微分几何速查手册

微分几何笔记

Author
John Ji

目录

1 曲线论

Definition (弧长参数)**.** 设 E^3 中的一条正则参数曲线 C 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$. 则参数曲线的弧长参数 s 为

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

两边同时求微分

$$ds = |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

这里 s 和 ds 均是曲线的不变量，ds 称为曲线的**弧长元素**。

Proposition. 正则参数曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 中，参数 t 为弧长参数的特征为

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = 1$$

Definition (曲率)**.** 设曲线 C 的方程是 $\boldsymbol{r}(s)$，其中 s 为弧长参数则定义曲线的曲率为

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{(s)}}{ds} \right| = |\boldsymbol{r}''(s)|$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 称为曲线的曲率向量.

Proposition. 曲线 C 为一条直线当且仅当它的曲率为 0.

证明. 假设曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$，则其曲率 $\kappa(s) = 0$ 等价于

$$\boldsymbol{r}''(s) = 0$$

上式等价于

$$\boldsymbol{r}'(s) = \boldsymbol{a}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是一个常向量。从而该曲线的切向量为一个常向量，该曲线一定为一条直线。或者更进一步上式可以等价位为

$$\boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

其中 b 为一个常向量，这也说明了 C 是一条直线。 □

Definition (挠率)**.** 设一条曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$, 其主法向量为 $\boldsymbol{\beta}(s)$, 其次法向量为 $\boldsymbol{\gamma}(s)$, 曲线 C 的**挠率**定义为

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s).$$

Proposition. 设曲线 C 不是直线, 则 C 为平面曲线, 当且仅当其挠率为 0.

证明. 分两个方向分别说明以上命题成立

必要性 如果曲线 C 为一条平面曲线，则可以得到其次法向量 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 为一个常向量，从而其切向量 $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \mathbf{0}$, 则根据挠率的定义式可得

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) = 0$$

(其实这个方向也可以从挠率的几何意义得到，挠率是描述其密切平面偏转速度的度量)

充分性 设曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$, 其 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$, 如果其挠率 $\tau(s) = 0$, 则

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{0}.$$

则向量 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 为一个常向量 $\boldsymbol{\gamma}_0$, 又因为 $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$, 从而

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = 0.$$

从而 $\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{r}(s_0) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = const$, 最终得到 $\boldsymbol{r}(s)$

$$(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(s_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = 0.$$

则曲线 C 一定落在过 $\boldsymbol{r}(s_0)$, 且以 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 为法线的平面上.

□

1.1 弧长参数下

Frenet 标架

- 切向量: $\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{r}'(t)$
- 主法向量: $\boldsymbol{\beta}(s) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha'(s)}}{|\boldsymbol{\alpha}'(s)|} = \dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$
- 次法向量: $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$

Definition. 将以 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 为法线的平面定义为

- 法平面: $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\alpha}(s) = 0.$
- 从切平面：$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) = 0.$
- 密切平面：$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) = 0.$

Definition (Frenet 标架)**.** 由以上三个向量为基底组成的标架 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s)), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的 **Frenet 标架**。

Frenet 公式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'(s) \\ \boldsymbol{\beta}'(s) \\ \boldsymbol{\gamma}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s) \end{pmatrix}$$

曲率

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{\alpha}'(s)| = |\boldsymbol{r}''(s)|$$

挠率

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) \tag{1}$$

$$\tau(s) = \frac{(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2} \tag{2}$$

1.2 非弧长参数下

曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 其中 t 为一般参数，$s = s(t)$ 为曲线的弧长参数。

$$|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}| = |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}| = |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| \cdot \frac{dt}{ds} = 1$$

从而 $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$

Frenet 标架

- 切向量: $\boldsymbol{\alpha}(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$
- 主法向量: $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\alpha}(t)$
- 次法向量: $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}$

Remark. 非弧长参数求 Frenet 标架一般采取先计算 $\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)$ 的策略, 然后利用它们的外积计算出 $\boldsymbol{\beta}(t)$:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\alpha}(t).$$

Frenet 公式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'(t) \\ \boldsymbol{\beta}'(t) \\ \boldsymbol{\gamma}'(t) \end{pmatrix} = s'(t) \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t) \\ \boldsymbol{\beta}(t) \\ \boldsymbol{\gamma}(t) \end{pmatrix}$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{(s'(t))^3}=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

挠率

$$\tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}$$

1.3 曲面论基本定理

Theorem. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t)$ 是 E^3 中的两条正则参数曲线, 它们的曲率处处不为 0. 如果存在三次以上连续可微的函数 $u=\lambda(t),\lambda'(t)\neq 0$, 使得这两条曲线的弧长函数、曲率函数和挠率函数之间满足:

$$s_1(t)=s_2(\lambda(t)),\ \kappa_1(t)=\kappa_2(\lambda(t)),\ \tau_1(t)=\tau_2(\lambda(t)).$$

则在 E^3 中存在刚体运动 σ 将曲线 $\boldsymbol{r}_1(t)$ 映射为 $\boldsymbol{r}_2(t)$.

Remark. 曲线的曲率 κ 和挠率 τ 可以在相差一个刚体运动的意义下确定曲线的形状.

1.4 平面曲线

Proposition. 平面曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s))$, 则

- 单位切向量: $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{r}'(s)=(x'(s),y'(s))$.
- 法向量: $\boldsymbol{\beta}(s)=(-y(s),x(s))$.
- 相对曲率 $\kappa_r=\boldsymbol{\alpha}'(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)=x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$.

