Complex Function: 复变函数

A notebook for Complex Function

作者:John Pink
组织:John 的数学小栈
时间:March 3, 2024
版本:0.1

ElegantLATEX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第 1 章 复数的基本概念

定义 1.1 (复数 (Complex number))

我们将形如

$$z = x + iy$$

的数称为复数。其中 x, y 均为实数。

♣

注 (虚数单位 i) 为了表示某个数的平方为负数, 引入虚数单位 i, 其满足如下性质

$$i^2 = -1$$

定义 1.2 (幅角)

从正实轴旋转到 (x, y) 所在的射线的角度称为复数 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}z$。

♣

注 根据定义的描述，任何旋转到 (x, y) 所在射线的角度再旋转 $2k\pi$ 的角度仍然符合幅角的定义，所以幅角是一个 $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ 一个多值函数。

第 2 章 复变函数

定义 2.1 (复函数一致收敛)

一个函数 $f(z)$ 在区域 E 上一致收敛，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 s.t. z', z'' \in E, \text{只要满足} |z' - z''| < \delta, \text{有}: |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

♣

定理 2.1 (Cauchy-Riemann 定理)

设函数 $f(z)$ 为一个复变函数，且

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

则这个复函数可微的充分必要条件为

1. u, v 均可微;
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$;
3. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

♡

定义 2.2 (解析函数与可微)

如果复函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都可微, 则称复函数 $f(z)$ 在 D 内解析; 如果 $f(z)$ 在 z_0 的某一个邻域内解析，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

♣

连续函数在有界闭区间上的性质 (复函数版本)

命题 2.1

1. 设函数 $f(z)$ 在简单曲线或者有界闭区域 E 上连续，则它在 E 上一致连续.
2. 设函数 $f(z)$ 在简单曲线或者有界闭区域 E 上连续，则它在 E 上有界.
3. 设函数 $f(z)$ 在简单曲线或者有界闭区域 E 上连续，则它在 E 上能够达到最大模与最小模.

♠

第 3 章 Cauchy 积分

定理 3.1 (Cauchy 积分公式)

设区域 D 的边界为 C, 若

1. f 在 D 内解析;
2. f 在 $\bar{D}=D\cup C$ 内连续;

则 $\forall z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

♡

定义 3.1 (Cauchy 积分)

将这种形式的积分称为 Cauchy 积分。

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

♣

例题 3.1 求积分 $\oint_C\frac{e^z}{z^2+1}dz$, 其中 $C:|z|=2$ 的正向.

例题 3.2 设 C 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的正向，设 $f(z)=\oint_C\frac{\zeta^2-2}{\zeta-z}d\zeta$, 求 $f(z),f'(z),f''(z),f'(1+\mathrm{i})$ 的值。

推论 3.1 (平均值定理)

如果函数 $f(z)$ 在圆 $|\zeta-z|<R$ 内解析，在闭圆 $|\zeta-z|\le R$ 上连续，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})d\varphi$$

♡

证明 令 $z-z_0=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\varphi\in[0,2\pi]$。则由 Thm3.1Cauchy 积分公式有:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-z|<R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

代入 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z_0$ 有:

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}d\varphi}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})d\varphi\end{aligned}$$

定理 3.2 (高阶导数定理)

在 3.1的条件下，$f(z)$ 在 D 内有任意阶导数, 则有

$$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}dz,\ (z\in D,n=1,2,3,\cdots)$$

♡

证明 对柯西积分公式 3.1两边同时多次求导

定理 3.3

$f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 平面上的区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内的任意阶导数，且均在 D 内解析。

♡

定理 3.4 (Cauchy 不等式)

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，a 为 D 内一点，以 a 为圆心作圆周 $\gamma : |\zeta - a| = R$，只要 γ 及其内部 K 均含于 D，则有

$$|f^{(n)}| \leq \frac{n!M(R)}{R^n}$$

其中 $M(R) = \max_{|z-a|=R} |f(z)|, n = 1, 2, \ldots$

定义 3.2 (整函数)

我们将在整个复平面上解析的函数称为整函数。

定理 3.5 (Liouville 定理 (模有界定理))

有界整函数 $f(z)$ 必为常数。

定理 3.6 (代数学基本定理)

在复平面 $\mathbb{C}$ 上，n 次多项式函数

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,\ a_0 \neq 0$$

至少有一个零点。

证明 [反证法] 如果函数 $f(z) = p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，令 $F(z) = 1/f(z)$，则函数 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，由于 $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$，则

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = 0.$$

从而一定存在一个足够大的正数 R，使得 $|z| > R$ 时，有

$$|F(z)| < 1.$$

而当 $|z| \leq R$ 时，根据连续函数在闭区域上连续必有界，设

$$|F(z)| < M.$$

从而在 $\mathbb{C}$ 上，

$$|F(z)| < M + 1.$$

由 Liouville 定理得 $F(z)$ 必为常数，也即 $f(z)$ 为常数，与条件矛盾.

