初中数学简明教程--©John

实数

讲实数之前，我们先来说说什么是数？好像我们从来没有精确定义过数的概念，从小我们就会学习数数，而我们所数的数到底是什么，我们却从来没有探讨过。

自然数

自然数是最为自然的数，至少对人类而言，因为人类有10根手指，在远古时期，人类使用手指来数数，这里的数即**自然数**。

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

整数

人们有了自然数之后，又有了对应的计算，加减乘除。但是当被减数比减数小的时候，结果表示不了。从而又有了负整数。从而，负整数、0、正整数构成了**整数**。

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

有理数

有了整数之后，可以在整数上做加减乘除。当我们在整数上做加减乘时，这些情况发现结果都还是整数；但是，就是做除法时，结果有些时候却不在是整数。为了表示这些数，有理数应运而生。有理数作为整数的扩展。
有理数
形如

$$\frac{p}{q}$$

其中p, q均是整数，且$q \neq 0$.
的数称为有理数。

实数

一开始古希腊哲学家毕达哥拉斯一直相信“万物皆数”，即一切事物都可以用当时所认知的有理数所表示，但是，后来有学者发现，一个直角三角形两个直角边长度都是1，那它的斜边应该是$\sqrt{2}$，而这个数字却不符合有理数的定义。从而人们又发现了一些数无法用两个整数的比值表示，这些数就叫做**无理数**。有理数和无理数加起来统称为**实数**。

- 实数
  - 有理数
    - 整数
    - 分数
  - 无理数

> ⚠ **Attention**
>
> 一个小数，如果它是有理数，则这个小数一定为有限小数或者无限循环小数；如果它是无理数，则它一定为无限不循环小数。

> **循环小数转化为分数。(解方程法)**

数轴

形象的表示实数的工具。

- 三要素
  - 原点
  - 正方向
  - 单位长度
- 数轴上的点与实数一一对应

相反数

相反数

如果两个数a和b，满足$a+b=0$, 则a与b互为**相反数**。

相反数是一种对称的关系，如果a是b的相反数，那么b也一定是a的相反数。就像两个人A, B, 如果A和B是同学，那他们两个必定彼此互为同学。

- 数轴上的相反数分局在数轴两侧，且两者距离原点的距离相等。

相反数就像是正物质与反物质，正电子与负电子。

倒数

倒数

如果两个数a和b， 满足$ab=1$， 则a与b互为**倒数**。

倒数同相反数也是一种对称的关系。

实数中只有0没有倒数。

- 倒数等于其本身的数为1，-1。

倒数就像是镜像的世界。

绝对值

绝对值

一个数距离原点的距离叫做该数的**绝对值**。

绝对值还有一个数学表达式形式的定义

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

绝对值是$a(a>0)$的数有两个，它们为a和$-a$，互为相反数。

科学计数法

什么是科学计数法?
科学计数法是为了方便阅读数据而设计的，科学计数法的形式为

$$a \times 10^n$$

这里面a一定是一个$1 \leq |a| < 10$的数字。
如果数字这样表示，我们可以通过看其10的幂次来知道其相对大小。

- 小数点右移一位，幂次减1；小数点左移一位，幂次加1.

平方根

- 一个正数a的平方根为$\pm\sqrt{a}$， 算数平方根为$\sqrt{a}$。
- a的立方根为$\sqrt[3]{a}$

> 负数只有奇次方根，没有偶次方根。

实数的大小比较

- 数轴上在右侧的数较大
- 正数>0>负数, 正数中绝对值大的数大，负数中绝对值小的数大。
- 做差法，比较$a-b$与0的大小

实数的运算律

- 加法交换律
  - $a+b=b+a$
- 加法结合律
  - $a+b+c=a+(b+c)$
- 乘法交换律
  - $a \times b=b \times a$
- 乘法结合律
  - $a \times b \times c=a \times (b \times c)$
- 乘法(对加法的)分配律
  - $a \times (b+c)=a \times b+a \times c$

  > 运算的优先级
  >
  > 括号>乘方、开方>乘除>加减

整式

单项式

> 单项式
>
> 由数或字母幂次的乘积表示的式子。

- 单个数字(字母幂次为0)或者单个字母(数字为1)也是单项式。

单项式的系数：单项式中的数字因子
单项式的次数：单项式中字母的幂次之和

- 如$2x^2y^3$, 它的系数是2，次数是5

多项式

> ✎ **多项式**
>
> 多个单项式的和称为多项式。

多项式的项：多项式中的单项式称为多项式的**项**。

- 只含数字的项称为常数项

多项式的**次数**：多项式中最高项的次数称为**多项式的次数**。

> ⚠ **整式：单项式和多项式统称为整式。**

同类项

同类项指的是化为最简形式后，所含的字母以及字母的幂次均相同的项。

> ✎ **简化项**
>
> 如何将一项化到最简？首先计算系数，然后对相同的字母合并(幂次相加)。

注：建议字母排列时按字母表的顺序排列，这样不容易漏掉。
如$4y^2x^33z^4y^3$, 应化简为$12x^3y^5z^4$。

整式运算

同实数一样，整式也有其对应的运算，我们主要介绍整式的加减乘除和幂次运算。

加(减)法

整式的加(减)法，本质上就是将同类项合并。
步骤

- 将两个整式的项都化为最简形式。
- 观察有无同类项
- 同类项系数相加，其余项加在后面
- [按照次数由高到低排列项]

幂次运算

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^nb^n$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$

乘法运算

> ✎ **单项式乘法**

单项式相乘就是将单项式的系数相乘，然后将相同字母的幂次相加。

例如，$2x^2 \cdot 3x^3y^4 = 6x^5y^4$。

单项式与多项式相乘和多项式与多项式相乘均可以依赖于单项式相乘给出。

- 单项式乘以多项式，用单项式乘以多项式的每一项所得结果。
- 多项式乘以多项式，以第一个多项式的每一项乘以第二个多项式的每一项之后相加所得结果。

除法运算

除法我们主要关注单项式与单项式相除、多项式除以单项式。

- 单项式相除：系数相除，然后将除式的字母幂次变为相反数与被除式相加
- 多项式除以单项式：多项式的每一项依次除以单项式

常用公式

- 平方差公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- 完全平方公式

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

*因式分解

- **因式分解**就是把一个多项式分解为几个整式相乘的形式。

常用方法

- 提取公因式
- 常用公式的逆用
- 十字相乘法

十字相乘法

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$$

分式与根式

分式

形如

$$\frac{A}{B}$$

其中A, B都是整式，且B是一个含有字母的整式。
注：分母B不能等于0，0做分母无意义。
例：若$\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} = 0$, 则$x=?$.

最简分式

将分子分母都因式分解之后没有公因式的分式。

分式的运算

分式我们主要关注其加减乘除。

加减

分式的加减最关键的地方就是两个分式的通分，通分之后分式的加法就转化成了整式的加法。

*如何通分?

最小公倍式

如果C式满足C的系数是A和B系数的最小公倍数，B和C的各个字母的最高次幂为C的字母，则C式是整式A和B的**最小公倍式**。

例如，$2x^3y^2$与$3xy^3z$的最小公倍式为$6x^3y^3z$。

通分：将A、B两式分子分母同乘以一个因式，使得它们的分母相同，且为原先两个分母的最小公倍式。

乘除

分式的乘法可以完全转化为整式的乘法，分子分母分别相乘。而除法可以转化为乘法。

最大公因式

A和B的最大公因式为C，C的系数为A、B系数的最大公因数，C的字母为A和B的各个字母的最低次幂。

如何约分?
约分的关键在于因式分解，采用前述因式分解的办法将分子分母分解因式之后，约去公因式即完成约分。(约分的本质就是约去分子与分母整式的最大公因式)

二次根式

形如$\sqrt{a}(a \geq 0)$的式子称为**二次根式**，$\sqrt{\ }$称为**二次根号**。

- a不一定是数，也可以是式子。

二次根式如果有意义，就必须满足$a \geq 0$。

因为$\sqrt{a}$，相当于是一个数，这个数满足它的平方等于a，没有数的平方是负数，所以要有意义就必须满足上述条件。

最简二次式

- 被开方数不含分母
- 被开方数必须不能再被开方
- 如果是分式，分母中不含根号

性质

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

二次根式的运算

加减

将二次根式化为最简二次根式，将被开方数相同的二次根式合并。

乘除

直接将根号拿到外面转化为分式的乘除。

分母有理化

分母有理化是指将分母均化为不带根号的形式。
常见的分母有理化方法有

- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
- $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

估算二次根式

例如如何估算$\sqrt{10}$的值
步骤

1. 确定结果的个位
2. 确定结果的十分位
3. 确定结果的百分位
4. ....