非弧长参数下的相对曲率:

$$\kappa_r=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^3}}$$

2 曲面论

2.1 正则参数曲面

曲面是一个将 E^2 中的一个区域 D 映射为 E^3 的一个连续映射:

$$S:D\to E^3.$$

一般的一个曲面可以用参数方程表示为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).$$

为了保证这个映射是一一对应的，曲面必须为**正则**的.

Definition (正则参数曲面)**.** 设曲面的方程为 $\boldsymbol{r}(u,v)$, $p_0=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 为其上一点, 则 p_0 点有两个切向量为:

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\right|_{(u_0,v_0)},\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\right|_{(u_0,v_0)}$$

如果 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 与 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{(u_0,v_0)}\neq 0$, 则称曲线 S 在 p_0 点为**正则的**, 如果曲面处处三次以上可微且点点均正则，则称为**正则参数曲面**.

Proposition (切平面)**.**

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{r}_u(u,v)+\mu\boldsymbol{r}_v(u,v)$$

Proposition (切平面的单位法向量)**.**

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)}{|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|}$$

Proposition (容许参数变换)**.** 变换

$$\begin{cases}u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\\ v=v(\tilde{u},\tilde{v})\end{cases}$$

为曲面的**容许参数变换**, 如果

1. $u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v})$ 均为三次以上连续可微函数;
2. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\neq 0.$

Remark. 一般将正则参数曲面的 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 所指的方向定义为曲面的**正向**，容许参数变换保持曲面定向的充分必要条件为:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}>0$$

Definition (旋转面). 旋转面的参数方程一般为:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\cos u, g(v)).$$

其中 $0 \leq u \leq 2\pi, a \leq v \leq b$. 通常旋转面的 u-曲线称为**纬线**, v-曲线称为**经线**.

直纹面

直纹面是一条直线在空间中运动产生的曲面，或者说是一个直线族。

Definition (直纹面). 直纹面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{l}(u).$$

1. 曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ 称为直纹面的**准线**.
2. 曲面的 v-曲线是一条直线，称为直纹面的**直母线**.

Remark. 如果方向向量 $\boldsymbol{l}(u)$ 有固定的指向, 也即所有的直母线平行, 此时

$$\boldsymbol{l}(u) \times \boldsymbol{l}'(u) = \boldsymbol{0}.$$

这种直纹面称为**柱面**.
如果所有的直母线都过一个定点, 即存在一个连续可微的函数 $\lambda(u)$ 使得:

$$\boldsymbol{a}(u) + \lambda(u)\boldsymbol{l}(u) = \boldsymbol{r}_0.$$

这种直纹面称为**锥面**.

Proposition. 常见直纹面的参数方程:

- 柱面: $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{l}$
- 锥面: $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a} + v\boldsymbol{l}(u)$
- 切线面: $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{a}'(u)$

Definition (平面的切向量). 曲面 S 上经过 p 的任一一条连续可微曲线在该点的切向量称为曲面 S 在 p 点的**切向量**.

对于正则参数曲面，任意一点的切向量都可以由该点的 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 线性表出, 即任何切向量都可以表示为如下形式

$$a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v.$$

Proposition. 曲面 S 在点 p 处正则的充分必要条件为:
在点 p，$\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 线性无关.

Definition (切平面和切空间)**.** 在正则参数曲面 S 上一点 p, $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 张成的线性空间称为 S 在点 p 的**切空间**, 记为 T_pS. 由切向量 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 张成的平面称为曲面 S 在点 p 的切平面，其参数方程为:

$$\boldsymbol{X}(\lambda, \mu) = \boldsymbol{r}(u, v) + \lambda \boldsymbol{r}_u(u, v) + \mu \boldsymbol{r}_v(u, v).$$

Definition (法线)**.** 定义正则参数曲面 S 在点 p 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)}{|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)|}.$$

过点 p, 且方向向量为 $\boldsymbol{n}$ 的直线定义为曲面 S 在点 p 处的**法线**, 参数方程为

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{r}(u, v) + t\boldsymbol{n}(u, v).$$

2.2 第一基本形式

Definition (第一类基本量)**.** 称

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \boldsymbol{r}_u(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_u(u, v); \\ F(u, v) &= \boldsymbol{r}_u(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_v(u, v); \\ G(u, v) &= \boldsymbol{r}_v(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_v(u, v). \end{aligned}$$

为曲面 S 的**第一类基本量**。通常记为矩阵

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Definition (第一类基本形式)**.** 定义正则参数曲面 S 的**第一类基本量**为

$$\begin{aligned} I &= d\boldsymbol{r}(u, v) \cdot d\boldsymbol{r}(u, v) \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \\ &= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第一类基本量不依赖于参数的选择，是曲面的不变量.

Theorem. 在正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上参数曲线网是正交曲线网的**充分必要**条件为

$$F(u, v) = 0.$$

证明. 由于 $F(u, v) = \boldsymbol{r}_u(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_v(u, v)$, 则 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$, 当且仅当

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = F(u, v) = 0.$$

□

求正交轨线

Example. 求曲面

$$\boldsymbol{r} = (v \cos u - k \sin u, v \sin u + k \cos u, ku).$$

的参数曲线的正交轨线，其中 $k > 0$ 为常数.

