微分几何速查手册

微分几何笔记

Author
John Ji

Contents

1 曲线论

Definition (弧长参数). 设 E^3 中的一条正则参数曲线 C 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \le t \le b$. 则参数曲线的弧长参数 s 为

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

两边同时求微分

$$ds = |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

这里 s 和 ds 均是曲线的不变量，ds 称为曲线的**弧长元素**。

Proposition. 正则参数曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 中，参数 t 为弧长参数的特征为

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = 1$$

Definition (曲率). 设曲线 C 的方程是 $\boldsymbol{r}(s)$，其中 s 为弧长参数则定义曲线的曲率为

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{s})}{ds} \right| = |\boldsymbol{r}''(s)|$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 称为曲线的曲率向量.

Proposition. 曲线 C 为一条直线当且仅当它的曲率为 0.

Proof. 假设曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$，则其曲率 $\kappa(s) = 0$ 等价于

$$\boldsymbol{r}''(s) = 0$$

上式等价于

$$\boldsymbol{r}'(s) = \boldsymbol{a}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是一个常向量。从而该曲线的切向量为一个常向量，该曲线一定为一条直线。或者更进一步上式可以等价位为

$$\boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

其中 b 为一个常向量，这也说明了 C 是一条直线。 □

Definition (挠率). 设一条曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$, 其主法向量为 $\boldsymbol{\beta}(s)$, 其次法向量为 $\boldsymbol{\gamma}(s)$, 曲线 C 的**挠率**定义为

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s).$$

Proposition. 设曲线 C 不是直线, 则 C 为平面曲线, 当且仅当其挠率为 0.

Proof. 分两个方向分别说明以上命题成立

必要性 如果曲线 C 为一条平面曲线，则可以得到其次法向量 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 为一个常向量，从而其切向量 $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \mathbf{0}$, 则根据挠率的定义式可得

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) = 0$$

(其实这个方向也可以从挠率的几何意义得到，挠率是描述其密切平面偏转速度的度量)

充分性 设曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}(s)$, 其 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$, 如果其挠率 $\tau(s) = 0$, 则

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{0}.$$

则向量 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 为一个常向量 $\boldsymbol{\gamma}_0$, 又因为 $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$, 从而

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = 0.$$

从而 $\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{r}(s_0) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = const$, 最终得到 $\boldsymbol{r}(s)$

$$(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(s_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 = 0.$$

则曲线 C 一定落在过 $\boldsymbol{r}(s_0)$, 且以 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 为法线的平面上.

□

1.1 弧长参数下

Frenet 标架

- 切向量: $\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{r}'(t)$
- 主法向量: $\boldsymbol{\beta}(s) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha'(s)}}{|\boldsymbol{\alpha}'(s)|} = \dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$
- 次法向量: $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$

Definition. 将以 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 为法线的平面定义为

- 法平面: $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\alpha}(s) = 0.$
- 从切平面：$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) = 0.$
- 密切平面：$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) = 0.$

Definition (Frenet 标架)**.** 由以上三个向量为基底组成的标架 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s)), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的 **Frenet 标架**。

Frenet 公式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'(s) \\ \boldsymbol{\beta}'(s) \\ \boldsymbol{\gamma}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s) \end{pmatrix}$$

曲率

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{\alpha}'(s)| = |\boldsymbol{r}''(s)|$$

挠率

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) \tag{1}$$

$$\tau(s) = \frac{(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2} \tag{2}$$

1.2 非弧长参数下

曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 其中 t 为一般参数，$s = s(t)$ 为曲线的弧长参数。

$$|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}| = |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}| = |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| \cdot \frac{dt}{ds} = 1$$

从而 $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$

Frenet 标架

- 切向量: $\boldsymbol{\alpha}(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$
- 主法向量: $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\alpha}(t)$
- 次法向量: $\boldsymbol{\gamma}(s) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}$

Remark. 非弧长参数求 Frenet 标架一般采取先计算 $\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)$ 的策略, 然后利用它们的外积计算出 $\boldsymbol{\beta}(t)$:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\alpha}(t).$$