函数

- 一次函数
- 反比例函数
- 二次函数

函数的表示方法

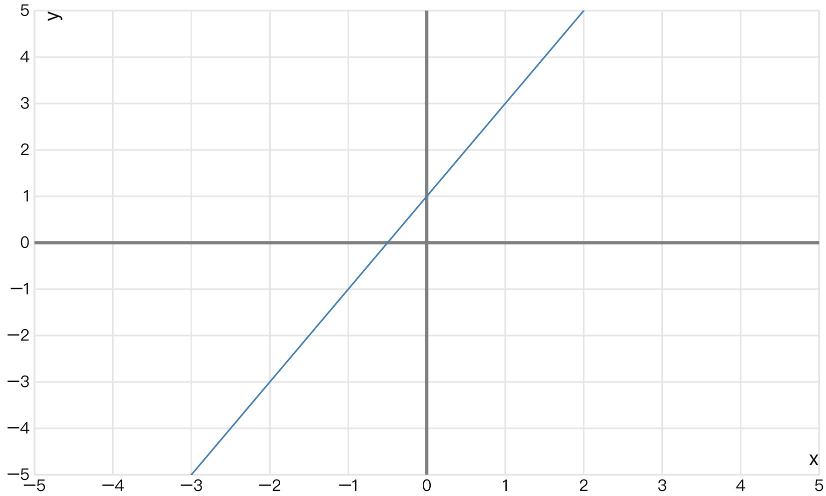
- 解析式(表达式)法
- 图像法

一次函数

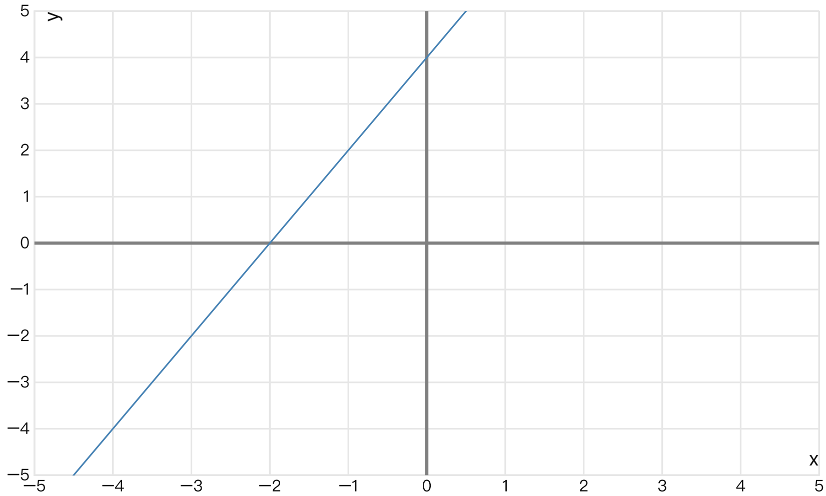
定义：如果$y = kx + b(k \neq 0$，k和b是常数)，则y就称为x的**一次函数**, 如果$b = 0$，$y = kx(k \neq 0)$也叫做**正比例函数。**

一次函数的图像是一条直线

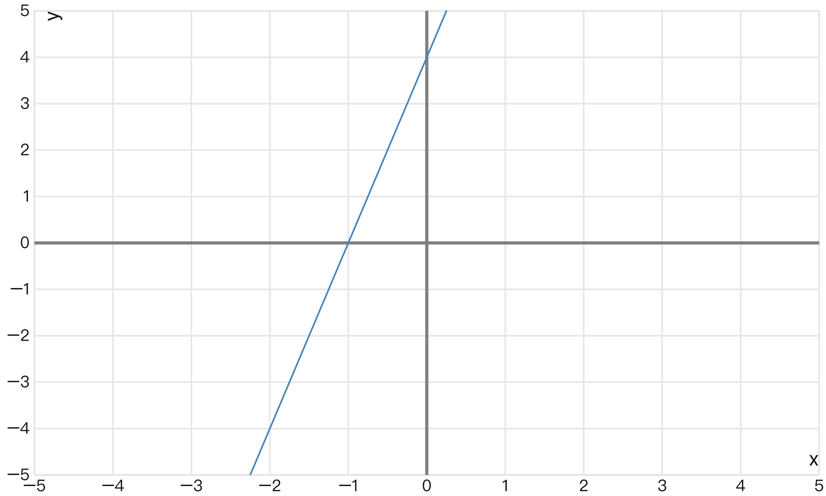
一次函数y=2x+2

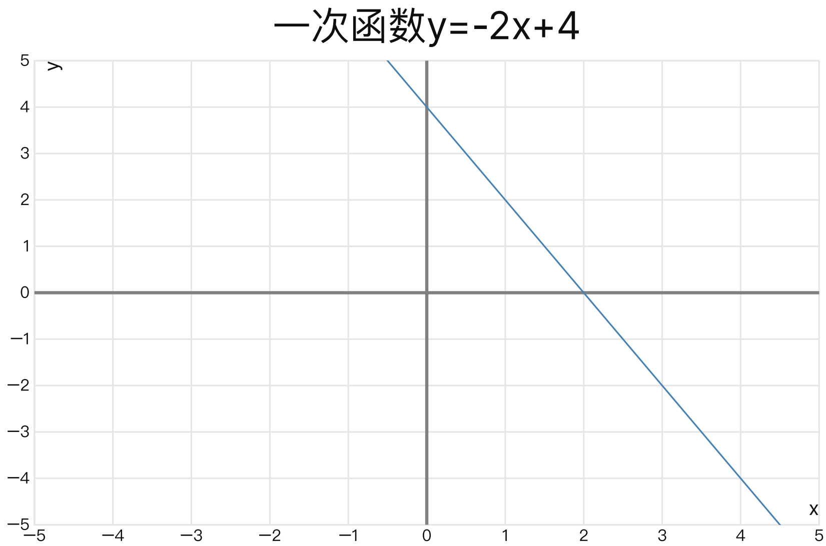


一次函数y=2x+4



一次函数y=4x+4





一次函数中常数k, b的作用

- k决定着直线的倾斜方向和倾斜程度
- b决定着直线与y轴相交的坐标(y轴上的截距)

> 🖊 **求图像与y轴的交点，就令$x=0$，得到y的值；求图像与y轴的交点，就令$x=0$，得到x的值。**

在研究一个函数时，常常要研究它的增长趋势，也就是随着x的变化，y会怎么变。

- k决定了一次函数的增长趋势
  - k>0，y随x的增大而增大
  - k<0，y随x的增大而减小
- k的绝对值决定的y随x的变化速度，绝对值越大，变化速度越大

如何判断一次函数图像经过哪些象限?