曲线的参数曲线即为 u-曲线和 v-曲线, 求正交轨线的过程就是要求出与它们正交的曲线族。首先，求出曲线的第一基本量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= (-v \sin u - k \cos u, v \cos u - k \sin u, k) \\ \boldsymbol{r}_v &= (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 + 2k & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

曲面的微元可以表示为

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v.$$

u-曲线微元可以表示为

$$\boldsymbol{r}_u \delta u.$$

正交轨线曲线族在曲面上, 则其微元表示与曲面相同

$$\boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v.$$

从而正交轨线族应该满足

$$(\boldsymbol{r}_u \delta u) \cdot (\boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v) = 0.$$

从而 u-曲线的正交轨线族满足微分方程

$$E \delta u + F \delta v = 0.$$

同理可以得出 v-曲线的正交轨线族满足微分方程

$$F\delta u + G\delta v = 0.$$

对于所给例子, 其 u-曲线满足微分方程

$$(v^2 + 2k)du - kdv = 0.$$

分离变量得

$$du = \frac{k}{v^2 + 2k^2}dv.$$

从而

$$\sqrt{2}u + c = \arctan \frac{v}{\sqrt{2}k}.$$

于是, u-曲线经过点 (u_0, v_0) 的正交轨线为

$$v = \sqrt{2}k \tan \sqrt{2}(u - u_0) + v_0.$$

同理, v-曲线的正交轨线族满足

$$-kdu + 1 \cdot dv = 0.$$

从而经过点 (u_0, v_0) 的 v-曲线正交轨线为

$$v = k(u - u_0) + v_0.$$

Proposition (曲面上的曲线长度)**.** 正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上一条连续可微的曲线方程为

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \le t \le b.$$

则曲线的长度为

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + G\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2}. \end{aligned}$$

Proposition.

$$d\delta = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

称为曲面 S 的**面积元素**. 曲面 S 的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

2.3 保长对应和保角对应

Definition (切映射)**.** 假定映射 $\sigma : S_1 \to S_2$ 是三次以上的连续可微的. 则 σ 在每一点 $p \in S_1$ 上诱导出一个从切空间 T_pS_1 到切空间 $T_{\sigma(p)}S_2$ 的一个线性映射

$$\sigma_{*p} : T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2,$$

称此映射为映射 σ 在点 p 的切空间 T_pS_1 上诱导的**切映射**.

Definition (保长对应)**.** 设 $\sigma : S_1 \to S_2(S_1, S_2$ 均为正则参数曲面$)$ 是 3 次以上连续可微映射, 在任意一点 $p \in S_1$, 其切映射为

$$\sigma_{*p} : T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2.$$

如果 $\forall \boldsymbol{X} \in T_pS_1$, 有

$$|\boldsymbol{X}| = |\sigma_{*p}(\boldsymbol{X})|.$$

则称 σ 是从曲面 S_1 到 S_2 的**保长对应**.

Theorem (保长对应的充要条件)**.** 设正则参数曲面 S_1, S_2 的第一基本形式分别为 I_1, I_2, 则 $\sigma : S_1 \to S_2$ 为保长对应的充要条件为

$$\sigma^* I_2 = I_1.$$

也即其第一基本量合同

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1,v_1) & F_1(u_1,v_1) \\ F_1(u_1,v_1) & G_1(u_1,v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2,v_2) & F_2(u_2,v_2) \\ F_2(u_2,v_2) & G_2(u_2,v_2) \end{pmatrix} J^T.$$

其中 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}$.

Theorem (曲面间存在保长对应的充要条件)**.** 正则参数曲面 S_1 与 S_2 之间存在保长映射的充要条件为, 能够在曲面 S_1 和 S_2 上取适当的参数系, 都记为 (u, v), 且在这个参数系下 S_1 与 S_2 有相同的第一基本量, 即

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Definition (保角对应)**.** 设 $\sigma : S_1 \to S_2(S_1, S_2$ 为正则参数曲面) 是 S_1 到 S_2 的一一对应, 且 σ 和 σ^{-1} 都是 3 次以上连续可微映射, 如果在每一点 $p \in S_1$ 上, σ 在 p 的切映射为

$$\sigma_{*p} : T_pS_1 \to T_{\sigma(p)S_2}.$$

满足 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T_pS_1$ 都有

$$\angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \angle(\boldsymbol{\sigma}_{*p}(X), \boldsymbol{\sigma}_{*p}(Y)).$$

则称 σ 为曲面 S_1 到 S_2 的**保角对应**.

Theorem (曲面间存在保角对应的充要条件)**.** 设正则参数曲面 S_1, S_2 的第一基本形式分别为 I_1, I_2, 则 $\sigma : S_1 \to S_2$ 为保角对应的充要条件为: 在曲面 S_1 上存在连续函数 λ, 使得

$$\sigma^* I_2 = \lambda^2 I_1.$$

如果正则参数曲面 S_1 和 S_2 之间存在保角对应, 则可以取适当的参数系 (u, v), 使得

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Theorem. 两个正则参数曲面在局部上可以建立保角对应.

Definition (等温参数系)**.** 在曲面 S 上能够使第一基本形式表示为如下形式的

$$I = \frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2 + dy^2).$$

参数系 (x, y) 称为 S 的**等温参数系**.

