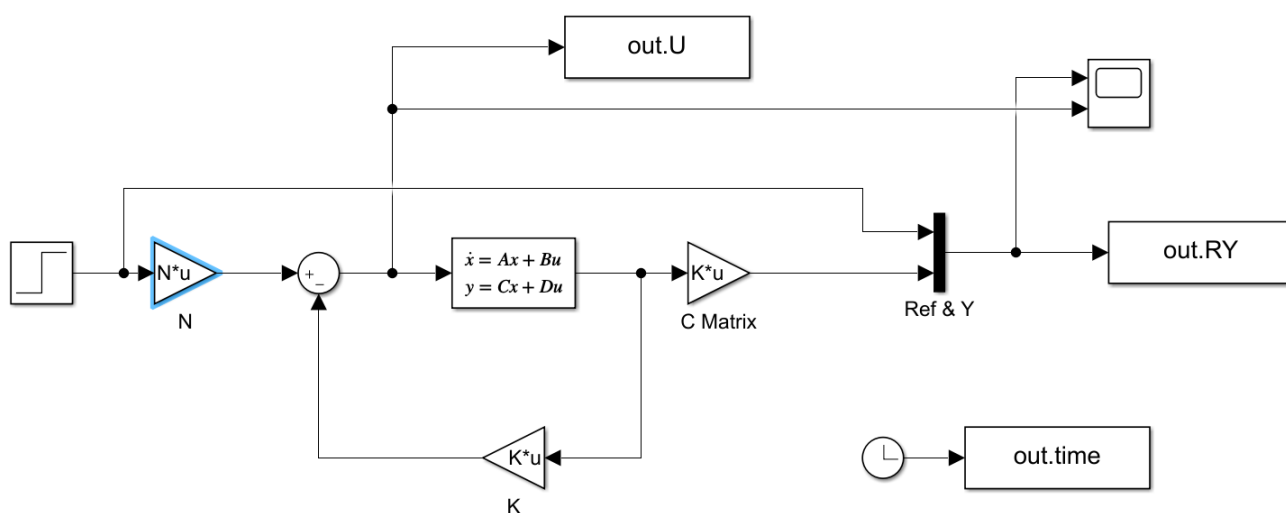


Figura 6- Diagrama de blocos do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado e ganho adicional

Cujo resultado da simulação é:

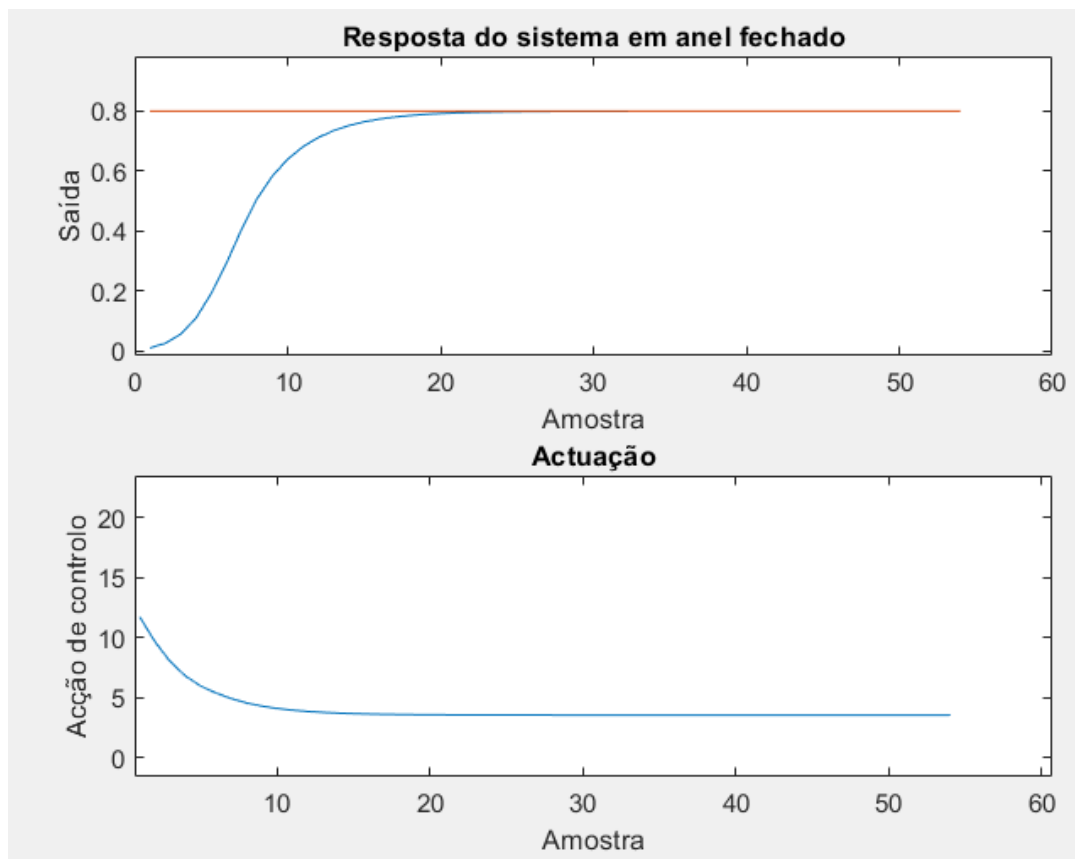


Figura 7- Resultado do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado e ganho adicional sem perturbações

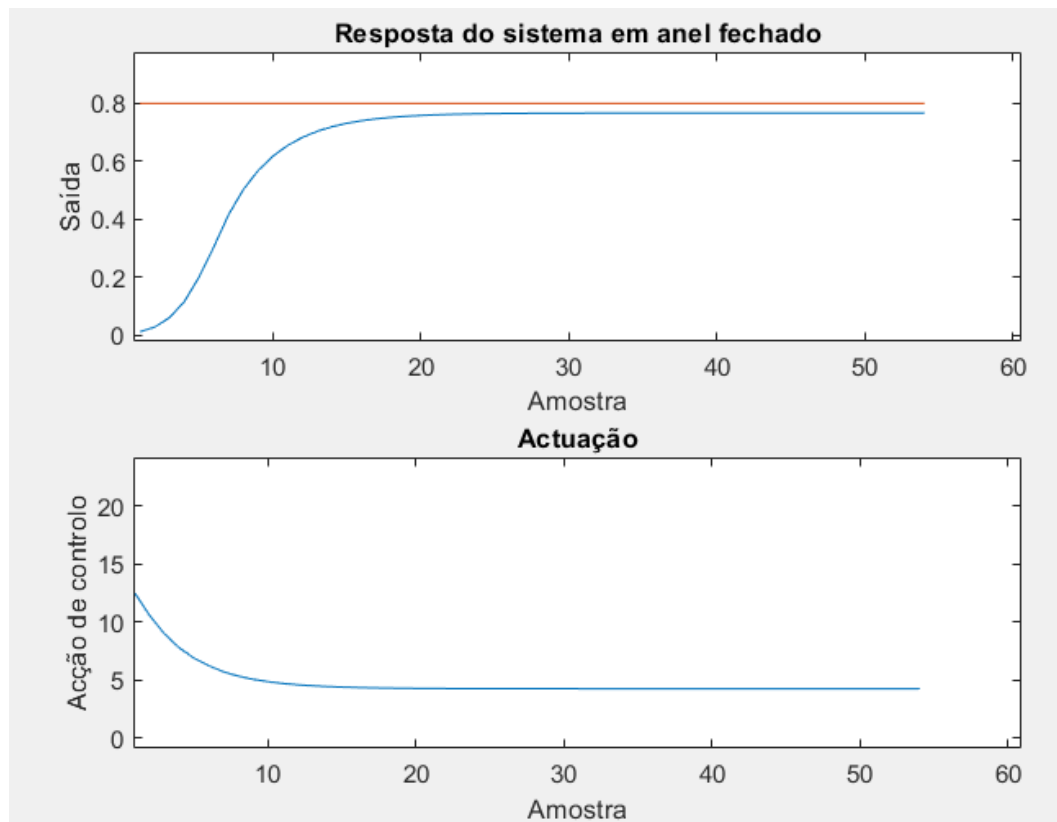


Figura 8- Resultado do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado e ganho adicional com perturbações