- 可以画出图像的草图，根据两点确定一条直线

> 🖊 **求两个函数图像交点的本质是代数上的解方程组问题。**

几条性质

- k相等的两个一次函数，它们的图像平行或者重合。
- k不相等的两个一次函数，它们的图像一定相交。
- 如果一次函数$y=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$和$y=k_2x+b_2(k_2\neq 0)$的图像互相垂直，则有$k_1\cdot k_2=-1$。

一次函数的平移

- 一次函数的平移分为水平移动和上下移动。

函数的平移只需记住一个口诀。

> **左加右减，上加下减。**

注意，这里我们说的是函数的平移，也就是说这个口诀其实不只是适用于一次函数。

> 🖊 **解释**

"左加右减"是指函数的图像沿x轴向左平移a个单位长度，就是将表达式中x换为$(x+a)$；向右平移就是将x换为$(x-a)$。
“上加下减”是指函数图像沿y轴向上平移a个单位长度，就是在表达式的右边$+a$；向下平移就是$-a$。

一次函数与二维平面上的一条直线相对应，而一次函数的表达式是一个等式，几个等式放在一起就构成了方程组。下面讨论如何把图像和方程联系起来。

两条直线方程联立的解是什么?

两条直线的方程分别为$y=k_1x+b_1$和$y=k_2x+b_2$，且满足$k_1\neq k_2$，这两个等式联立之后必然有解，那这个解是什么呢?
这个解在图像上就是这两条直线的交点，交点、因为假设方程的解是(x_0,y_0)，那么既然这个点是方程的解，那么这个点一定满足每个方程，而如果一个点满足其表达式的方程，那么这个点一定在其图像上。也就是说，(x_0,y_0)这个点即在$y=k_1x+b_1$的图像上，又在$y=k_2x+b_2$的图像上。而它们两个的图像只有一个交点，所以这个点就是这两条直线的交点。

直线方程与不等式的联系

我们知道直线的方程是一个等式

$$y=kx+b$$

而函数是一种一一对应关系，给一个x就有一个y与之对应。那么不等式

$$kx+b>0$$

其实就是表示$y>0$，在图像上就代表函数图像在x轴上方的部分的x的取值；同样的

$$kx+b<0$$

就代表函数图像在x轴下方部分的x的取值。

其实，上面不等号的右边也可以认为是另一条直线的方程，只不过这条直线的方程为$y=0$。从而更一般的，不等式

$$k_1x+b_1>k_2x+b_2$$

的解集是函数$y=k_1x+b_1$图像在函数$y=k_2x+b_2$图像上方的x的取值范围。

⚠ **一般的，任何函数的都可以用这种不等式的方式表示一个函数图像在另一个函数图像上方的部分。**

二次函数

定义

✎ 二次函数

形如

$$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$$

的函数称为**二次函数**，其中x是自变量，y是因变量，a,b,c是常数。

二次函数的解析式有三种常用的表示形式

- 一般式

$$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$$

- 两点式

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)\ (a \neq 0)$$

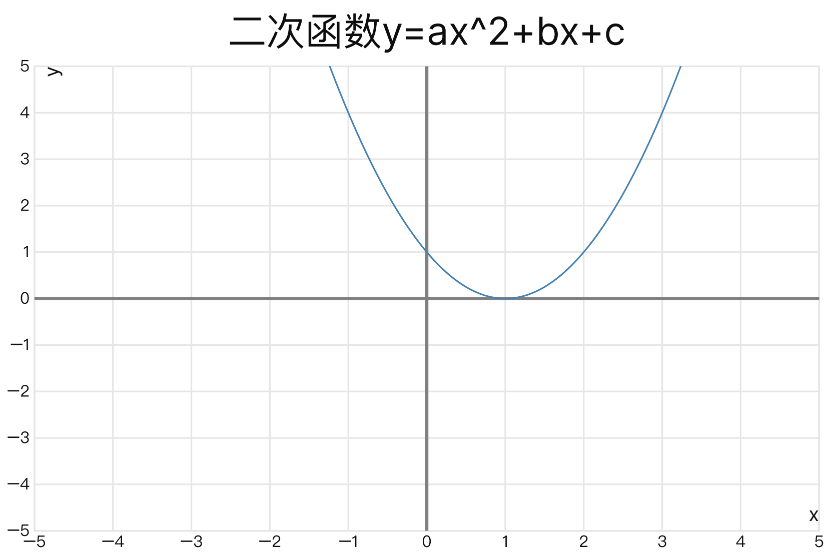
- 顶点式

$$y = a(x - h)^2 + k\ (a \neq 0)$$

> **最常用的是一般式然后是两点式和顶点式，但其实本质上所有的问题都可以通过一般式解决。**

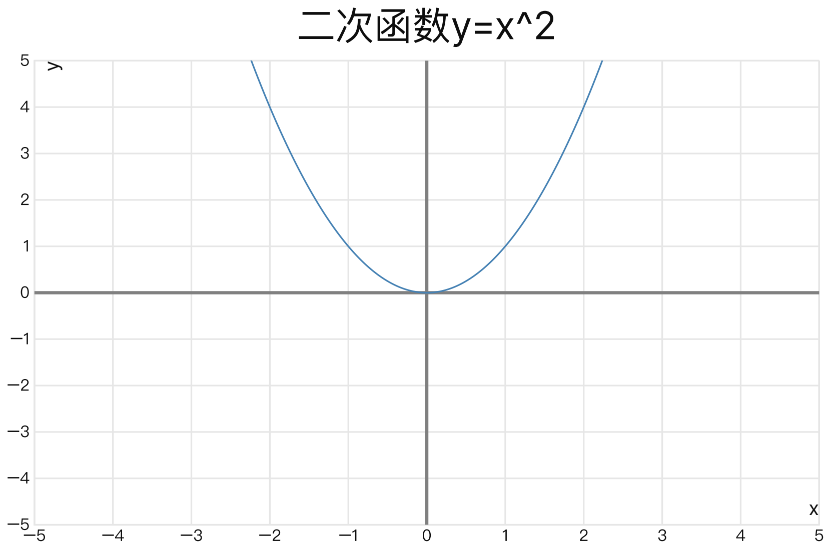
- 二次函数是一个轴对称图形，它有一条对称轴。
- 二次函数a的正负决定了二次函数图像的开口方向
  - a>0，图像开口向上
  - a<0，图像开口向下

> **增减性**
>
> a>0时，函数有最小值，在对称轴左边函数随x的增大而减小，在对称轴右边函数随x的增大而增大；
> a<0时，函数有最大值，在对称轴左边函数随x的增大而增大，在对称轴右边函数随x的增大而减小。

