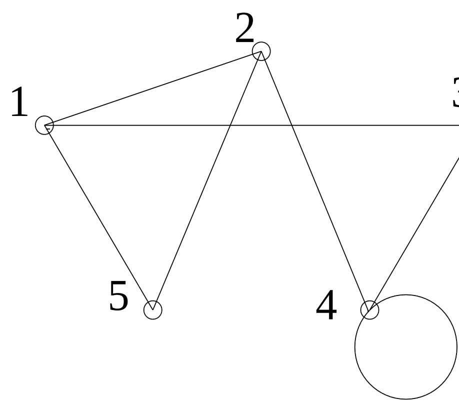
Matrizes de adjacência

Carlos Tomei

Um grafo é simplesmente um conjunto de pontos (os *vértices*), ligados por alguns segmentos (as *arestas*). Dois vértices são chamados *adjacentes* se são ligados por uma aresta. A figura abaixo, por exemplo, é um grafo com cinco vértices, que foram rotulados $1, 2, \ldots, 5$, e sete arestas, e nele os vértices 1 e 4 não são adjacentes. Note a aresta começando e terminando no mesmo vértice 4. Um *caminho* entre dois vértices é exatamente o que vocêstá pensando: 1243444315 é um caminho entre 1 e 5 de *comprimento* (isto é, o número de arestas percorridas) igual a 9. Note que um caminho pode ir e voltar sobre si mesmo muitas vezes, como nesse exemplo, ou ficar rodando por uma aresta.



Um outro exemplo é o grafo que tem por vértices e arestas exatamente os (oito) vértices e as (doze) arestas de um cubo.

Grafos são tão simples, que é difícil imaginar que existam perguntas interessantes associadas a eles —a situação é exatamente o contrário: para a maioria das perguntas, não se conhece uma resposta satisfatória. Um exemplo de pergunta (que não é tão simples, mas vai ser resolvida já) é a seguinte: quantos caminhos de comprimento 20 existem ligando os vértices 1 e 5 no grafo acima? Ou, de forma semelhante, quantos caminhos *fechados* (isto é, começando e terminando no mesmo vértice) de comprimento 100 existem no grafo associado ao cubo? Note, aliás, que esses números são provavelmente muito grandes, e não são fáceis de escrever em termos dos objetos combinatórios que você aprendeu no colégio (arranjos, combinações...) — na verdade, esses objetos são inúteis para abordar esse problema.

Não é nada óbvio que essa pergunta possa ser resolvida usando matrizes: o modo como vamos resolvê-lo é tão importante que é muito empregado em problemas em otimização, matemática discreta,teoria de grafos, etc. A idéia é a seguinte. Dado um grafo G com n pontos, rotule seus vértices com os números $1, 2, \ldots, n$ e monte a *matriz de adjacência* de G — essa matriz, que vamos chamar de A, é $n \times n$ e só tem os números 0 e 1 em suas posições: mais precisamente, na posção (i,j) (isto é, no cruzamento da linha i com a coluna j) A é 0 se os vértices i e j não são adjacentes e é igual a 1 se o são. Por exemplo, para o grafo da figura 1, a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz é *simétrica* (isto é, as posições (i, j) e (j, i) contêm os mesmos números) — afinal, se o vértice i é adjacente a j, o j é adjacente ao i. O fato bastante surpreendente é que o número de caminhos de comprimento 20 ligando os vértices 1 e 5 é dado pela posição $(1, 5)$ da matriz A^{20}. De maneira mais geral, temos o seguinte teorema.

Teorema: Seja G um grafo com n pontos e matriz de adjacência A. O número de caminhos ligando o vértice i ao j de comprimento c é a posição (i, j) da matriz A^c.

Vamos considerar a situação muito simples $c = 2$ — isto é, vamos ver porquê o número de caminhos ligando i a j passando por um vértice intermediário é dado pela posição (i,j) da matriz A^2. Para facilitar a notação vamos escrever $M_{i,j}$ para representar a posição (i, j) de uma matriz arbitrária M. Note que a posição (i, j) de M^2 (isto é, $M^2_{i,j}$) é dada pela expressão

$$M^2_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} M_{k,j}$$

(para convencer-se disso, estude com calma como você calcula o quadrado de uma matriz exemplo — note, aliás, que a expressão seria o comando central de um programa que eleva uma matriz ao quadrado). Agora, se M é a matriz de adjacência, só há uma maneira do produto $M_{i,k} M_{k,j}$ ser diferente de zero: as posições $M_{i,k}$ e $M_{k,j}$ têm que ser iguais a um, o que quer dizer que o grafo original tem uma aresta ligando i a k e outra ligando k a j — mas isso é exatamente dizer que existe um caminho de comprimento dois ligando i a j passando por k! Como k pode ser qualquer ponto do grafo (isto é o que quer dizer que no somatório k vai de 1 a n), e cada caminho desse tipo contribui com o número $1 = 1 \times 1$ ao somatório, o termo direito da equação é o número total de caminhos de i a j de comprimento 2, e o resultado está demonstrado nesse caso muito simples. Para comprimentos arbitrários, a demonstração é muito parecida, combinando esse argumento com indução.

A moral é que um problema combinatório bastante complicado se reduziu a calcular potências de matrizes. Claro, a dificuldade agora é saber calcular potências de forma competente, e para isso temos um curso pela frente.

Essas idéias se estendem para outros tipos de grafos. Por exemplo, poderíamos supor que arestas são orientadas (e representar isso colocando setinhas em cada aresta), de maneira que seria possível ir de i a j, mas não voltar. Ou que existem várias arestas ligando i a j. Em cada situação dessas, o problema de contar caminhos continua fazendo sentido, e uma maneira de resolvê-lo é considerar a definição adequada da matriz de adjacência em cada caso. Se tivermos tempo, veremos exemplos disso em sala, além de outras técnicas — equações de recursão — para resolver o problema da contagem de caminhos.