Controlador com retroacção de variáveis de estado com efeito integral:

No *Simulink* contruiu-se o seguinte diagrama de blocos:

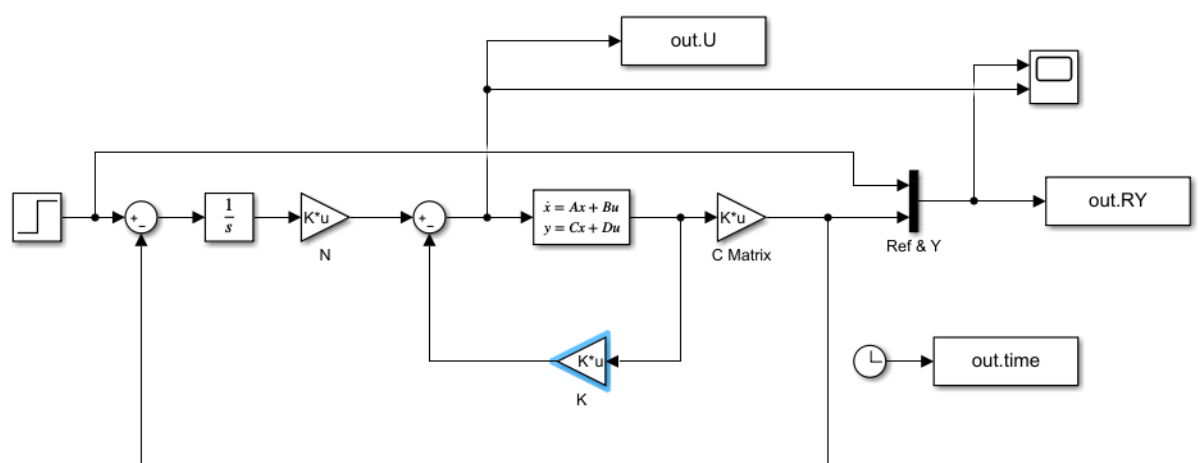


Figura 9- Diagrama de blocos do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado com efeito integral

Cujo resultado da simulação é:

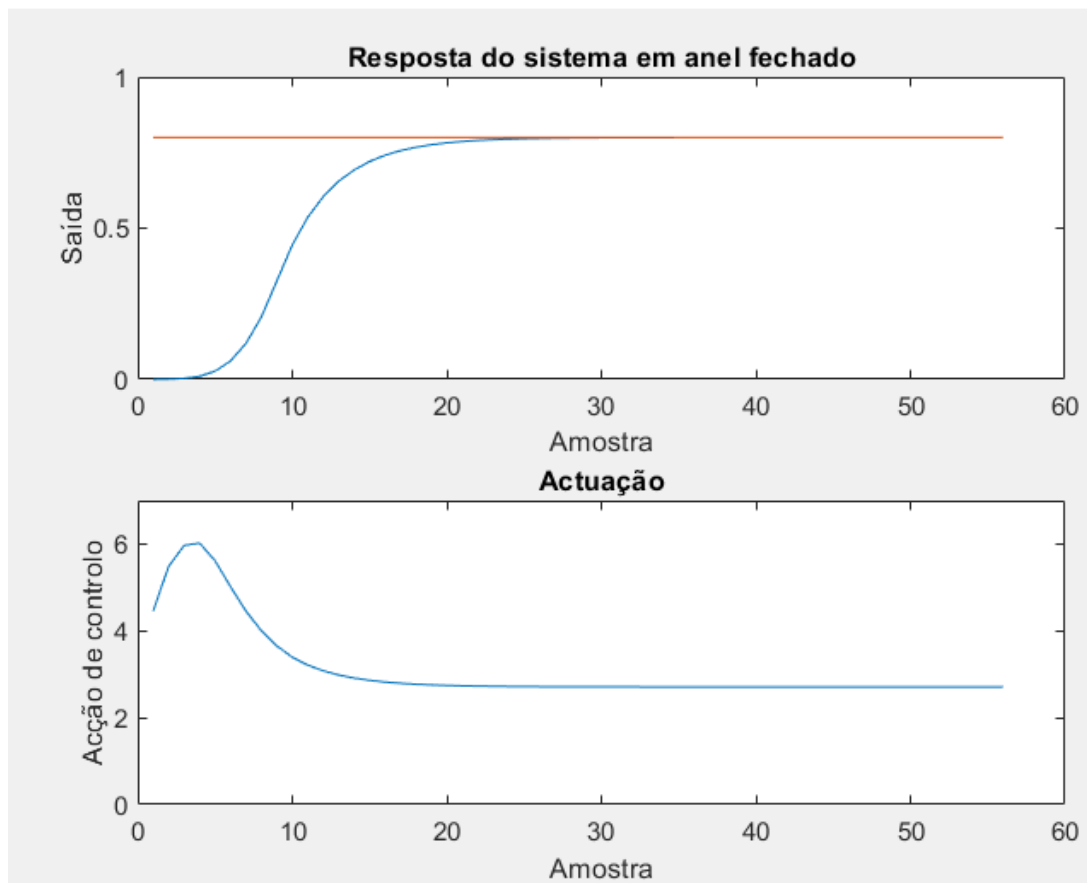


Figura 10- Resultado do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado e efeito integral sem perturbações