2.4 可展曲面

Definition (可展曲面)**.** 设 S 是直纹面. 如果曲面 S 的切平面沿每一条直母线都是不变的, 则称该直纹面为**可展曲面**.

Theorem (可展曲面的充要条件)**.** 设直纹面 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{l}(u)$, 则 S 是可展曲面的充要条件为: 向量函数 $\boldsymbol{a}(u), \boldsymbol{l}(u)$ 满足方程

$$(\boldsymbol{a}'(u), \boldsymbol{l}(u), \boldsymbol{l}'(u)) = 0.$$

Theorem. 可展曲面在局部上是柱面、锥面和一条空间曲线的切线面，或者是用这三种曲面以充分连续可微的方式沿直母线拼接的结果.

Theorem (可展曲面的充要条件)**.** 可展曲面在局部上可以和平面建立保长对应.

3 曲面的第二基本形式

3.1 第二基本形式

Definition (单位法向量)**.** 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 在任意一点 (u_0, v_0) 处的切平面的**单位法向量**为

$$\boldsymbol{n} = \left.\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\right|_{(u_0,v_0)}.$$

Definition (曲面的第二类基本量)**.**

$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} \\ M &= \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} \\ N &= \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0, \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$, 第二类基本量还可以表示为

$$\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u \\ M &= -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_u \\ N &= -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_v. \end{aligned}$$

Definition (曲面的第二基本形式)**.** 将

$$\mathrm{II} = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

称为正则参数曲面 S 的**第二基本形式**.

Remark. 第二基本形式在容许参数变化下不变, 是曲面的不变量.

Theorem. 一块曲面是平面的一部分, 当且仅当其第二基本量恒为 0.

证明. 一方面, 如果一个曲面是平面, 则其法向量场满足

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0.$$

是一个常向量场, 则 $d\boldsymbol{n}=0$, 从而

$$\mathrm{II}=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=0.$$

另一方面, 如果平面的第二基本形式为 0, 则有

$$\begin{aligned}
L&=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\\
M&=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\\
N&=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0.
\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 是一个单位向量, 则有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_v=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_u=0$.

因为 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$ 构成了 E^3 的标架, $\boldsymbol{n}_u$ 与 $\boldsymbol{n}_v$ 与标架中的每个向量内积均为 0, 则 $\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{n}_v=\boldsymbol{0}$. 这说明曲面的法向量场为常向量场 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_0$. 因为 $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$, 于是

$$d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=0.$$

因此 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ 为一个常数. 从而

$$\boldsymbol{r}(u,v)\cdot\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)\cdot\boldsymbol{n}_0.$$

即

$$(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0))\cdot\boldsymbol{n}_0=0.$$

曲面为一个过点 (u_0,v_0) 且以 $\boldsymbol{n}_0$ 为法向量的平面. □

Theorem (球面的充要条件)**.** 一个正则参数曲面 S 为球面的一部分, 当且仅当 $\forall P(u,v)\in S$ 有

$$\mathrm{II}=c\mathrm{I}.$$

其中 c 不为 0.

3.2 法曲率

Definition (法曲率)**.** 设曲面的 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, S 上的曲线 C 的参数方程可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s),v(s)).$$

其中 s 为弧长参数. 曲线的单位切向量为 $\boldsymbol{\alpha}$, 其曲率向量为 $\boldsymbol{\alpha}'$, 则将曲线的**法曲率**定义为曲率向量在法向量上的投影

$$\kappa_n=\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}=\kappa\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}.$$

Proposition. 如果设 $\angle(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{n}) = \theta$, 则

$$\kappa_n = \kappa \cos\theta.$$

Definition (法曲率的等价定义)**.** 设正则参数曲面 S 的参数方程是 $\boldsymbol{r} = (u, v)$, 其第一基本形式和第二基本形式分别为 I, II, 则

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2}.$$

称为曲面 S 在点 (u, v) 处沿切方向 (du, dv) 的**法曲率**.

Definition (法截线与法截面)**.** 曲面 S 在点 (u, v) 处由切方向 (du, dv) 与法向量 $\boldsymbol{n}(u, v)$ 决定了一个平面, 称为**法截面**; 在点 (u, v) 处, 以曲面的切向量 (du, dv) 为切方向的曲线, 称为曲面在该点的一条**法截线**.

Proposition. 对于法截线而言, 由于其以 (du, dv) 为切方向, 从而其主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与曲面在 (u, v) 的法向量满足 $\boldsymbol{\beta} = \pm\boldsymbol{n}$, 所以

$$\kappa = |\kappa_n|.$$

如果对法截面定义正向, 假设以

$$(du, dv) \times \boldsymbol{n}$$

为法截面的正向, 则有以下定理.

Theorem. 设曲面 S 在点 (u, v) 处沿切方向 (du, dv) 的法曲率为 κ_n; 曲面由 (du, dv) 确定的法截线在相应的有向法截面上的平面曲线的相对曲率为 κ_r, 则

$$\kappa_n = \kappa_r.$$

Definition (主曲率)**.** 正则参数曲面在任意一个固定点, 其法曲率取最大值和最小值的方向称为曲面在该点的**主方向**, 相应的法曲率称为曲面在这点的**主曲率**.