作为 Cauchy 积分定理的逆定理，我们有 Morera 定理，如下

定理 3.7 (Morera 定理)

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，且对 D 内任一周线 C，有

$$\int_C f(z)dz = 0$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析

定理 3.8

函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析的充要条件为

- $f(z)$ 在 G 内连续；
- 对任一周线 C，只要 C 及其内部全含于 G 内，就有

$$\int_C f(z)dz = 0$$

3.1 解析函数与调和函数

$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，则由 C.-R. 方程有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

同时对 u 和 v 继续求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}&=0\end{aligned}$$

则函数 u,v 均满足 Laplace 方程, $\Delta u=\Delta v=0$.

定义 3.3 (调和函数)

如果二元实函数 $H(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，且满足 $\Delta H=0$, 则称 H 为**调和函数**. ♣

定义 3.4 (共轭调和函数)

在区域 D 内满足 C.-R. 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

的两个调和函数 u,v 中，v 称为 u 在区域 D 内的**共轭调和函数**. ♣

注 共轭调和函数的关系并不是对等的，注意上述定义的顺序不可改变。

定理 3.9

若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析，则在区域 D 内 v 必是 u 的共轭调和函数. ♡

第 4 章 解析函数的幂级数表示

4.1 复级数的基本概念

定义 4.1 (复级数的收敛与发散)

对于复数项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

令 $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, 称其为复数项级数的**部分和**. 若复数列 S_n 以有限复数 s 为极限，即如果

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

则称复数项无穷级数**收敛**于 s，则称 s 为级数的**和**，记为

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

若复数列无有限极限，则称其**发散**

♣

定理 4.1 (复级数收敛的充要条件)

设 $\alpha_n = a_n + \mathrm{i}b_n, a_n$ 与 b_n 为实数列，则复数列 α_n 收敛于 $s = a + \mathrm{i}b$ 的充要条件为:
实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别收敛于 a, b.

♡

证明 设 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$, 则

$$S_n = A_n + \mathrm{i}B_n$$

则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + \mathrm{i}B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} B_n = a + \mathrm{i}b$$

的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = a, \lim_{n\to\infty} B_n = b.$$

定理 4.2 (Cauchy 收敛准则)

复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的充分必要条件为: $\forall\epsilon$, 存在 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \epsilon$$

♡

注 若只改变级数中的有限项，则产生的新级数与原级数的同敛散

定理 4.3

复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的一个充分条件为: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛

♡

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛，则由Cauchy 收敛准则知
$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+, s.t. \forall n > N :$

$$|\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p}| < \varepsilon \ \ (\forall p \in \mathbb{N}^+)$$

又由绝对值不等式

$$|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < |\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p}| < \varepsilon. (\forall p \in \mathbb{N}^+)$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛.

定义 4.2 (绝对收敛)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 称为**绝对收敛**; 非绝对收敛的级数称为**条件收敛**.

♣

定理 4.4

1. 一个绝对收敛的复级数的各项次序可以重排，其收敛值不变
2. 两个绝对收敛的复级数

$$s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

$$s'=\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_n'+\cdots$$

可按照对角线方法得出**乘积级数**, 又称为 **Cauchy 级数**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\alpha'_{(n+1)-k}=\alpha_1\alpha_1'+(\alpha_1\alpha_2'+\alpha_2\alpha_1')+\cdots+(\alpha_1\alpha_n'+\alpha_2\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_1')+\cdots$$

也绝对收敛于 ss'

♡

4.2 一致收敛

定义 4.3 (和函数)

设复函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{4.1}$$

的各点均在点集 E 上定义，且在 E 上存在一个函数 $f(z)$, **对于 E 上的每一点 z, 级数 4.1均收敛于** $f(z)$, 则称 $f(z)$ 为级数 4.1的**和函数**.