Frenet 公式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'(t) \\ \boldsymbol{\beta}'(t) \\ \boldsymbol{\gamma}'(t) \end{pmatrix} = s'(t) \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t) \\ \boldsymbol{\beta}(t) \\ \boldsymbol{\gamma}(t) \end{pmatrix}$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{(s'(t))^3}=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

挠率

$$\tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}$$

1.3 曲面论基本定理

Theorem. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t)$ 是 E^3 中的两条正则参数曲线, 它们的曲率处处不为 0. 如果存在三次以上连续可微的函数 $u=\lambda(t),\lambda'(t)\neq 0$, 使得这两条曲线的弧长函数、曲率函数和挠率函数之间满足:

$$s_1(t)=s_2(\lambda(t)),\ \kappa_1(t)=\kappa_2(\lambda(t)),\ \tau_1(t)=\tau_2(\lambda(t)).$$

则在 E^3 中存在刚体运动 σ 将曲线 $\boldsymbol{r}_1(t)$ 映射为 $\boldsymbol{r}_2(t)$.

Remark. 曲线的曲率 κ 和挠率 τ 可以在相差一个刚体运动的意义下确定曲线的形状.

1.4 平面曲线

Proposition. 平面曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s))$, 则

- 单位切向量: $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{r}'(s)=(x'(s),y'(s))$.
- 法向量: $\boldsymbol{\beta}(s)=(-y(s),x(s))$.
- 相对曲率 $\kappa_r=\boldsymbol{\alpha}'(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)=x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$.

非弧长参数下的相对曲率:

$$\kappa_r=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^3}}$$

2 曲面论

2.1 正则参数曲面

曲面是一个将 E^2 中的一个区域 D 映射为 E^3 的一个连续映射:

$$S:D\to E^3.$$

一般的一个曲面可以用参数方程表示为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).$$

为了保证这个映射是一一对应的，曲面必须为**正则**的.

Definition (正则参数曲面)**.** 设曲面的方程为 $\boldsymbol{r}(u,v)$, $p_0=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 为其上一点, 则 p_0 点有两个切向量为:

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\right|_{(u_0,v_0)},\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\right|_{(u_0,v_0)}$$

如果 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 与 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{(u_0,v_0)}\neq 0$, 则称曲线 S 在 p_0 点为**正则的**, 如果曲面处处三次以上可微且点点均正则，则称为**正则参数曲面**.

Proposition (切平面)**.**

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{r}_u(u,v)+\mu\boldsymbol{r}_v(u,v)$$

Proposition (切平面的单位法向量)**.**

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)}{|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|}$$

Proposition (容许参数变换)**.** 变换

$$\begin{cases}u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\\ v=v(\tilde{u},\tilde{v})\end{cases}$$

为曲面的**容许参数变换**, 如果

1. $u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v})$ 均为三次以上连续可微函数;
2. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\neq 0$.

Remark. 一般将正则参数曲面的 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 所指的方向定义为曲面的**正向**，容许参数变换保持曲面定向的充分必要条件为:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}>0$$

Definition (旋转面)**.** 旋转面的参数方程一般为:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\cos u, g(v)).$$

其中 $0 \le u \le 2\pi, a \le v \le b$. 通常旋转面的 u-曲线称为**纬线**，v-曲线称为**经线**.

直纹面

直纹面是一条直线在空间中运动产生的曲面，或者说是一个直线族。

Definition (直纹面)**.** 直纹面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{l}(u).$$

1. 曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ 称为直纹面的**准线**.
2. 曲面的 v-曲线是一条直线，称为直纹面的**直母线**.

Remark. 如果方向向量 $\boldsymbol{l}(u)$ 有固定的指向, 也即所有的直母线平行, 此时

$$\boldsymbol{l}(u) \times \boldsymbol{l}'(u) = \mathbf{0}.$$

这种直纹面称为**柱面**.
如果所有的直母线都过一个定点, 即存在一个连续可微的函数 $\lambda(u)$ 使得:

$$\boldsymbol{a}(u) + \lambda(u)\boldsymbol{l}(u) = \boldsymbol{r}_0.$$

这种直纹面称为**锥面**.

Definition (平面的切向量)**.** 曲面 S 上经过 p 的任一一条连续可微曲线在该点的切向量称为曲面 S 在 p 点的**切向量**.