Theorem (Euler 公式)**.** 正交参数网下, 主方向与 u-曲线的夹角为 θ_0 和 $\theta_0 + \pi/2$. 主曲率分别为 κ_1, κ_2, 则沿方向角为 θ 的切方向的法曲率为

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta - \theta_0) + \kappa_2 \sin^2(\theta - \theta_0).$$

Definition (渐进方向)**.** 在曲面 S 上一点, 其法曲率为 0 的切方向称为曲面 S 在该点的**渐进方向**. 如果曲面 S 上一条曲线在每一点的切方向都是 S 的渐进方向, 则称该曲线是 S 的**渐进曲线**.

Theorem. 曲面上的参数曲线网是渐进曲线网的充分必要条件是

$$L = N = 0.$$

Theorem. 曲面上一条直线是渐进曲线, 当且仅当它是一条直线, 或者它的密切平面恰好是曲面的切平面.

证明. 曲面上一条曲线的法曲率为

$$\kappa_n = \kappa \cos\theta.$$

其中 θ 是曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 和曲线的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角. 如果 $\kappa_n = 0$, 则 $\kappa = 0$ 或者 $\cos\theta = 0$, 如果 $\kappa = 0$ 处处成立, 则曲线是一条直线, 如果存在点的 $\kappa \neq 0$, 那么在这一点 $\cos\theta = 0$, 从而 $\theta = \pi/2$, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 而密切平面以 $\boldsymbol{\beta}$ 为法向量，从而密切平面与曲面相切. □

3.3 Weingarten 映射和主曲率

Definition (Weingarten 映射)**.** 曲面 S 在 p 点的切空间为 T_pS , 定义 $T_pS \to T_pS$ 的线性映射 W, 其将

$$\boldsymbol{r}_u \to -\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{u}},$$
$$\boldsymbol{r}_v \to -\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{v}}$$

W 称为曲面 S 在点 p 的 **Weingarten 映射**.

Theorem. 曲面 S 的第二基本形式 II 可以用 Weingarten 映射表示为

$$\mathrm{II} = W(d\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

证明.

$$\begin{aligned} W(d\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= W(\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -(\boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -d\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{r} = \mathrm{II}. \end{aligned}$$

□

Theorem. Weingarten 映射 W 是从切空间 T_pS 到它自身的**自共轭映射**，即对曲面 S 在点 (u,v) 的任意两个切方向 $d\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$，有

$$W(d\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}\cdot W(\delta\boldsymbol{r}).$$

Definition (特征值)**.** 如果有非零切向量 $d\boldsymbol{r}$ 与实数 λ 使得

$$W(d\boldsymbol{r})=\lambda d\boldsymbol{r}.$$

则 λ 称为 Weingarten 映射的**特征值**.

Proposition. 曲面沿特征向量 $d\boldsymbol{r}$ 的法曲率即为 Weingarten 映射在该点的特征值.

$$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{W(d\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}=\lambda.$$

Theorem. 正则参数曲面在每一点的 Weingarten 映射的两个特征值恰好是该曲面在这一点的主曲率, 对应的特征方向是曲面的主方向.

Theorem (Euler 公式)**.** 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是曲面 S 在点 p 处两个彼此正交的主方向的单位向量, 对应的主曲率分别为 κ_1,κ_2，则曲面在 p 点沿任意一个切向量 $\boldsymbol{e}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$ 的法曲率为

$$\kappa_n=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.$$

Definition (脐点)**.** 如果在点 p 有

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}.$$

则 p 称为曲面的**脐点**.

Definition (曲率线)**.** 设 C 为正则参数曲面 S 上的一条曲线, 如果曲线 C 在每一点的切向量都是曲面 S 在该点的主方向，则称曲线 C 为曲面 S 的一条**曲率线**.

Proposition.
$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$
对于定点 (u,v) 上式求的是主方向 (du,dv) 的方程, 对于动点 (u,v) 上述方程是曲率线满足的微分方程.

Theorem (Rodriques 定理)**.** 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 上的一条曲线 $C : u = u(t), v = v(t)$ 是曲率线的充分必要条件为: 曲面 S 沿曲线 C 的法向量场 $\boldsymbol{n}(u(t),v(t)$ 沿曲线 C 的导数与曲线 C 相切, 即
$$\frac{d\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{dt} // \frac{d\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{dt}.$$

Theorem. 曲面 S 上的一条曲线 C 是曲率线的充要条件为: 曲面 S 沿曲线 C 的法线构成一个可展曲面.

证明. 设曲面 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, 曲线 C 是 S 上的一条曲线，其方程为
$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(u(s),v(s)).$$
其中 s 为弧长参数, 设曲面 S 沿曲线 C 上的法向量为 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u(s),v(s))$, 则曲面 S 沿曲线 C 的法线构成的直纹面可以表示为
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) + t\boldsymbol{n}(s).$$
由于 $\boldsymbol{n}(s)$ 为曲面的单位法向量, 则有 $\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{r}'(s) = 0, \boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{n}'(s) = 0$, 从而 $\boldsymbol{n}(s)//\boldsymbol{r}'(s)\times \boldsymbol{n}'(s)$，设
$$\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{n}'(s) = \lambda\boldsymbol{n}(s).$$
由于曲面为可展曲面的充要条件为
$$(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{n}'(s)) = 0.$$
带入 $\boldsymbol{n}(s)$ 得
$$\begin{aligned} 0 &= (\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{n}'(s)) \\ &= -(\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{n}'(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s) \\ &= -\lambda\boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) \\ &= -\lambda \end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{n}'(s)=0$, 即 $\boldsymbol{r}'(s)//\boldsymbol{n}'(s)$. 最终有

$$\text{曲面 } S \text{ 沿曲线 } C \text{ 的法线构成可展曲面} \Longleftrightarrow \boldsymbol{r}'(s)//\boldsymbol{n}'(s) \Longleftrightarrow \text{曲线 } C \text{ 为曲率线}.$$

□

3.4 主曲率和主方向

Definition (Gauss 曲率和平均曲率)**.**

$$\kappa_1+\kappa_2=2H=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}.$$

$$\kappa_1\kappa_2=K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

把 $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$ 称为**平均曲率**, 把 $K=\kappa_1\kappa_2$ 称为 **Gauss 曲率**.