♣

注[$\varepsilon-N$ 语言描述] $\forall\varepsilon>0,\forall z\in E,\exists N(\varepsilon,z)\in\mathbb{N}^+,s.t.\forall n>N:$

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\right|<\varepsilon$$

这里的 N 是一个依赖于 ε 和 z 的量，这种收敛性依赖于所选取的点，因此称之为**点态收敛**。

定义 4.4 (一致收敛)

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, 如果在点集 E 上有一个函数 $f(z)$, 使得对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时，对一切的 $z\in E$, 均有

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\right|<\varepsilon$$

♣

注[$\varepsilon-N$] $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+,s.t.\forall n>N:$

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\right|<\varepsilon(\forall z\in E)$$

定义 4.5 (非一致收敛)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 不一致收敛:

$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n_0>N,\exists z_0\in E,s.t.$

$$\left|f(z_0)-\sum_{k=1}^{n_0}f_k(z_0)\right|\geq\varepsilon_0$$

♣

定理 4.5 (Cauchy 一致收敛准则)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛于某个函数的充要条件为:
任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时，对一切的 $z \in E$, 均有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \ (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

♡

注 $[\varepsilon - N]$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛
$\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+, s.t. \forall n > N, \forall z \in E:$

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \ (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

定理 4.6 (优级数准则)

如果有正数列 $M_n (n = 1, 2, \ldots)$, 使得对一切 $z \in E$, 有

$$|f_n(z)| \le M_n \ (n = 1, 2, \ldots)$$

而且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上**绝对收敛且一致收敛.**
这样的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 称为复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的**优级数**

♡

定理 4.7 (连续性定理)

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛于 $f(z)$, 则当

$$f_n \in C(E), \forall n \in \mathbb{N}^+$$

时, $f \in C(E)$.

♡

定理 4.8 (逐项积分)

若有以下两个条件成立

1. 在 C 上, $f_n \in C(E), \forall n \in \mathbb{N}^+$;
2. 在 C 上, $\sum f_n \rightrightarrows f$.

则有

$$\int_c f(z)dz = \sum \int_c f_n(z)dz.$$

♡

定理 4.9 (逐项求导)

若有以下两个条件成立

1. 在区域 D 内, $f_n(z)$ 解析, $\forall n \in \mathbb{N}^+$;
2. 在区域 D 上, $\sum f_n(z)$ 内闭一致收敛到 $f(z)$.

则有

1. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析
2. $f^{(p)}(z) = \sum f^{(p)}(z), (z \in D, p = 1, 2, \cdots)$
3.

♡

定理 4.10 (Montel 定理)

设复函数序列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区域 D 内解析, 并且在 D 上内闭一致收敛，函数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 上一定存在子序列 $\{f_{n_k}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 上内闭一致收敛, 并且这个子序列的极限函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

♡

4.3 幂级数

定义 4.6 (幂级数)

具有以下形式的级数称为幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4.2}$$

其中 $c_i, i \in \mathbb{N}$ 和 a 均为复常数.

定理 4.11 (Abel 定理)

如果幂级数 4.2在某点 $z_1(\neq a)$ 处收敛, 则它必在圆 $K: |z-a| < |z_1 - a|$ 内绝对收敛且内闭一致收敛.

4.3.1 收敛半径

定理 4.12 (Cauchy-Hadamard 公式)

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的系数 c_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l,$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l,$$

或者

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = l.$$

则幂级数的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \neq 0, l \neq +\infty; \\ 0, & l = +\infty; \\ +\infty, & l = 0. \end{cases}$$

4.3.2 Taylor 展式

定理 4.13 (Taylor 定理)

设复函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $a \in D$, 则只要圆 $K: |z-a| < R$ 在 D 中, 则 $f(z)$ 在 K 内能够展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

其中系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)}^{n+1} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

定理 4.14

函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析的充要条件为: 对于任意一点 $a \in D$, 函数 $f(z)$ 在 a 的邻域内可以展成 Taylor 级数 (幂级数).

定理 4.15

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R>0$, 且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

则 $f(z)$ 在收敛圆周 $C:|z-a|=R$ 上至少存在一个奇点.

第 5 章 解析函数的零点与奇点

5.1 解析函数的零点

定义 5.1 (零点)

设函数 $f(z)$ 在解析区域区域 D 内的一点 a 满足

$$f(a) = 0.$$

则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点.

♣

定理 5.1

不恒为零的解析函数 $f(z)$ 以 a 为 m 阶零点的充要条件为

$$f(z) = (z-a)^m \phi(z).$$

其中 $\phi(z)$ 在点 a 的邻域 $|z-a| < R$ 内解析, 且 $\phi(a) \neq 0$.