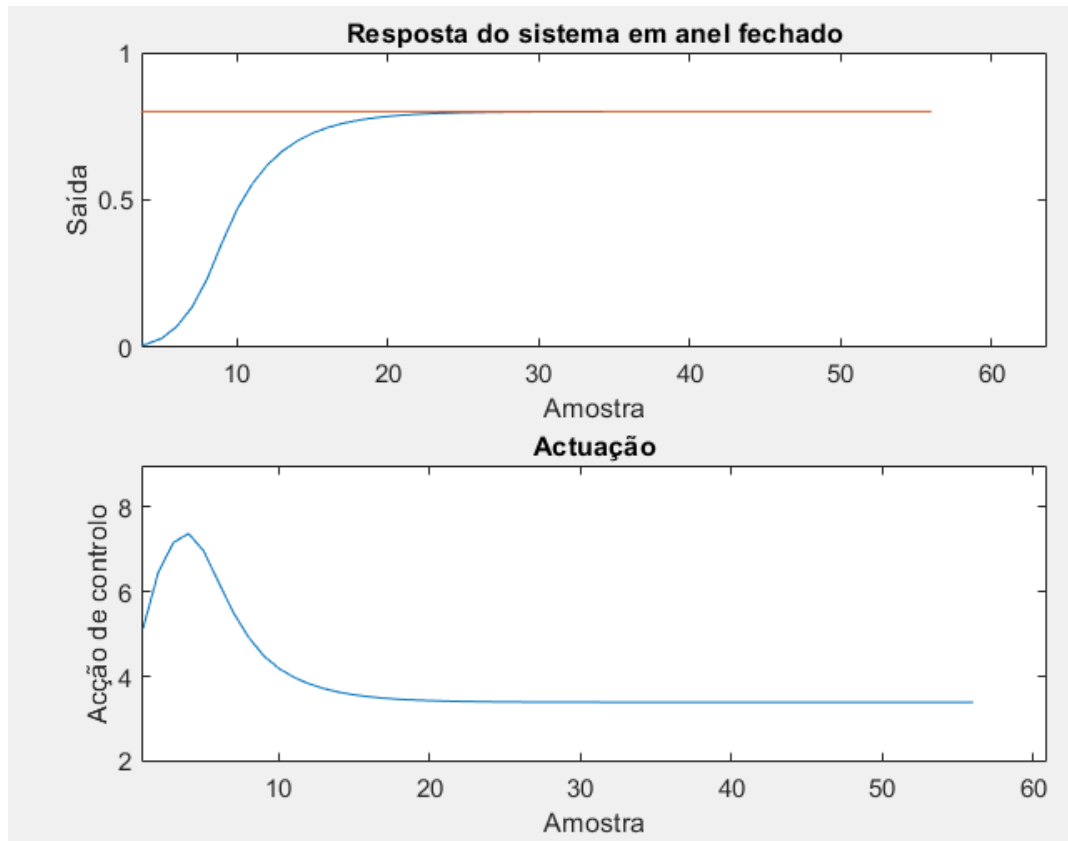


Figura 11- Resultado do sistema de controlo com retroacção de variáveis de estado e efeito integral com perturbações

Usando como métricas de comparação:

$$IEQ = \int_0^T (e(t))^2 dt$$

$$IUQ = \int_0^T (u(t))^2 dt$$

Obtemos:

Controlador com ganho adicional:

Sem perturbação: IEQ = 8.9916

IUQ = 44395

Error estático= 3.37e-7

Com perturbação: IEQ = 9.026
IUQ = 4831.1
Erro estático = 0.033

Controlador com efeito integral:

Sem perturbação: IEQ = 5.0005
IUQ = 8967.8
Erro estático = 3.47e-7

5. Conclusão

Com este trabalho, o grupo conseguiu com sucesso modelar um sistema físico em espaço de estados e controlá-lo.

Concluimos que na presença de uma perturbação que cause erro estático, o controlador de retroação de estado com ganho adicional não é muito robusto, o que leva à necessidade de inclusão de efeito integral, visto que este integra o erro acumulado e isso faz com que desapareça o erro estático, já que este é constante ao longo do tempo e o efeito integral “tem em conta” todo o erro passado.

6. Anexo

Modelação analítica:

```
close all, clear all, clc;
format shortEng
format compact
%%
%Variables
syms s t;
A1 = 0.125; A2 = A1;
A3 = 0.196;
n13 = 4e-3;
n32 = 4e-3;
n0 = 5e-3;
n30 = 3e-4;
n10 = 3e-4;
v1 = 20e-4;
v2 = 20e-4;
%%
%State space representation System

A = [-(1/A1)*(n13+n10) 0 n13/A1; 0 (-1/A2)*(n32+n0)
(1/A2)*n32; (1/A3)*n13 (1/A3)*n32 -(1/A3)*(n13+n30+n32)];
B = [(1/A1)*v1 0; 0 (1/A2)*v2; 0 0];
C = [1 0 0; 0 1 0; 0 n0 0];
D = zeros(3,2);
%%
%forma canonica, matrizes de transformacao e de transicao
[V,D2] = eig(A, 'nobalance', 'vector');
val_prop = diag(D2);
T = V;
Ad = (T^-1) * A * T;
Bd = T^-1 * B;
Cd = C * T;
phid = diag(exp(D2*t));
phiT = T * phid * T^-1; %transicao de estados atraves da matriz
de transicao
phiT = vpa(phiT);
%transicao de estados com Transformada de laplace
sia = s * eye(size(A,1),size(A,2)) - A;
phiS = adjoint(sia) / det(sia);
phi = vpa(ilaplace(phiS));
phi = vpa(phi);
```

```

%%
%Time response
sys = ss(A,B,C,D);
G = tf(sys);
figure();
step(G);
figure();
impulse(sys);
%%
%Simulação
x0 = [.5 .5 .5];
t = 0:0.05:2000;
u = zeros(length(t),2);
figure();
lsim(sys,u,t,x0)
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0);
%%
%evolução do vector de estado
V32 = V(3:-1:2,1:3);
V31 = V(3:-1:1, 1:3), [V31(2,:)] = [];
V21 = V(2:-1:1, 1:3);
figure();
subplot(3,1,1), plot(x(:,3), x(:,2)), hold on, qv1 = quiver([0
0 0], [0 0 0], V32(1,:), V32(2,:), 0.5); hold off;
qv1.MaxHeadSize = .2; qv1.LineStyle='--';
title('Plano X2-X3'), ylabel('x3'), xlabel('x2')

subplot(3,1,2), plot(x(:,3), x(:,1)), hold on, qv1 = quiver([0
0 0], [0 0 0], V31(1,:), V31(2,:), 0.5); hold off;
qv1.MaxHeadSize = .2; qv1.LineStyle='--';
title('Plano X1-X3'), ylabel('x3'), xlabel('x1')

subplot(3,1,3), plot(x(:,2), x(:,1)), hold on, qv1 = quiver([0
0 0], [0 0 0], V21(1,:), V21(2,:), 0.5); hold off;
qv1.MaxHeadSize = .2; qv1.LineStyle='--';
title('Plano X1-X2'), ylabel('x2'), xlabel('x1')

