Projet 4: Incertitude en chaos polynomial

John Sibony
Jeremy Chichportich

Présentation

Soit $\Phi = \Phi(x,t)$ la valeur économique d'un contrat d'assurance solution de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k(x_\infty - x)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x\Phi + (1-g)\Phi = 0$$

où $t < T$, $x \in \mathbb{R}$ avec la condition terminale

$$\Phi(.,T) = 1$$

Le coefficient σ s'interprète comme la stabilité de la politique de revalorisation de la compagnie d'assurance. Sa valeur est en général calibrée d'après les calculs des provisionnements pour t = 0 dans le cadre du Pilier I. En général, il est mal connu. En effet, les différentes tentatives de calibration induisent des fluctuations.

On se propose dans ce projet de mesurer l'impact de l'incertitude sur σ sur le calcul de la valeur économique du contrat (le Best Estimate) et sur le coût de la garantie associée. On doit donc représenter la fonction Φ comme dépendante du paramètre incertain σ. On souhaite mesurer l'incertitude sur la valeur de Φ et γ . On propose pour cela de modéliser ici la volatilité à l'aide d'un bruit gaussien, soit :

$$\sigma^2 = \sigma^2(\xi) = (\mu + \nu\xi)^2, \;\; \xi \sim \mathcal{N}(0,1), \;\; \nu, \mu > 0$$

On note de plus p(x) la densité de ϵ, soit p(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Enfin on décompose $\Phi(x,t,\xi)$ sur la base orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}; p(x)dx)$ des polynômes de Hermite $(H_i)_{i\geq 0}$, ie :

$$\Phi(x,t,\xi) = \sum_{i\geq 0} \Phi_i(x,t) H_i(\xi)$$

On se restreindra à la famille $(H_i)_{0\leq i\leq d}$ pour des raisons évidentes de simulation numérique.

Question (i) : Système linéaire

On se propose ici de simplifier l'EDP du contrat en utilisant la troncature en chaos de Φ et la modélisation de σ.

Soit $k \in [\![0, d]\!]$. En multipliant (2.15) par H_k, on a :

$$\frac{\partial \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi)}{\partial t} H_k(\xi) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi)}{\partial x^2} H_k(\xi) + k_0(x_\infty - x) \frac{\partial \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi)}{\partial x} H_k(\xi)$$
$$+ x \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi) H_k(\xi) + (1-g) \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi) H_k(\xi) = 0$$

En développant σ^2 et en utilisant (2.20) et (2.21) pour la variable ξ on obtient en se restreignant à $k \in [\![2, d-2]\!]$:

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{\partial \Phi_i(x,t)}{\partial t} H_i(\xi) H_k(\xi) + \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial^2 \Phi_i(x,t)}{\partial x^2} H_i(\xi) H_k(\xi) + \nu\mu \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial^2 \Phi_i(x,t)}{\partial x^2} H_i(\xi) \Big(H_{k+1}(\xi) + k H_{k-1}(\xi) \Big)$$
$$+ \frac{\nu^2}{2} \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial^2 \Phi_i(x,t)}{\partial x^2} H_i[\xi] \Big(H_{k+2}(\xi) + (2k+1) H_k(\xi) + k(k-1) H_{k-2}(\xi) \Big) + k_0(x_\infty - x) \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial \Phi_i(x,t)}{\partial x} H_i(\xi) H_k(\xi)$$
$$+ x \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi) H_k(\xi) + (1-g) \sum_{i=0}^{d} \Phi_i(x,t) H_i(\xi) H_k(\xi) = 0 \qquad (*)$$

Puis en prenant l'espérance de cette équation et puisque H forme une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}; p(x)dx)$, on a l'équation suivante $\forall k \in [\![2, d-2]\!]$:

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} k! + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} k! + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k+1}(x,t)}{\partial x^2} (k+1)! + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k-1}(x,t)}{\partial x^2} k! + \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{k+2}(x,t)}{\partial x^2} (k+2)!$$
$$+ \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} (2k+1) k! + \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{k-2}(x,t)}{\partial x^2} k! + k_0(x_\infty - x) \frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial x} k! + x \Phi_k(x,t) k! + (1-g) \Phi_k(x,t) k! = 0$$

$$\underset{(\div k!)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k+1}(x,t)}{\partial x^2} (k+1) + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k-1}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{k+2}(x,t)}{\partial x^2} (k+2)(k+1)$$
$$+ \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} (2k+1) + \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{k-2}(x,t)}{\partial x^2} + k_0(x_\infty - x) \frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial x} + x \Phi_k(x,t) + (1-g) \Phi_k(x,t) = 0$$

En repartant de (*) et en prenant $H_k = 0$ lorsque $k > d$ ou $k < 0$, on obtient les équations suivantes pour $k = 0$, $k = 1$, $k = d-1$ et $k = d$ respectivement :

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k+1}(x,t)}{\partial x^2}(k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{k+2}(x,t)}{\partial x^2}(k+2)(k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2}(2k+1)$$
$$+ x\Phi_k(x,t) + (1-g)\Phi_k(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k+1}(x,t)}{\partial x^2}(k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{k+2}(x,t)}{\partial x^2}(k+2)(k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2}(2k+1)$$
$$+ \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{k-2}(x,t)}{\partial x^2} + k_0(x_\infty - x)\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial x} + x\Phi_k(x,t) + (1-g)\Phi_k(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k+1}(x,t)}{\partial x^2}(k+1) + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k-1}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2}(2k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{k-2}(x,t)}{\partial x^2}$$
$$+ k_0(x_\infty - x)\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial x} + x\Phi_k(x,t) + (1-g)\Phi_k(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \nu\mu \frac{\partial^2 \Phi_{k-1}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2}(2k+1) + \frac{\nu^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{k-2}(x,t)}{\partial x^2} + k_0(x_\infty - x)\frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial x}$$
$$+ x\Phi_k(x,t) + (1-g)\Phi_k(x,t) = 0$$