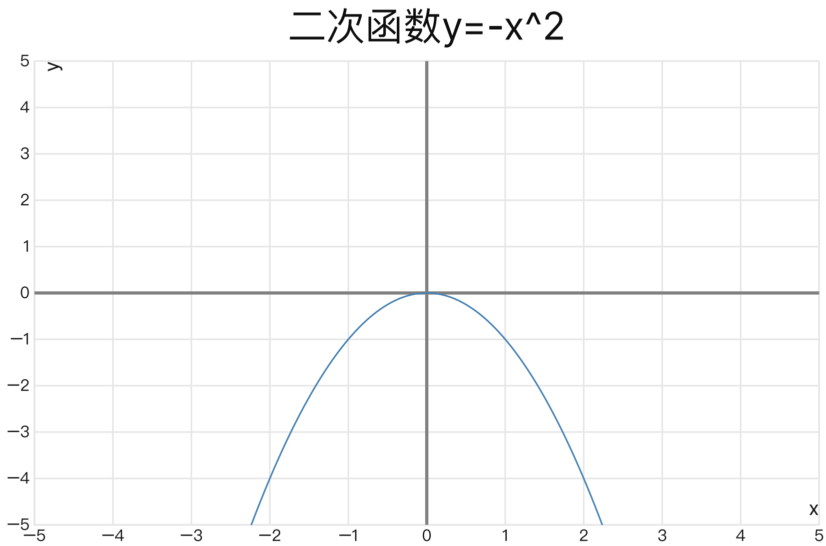


二次函数$ax^2 + bx + c$中a,b,c的作用

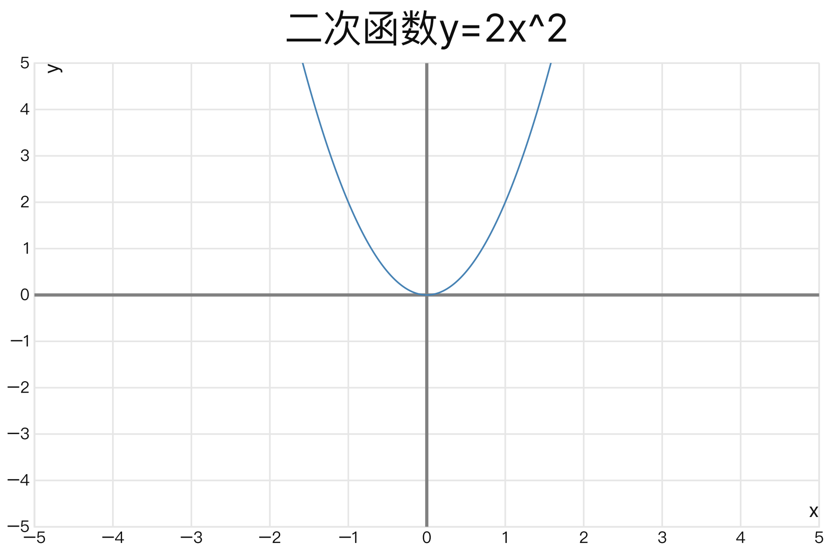
- a决定二次函数图像的开口方向与大小

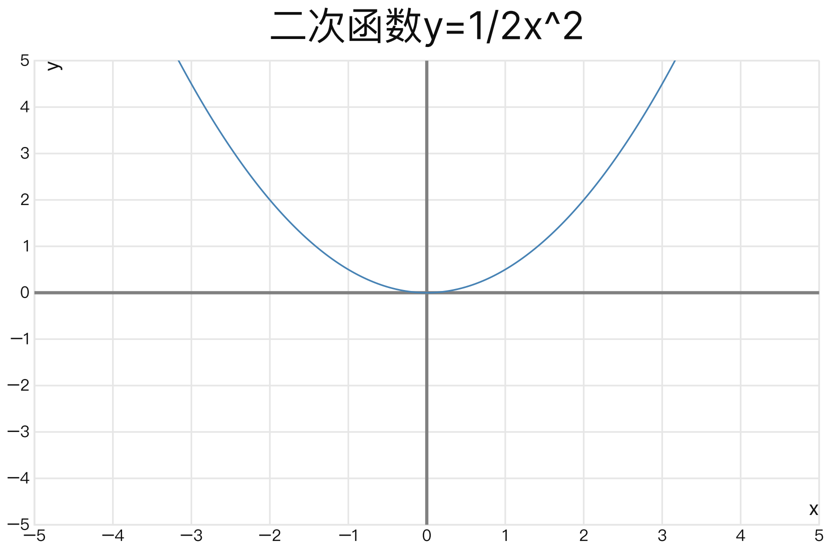


- $a > 0$时，图像开口向上



- $a < 0$时，图像开口向下





- $|a|$越大，函数开口越窄。

> $|a|$**越大，导致**y**随着**x**变化的越快，从而开口就越小。**

顶点式

顶点式虽然看着比较复杂，但是顶点式可以非常容易的得到函数的对称轴和最大(小)值，其对称轴为

$$x = h$$

最大(小)值为k，是最大值还是最小值取决于a的正负。

> **求二次函数的表达式时，如果一直条件有顶点和另一点，比较适合用顶点式来求其解析式。**

一般式

- 图像的对称轴是$x = -\dfrac{b}{2a}$
- 函数的最值为

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

> **如果条件只有图像上的任意三个点，比较适合用一般式来求解解析式。**

- 将三个点分别带入$y = ax^2 + bx + c$，获得一个关于a, b, c的三元一次方程组，三个未知数，三个方程，可以解出a, b, c。

两点式

- 对称轴

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

- 求最值将对称轴带入方程得到y即可，由于最终表示比较复杂，不需要记忆。

> **如果条件是图像与**x**的两个交点坐标**$(x_1, 0)$**和**$(x_2, 0)$**，以及一个其他的点，比较适合用两点式求解析式。**

待定系数法求二次函数解析式

1. 根据条件假设出合适形式的解析式
2. 带入已知条件列出关于待定系数的方程组
3. 解方程组，求出待定系数

二次函数的平移

- 二次函数的平移与一次函数的平移完全相同
- **函数平移的本质**

  任何函数的平移都可以记为：
  如果图像向某个轴减小的方向平移，就把那个变量换为它本身+平移单位；向某个轴增大的方向，就把那个变量换为它本身-平移单位。

- 图像向右平移a个单位，将x换为$x-a$
- 图像向左平移a个单位，将x换为$x+a$
- 图像向上平移a个单位，将y换为$y-a$
- 图像向下平移a个单位，将x换为$y+a$

二次函数与方程组的联系

直线$l_1: y=mx+n$与抛物线$l_2: y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的交点就对应于方程组

$$\begin{cases} y=mx+n \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$$

的解。

特殊地，如果直线为$y=0$，那么上述方程组的解代表抛物线与x轴的交点，交点的横坐标就是一元二次方程ax^2+bx+c的解。

因为图像和方程是一一对应的，不等式

$$ax^2+bx+c>mx+n$$

就代表抛物线在直线上方部分的x的取值范围。

特殊地

$$ax^2+bx+c>k$$

就代表抛物线在直线$y=k$上方的x的取值范围。

二次函数$y=ax^2+bx+c$与x轴交点的情况对应于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的解的情况

- $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$ 称为二次方程的判别式
  - $\Delta<0$方程无解，对应图像与x轴没有交点
  - $\Delta=0$方程有**两个相同的实数根**，对应图像与x轴有一个交点
  - $\Delta>0$方程有两个不相同的实数根，对应图像与x轴有两个交点

二次函数在实际问题中的应用

1. 寻找自变量和因变量
2. 根据题目列出关系
3. 确定自变量和因变量的取值范围
4. 分析函数的增减性，解答题目

方程与方程组

一元一次方程与一元二次方程

等式(方程)

等式的几个基本性质

1. 如果$a=b$，则$a \pm c=b \pm c$
2. 如果$a=b$，则ac=bc
3. 如果$a=b$，则$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

在英文中，方程就是equation

一元一次方程

> 关于方程
>
> 方程中的"元"指的是未知元的个数；“次”指的是未知元中的最高次幂。
> 例如$x^2+y^3+z=1$，就是一个三元三次方程。

> 一元一次方程
>
> 只含有一个未知数(元)，且未知数(元)的次数为1，这样的方程叫**一元一次方程**。

一般形式：

$$ax+b=0(a,b\text{是常数，且}a \neq 0)$$

一元一次方程的应用

- 物理上，匀速运动的路程随时间的变化

$$s=vt$$

- 储蓄问题

$$\text{本息和}=\text{本金}+\text{利息}=(1+\text{利率})\text{本金}$$

一元二次方程

> 一元二次方程
>
> 只含有一个未知数(元)，且未知数(元)的最高项次数为2的整式方程(或者能化为这样的方程)。

一般形式：

$$ax^2+bx+c=0(a,b,c\text{是常数，且}a \neq 0)$$

一元二次方程的解法

因式分解法

方程左边的可以因式分解为$A \cdot B$的形式，A和B都是等式。
变为如下形式

$$A \cdot B = 0$$

A和B都变成一次方程，方程的解就变成$A = 0$或者$B = 0$。

配方法

将二次项和一次项加配一个常数配出完全平方式，最终直接开平方解出方程。
最终一般会配出这样的形式

$$(ax + b)^2 = k$$

则就可以分别解$ax + b = \sqrt{k}$和$ax + b = -\sqrt{k}$得到方程的两个解。

例如，配方法求方程

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

公式法

1. 将一元二次方程化为一般形式$ax^2 + bx + c = 0$
2. 利用判断判别式$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$判断一元二次方程解的情况
    - 如果$\Delta > 0$, 则方程有两个不同的实数根
    - 如果$\Delta = 0$. 则方程有两个相同的实根(⚠️是有两个根，只不过这两个根相同)
    - 如果$\Delta < 0$, 则方程没有实数根
3. 如果有根带入公式求结果