Proposition (张量记号下的 Gauss 曲率和平均曲率)**.**

$$H=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$
$$K=\frac{b}{g}$$

Proposition (计算主方向)**.** 曲面的 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的主方向可以由下列公式计算

$$\frac{du}{dv}=-\frac{b_{12}-\kappa_1 g_{12}}{b_{11}-\kappa_1 g_{11}}=-\frac{b_{22}-\kappa_1 g_{22}}{b_{12}-\kappa_1 g_{12}}.$$

和

$$\frac{du}{dv}=-\frac{b_{12}-\kappa_2 g_{12}}{b_{11}-\kappa_2 g_{11}}=-\frac{b_{22}-\kappa_2 g_{22}}{b_{12}-\kappa_2 g_{12}}.$$

Theorem. 在曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上任意一固定点 (u,v), **参数曲线方向是彼此正交的主方向**当且仅当在该点有

$$F=M=0.$$

此时, u-曲线方向的主曲率为 $\kappa_1=L/E$, v-曲线方向的主曲率为 $\kappa_2=N/G$.

Theorem (直接推论)**.** 在曲面 S 上，参数曲线网是正交的曲率线网的充要条件为 $F = M \equiv 0$.
此时曲面的两个基本形式分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E(du)^2 + G(dv)^2, \\ \mathrm{II} &= \kappa_1 E(du)^2 + \kappa_2 G(dv)^2. \end{aligned}$$

Theorem. 在正则参数曲面 S 的每一个非脐点的一个邻域内存在参数系 (u, v)，使得参数曲线构成正交的曲率线网.

Proposition (Weingarten 映射在自然基底下的矩阵)**.**

$$W\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} LG - MF & -LF + ME \\ MG - NF & -MF + NE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{pmatrix}.$$

Remark. 将 Weingarten 映射的矩阵记为 W，则曲面的平均曲率 H 和 Gauss 曲率 K 满足

$$\begin{aligned} 2H &= Tr\,(W) \\ K &= \det(W) \end{aligned}$$

4 曲面论基本定理

4.1 曲面的运动公式

Definition (Einstein 记号)**.** 用 $g_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta}$ 表示曲面的第一类基本量和第二类基本量

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta,$$

$$b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta = -\boldsymbol{r}_\beta \cdot r_\alpha.$$

曲面的两个基本形式可以表示为

$$\mathrm{I} = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \mathrm{II} = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

此外，记

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2,$$
$$b = \det(b_{\alpha\beta}) = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2.$$

Gauss 记号	u	v	$\boldsymbol{r}_u$	$\boldsymbol{r}_v$	E	F	G	L	M	N
Tensor mark	u^1	u^2	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$	g_{11}	g_{12}	g_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{22}

表 1: 高斯记号与张量记号对照表

Definition (曲面的运动公式)**.** 曲面 S 上的自然标架场 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 的运动公式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \boldsymbol{r}_\alpha,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\gamma + b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta} = -b^\gamma_\beta \boldsymbol{r}_\gamma$$

其中 $b^\gamma_\beta = g^{\gamma\xi} b_{\xi\beta}$.

Definition (Christoffel 记号)**.**

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\xi\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right).$$

Theorem (曲面的唯一性定理)**.** 设 S_1, S_2 是定义在同一个参数区域 $D \subset E^2$ 上的两个正则参数曲面. 若在每一点 $(u^1, u^2) \in D$, 曲面 S_1 和 S_2 都有相同的 I 和 II, 则曲面 S_1 和 S_2 在空间 E^3 中的一个刚体运动下是重合的.

Theorem. 设 $S_i, i=1,2$ 是空间 E^3 中的两个正则参数曲面, 其第一基本形式和第二基本形式分别为 $\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_i$. 如果有光滑映射 $\sigma: S_1 \to S_2$, 使得

$$\sigma^*\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1,\ \sigma^*\mathrm{II}_2 = \mathrm{II}_1.$$

则曲面 S_1, S_2 在 E^3 中的一个刚体运动下是重合的.

Proposition (第一类基本量的 Riemann 记号)**.**

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\eta\beta}.$$

称为曲面 S 的第一类基本量的 **Riemman 记号**.

4.2 Gauss-Codazzi 方程

Definition (Gauss 方程)**.**

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b^{\delta}_{\gamma} - b_{\alpha\gamma}b^{\delta}_{\beta}.$$

or

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}.$$

称为 **Gauss 方程**, 是曲面的第一类基本量与第二类基本量必须满足的相容条件.

