Modelagem Matemática das Oscilações Harmônicas em um Sistema Massa-Mola em Equações Diferenciais

Johnny Marcos Silva Soares[1], **José Robertty de Freitas Costa**[1]

[1]Campus Quixadá - Universidade Federal do Ceará (UFC)

{johnnymarcos1998, roberttyec}@gmail.com

Abstract. *In this article we will present the mathematical modeling for the problem of harmonic oscillations in a mass-spring system from differential equations and present general solutions to these equations. We will simulate using the Scilab software to model the problem and compare it with the solution found deductively analytically.*

Resumo. *Neste artigo iremos apresentar a modelagem matemática para o problema das oscilações harmônicas em um sistema massa-mola a partir de equações diferenciais e apresentar soluções gerais para essas equações. Iremos simular utilizando o software Scilab a modelagem do problema e compararmos com a solução encontrada deduzida de forma analítica.*

1. Introdução

Oscilações são encontradas em todos os campos da física. Exemplos de sistemas mecânicos vibratórios incluem pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro. A corrente elétrica alternada de que nos servimos é oscilatória, e oscilações de corrente em circuitos elétricos têm inúmeras aplicações importantes [NUSSENZVEIG 2002].

O estudo das oscilações tem grande importância em várias áreas da engenharia. Muitos sistemas são descritos com oscilações harmônicas em um sistema massa-mola, isso significa que é um sistema onde a mola é desprovida de massa [Figueira 2005]. Consideramos também que existe um corpo de massa m que não se deforma (não importando a força aplicado nele) presa em uma mola cuja massa é desconsiderada. Esse modelo é conhecido como mola de Hooke e está descrita na figura 1.

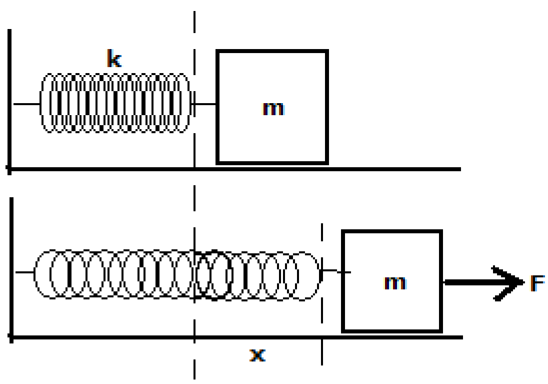

Figura 1. Modelo de Massa-Mola

Este trabalho está dividido em quatro seções, onde a presente seção visou trazer a importância do estudo das oscilações e em específico no problema trabalhado. A segunda seção traz a modelagem matemática do problema, detalhando nos mais diversos casos de oscilações harmônicas e iremos detalhar as soluções destes casos. Na terceira seção iremos trazer uma simulação de uma solução fixada as constantes trabalhadas e comparar o resultado da simulação com o resultado da solução analítica apresentada na segunda seção. Por fim, na quarta seção, a conclusão do trabalho.

2. Modelagem Matemática

O bloco de massa m presa na mola está sobre atuação de 3 forças, são elas: força que atua no sistema massa-mola (F_m), força de atrito cinético (F_{atrito}) e a força externa atuante conhecida como forçante (F_{ext}). Logo a força total pode ser representada pela seguinte equação:

$$F = F_m + F_{atrito} + F_{ext} \tag{1}$$

A força que atua no sistema massa-mola é dada pela lei de Hooke, dada por:

$$F_m = -kx \tag{2}$$

Um sistema, se amortecido, está sujeito a força de atrito cinético que é proporcional a velocidade e a γ conhecida como constante de amortecimento, logo a a força de atrito cinético é dada por:

$$F_{atrito} = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

E por fim, a forçante que será dada por:

$$F_{ext} = F(t) \tag{4}$$

A segunda lei de Newton traz o fato da força ser proporcional a massa vezes a aceleração, logo:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{5}$$

Com a unificação das equações anteriores, conclui-se que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F(t) \tag{6}$$

Logo, temos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{7}$$

Portanto, o modelo massa-mola segue o modelo de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. Ou seja, ele vai ser do seguinte formato:

$$ax'' + bx' + cx = F(t) \tag{8}$$

Onde, a é a massa (m) do objeto preso na mola, b é a constante de amortecimento (γ) da mola e c é a constante elástica (k) da mola. As constantes são todas elas não negativas.