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⚠️ **利用公式法之前一定注意步骤1，先把一元二次方程化为一般形式。**

> **拓展**
>
> 为什么我们说的都是实数根？其实当$\Delta < 0$时，方程时的根变为了虚根。
> 一个方程的解的个数一定等于其未知数最高的次数。

根与系数的关系(韦达定理)

韦达定理表明的一元二次方程的根与其各项系数之间的关系。
一个一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$，假设它的两个根为$x_1, x_2$，**韦达定理**为

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

韦达定理是怎么来的呢？
其实就是一个简单的因式分解，如果一个一元二次方程的两个根分别为x_1, x_2，那么这个一元二次方程一定可以写为以下形式

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

而我们知道这个一元二次方程的一般形式应该为

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

在等号两边同时除以a，得到

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

把上面的展开也可以得到

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

对应项的系数相等，就得到了韦达定理。

一元二次方程在实际问题中的应用

分式方程

分式方程

分母中含有未知数的方程。

解分式方程的一般步骤

- 通分后去分母，将分式方程转化为整式方程
- 求解转化所得的整式方程
- 检验所求的根的合理性

为什么要检验?

增根：我们通过上述步骤解出的根，如果它会使得原方程的分母等于0，则这个根就是**增根**。
要去掉增根的情况

- 例如解分式方程

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$$

分式方程都转化为整式方程的求解，只需要注意增根的存在即可。

方程组

我们之前知道了方程一个等式，那么方程组就是将一些方程组合起来，就组成了**方程组**。

二元一次方程组

二元一次是指的，这个方程组中包含两个未知数，且未知数的最高次为一次。

这里未知数的最高次是一次的，而一次函数的解析式正好是$y=kx+b$的形式，可以联系起来，在图像中一个等式也会对应一条直线。

二元一次方程组中每个方程的一般形式为

$$ax+by=c(a,b,c\text{是常数}，a\neq 0,b\neq 0)$$

其实就是一次函数，只不过我们在方程组中通常这样表示。

解二元一次方程组

解一元二次方程组，就相当于求平面中两条直线的交点，因为每个等式都对应一个等式。一般我们有两种思路解二元一次方程组

- 代入消元法
- 加减消元法

代入消元法

如果一个方程中只含有一个未知数，另一个方程中含有两个未知数的方程组，例如

$$\begin{cases} 2x=3 \\ x+3y=4 \end{cases}$$

可以直接将一个未知数解出来带入另一个方程中求解。

如果两个方程都是含有两个未知数，则根据一个方程得到用一个变量表示另一个变量，然后带入另一个方程，例如

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$$

加减消元法

加减消元法是利用了如果$a=b$,而且$c=d$，那么$a\pm c=b\pm d$。先确定要消去的变量，然后将两个等式中的这个变量的系数配成相等。最后两个等式相减消去变量。例如

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$$

解二元一次方程组的实际应用

- 找出题目描述的自变量和因变量
- 列出自变量与因变量的两个关系式
- 解二元一次方程组

不等式与不等式组

我们之前讨论的函数和方程都是一些用等号连接的式子，如果将这些等式中的"="都换为不等号(<、>、≤、≥)，这些式子就叫做**不等式**。
不等式的解：使得不等式成立的未知数的值称为不等式的解。
不等式的解集：使得不等式成立的所有未知数的取值称为不等式的解集。

不等式的解集在数轴上的表示。

- 小于向左
- 大于向右
- 包含边界用实心
- 不包含边界用空心

不等式的基本性质

- 不等式两侧同时加减一个数或者等式，不等号方向不变
  如果$a > b$，则$a \pm c > b \pm c$
- 不等式两侧同乘以或除以一个正数，不等号的方向不变
- 不等式两侧同乘以或除以一个负数，不等号的方向改变

> 在等式两边约去一个数或者式时，不等式性质与上述一样。

解不等式和不等式组

解不等式和解方程的步骤基本相同，只需要注意不等式的性质，注意不等号的方向即可。

解不等式组时，只需要分别解每一个不等式，然后取它们解集的公共部分即可。

解不等式的实际应用

- 求最大值最小值(最优问题)
- 求范围

反比例函数

当我们拿到一个概念的名字是，我们时常可以通过其名字对其洞知一二。
我们可能学过正比例函数，正比例函数是形如

$$y = kx$$

的函数，其中k是一个常数。而反比例函数正如其名，很有可能是与正比例函数相对应的一个函数。

研究函数的基本方法

- 函数的数学定义(表达式)
- 函数的图像
- 函数的对称性
- 函数的单调性

> **反比例函数(inverse proportional function)**
>
> 反比例函数是形如
>
> $$y = \frac{k}{x}$$
>
> 的函数。

其中x是自变量($x \neq 0$)，x的取值范围是不包含0的所有实数， y是因变量，k为常数，且$k \neq 0$。

当我们知道一段路的总路程时，这时候一辆汽车通过这段路程的平均速度和其所用的时间即是一个反比例函数的关系。因为我们知道

$$s = \overline{v}t$$

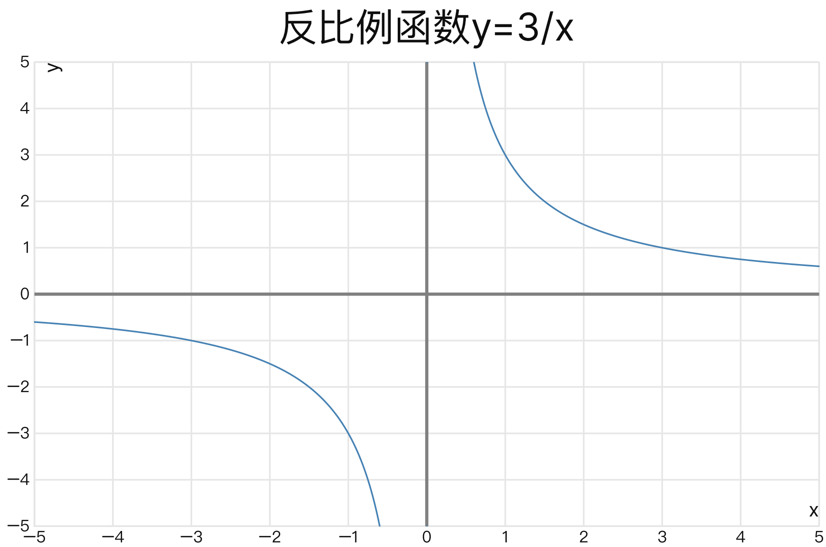
从而

$$\overline{v} = \frac{s}{t}$$

这种形式符合反比例函数的形式。

反比例函数的图像

反比例函数的图像如下



- k > 0
  - 反比例函数的图像分布在一、三象限
  - 在每个象限内，y随x的增大而减小
    - 注意：不可以说这个函数的y随着x的增大而减小，必须加上每个象限的限制
- k < 0
  - 反比例函数的图像分布在二、四象限
  - 每个象限内，y随x的增大而增大
- 反比例函数的图像是**关于原点对称**的中心对称图形。
- 反比例函数的图像**关于直线**$y = x$**和**$y = -x$**轴对称**。