Proposition. 由 Gauss 方程可以得出 Riemann 记号有下列对称性

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\delta} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta}$$
$$R_{11\beta\gamma} = R_{22\beta\gamma} = R_{\alpha\delta 11} = R_{\alpha\delta 22} = 0$$

Definition (Codazzi 方程)**.**

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}.$$

称为 **Codazzi 方程**.

Proposition (正交参数曲率网下的 Codazzi 方程)**.**

$$\frac{\partial L}{\partial v} = H\frac{\partial E}{\partial v}$$
$$\frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u}.$$

其中 $H = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)$, 是曲面的平均曲率.

4.3 Gauss 绝妙定理

Theorem (Gauss 绝妙定理)**.** 曲面的 Gauss 曲率仅依赖于曲面的第一基本形式 I.

Proposition. 任何两块具有相同 Gauss 曲率的平面之间可以建立保长对应.

Proposition.

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u + \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right)$$

Proposition (等温参数系下的 Gauss 曲率)**.** 特别的，如果曲面 S 取等温参数系 (u, v), 其第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \lambda^2((du)^2 + (dv)^2).$$

其 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda.$$

Theorem. 空间 E^3 中一块无脐点的曲面 S 是可展曲面的**充分必要条件**为

$$K \equiv 0.$$

Theorem. 无脐点的曲面 S 为可展曲面的**充分必要条件**是：它能和一块平面建立保长对应.

5 测地曲率和测地线

5.1 测地曲率和测地挠率

为研究曲面 S 上曲线 C 和曲面 S 的联系，沿着曲线 C 建立新的正交标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=\boldsymbol{\alpha}(s),\\ \boldsymbol{e}_2&=\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s),\\ \boldsymbol{e}_3&=\boldsymbol{n}(s)\end{aligned}$$

Definition (测地标架下的运动公式)**.** 在这个正交标架下的运动公式为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1'(s)\\ \boldsymbol{e}_2'(s)\\ \boldsymbol{e}_3'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa_g&\kappa_n\\ -\kappa_g&0&\tau_g\\ -\kappa_n&\tau_g&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1(s)\\ \boldsymbol{e}_2(s)\\ \boldsymbol{e}_3(s)\end{pmatrix}.$$

其中

$$\kappa_n=\boldsymbol{e}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)=\kappa\boldsymbol{\beta}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s).$$

就是曲线的法曲率。同样可以计算

$$\begin{aligned}\kappa_g&=\boldsymbol{\alpha}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s)=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\alpha}'(s))=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s))\\ \tau_g&=\boldsymbol{n}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s)=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{n}'(s),\boldsymbol{r}'(s)).\end{aligned}$$

Definition (测地曲率和挠率)**.**

$$\begin{aligned}\kappa_g&=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s))\\ \tau_g&=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{n}'(s),\boldsymbol{r}'(s))\end{aligned}$$

将 κ_g 称为曲面 S 上曲线 C 的**测地曲率**, τ_g 称为曲面 S 上曲线 C 的**测地挠率**.

Theorem. 设 C 是曲面 S 上的一条正则曲线, 则曲线 C 在 p 的**测地曲率**等于把曲线 C 投影到 T_pS 上的曲线 $\tilde{C}$ 在点 p 的相对曲率，其中切平面的正向由曲面 S 在点 p 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 给出.

Proposition. 曲面上曲线的测地曲率 κ_g 在曲面作保长对应时是不变的. 曲面上曲线的测地曲率是属于曲面的**内蕴几何量**.

Theorem (计算测地曲率)**.** 设 (u,v) 是曲面 S 上的正交参数系, 设 $C: u = u(s), v = v(s)$ 是曲面 S 上的一条曲线, 其中 s 为弧长参数. 假设曲线 C 与 u-曲线的夹角为 θ, 则曲线 C 的测地曲率为

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial u}\sin\theta.$$

Proposition. $\theta = 0$ 时, 得到 u-曲线的测地曲率为

$$\kappa_{g_u} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{E_v}{E}.$$

$\theta = \pi/2$ 时, 得到 v-曲线的测地曲率为

$$\kappa_{g_v} = \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{G_u}{G}.$$

Proposition (计算挠率)**.**

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 & -\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} & \left(\frac{du^1}{dv}\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

5.2 测地线

Definition. 在曲面 S 上测地曲率恒等于 0 的曲线称为曲面 S 的**测地线**.

Theorem. 曲面 S 上一条曲线 C 为测地线的充要条件为: C 为一条直线或者其主法向量处处是 S 的法向量.

Theorem. 对于曲面 S 上的任意一点 p 和曲面 S 在点 p 的任意一个单位切向量 $\boldsymbol{v}$, 在曲面 S 上必存在唯一的一条以弧长为参数的测地线 C 通过点 p, 并且在点 p 以 $\boldsymbol{v}$ 为它的切向量.

Proposition (测地线的微分方程组)**.**

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta \\
\frac{dv}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta \\
\frac{d\theta}{ds} &= \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\cos\theta - \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial u}\sin\theta
\end{aligned}
$$

Proposition. 设 p, q 是曲面 S 上的任意两点，如果曲线 C 是在曲面 S 上连接 p, q 两点的最短线, 则 C 必是 S 的测地线.

5.3 测地坐标系

Definition (测地坐标系)**.** 假定曲面 S 上有依赖一个参数的测地线族 Σ, 如果对于区域 $D \subset S$ 中的每一个点 p, 有且只有一条属于 Σ 的测地线经过点 p, 则称 Σ 是在曲面 S 上覆盖了区域 D 的一个**测地线族**.