Existem diversos tipos de oscilações harmônicas, cada uma com particularidades específicas, sendo mostradas a seguir.

2.1. Oscilação harmônica simples

O movimento harmônico simples (MHS) ou movimento harmônico livre não-amortecido é o movimento oscilatório ocorrido quando a aceleração e a força resultante são proporcionais e opostas ao deslocamento [Tipler and Mosca 2000]. Ou seja, temos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{9}$$

É facilmente observado que para este tipo de oscilação F_{atrito} = F_{ext} = 0. Utilizando o método dos coeficientes a determinar - abordagem da superposição [Zill 2003] para resolver a equação (9). Segue abaixo a resolução:

m $\frac{d^2x}{dt^2}$ + kx = 0

Considere que x = e^{pt}

e^{pt} (mp^2 + k) = 0

Como $e^{pt} \neq 0$, então

mp^2 + k = 0

p^2 + $\frac{k}{m}$ = 0

Normalmente atribui-se $\frac{k}{m}$ = ω^2. Logo,

p^2 + ω^2 = 0

Portanto, a solução geral para uma oscilação harmônica simples será:

$$x = c_1cos(\omega t) + c_2sin(\omega t) \tag{10}$$

2.2. Oscilação harmônica livre amortecida

No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sob um corpo são consideradas proporcionais a uma potência de velocidade instantânea [Zill 2003]. Ou seja, temos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{11}$$

É facilmente observável que para este tipo de oscilação F_{ext} = 0. Com a utilização do método dos coeficientes a determinar - abordagem da superposição [Zill 2003] para resolver a equação (11). Segue abaixo a resolução:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x + = 0$$

Normalmente atribui-se $\frac{k}{m} = \omega^2$ e $\frac{\gamma}{m} = 2\lambda$. Logo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Considere que x = e^{pt}, logo:

$$e^{pt} (p^2 + 2\lambda p + \omega) = 0$$

Como $e^{pt} \neq 0$, então

$$p^2 + 2\lambda p + \omega = 0$$

$$p = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Neste momento da resolução que um impasse acontece, pois não é informado se $\lambda^2 - \omega^2$ é maior, menor ou igual a zero. Repare que isso irá impactar diretamente na solução. Por este motivo existem 3 classes de oscilação harmônica livre amortecida.

2.2.1. Oscilação harmônica livre amortecida supercrítica

A oscilação harmônica livre amortecida supercrítica acontece quando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Dizemos que um sistema é superamortecido, pois o coeficiente de amortecimento γ é grande quando comparado com a constante da mola k [Zill 2003].

Como $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, temos que:

$$x = c_1 e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} + c_2 e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} \tag{12}$$

2.2.2. Oscilação harmônica livre amortecida crítica

A oscilação harmônica livre amortecida crítica acontece quando $\lambda^2 - \omega^2$ = 0. Dizemos que um sistema é criticamente amortecido, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório [Zill 2003].

Como $\lambda^2 - \omega^2$ = 0, temos que:

$$x = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 t e^{-\lambda t} \tag{13}$$

2.2.3. Oscilação harmônica livre amortecida subcrítica

A oscilação harmônica livre amortecida supercrítica acontece quando $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. Dizemos que o sistema é subamortecido, pois o coeficiente de amortecimento γ é pequeno comparado com a constante k da mola [Zill 2003].

Como $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, temos que:

$$x = e^{-\lambda t}(c_1 cos((\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})t) + c_2 sin((\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})t)) \quad (14)$$

2.3. Oscilação harmônica forçada

Considerando agora a força externa (F_{ext}) F(t) agindo sobre uma massa vibrante em uma mola. Por exemplo, F(t) pode representar uma força que gera um movimento oscilatório vertical do suporte da mola. A inclusão de F(t) resulta na equação diferencial do movimento forçado ou induzido [Zill 2003]. Esta equação refere-se a equação (6) e (7) já apresentadas.