♡

证明

(必要性) 根据 m 阶零点的定义, $f(z)$ 在点 a 的邻域内可以展开为

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

从而

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}.$$

则只需令

$$\phi(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}.$$

即可.

(充分性) 假设 $f(z) = (z-a)^m \phi(z)$, 则

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(z-a)^m]^{(k)} \cdot \phi^{(n-k)}(z).$$

于是当 $n < m$ 时, $[(z-a)^m]^{(k)}|_{z=a} = 0$, 从而 $f^{(n)}(a) = 0$.

而当 $n = m$ 时, $f^{(m)}(a) = m!\phi(a)$, 由于 $\phi(a) \neq 0$, 从而 $f^{(m)}(a) \neq 0$, 则由 m 阶零点的定义可知 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

定理 5.2

不恒为 0 的解析函数的零点必是孤立的.

♡

证明 设 a 为函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则由以上定理有

$$f(z) = (z-a)^m \phi(z).$$

其中 $\phi(z)$ 在点 a 的邻域 $|z-a| < R$ 内解析, 而且 $\phi(a) \neq 0$, 从而在这个邻域内没有异于 a 的零点.

引理 5.1

如果

- 函数 $f(z)$ 在 a 的邻域 $K:|z-a|<R$ 内解析,
- 在 K 内, $f(z)$ 有一列零点 $\{z_n\}(z_n \neq a)$ 且 $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

则 $f(z)$ 在 K 内必为常数.

注 这个 Lemma 就是相当于: 存在非孤立奇点的解析函数一定为常数.

5.2 解析函数的唯一性

定理 5.3 (唯一性定理)

假设

- 函数 $f_1(z)$ 和函数 $f_2(z)$ 均在区域 D 内解析,
- 在区域 D 内有一个点列 $\{z_n\}$ 收敛于点 $a(a\in D)$, 在点列 $\{x_n\}$ 上有 $f_1(z)=f_2(z)$.

则

$$f_1(z)=f_2(z)(\forall z\in D).$$

引理 5.2

若函数 $f_1(z), f_2(z)$ 为区域 D 上的解析函数, 且在 D 的某一子区域上

$$f_1(z)=f_2(z).$$

则 $\forall z\in D$

$$f_1(z)=f_2(z).$$

定理 5.4 (最大模原理)

函数 $f(z)$ 在 D 内解析且不恒为常数, 则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点都不能达到最大值.

注 解析函数只有可能在边界点达到最大值.

5.3 洛朗 (Laurent) 展式

定义 5.2 (双边幂级数)

将如下形式的级数定义为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

其在圆环 $H:r<|z-a|<R$ 上收敛.

定理 5.5 (Laurent 定理)

在圆环 $H:r<|z-a|<R(r\geq 0, R\leq +\infty)$ 上的解析函数 $f(z)$ 一定可以展开为双边幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

Γ 为一个圆周 $|\zeta - a| = \rho(r < \rho < R)$, 而且展式是唯一的. ♡

注 $f(z)$ 的以上形式展示称为 **Laurent 展式**, 级数 $\{c_n\}$ 称为 **Laurent 级数**.

5.4 孤立奇点

定义 5.3 (孤立奇点)

如果函数 $f(z)$ 在点 a 的某一去心邻域 $K\backslash\{a\} : 0 < |z - a| < R$ 内解析, 而且点 a 为 $f(z)$ 的奇点, 则称 a 为 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**. ♣

命题 5.1

设函数 $f(z)$ 有孤立奇点 a, 则函数在 a 的某去心邻域 $K\backslash\{a\}$ 内可以展为 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

称非负幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)$ 为 $f(z)$ 在点 a 的**正则部分**, 称负幂部分 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^{-n}$ 为 $f(z)$ 在点 a 的**主要部分**. ♠

定义 5.4 (孤立奇点的类型)

设函数 $f(z)$ 以点 a 为孤立奇点,

1. 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.
2. 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限多项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z - a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - a} \ (c_{-m} \neq 0).$$

   则称 a 为 $f(z)$ 的 **m 阶极点**.
3. 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为无穷多项, 则称 a 为 $f(z)$ 的**本质奇点**. ♣

定理 5.6 (可去奇点的等价刻画)

如果 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 以下条件均为 a 为可去奇点的充要条件

1. $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;
2. $\lim_{z\to a} f(z) = b(\neq \infty)$;
3. $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界. ♡

证明

(1. $\to$ 2.) 因为 $f(z)$ 的主要部分为 0, 则 $f(z)$ 的 Laurent 展式可以表示为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

从而 $\lim_{z\to a} f(z) = c_0$.