对于正则参数曲面，任意一点的切向量都可以由该点的 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 线性表出, 即任何切向量都可以表示为如下形式

$$a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v.$$

Proposition. 曲面 S 在点 p 处正则的充分必要条件为:
在点 p，$\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 线性无关.

Definition (切平面和切空间). 在正则参数曲面 S 上一点 p, $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 张成的线性空间称为 S 在点 p 的**切空间**, 记为 T_pS. 由切向量 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 张成的平面称为曲面 S 在点 p 的切平面，其参数方程为:

$$\boldsymbol{X}(\lambda, \mu) = \boldsymbol{r}(u, v) + \lambda \boldsymbol{r}_u(u, v) + \mu \boldsymbol{r}_v(u, v).$$

Definition (法线). 定义正则参数曲面 S 在点 p 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)}{|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)|}.$$

过点 p, 且方向向量为 $\boldsymbol{n}$ 的直线定义为曲面 S 在点 p 处的**法线**, 参数方程为

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{r}(u, v) + t\boldsymbol{n}(u, v).$$

2.2 第一基本形式

Definition (第一类基本量). 称

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \boldsymbol{r}_u(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_u(u, v); \\ F(u, v) &= \boldsymbol{r}_u(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_v(u, v); \\ G(u, v) &= \boldsymbol{r}_v(u, v) \cdot \boldsymbol{r}_v(u, v). \end{aligned}$$

为曲面 S 的**第一类基本量**。通常记为矩阵

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Definition (第一类基本形式). 定义正则参数曲面 S 的**第一类基本量**为

$$\begin{aligned} I &= d\boldsymbol{r}(u, v) \cdot d\boldsymbol{r}(u, v) \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \\ &= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第一类基本量不依赖于参数的选择，是曲面的不变量.

Theorem. 在正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上参数曲线网是正交曲线网的**充分必要**条件为

$$F(u, v) = 0.$$

Proof. 由于 $F(u,v) = \boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_v(u,v)$, 则 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$, 当且仅当

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = F(u,v) = 0.$$

□

求正交轨线

Example. 求曲面

$$\boldsymbol{r} = (v\cos u - k\sin u, v\sin u + k\cos u, ku).$$

的参数曲线的正交轨线，其中 $k>0$ 为常数.

曲线的参数曲线即为 u-曲线和 v-曲线, 求正交轨线的过程就是要求出与它们正交的曲线族。首先，求出曲线的第一基本量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u &= (-v\sin u - k\cos u, v\cos u - k\sin u, k)\\ \boldsymbol{r}_v &= (\cos u, \sin u, 0).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2+2k & -k \\ -k & 1\end{pmatrix}.$$

曲面的微元可以表示为

$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v.$$

u-曲线微元可以表示为

$$\boldsymbol{r}_u\delta u.$$

正交轨线曲线族在曲面上, 则其微元表示与曲面相同

$$\boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v.$$

从而正交轨线族应该满足

$$(\boldsymbol{r}_u\delta u)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v) = 0.$$

从而 u-曲线的正交轨线族满足微分方程

$$E\delta u + F\delta v = 0.$$

同理可以得出 v-曲线的正交轨线族满足微分方程

$$F\delta u + G\delta v = 0.$$

对于所给例子, 其 u-曲线满足微分方程

$$(v^2 + 2k)du - kdv = 0.$$

分离变量得

$$du = \frac{k}{v^2 + 2k^2}dv.$$

从而

$$\sqrt{2}u + c = \arctan\frac{v}{\sqrt{2}k}.$$

于是, u-曲线经过点 (u_0, v_0) 的正交轨线为

$$v = \sqrt{2}k\tan\sqrt{2}(u - u_0) + v_0.$$

同理, v-曲线的正交轨线族满足

$$-kdu + 1\cdot dv = 0.$$

从而经过点 (u_0, v_0) 的 v-曲线正交轨线为

$$v = k(u - u_0) + v_0.$$

Proposition (曲面上的曲线长度)**.** 正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上一条连续可微的曲线方程为

$$u = u(t),\quad v = v(t),\quad a \leq t \leq b.$$

则曲线的长度为

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + G\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2}. \end{aligned}$$