Observe que as equações (7) e (11) tem muito em comum, a única diferença é que a equação (7) é uma equação diferencial homogênea e a equação (11) é uma equação diferencial não-homogênea. Se utilizarmos o método dos coeficientes a determinar - abordagem da superposição [Zill 2003] tem-se que:

$$x = x_c + x_p \quad (15)$$

Onde x_c é a solução complementar e x_p é a solução particular. Observe que x_c será a solução de uma oscilação harmônica livre amortecida cujo método de resolução é apresentado na subseção anterior. x_p é impossível de ser calculada quando F(t) não fixado, mas facilmente resolvido pelo método dos coeficientes a determinar quando fixado F(t).

3. Simulação

Foi realizado uma simulação de um problema massa-mola cuja a massa do corpo é 1, a constante de amortecimento é 1 e 2π é a constante elástica da mola e com forçante nula. Portanto, a solução foi modelada como a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2\pi x = 0 \quad (16)$$

Observando a equação tem-se claramente uma equação de uma oscilação harmônica livre amortecida, para determinar de qual 3 classes ele pertence é calculado $\lambda^2 - \omega^2$. Como $\lambda = \frac{\gamma}{2m} = \frac{1}{2}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Logo é obtido $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, portanto, uma solução harmônica livre amortecida subcrítica e a solução analítica do problema é:

$$x = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 cos((\sqrt{2\pi - \frac{1}{4}})t) + c_2 sin((\sqrt{2\pi - \frac{1}{4}})t)) \quad (17)$$

Com a aplicação do problema de valor inicial x(0) = 6 e x'(0) = 7 concluí-se que $c_1 = 6$ e $c_2 = \frac{20}{\sqrt{8\pi - 1}}$, portanto a solução será:

$$x = e^{-\frac{1}{2}t}(6cos((\sqrt{2\pi - \frac{1}{4}})t) + \frac{20}{\sqrt{8\pi - 1}}sin((\sqrt{2\pi - \frac{1}{4}})t)) \tag{18}$$

Foi traçado este gráfico utilizando GeoGebra, para ser usado como comparação com o gráfico gerado pela simulação.

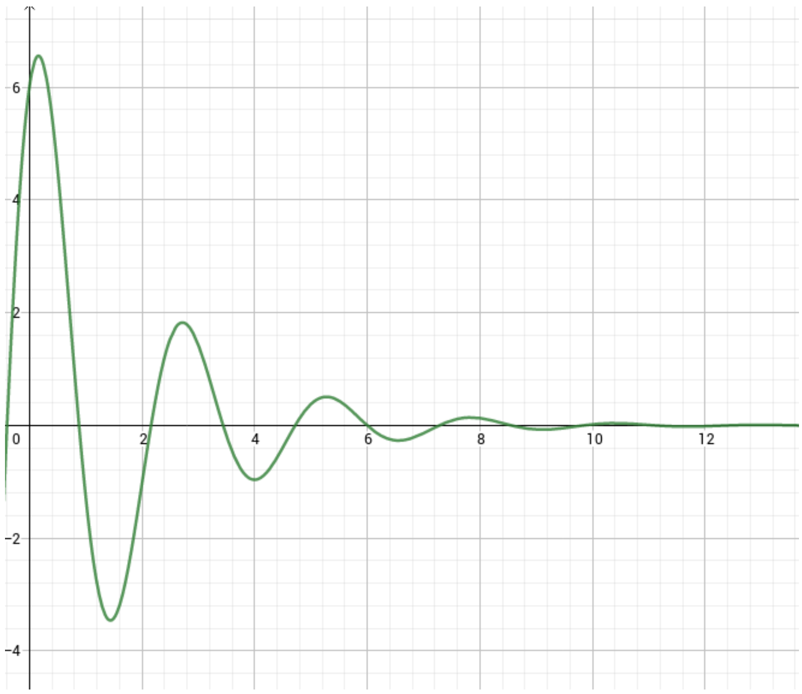

Figura 2. Gráfico da Solução Analítica feito no Geogebra

Utilizamos o software livre Scilab para simularmos este mesmo problema. Abaixo apresentamos o código desenvolvido na ferramenta para solucionar o problema.

```
clear
close
function ydot=f(t,x)
  y=x(1,:);
  v=x(2,:);
  ydot(1,:)=v;
  ydot(2,:)= -2*%pi*y-v;
endfunction
x0=[6;7];
t0=[0;0];
t=[0:0.01:26];
x=ode(x0,t0,t,f);
xG=x(1,:);
plot(t,xG)
```