> 双曲线
>
> 反比例函数的图像都是由两条曲线组成，这两条曲线称为**双曲线**。

待定系数法求反比例函数表达式

已知反比例函数过某一点$A(a, b)$，则这个反比例函数就已经确定了。
先假设反比例函数的表达式为

$$y = \frac{k}{x}$$

分别带入$x = a$和$y = b$，得到

$$k = ab$$

从而反比例函数的表达式就是

$$y = \frac{ab}{x}$$

反比例函数中k的几何意义

- 高分训练P30
-

反比例函数的实际应用

- 圆柱体的体积确定，其底面积与高的关系
- 路程一定，平均速度与时间的关系
- 压力一定，压强与受力面积的关系

$$P=\frac{F}{S}$$

- 电压一定，电流与电阻的关系

$$I=\frac{U}{R}$$

在实际应用中，需要先把问题中的数学关系找出来，然后列出等式。(需要练习提高)

锐角三角函数

三角函数，通过名字可以看出，这是一个关于“角”和“函数”的东西。

函数(Function)

函数可以认为是一种对应关系。通俗的讲，就好像班级上的学号与同学的名字一样，通过学号我们可以知道这个学号对应的同学名字叫什么。
函数与此类似，一般的函数可以写成一个y与x的关系式，例如$y=x^2$，这里的x就相当于前面的学号，y便相当于名字。

注

函数必须满足给定一个自变量，只有一个因变量与其对应。

数学上的函数大多是数字与数字之间的对应，现在我们要学习的三角函数便是**角度和数**之间的一种对应。

在一个直角三角形中，如果一个锐角确定了，那么这个三角形的”**形状**“就确定了。

- 上面等价于如果两个直角三角形有一个锐角相等，则这两个三角形**相似**。(三个角之和为180)
  再根据相似的性质，得出在直角三角形中，一个锐角确定之后，其任意两条边的比值是确定的，不因三角形的大小而改变。

正弦函数$\sin$

基于上述的论述，既然在一个锐角确定之后，这个直角三角形的任意两条边的比值不依赖于三角形的大小，只与这个锐角有关，我们可以定义这个角对应的三角函数。

Sin

在直角三角形ABC中，角C是直角，定义角A的**正弦**为

$$\sin A=\frac{A\text{的对边}}{\text{斜边}}$$

- 如何求正弦函数?
  - 善用 勾股定理 #勾股定理

余弦函数cos

Cos

在直角三角形中，角C是直角，定义角A的**余弦**为

$$\cos A=\frac{A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$$

正切函数$\tan$

$\tan$

在直角三角形中，角C是直角，定义角A的**正切**为

$$\tan A=\frac{A\text{的对边}}{A\text{的邻边}}$$

三角函数的关系

- 余角三角函数
  - $\sin A=cos(90^\circ-A)$
  - $\cos A=\sin(90^\circ-A)$
- 平方和关系(本质为勾股定理)
  - $\sin^2 A+\cos^2 A=1$
- 倒数关系
  - $\tan A\cdot\tan\left(90^\circ-A\right)=1$
- 弦切关系
  - $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

常用的三角函数值(须牢记)

	30	45	60
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- 可以通过直观的想象三角形的形状记忆

解直角三角形

解直角三角形

给我们一个直角三角形的多少信息，我们可以完全这个直角三角形呢?

就好像去医院医生要通过一系列的检测来观察病人的身体状况，一个三角形怎么确定下来也如此。

一个直角三角形一定有一个直角，则其剩余的元素还有两个锐角和三条边。但是，我们真的需要全部知道这五个元素才能确定这个直角三角形吗？显然不是。

五个元素之间的关系

- 三边的关系(勾股定理)
  - $a^2+b^2=c^2$
- 两个锐角的关系
  - $\angle A+\angle B=90^\circ$
- 边角关系
  - $\sin A=\frac{a}{c}$
  - $\cos A=\frac{b}{c}$
  - $\tan A=\frac{a}{b}$

只要知道五个元素中的两个元素(至少一个是边)，就可以求出其他三个未知元素。

之前我们讨论了如果知道了一个锐角，那么这个直角三角形的“**形状**”就确定了，既然形状确定了，那么只需要再知道一个边，这个三角形就会完全确定。
而如果我们只知道两个角，其实是相当于一个信息是无用的，因为我们本身就可以通过一个角计算出另一个角的大小，所以无法确定这个三角形。
而如果我们知道了这个三角形的两条边，那这个三角形的第三条边可以由勾股定理确定，三角形的三条边都确定了，三角形也就确定了。

注

上述知道三角形的两条边不是简单的知道三角形有两条边分别为多长，而是要知道每个边其在直角三角形中所对应的“角色“，即知道它们两个对应的是直角边还是斜边。

- 只知道一个直角三角形的两条边而不知道它们对应的“角色”，是无法确定这个三角形的。

应用举例

利用测角仪测量塔高

投影与视图

投影(projection)

什么是投影呢？若曾看过皮影戏，其中的小人就是一个投影。日晷也是一种利用投影来计时的工具。

投影需要两个元素，一个是光，另一个是物体，光照射到物体上便产生投影。

投影的分类

- 平行投影
  - 光线之间是水平的，例如太阳光
- 中心投影
  - 光线是由一个电光源产生，例如灯泡

正投影

- 光线垂直于投影面照射产生的投影

如何画投影?

想象自己沿着光线的方向去观察物体，看到的便是投影的样子。

三视图

视图：当我们从某个方向观察物体，所看到的平面图形叫做物体的一个**视图**。

> Tip
>
> 我们生活的世界是一个三维世界，而一个视图仅仅是一个二维图形，所以我们无法尽通过一个视图来确定一个物体的整体形状。

> 三视图
>
> 将物体在三个投影面内进行投影，在正面内得到的由前向后观察看到的视图为**主视图**；由上向下看到的视图为**俯视图**；在侧面由左向右看到的视图为**左视图**。

- 主视图和俯视图会决定物体的**长**。
- 主视图和左视图会决定物体的**高**。
- 俯视图和左视图会决定物体的**宽**。
  画三视图的规定
- 主视图在左上方，其正下方是俯视图，右方是左视图，要注意对正。(采用必要的辅助线辅助对齐)

> 画三视图的口诀
>
> 长对正，高平齐，宽相等。

> 注
>
> 当从一个角度观察物体时，有些部分会因为遮挡看不到，但为了描述整个立体图形，规定：
> **看得见的部分的轮廓线绘制实线，因遮挡看不见的部分的轮廓线绘制虚线。**