(2. $\to$ 3.) 由于 $\lim_{z\to a} f(z) = b$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得如果 $|z - a| < \delta$, 则

$$|f(z) - b| < \epsilon.$$

从而由三角不等式

$$|f(z)| < |b| + \epsilon.$$

即 $f(z)$ 在点 a 的去心邻域 $N_\delta(a)\backslash\{a\}$ 上是有界的.

(3. $\to$ 1.) 设函数 $f(z)$ 在点 a 某一去心邻域 $K\backslash\{a\}$ 内以 M 为界. 假设 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}.$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta.$$

Γ 是完全包含在 K 内的圆周 $|\zeta-a|=\rho$. 则

$$\begin{aligned}|c_{-n}|&=\frac{1}{2\pi}\Big|\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\Big|\\&\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho=M\rho^n.\end{aligned}$$

因为 ρ 可以充分小, 从而 $c_{-n}=0\ (n=1,2,\ldots)$. 也即 $f(z)$ 的主要部分为 0.

引理 5.3 (Schwarz Lemma)

如果函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 并且满足条件

$$f(0)=0,\ |f(z)|=1\ (|z|<1).$$

则在单位圆 $|z|<1$ 上恒有

$$|f(z)|\le|z|,\ |f'(0)|\le1.$$

♡

定理 5.7 (m 阶极点的等价刻画)

如果 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 以下条件均为 a 为 m 阶极点的充要条件

1. $f(z)$ 在点 a 的主要部分为
$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\ (c_{-m}\neq0).$$
2. $f(z)$ 可以在点 a 的某去心邻域内表示为
$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}.$$
其中 $\lambda(z)$ 在点 a 的邻域内解析, 且 $\lambda(a)\neq0$.
3. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点 (可去奇点看作解析点).

♡

定理 5.8 (极点的充要条件)

函数 $f(z)$ 以孤立奇点 a 为极点的充要条件为

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty.$$

♡

定理 5.9 (本质奇点的充要条件)

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本质奇点的充要条件为

$$\lim_{z\to a}f(z)\text{不存在 (不是有限数和无穷)}.$$

♡

定理 5.10

如果函数 $f(z)$ 以 a 为本质奇点, 且在 a 的邻域内恒不为 0, 则 a 一定为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本质奇点.

♡

定理 5.11 (Picard 定理)

设函数 $f(z)$ 以点 a 为本质奇点, 则 $\forall A \in \hat{\mathbb{C}}$, 都存在一个收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

5.5 解析函数在无穷远点的性质

由于无穷远点一定为解析函数的奇点，故可以讨论无穷远点这个奇点的某些性质.

定义 5.5 (无穷远点为孤立奇点)

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的 (去心) 邻域

$$N\backslash\{\infty\} : +\infty > |z| > r \geq 0.$$

内解析, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

做一个变量替换

$$z' = \frac{1}{z}.$$

且令

$$\phi(z') = f(\frac{1}{z'}) = f(z).$$

则 $\phi(z')$ 就在原点的去心邻域 $K\backslash\{0\} : 0 < |z'| < 1/r$ 内解析, 且以 0 为孤立奇点.

定义 5.6 (无穷远点孤立奇点的分类)

若 $z' = 0$ 为 $\phi(z')$ 的可去奇点 (解析点)、m 阶极点、本质奇点, 则相应的, $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点)、m 阶极点、本质奇点.

定义 5.7 (∞ 点处的 Laurent 展式)

设 $\phi(z')$ 在去心邻域 $K\backslash\{0\}$ 内的 Laurent 展式为

$$\phi(z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z'^n.$$

从而做替换 $z' = 1/z$ 之后, $f(z)$ 在 ∞ 点可以展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}.$$

记为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

其中 $b_n = c_{-n}, (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 即为 $f(z)$ 在 ∞ 点的 Laurent 展式. 将 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 称为**主要部分**.

定理 5.12 (∞ 为可去奇点的等价刻画)

函数 $f(z)$ 以 ∞ 点为可去奇点的充要条件为

- $f(z)$ 在 ∞ 点处的主要部分为 0.
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = b(\neq \infty)$.
- 函数 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的某去心邻域 $N\backslash\{\infty\}$ 内有界.