```

Projecto controlador:

```
clear all
close all
clc
n13 = 2.5e-3;
n10 = 1.0e-4;
n32 = 2.5e-3;
n0 = 3e-3;
di = 0.35;
Atk = pi/4*di^2;

% I. Model :: SISO
% -----

A_asiso = [-(n13+n10) 0 n13; 0 -(n32+n0) n32; n13 n32 -
(n13+n32)]/Atk;
B_asiso = [7.5e-4 0 0]'/Atk;
C_asiso = [0 1 0];
D_asiso = [0];

% II. State Feedback Control :: N
% -----

Ts_design_set = 0.5*399; % << Ts_design_max
Dwn = 3/Ts_design_set;
lambda_1 = -Dwn;
lambda_2 = 5*lambda_1;
lambda_3 = 8*lambda_1;
lambda_spec = [lambda_1 lambda_2 lambda_3]
K = acker(A_asiso,B_asiso,lambda_spec);
Nxu = [A_asiso B_asiso;C_asiso D_asiso]^(-1)*[zeros(3,1); 1];
N = Nxu(end)+ K*Nxu(1:end-1);

% EFEITO INTEGRAL
clear all
close all
clc
n13 = 4.0e-3;
n10 = 3.0e-4;
n32 = 4.0e-3;
n30 = 3.0e-4;
n0 = 5.0e-3;
di12 = 0.4;
di3 = 0.5;
```

```

Atk12 = pi/4*di12^2;
Atk3 = pi/4*di3^2;

% I. Model :: SISO
% -----

A_asiso = [-(n13+n10)/Atk12 0 (n13/Atk12); 0 -(n32+n0)/Atk12)
(n32/Atk12); (n13/Atk3) (n32/Atk3) -(n13+n32+n30)/Atk3)];
B_asiso = ((20e-4) 0 0')/Atk12;
C_asiso = [0 1 0];
D_asiso = [0];
sys = ss(A_asiso,B_asiso,C_asiso,0);

% II. State Feedback Control :: N
% -----

A_=[A_asiso zeros(3,1); -C_asiso 0];
B_ = [B_asiso; -D_asiso];
C_ = [0 1 0];

Ts_design_set = 399*0.5; % << Ts_design_max
Dwn = 3/Ts_design_set;
lambda_1 = -Dwn;
lambda_2 = 5*lambda_1;
lambda_3 = 8*lambda_1;
lambda_4 = 10*lambda_1;
lambda_spec = [lambda_1 lambda_2 lambda_3 lambda_4]
K_ = acker(A_,B_,lambda_spec);
K=K_(1:3);
N=K_(4);

```