Theorem. 在曲面 S 的每一点 p 的一个充分小的邻域 U 内必定存在参数系 (u, v), 使得点 p 对应于 $u = 0, v = 0$, 而曲面 S 的第一基本形式成为

$$\mathrm{I} = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2.$$

其中 $G(u, v)$ 满足条件

$$G(0, v) = 1,\ \frac{\partial G}{\partial u}(0, v) = 0.$$

这样的参数系 (u, v) 称为曲面 S 在点 p 附近的**测地平行坐标系**.

Theorem (测地极坐标系)**.** 在曲面 S 的每一点 p 的邻域内, 除去从 p 出发的一条测地线外, 必存在**测地极坐标系**(s, θ), 使得曲面 S 的第一基本形式成为

$$\mathrm{I} = ds^2 + G(s, \theta)d\theta^2.$$

其中 $G(s, \theta)$ 满足

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{G(s, \theta)} = 0;\ \lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{G(s, \theta)} = 1.$$

5.4 常曲率曲面

Proposition (常曲率曲面的第一基本形式)**.** 具有常曲率 K 的曲面第一基本形式在测地平行坐标系下有完全确定的形式:

$$\begin{aligned}
&K>0; \quad \mathrm{I}=(du)^2+\cos(\sqrt{K}u)(dv)^2,\\
&K=0; \quad \mathrm{I}=(du)^2+(dv)^2,\\
&K<0; \quad \mathrm{I}=(du)^2+\cosh\sqrt{-K}u(dv)^2
\end{aligned}$$

Theorem. 具有相同常数 Gauss 曲率 K 的任意两块常曲率的曲面在局部上必定可以建立保长对应.

5.5 曲面上切向量的平行移动

假定 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$ 是定义在曲面 S 上的一个切向量场

$$\boldsymbol{X}(u^1,u^2)=x^\alpha(u_1.u_2)\boldsymbol{r}_\alpha(u_1,u_2).$$

对其微分得 $d\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{X}(u^1,u^2)\\
&=dx^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha+x^\alpha d\boldsymbol{r}_\alpha\\
&=dx^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha+x^\beta(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\boldsymbol{r}_\alpha+b_{\beta\gamma}\boldsymbol{n})du^\gamma\\
&=(dx^\alpha+x^\beta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}du^\gamma)\boldsymbol{r}_\alpha+x^\alpha b_{\beta\gamma}du^\gamma\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Definition (协变微分)**.**

$$D\boldsymbol{X}(u^1,u^2):=Dx^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha.$$

其中 $Dx^\alpha=dx^\alpha+x^\beta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}du^\gamma$, 为切向量场 $\boldsymbol{X}$ 的分量 $x^\alpha(u^1,u^2)$ 的协变微分. 称 $D\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$ 为曲面 S 上切向量场 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$ 的**协变微分**.

Theorem. 如果 $\sigma:S\to\tilde{S}$ 是保长对应, 则对曲面 S 上任意一个可微的切向量场 $\boldsymbol{X}$ 下式成立

$$\sigma_*(D\boldsymbol{X})=D(\sigma_*\boldsymbol{X}).$$

Proposition (协变微分的运算性质)**.** 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是曲面 S 上可微的切向量场, f 是定义在 S 上的可微函数, 则协变微分满足如下性质:

1. $D(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=D\boldsymbol{X}+D\boldsymbol{Y}$;
2. $D(f\cdot\boldsymbol{X})=df\cdot\boldsymbol{X}+f\cdot D\boldsymbol{X}$;
3. $d(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})=D\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\cdot D\boldsymbol{Y}$.

Definition (沿曲线的协变导数)**.** 称

$$\frac{D\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\left(\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}\right)^{\top}.$$

为曲面 S 上沿曲线 C 定义的切向量场 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿曲线 C 的**协变导数**. 若令

$$\frac{Dx^{\alpha}(t)}{dt}=\frac{x^{\alpha}(t)}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}(t)\frac{du^{\gamma}(t)}{dt}.$$

则

$$\frac{D\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\frac{Dx^{\alpha}(t)}{dt}\boldsymbol{r}_{\alpha}.$$

Definition. 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是曲面 S 上沿曲线 $C:u^{\gamma}=u^{\gamma}(t)$ 定义的可微向量场. 如果

$$\frac{D\boldsymbol{X}(t)}{dt}=0.$$

则称切向量场 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿曲线 C 是**平行的**.

容易得出，切向量场 $\boldsymbol{X}(t)$ 沿曲线 C 平行的充要条件即为: 其分量 $x^{\alpha}(t)$ 满足微分方程

$$\frac{x^{\alpha}(t)}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}(t)\frac{du^{\gamma}(t)}{dt}=0,\alpha=1,2.$$

Theorem. 设空间 E^3 中两个曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切, 曲面 S_1,S_2 沿曲线 $C:u^{\gamma}=u^{\gamma}(t)$ 的协变导数算子分别记为 $\dfrac{D^{(1)}}{dt},\dfrac{D^{(1)}}{dt}$, 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是这两个曲面沿曲线 C 定义的切向量场，则

$$\frac{D^{(1)}\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\frac{D^{(2)}\boldsymbol{X}(t)}{dt}.$$