Proposition.

$$d\delta = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

称为曲面 S 的**面积元素**. 曲面 S 的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

2.3 保长对应和保角对应

Definition (切映射)**.** 假定映射 $\sigma : S_1 \to S_2$ 是三次以上的连续可微的. 则 σ 在每一点 $p \in S_1$ 上诱导出一个从切空间 T_pS_1 到切空间 $T_{\sigma(p)}S_2$ 的一个线性映射

$$\sigma_{*p} : T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2,$$

称此映射为映射 σ 在点 p 的切空间 T_pS_1 上诱导的**切映射**.

Definition (保长对应)**.** 设 $\sigma : S_1 \to S_2(S_1, S_2$ 均为正则参数曲面$)$ 是 3 次以上连续可微映射, 在任意一点 $p \in S_1$, 其切映射为

$$\sigma_{*p} : T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2.$$

如果 $\forall \boldsymbol{X} \in T_pS_1$, 有

$$|\boldsymbol{X}| = |\sigma_{*p}(\boldsymbol{X})|.$$

则称 σ 是从曲面 S_1 到 S_2 的**保长对应**.

Theorem (保长对应的充要条件)**.** 设正则参数曲面 S_1, S_2 的第一基本形式分别为 I_1, I_2, 则 $\sigma : S_1 \to S_2$ 为保长对应的充要条件为

$$\sigma^* I_2 = I_1.$$

也即其第一基本量合同

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} J^T.$$

其中 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \end{pmatrix}$.

Theorem (曲面间存在保长对应的充要条件)**.** 正则参数曲面 S_1 与 S_2 之间存在保长映射的充要条件为, 能够在曲面 S_1 和 S_2 上取适当的参数系, 都记为 (u, v), 且在这个参数系下 S_1 与 S_2 有相同的第一基本量, 即

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Definition (保角对应). 设 $\sigma: S_1 \to S_2(S_1, S_2$ 为正则参数曲面) 是 S_1 到 S_2 的一一对应, 且 σ 和 σ^{-1} 都是 3 次以上连续可微映射, 如果在每一点 $p \in S_1$ 上, σ 在 p 的切映射为

$$\sigma_{*p}: T_pS_1 \to T_{\sigma(p)S_2}.$$

满足 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T_pS_1$ 都有

$$\angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \angle(\boldsymbol{\sigma}_{*p}(X), \boldsymbol{\sigma}_{*p}(Y)).$$

则称 σ 为曲面 S_1 到 S_2 的**保角对应**.

Theorem (曲面间存在保角对应的充要条件). 设正则参数曲面 S_1, S_2 的第一基本形式分别为 I_1, I_2, 则 $\sigma: S_1 \to S_2$ 为保角对应的充要条件为: 在曲面 S_1 上存在连续函数 λ, 使得

$$\sigma^* I_2 = \lambda^2 I_1.$$

如果正则参数曲面 S_1 和 S_2 之间存在保角对应, 则可以取适当的参数系 (u, v), 使得

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Theorem. 两个正则参数曲面在局部上可以建立保角对应.

Definition (等温参数系). 在曲面 S 上能够使第一基本形式表示为如下形式的

$$I = \frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2 + dy^2).$$

参数系 (x, y) 称为 S 的**等温参数系**.

2.4 可展曲面

3 曲面的第二基本形式

Definition (单位法向量). 曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 在任意一点 (u_0, v_0) 处的切平面的**单位法向量**为

$$\boldsymbol{n} = \left.\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\right|_{(u_0, v_0)}.$$

Definition (曲面的第二类基本量)**.**

$$L = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}$$
$$M = \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}$$
$$N = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0, \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$, 第二类基本量还可以表示为

$$L = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u$$
$$M = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_u$$
$$N = -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_v.$$

Definition (曲面的第二基本形式)**.** 将

$$II = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

称为正则参数曲面 S 的**第二基本形式**.

Remark. 第二基本形式在容许参数变化下不变, 是曲面的不变量.

Theorem. 一块曲面是平面的一部分, 当且仅当其第二基本量恒为 0.