Figura 3. Implementação da Simulação feita no Scilab

Por fim, o programa simulou o gráfico da solução da equação diferencial.

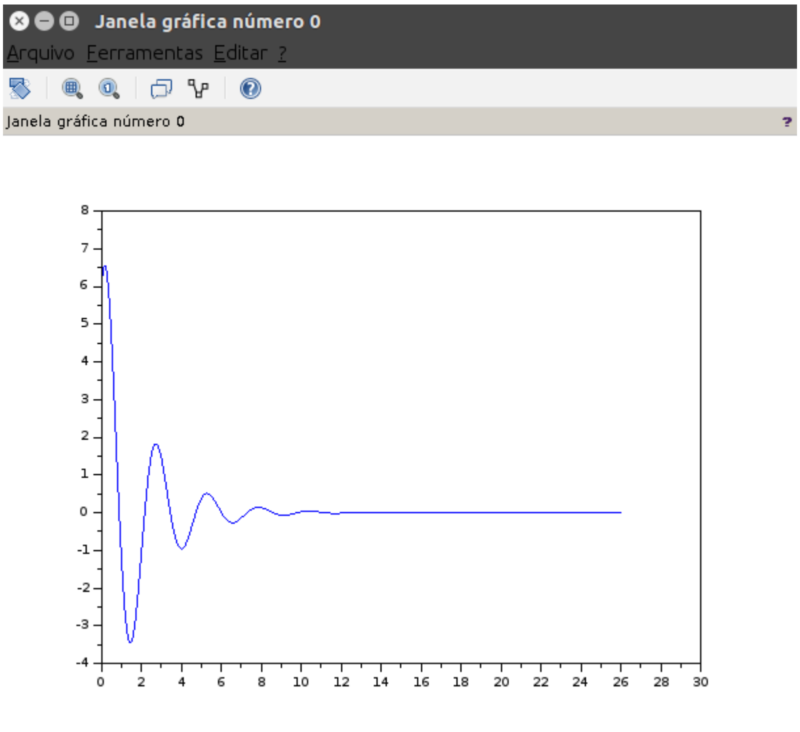

Figura 4. Gráfico da Simulação

4. Conclusão

Portanto, foi possível observar uma aplicação prática de equações diferenciais. Sabe-se que muitos problemas na natureza podem ser modelados matematicamente como equações diferenciais e além disso a modelagem matemática mostrou-se muito útil para que seja possível interpretar e entender problemas e situação que ocorrem naturalmente em fenômenos físicos, populacionais, químícos, dentre outros.

Outro fato relevante é a existência de softwares capazes de realizar simulações das equações diferenciais facilitando o trabalho de engenheiros e usuários que necessitam de soluções rápidas para problemáticas em estudos. As equações com alta complexidade de resolução são facilmente resolvidas o auxílio desses tipos de softwares, que podem em seguida traçar gráficos e figuras ajudando ainda mais a interpretação das soluções.

Referências

Figueira, J. S. (2005). Easy java simulations–modelagem computacional para o ensino de fısica. *Revista Brasileira de Ensino de Fısica*, 27(4):613–618.

NUSSENZVEIG, H. M. (2002). Curso de física básica-vol. 2, fluidos; oscilações e ondas; calor. *Editora Edgard Blücher*.

Tipler, P. A. and Mosca, G. (2000). *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinámica* . Grupo Gen-LTC.

Zill, D. G. (2003). *Equações diferenciais com aplicações em modelagem.* Cengage Learning Editores.