定理 5.13 (∞ 为 m 阶极点的等价刻画)

函数 $f(z)$ 以 ∞ 点为 m 阶极点的充要条件为

- $f(z)\infty$ 的主要部分为
$$\sum_{n=1}^{m} b_n z^n, (b_m \neq 0).$$
- $f(z)$ 在 ∞ 的某去心邻域内 $N\backslash\{\infty\}$ 可以表示为
$$f(z) = z^m \mu(z).$$
其中 $\mu(z)$ 在 $N\backslash\{\infty\}$ 解析, 而且 $\mu(\infty) \neq 0$.
- $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 以 ∞ 为 m 阶零点.(令 $g(\infty) = 0$))

定理 5.14 (∞ 为极点的充要条件)

$f(z)$ 以 ∞ 为极点的充要条件为
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

定理 5.15 (∞ 为本质奇点的等价刻画)

函数 $f(z)$ 以 ∞ 点为本质奇点充要条件为

- $f(z)$ 在 ∞ 点的主要部分有无穷多项.
- $\lim_{z\to\infty} f(z)$ 不存在 (不等于有限数或者 ∞).

5.6 整函数与亚纯函数

如果 $f(z)$ 为一个整函数，则其只以 ∞ 为孤立奇点, 则 $f(z)$ 可以写为
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

定理 5.16

如果 $f(z)$ 为一个整函数, 则

1. $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow f(z)$ 为常数.
2. $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Longleftrightarrow$ ($\{c_n\}$ 有有限多项)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n, (c_m \neq 0).$$
3. $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本质奇点 $\Longleftrightarrow$ $\{c_n\}$ 有无穷多项.

定义 5.8 (亚纯函数)

在 z 平面上除极点外没有其他类型的奇点的单值解析函数称为**亚纯函数**.

定理 5.17

有理函数一定为亚纯函数.

定义 5.9 (超越亚纯函数)

非有理函数的亚纯函数称为**超越亚纯函数**.

第 6 章 留数 (Residue)

定义 6.1 (留数 (residue))

设函数 $f(z)$ 以点 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz.$$

其中 $\Gamma:|z-a|=\rho, 0<\rho<R$, 为 $f(z)$ 在点 a 处的留数 **(residue)**, 记为 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

注 如果函数 $f(z)$ 在点 a 的去心邻域内的 Laurent 展式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

则沿 Γ 积分后, 只有

$$\frac{c_{-1}}{z-a}.$$

的积分结果不是 0, 从而 $f(z)$ 在 a 点的留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=c_{-1}.$$

定理 6.1 (Cauchy 留数定理)

$f(z)$ 在周线或复周线 C 的内部 D, 除去 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 外解析, 在在闭区域 $\bar{D}=D+C$ 上除 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 连续, 则

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

定理 6.2 (n 阶极点的留数)

设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, 则 $f(z)$ 可以写为

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}.$$

其中 $\phi(z)$ 在 a 点解析, 且 $\phi(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

证明

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

引理 6.1

设 a 为 $f(z)$ 的 1 阶极点.

$$\phi(z)=(z-a)f(z),$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\phi(a).$$

引理 6.2

设 a 为 $f(z)$ 的 2 阶极点.

$$\phi(z) = (z-a)^2 f(z),$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \phi'(a).$$

定理 6.3

设 a 为函数 $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ 的 1 阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

证明 设

$$\varphi(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}(z-a),$$

由于 $\varphi(z)$ 在 a 点解析, 则

$$\varphi(a) = \lim_{z\to a}\varphi(z) = \lim_{z\to a}\frac{\phi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim_{z\to a}\frac{\phi(z)}{\frac{\psi(z)}{z-a}} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

定义 6.2 (∞ 点的留数)

设 ∞ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 去心邻域 $N\backslash\{\infty\}: 0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析, 则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz \ (\Gamma : |z| = \rho > r).$$

为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数, 记为 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$.

注 这里的 Γ^- 沿着顺时针方向, 也可以理解为绕 ∞ 点的正方向.

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的去心邻域内有 Laurent 展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

则由定义可以计算出 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

定理 6.4

如果函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点, 设为 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, 则

$$\sum \operatorname{Res} f(z) = 0.$$

也即所有点的留数之和为 0.

证明 以原点为圆心作圆周 Γ, 使得 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 均在 Γ 内部, 则由Cauchy 留数定理得

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

也即

$$\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z)dz = 0.$$

再根据 ∞ 点留数的定义得到

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

命题 6.1 (∞ 点留数转化为 0 点留数)

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{t=0} \left[f(\frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} \right].$$