一个立体图形的三视图是不确定的，这取决于你的主视图如何选择。例如正三棱柱。

根据三视图画出物体的形状。

平面几何

线与角

平面几何的图形都是由线和角构成，下面我们介绍一下线和角的一些基础知识。

直线与线段

> 公理

公理是大家都认可的理论，是默认成立的

> 世界上没有绝对的真理

- 公理1: 两点确定一条直线
- 公理2: 两点之间线段最短

距离

两点间的距离指连接两点间的线段的长度

中点

线段上距离两个端点相等的点

角

- 角是由一个点和两条以该点为端点的射线构成的图形

角度换算

$1^\circ = 60', 1' = 60''$

- 平角：180°的角
- 周角：360°的角

余角

定义

如果两个角的和为90°，则这两个角互为**余角**

- 同(等)角的余角相等

补角

定义

如果两个角的和为180°，则这两个角互为**补角**

- 同(等)角的补角相等

相交线产生的角

- 对顶角-对顶角相等
- 邻补角
- 三线八角

    - 同位角
    - 内错角
    - 同旁内角

线

角平分线

- 角平分角将一个角平分为两个相等的角

> 性质
>
> 角平分线上的点到两条边的距离相等

> 到两条边距离相等的点在角平分线上

垂线

> 公理
>
> 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

垂线段：连接直线外一点与直线上一点的所有线段中，垂线段最短。

> 点到直线的距离
>
> 直线外一点到直线的垂线段长度定义为**点到直线的距离**

垂直平分线

> 性质
>
> 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离都相等

- 到线段两端距离相等的点在垂直平分线上

平行线

> 公理
>
> 过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行

> 平行的传递性
>
> 如果直线a平行于b，直线a平行于c，那么c平行于b。

> 平行的判定与性质

- 同位角相等
- 内错角相等
- 同旁内角互补
- 同一平面内垂直于同意直线的两条直线平行

角平分线常用模型

三角形及全等

三角形及其分类

- 角
    - 锐角三角形
    - 直角三角形
    - 钝角三角形
- 边
    - 等腰三角形
        - 等边三角形

三角形的性质

边

三角形的任意两遍之和大于第三边；三角形的任意两边之差小于第三边。

- 因为两点之间，线段最短，三角形的两边相当于一段折线，而一条边相当于一个线段。

角

三角形角的性质

- 三角形的三个内角之和为180度
- 三角形的任何一个外角等于与其不相邻的两个内角的和
- 任意一个外角大于任何一个与其不相邻的内角

边角关系

同一个三角形中，等边对等角，等角对等边；大边对大角，小边对小角。

三角形中的线段

中线

- 三角形中顶点与其对边中点的连线
  重心：三条中线的交点。
- 重心在中线的三等分点上，重心到顶点距离:重心到中点距离=2:1

  三角形的中线将三角形分为两个面积相等的三角形

高线

- 过三角形一个顶点且与其对边垂直的线段
  垂心：三条高线的交点

角平分线

内心：三角形三个角平分线的交点

> **内心：三角形内切圆的圆心**
>
> 内心到三条边的距离相等

中位线

以三角形两条边的中点为端点的线段

- 中位线:对边=1:2

&垂直平分线

外心：三角形三条边的垂直平分线的交点。

> **外心：三角形外接圆的圆心**
>
> 外心到三角形三个顶点的距离相等

三角形全等

> **全等**
>
> 两个图形经过旋转和平移和适当的对折之后可以完全重合

> **三角形全等**
>
> 两个三角形的对应边相等，对应角相等

- 性质
  - 全等三角形的对应线段和面积均相等

判定三角形相等

- 一般三角形
  - SSS
  - SAS
  - ASA
  - AAS
- 直角三角形(已经有一个角一定相等)
  - HL

尺规作图

- 做一条线段长度等于已知线段
- 做一个角大小等于已知角
- 做角平分线

- 做线段的垂直平分线
- 过一点做已知直线的垂线

全等三角形的常用模型

等腰三角形

定义:等腰三角形

有两条边相等的三角形

性质

- 轴对称图形
- 等边对等角
- 三线合一(顶角角平分线、底边上的中线、底边的高)

判定方法

- 三角形中有两个角相等
- 三角形轴有两个边相等

等边三角形

等边三角形是特殊的等腰三角形

三条边都相等的三角形是**等边三角形**

性质

- 等边三角形有三条对称轴
- 三边相等、三个内角相等且都等于60°
- 如果一个等边三角形的边长是a，则这个等边三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

判定方法

- 三条边都相等
- 三个内角相等
- 有一个角是60°的等腰三角形

直角三角形

定义

有一个角是直角的三角形是**直角三角形**

性质

- 直角三角形的两个锐角之和等于90°
- 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半(直角三角形的外接圆半径)
- 直角三角形满足勾股定理$a^2 + b^2 = c^2$

判定方法

- 三角形中一条边的中线等于这条边的一半
- 勾股定理定理的逆定理

平行四边形

平行四边形的性质

定义

两组对边都平行的四边形为**平行四边形**

性质

- 边
  - 两组对边平行且相等
  - 对角线互相平分
- 角
  - 两组对角相等
  - 任何两个邻角互补
- 平行四边形一定是中心对称图形(对称中心是对角线的交点)

判定

当一个四边形满足以下条件之一时，为平行四边形

- 两组对边分别平行
- 两组对边分别相等
- 一组对边平行且相等
- 两组对角分别相等
- 两条对角线互相平分

多边形

正多边形

在平面内，各个内角都相等，各边都相等的多边形

性质

- 内角和：n边形的内角和为$(n-2)\times 180^\circ$
- 外角和：n边形的外角和为360°
- 对角线：过n边形的一个顶点可以引$n-3$条对角线
- n边形有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线

正多边形

性质

- 正n边形的内角为$\frac{n-2}{n}\times 180^\circ$
- 正n边形的外角为$\frac{360^\circ}{n}$

对称性

- 正n边形一定是轴对称图形，一共有n个对称轴
- 如果n是偶数时，正n边形也是中心对称图形

特殊的平行四边形

矩形

> **矩形**
>
> 有一个角是直角的平行四边形

性质

- 矩形是一个特殊的平行四边形
- 矩形的四个角都是直角
- 矩形的对角线长度相等
- 矩形既是轴对称图形又是中心对称图形，对称轴有两条

判定

- 有一个角是直角的平行四边形
- 对角线相等的平行四边形
- 有三个角是直角的四边形

菱形

> **菱形**
>
> 有一组邻边相等的平行四边形

性质

- 菱形是特殊的平行四边形
- 菱形的对角线互相垂直平分
- 菱形的对角线平分一组对角
- 菱形的四条边均相等
- 菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，对称轴为其对角线
- 菱形的面积等于其对角线乘积的一半

判定

- 有一组邻边相等的平行四边形
- 对角线互相垂直的平行四边形
- 四条边都相等的四边形

正方形

> **正方形**

有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形。

性质

- 正方形是特殊的平行四边形、菱形、矩形
- 对角线互相垂直平分且相等
- 正方形既是中心对称图形又是轴对称图形，其对称轴有4条

判定

- 有一组邻边相等的矩形
- 对角线互相垂直的矩形
- 有一个角是直角的菱形
- 对角线相等的菱形
- 对角线互相垂直平分且相等
- 四条边都相等的且有一个角是直角的四边形
- 三个角都是直角且有一组邻边相等的四边形

