Notes on Mathematics

Johnny Chen

2019 年 3 月 20 日

1　由参数方程决定的函数的高阶导数的计算

Example 1.1. 计算由下述参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\begin{cases} x=\sin(t)-t \\ y=1-\cos(t) \end{cases} \tag{1}$$

Solution　对(1)微分，有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=(\cos(t)-1)dt \\ \mathrm{d}y=\sin(t)dt \end{cases} \tag{2}$$

将(2)中两式相除，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin(t)}{\cos(t)-1} \tag{3}$$

然后，根据二阶导数的定义，有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin(t)}{\cos(t)-1}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\sin(t)}{\cos(t)-1})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{(\cos(t)-1)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Remark: 这一解法根据的是二阶导数的定义，属于标准的正确解法，下面讨论一种很有意思的**错误**解法.

Solution　对(2)微分，得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2x=-\sin(t)dt^2 \\ \mathrm{d}^2y=\cos(t)dt^2 \end{cases} \tag{5}$$

从而，取(5)中的 d^2y 与(2)中的 $\mathrm{d}x$ 进行除法, 便得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\cos(t)}{(\cos(t)-1)^2} \tag{6}$$

根据前面的标准解法可知，这一解法得到的答案显然是错误的. 关于这一事实的一个**逃避问题式**的解释就是：我们只能将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 看成一个整体，而不能进行任意的乘除移项操作.

实际上，考虑到 x 既是参数方程中的一个因变量 $x(t)$，又是由参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的一个自变量，(4)式与(6)的实际表达式应该如下：

$$\frac{\cos(t)}{(\cos(t)-1)^2}=\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}\neq\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-1}{(\cos(t)-1)^2}$$

因此，这两个式子不相等的根本原因并不在于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是一个整体[①]，而在于*一阶微分具有形式不变性，二阶微分不具有形式不变性*. 为了解释清楚这一问题，我们先对这句话的意思进行解释.

(一阶微分具有形式不变性) 对于函数 $y=y(x)=y(x(t))$，$x=x(t)$ 为中间变量，由链式法则可得，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y(t)=\mathrm{d}y(x(t))&=y'(x(t))x'(t)\mathrm{d}t\\&=y'(x(t))\mathrm{d}x(t)\end{aligned}$$

另一方面，对于函数 $y=y(x)$, x 为自变量，它的一阶微分为 $\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x$. 因此，不论 x 究竟是自变量还是中间变量，它的一阶微分的形式都相同，因此才称一阶微分具有形式不变性.

(二阶微分不具有形式不变性) 对于函数 $y=y(x)=y(x(t))$，$x=x(t)$ 为中间变量，根据二阶微分的定义，可知：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y(t)=\mathrm{d}(\mathrm{d}y(t))&=\mathrm{d}(y'(x(t))x'(t)\mathrm{d}t)\\&=\mathrm{d}(y'(x(t)))x'(t)\mathrm{d}t+y'(x(t))\mathrm{d}(x'(t)\mathrm{d}t)\\&=y''(x(t))(x'(t))^2\mathrm{d}t^2+y'(x(t))x''(t)\mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=x''(t)$，因此上式变为

$$\mathrm{d}^2y(t)=y''(x(t))\mathrm{d}x(t)^2+y'(x(t))\mathrm{d}^2x(t) \tag{7}$$

另一方面，对于函数 $y=y(x)$, x 为自变量，它的二阶微分为 $\mathrm{d}^2y(x)=y''(x)\mathrm{d}x^2$. 比较这两个式子的形式可以发现，当 x 为中间变量时，二阶微分多了一项 $y'(x(t))x''(t)\mathrm{d}t^2$，因此我们称二阶微分不具有形式不变性.[②]

将(7)式变形，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}&=y''(x(t))+y'(x(t))\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}\\&=\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}\end{aligned}$$

[①]否则的话，在求一阶导数的时候，便不能将 $\frac{dy}{dx}$ 写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ 了.

[②]实际上，形式不变性只对一阶微分成立，而对于高阶微分均不成立.

回到例题，将(2)-(5)式中的相应结果代入上式可知：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}&=\frac{-1}{(\cos(t)-1)^2}+\frac{\sin(t)}{\cos(t)-1}\cdot\frac{-\sin(t)dt^2}{(\cos(t)-1)^2dt^2}\\&=\frac{\cos(t)}{(\cos(t)-1)^2}=\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}\end{aligned}$$

因此，回顾例题中的第二种解法，错误的原因在于：

1. 没有分清楚 x 在参数方程下是因变量，而在由参数方程确定的函数 $y=y(x)$ 中又是自变量；

2. 二阶微分不具有形式不变性.

Remark: 导数的微分表达式的好处在于：

1. 可以不把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看作一个整体，因为通过分别计算 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的方式在很多时候会非常方便，甚至可能是唯一的办法 (例如例题中所给出的参数方程没有办法给出显式的 $y=y(x)$ 的表达式的时候)；

2. 导数表达式能够表达的内容微分表达式完全能够表达，而微分表达式能够表达的内容并不一定能够用导数表达式来表达.[③]

Remark: 对于函数 $y=y(x)$，x 可能为自变量，也可能为中间变量 $x(t)$ 的情况下，我们有以下结论：

1. 由于一阶微分具有形式不变性，因此，无论 x 是自变量还是中间变量，$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x(t)}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$ 表达式的形式都完全相同，因此可以不考虑参数，简单地记为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，并且不会带来歧义；

2. 由于二阶微分不具有形式不变性，因此，只有在 x 为自变量的情况下，才有

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y\mathrm{d}x-\mathrm{d}^2x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

在 x 为因变量的情况下，二阶导数只能够写为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x(t)}(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x(t)})$ 的形式，而绝不能写成 $\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}x(t)^2}$ 的形式. *在例题及解答中所使用的关于二阶导数的一些记号是有歧义的.*

补充： 对 $y=y(x)$ 来说，$\mathrm{d}^2y=0$ 一般不成立，但是 $\mathrm{d}^2x=0$ 一定成立. 这一点可以这样理解，将 x 看成关于自身的一个函数 $x(x)=x$，求二阶导，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=1\qquad\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}=0$$

由于 $\mathrm{d}x\neq0$，故 $\mathrm{d}^2x=0$.

[③]从数学的角度来看，微分是比导数更容易被抽象的一个概念；所以个人认为，发明这一记号的莱布尼茨比牛顿的理论水平高的多.