矩形中的折叠问题

- 折叠会产生全等图形

圆

圆

到定点的距离等于定长

基本概念

弦

连接圆上的任意两点的线段

- **直径**为经过圆心的弦

  弧

  圆上任意两点间的部分
  弧分为**优弧**和**劣弧**
  优弧：圆弧对应的圆心角大于180°
  劣弧：圆弧对应的圆心角小于180°

- 等圆：能够重合的两个圆
  - 等弧：在同圆或等圆中能够重合的两段弧

圆心角

顶点在圆心的角

圆周角

顶点在圆上，且两边都和圆相交的角

垂径定理

定理

垂直于弦的直径平分弦，而且平分弦所对的两条弧。

推论

- 平分弦的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧
- 弦的垂直平分弦经过圆心

弧、弦、圆心角的关系

定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等；
反过来，相等的弧或弦所对的圆心角也相等。

圆周角

定理

一条弧所对的圆周角等于其所对的圆心角的一半

推论

- 同弧或等弧所对的圆周角相等
- 直径所对的圆周角为90°
- 90°圆周角所对的弦是直径

- 一条弦所对的两个圆周角互补

平面元素与圆

点与圆的位置关系

假设平面中一个圆的半径为r，一个点到圆心的距离为d，点与圆有以下三种关系

- 点在圆外 ---- $d > r$
- 点在圆上 ---- $d = r$
- 点在圆内 ---- $d < r$

直线与圆的位置关系

假设平面中一个圆的半径为r，一条直线l，圆心到l的距离为d，直线与圆有以下三种关系

- 相离 ---- $d > r$
- 相切 ---- $d = r$
- 相交 ---- $d < r$

切线

性质

切线垂直于过切点的半径

判定切线

- 经过半径的外端点且垂直于半径的直线
- 圆心到直线的距离等于半径的直线
- 与圆只有一个交点的直线

切线长

切线长

从圆外一点引圆的切线，该点到切点的距离称为切线长

切线长定理

从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，且该点与圆心的连线平分两条切线的夹角。

三角形与圆

三角形的外接圆

- 外接圆圆心为三角形三条边的垂直平分线的交点(外心)
- 外心满足到三角形三个顶点的距离都相等

三角形的内切圆

- 内切圆的圆心为三角形三条角平分线的交点(内心)
- 内心满足到三角形三条边的距离相等

圆的内接四边形

- 圆的内接四边形的对角之和等于180°
- 圆的内接四边形的任意一个外角大小等于其**内对角**

扇形与弧

- 圆的周长：$2\pi r$

弧长

一段弧一定是一个圆的一部分，圆心角是360度的弧长应该是$2\pi r$。那么如果一段弧其所对的圆心角是n度，则其弧长为

$$l=\frac{n}{360}\cdot 2\pi r=\frac{n\pi r}{180}$$

- 圆的面积

扇形面积

同理，一个扇形也一定是一个圆的一部分，圆心角是360度的扇形就是一个圆，它的面积为πr^2，那么如果一个扇形其圆心角是n度，则其面积为

$$S=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}lr$$

圆柱与圆锥的展开图

圆锥

圆锥的侧面展开图是一个扇形，其弧长为圆锥底面圆的周长，其半径为圆锥的母线长。

- 圆锥的轴截面是一个等腰三角形

展开图的弧长等于底面圆的半径，从而有以下等式成立

$$2\pi r=\frac{n\pi l}{180}$$

圆柱

圆柱的侧面展开图是一个矩形，其一条边的长度为地面圆的周长，另一条边的长为圆柱的高。

- 圆柱的侧面积：$S_{侧}=2\pi h$
- 圆柱的底面积：$S_{底}=\pi r^2$

阴影面积的计算

如果是规则的图形，例如扇形、三角形、矩形等，可以直接利用公式计算。
如果是不规则的图形，没有求面积的公式，则将图形进行分割或者填补，使其变为已知图形的组合。

与圆有关的阴影部分计算

空间与图形

对称、平移和旋转

平移

平移

在平面中，将图形沿某个方向移动一定的距离

性质

- 平移前后的两个图形全等(全等的定义)

- 对应线段平行(或在同一条直线上)
- 对应的角相等
- 对应点的连线互相平行

旋转

旋转

在平面中，将一个图形绕一个定点按某个方向转动一个角度

旋转三要素

- 旋转中心
- 旋转角
- 旋转方向(顺时针、逆时针)

性质

- 对应点到中心点的距离相等
- 任意一组对应点与旋转中心的连线所成的夹角都相等，且等于旋转角
- 旋转前后的图形全等

轴对称

- 轴对称是指两个图形的一个关系

轴对称

两个图形沿某条直线对折之后能够完全重合

轴对称图形

指一个图形可以找到一条直线，沿该直线对折之后图形的两部分可以完全重合。

性质

- 轴对称的图形一定全等
- 对应点的连线被对称轴垂直平分
- 如果对应线段或者延长线相交，则交点一定在对称轴上

中心对称

中心对称

如果一个图形绕平面中一个点旋转180度之后，可以与另一个图形完全重合，则这两个图形**中心对称**

中心对称图形

一个图形绕某个点旋转180度之后，可以与自身重合。
(一个图形在平面中可以找到一点，图形上的任何一点关于该点的对称点都在这个图形上)

性质

- 中心对称的两个图形，其对应点的连线一定过对称中心，且被对称中心平分

统计学

数据收集方式

全面调查(普查)

全面调查

考察全体对象的调查称为全面调查。

- 适用范围：调查范围小、要求数据准确
- 优点：可靠性强、准确
- 缺点：耗时长、耗费人力物力较大

抽样调查

抽样调查

只抽取部分对象进行调查，然后利用调查数据估算全体的情况

- 适用范围：调查范围广、受条件限制、对数据的精确度要求不高
- 优点：省时省力、破坏性小
- 缺点：随机性大、有可能与真实情况误差较大

统计学的基础概念

- 总体：所考察的全体对象称为**总体**
- 个体：组成总体的每一个对象称为**个体**
- 样本：从总体中抽取的一部分个体叫做总体的一个**样本**
- 样本容量：一个样本中所含的个体数称为**样本容量**

例如，如果要调查全校学生的身高，抽出200名学生调查，则总体就是全校学生的身高情况，个体是全校每一名学生的身高情况，样本是抽出的这200名学生的身高情况，样本容量为200。

统计数据的数字特征

算数平均数

算数平均数

对于n个数$x_1, x_2, ..., x_n$，其平均数为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

加权平均数

加权平均数

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k)$$

其中f_i是$x_i(i=1,2,\ldots,n)$出现的次数，$n=f_1+f_2+\cdots+f_k$

- 平均数反应的一组数据的平均水平，并不能反映个体的情况，有时只根据平均水平无法反映个体的情况

众数

众数是一组数据中出现次数最多的数据

- 众数代表数据的多数情况

众数不一定只有一个

中位数

中位数

将一组数据排序后，位于中间的位置的数(奇数个数据)或者位于中间的两个数的平均数(偶数个数据)，称为这组数据的**中位数**。

- 一组数据的中位数只有一个

通过中位数可以知道一组数据的整体分布情况。

方差

有时候我们只通过一组数据的平均数很难了解到该组数据的具体分布情况，如果一组数据中的大部分数据都比较小，只有一个数据非常大，导致整体的平均数很大；而另一组数据整体差不多大小，平均数和上一组差不多大，这时候我们引入方差来区分这两组数据。

- 方差是描述数据波动情况的数字特征，方差越大，数据的波动性越强

方差

设n个数据$x_1,x_2,\ldots,x_n$的平均数为$\bar{x}$，则其方差为

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

统计图

- 条形统计图：能够比较直观的显示每组的数据
- 扇形统计图：能够直观的显示各组在总体中所占的百分比
- 折线统计图：显示数据的同时可以直观的看出数据的变化趋势
- 频数分布直方图：直观反映各组的频数分布

> 🖊 频数：一个数据在一组数据中的出现的次数。

概率

事件的分类

- 必然事件: 在一定条件下，有些事件一定会发生，这些称为**必然事件**。
- 不可能事件：在一定条件下，有些事件必然不会发生，这样的事件称为**不可能事件**。
- 随机事件：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**。

概率

> 🖊 概率
>
> 对于一个事件A，我们把刻画其发生可能性大小的数值，称为随机事件A的**概率**。

一个事件的概率一定在0与1之间

- 必然事件发生的概率为100%
- 不可能事件发生的概率为0%

> 发生概率为100%的事件不一定为必然事件；发生概率为0%的事件不一定为不可能事件。

概率的计算

> 🖊 计算公式
>
> 如果一次试验一共有n种**等可能**的结果，事件A中包含m种结果，那么事件A发生的概率
>
> $$P(A)=\frac{m}{n}$$

常用的概率计算方法

- 面积法
  当一次试验的结果可以用面积为S的图形表示，事件A的结果可以用面积为S_1的图形表示，则事件A的概率为

$$P(A)=\frac{S_1}{S}$$

- 列表法
  列表法就是将试验结果全部列出，然后数出总的结果数n和A的结果数m

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

- 画树状图法
  画树状图法与列表法类似，每次将所有可能的结果列出，最后数出总的结果数n和A的结果数m

游戏公平性

利用概率判断一个游戏的公平性时，计算出双方各自获胜的概率，如果相等游戏就是公平的，如果不等游戏就是不公平的

频率

在n次重复试验中，不确定事件A发生了m次，比值

$$\frac{m}{n}$$

称为事件A发生的频率。

频率可以估计概率

当我们重复试验的次数非常多时，事件A的频率会越来越靠近事件A的概率，所以我们可以用频率来估算概率。

随着试验次数的增大，一个事件的频率值会越来越靠近其概率值，频率值会在概率值之间摆动，而且摆动幅度越来越小。