Nous pouvons à présent discréditer les (d+1) EDP précédentes afin d'implémenter des simulations numériques. Nous choisissons une méthode classique de différence finie à gauche en temps et à droite en espace pour des raisons de stabilité numérique. Concernant la différenciation seconde à droite en espace, la méthode de différence finie nous donne par la formule de Taylor-Young :

$$\Phi(x+\Delta x,t) = \Phi(x,t) + \Delta x \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x} + o((\Delta x)^2) \qquad (1)$$

$$\Phi(x-\Delta x,t) = \Phi(x,t) - \Delta x \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x} + o((\Delta x)^2) \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x} \approx \frac{\Phi(x-\Delta x,t) + \Phi(x+\Delta x,t) - 2\Phi(x,t)}{(\Delta x)^2}$$

Ainsi, pour le cas k $\in [\![2, d-2]\!]$ on obtient après remplacement :

$$\Phi_k(x,t-\Delta t) = \Phi_k(x,t) + \left(\frac{\mu^2}{2} + (2k+1)\frac{\nu^2}{2}\right)(\Delta t)\frac{\Phi_k(x+\Delta x,t) - 2\Phi_k(x,t) + \Phi_k(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$
$$+\nu\mu(k+1)(\Delta t)\frac{\Phi_{k+1}(x+\Delta x,t) - 2\Phi_{k+1}(x,t) + \Phi_{k+1}(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + \nu\mu(\Delta t)\frac{\Phi_{k-1}(x+\Delta x,t) - 2\Phi_{k-1}(x,t) + \Phi_{k-1}(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$
$$+\frac{\nu^2}{2}(k+2)(k+1)(\Delta t)\frac{\Phi_{k+2}(x+\Delta x,t) - 2\Phi_{k+2}(x,t) + \Phi_{k+2}(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$
$$+(\Delta t)\frac{\nu^2}{2}\frac{\Phi_{k-2}(x+\Delta x,t) - 2\Phi_{k-2}(x,t) + \Phi_{k-2}(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + (\Delta t)k_0(x_\infty - x)\frac{\Phi_k(x+\Delta x,t) - \Phi_k(x,t)}{\Delta x}$$
$$+(\Delta t)x\Phi_k(x,t) + (\Delta t)(1-g)\Phi_k(x,t)$$

$$\underset{\text{en regroupant les } \Phi_i}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Phi_k(x,t-\Delta t) = \Phi_{k-2}(x,t)[-\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}] + [\Phi_{k-2}(x+\Delta x,t) + \Phi_{k-2}(x-\Delta x,t)][\frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]$$
$$+\Phi_{k-1}(x,t)[-2\mu\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}] + [\Phi_{k-1}(x+\Delta x,t) + \Phi_{k-1}(x-\Delta x,t)][\nu\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]$$
$$+\Phi_k(x,t)[1 - 2\left(\frac{\mu^2}{2} + (2k+1)\frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - (\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty - x) + (\Delta t)(x+1-g)]$$
$$+\Phi_k(x+\Delta x,t)[\left(\frac{\mu^2}{2} + (2k+1)\frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + (\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty - x)] + \Phi_k(x-\Delta x,t)[\left(\frac{\mu^2}{2} + (2k+1)\frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]$$
$$+\Phi_{k+1}(x,t)[-2\mu\nu(k+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}] + [\Phi_{k+1}(x+\Delta x,t) + \Phi_{k+1}(x-\Delta x,t)][\nu\mu(k+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]$$
$$+\Phi_{k+2}(x,t)[-\nu^2(k+2)(k+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}] + [\Phi_{k+2}(x+\Delta x,t) + \Phi_{k+2}(x-\Delta x,t)][\frac{\nu^2}{2}(k+2)(k+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]$$

Les 4 cas sur k restant sont identiques à 1 ou 2 termes près.

Posons $\Phi^p = \begin{pmatrix} \Phi^p_{0,1} & \cdots & \Phi^p_{0,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi^p_{d,1} & \cdots & \Phi^p_{d,N} \end{pmatrix}$

avec $\Phi^p_{k,n}$ la fonction Φ_k prise au n (resp. p) ème point de l'espace (resp. temps).
On obtient l'EDP sous forme matricielle suivante :

$$\Phi^{p-1} = \Phi^p A + B\Phi^p + (\frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2})J \otimes (R_d^2\Phi^p R_N + R_d^2\Phi^p R_N^T) + (\nu\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2})J \otimes (R_d\Phi^p R_N + S\Phi^p R_N^T)$$
$$+C \otimes (R_d^T\Phi^p R_N + S_d^T\Phi^p R_N^T) + D \otimes ((R_d^T)^2\Phi^p R_N + (R_d^T)^2\Phi^p R_N^T) + E \otimes \Phi^p + F \otimes (\Phi^p R_N^T + \Phi^p R_N)$$

avec $\otimes$ le produit de matrice terme à terme.

$$A=\begin{pmatrix} 1-\mu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_1)+(\Delta t)(x_1+1-g(x_1)) & \frac{\mu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\mu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}+(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_1) & 1-\mu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_2)+(\Delta t)(x_2+1-g(x_2)) & \frac{\mu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \\ 0 & \frac{\mu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}+(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_2) & 1-\mu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_3)+(\Delta t)(x_3+1-g(x_3)) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\mu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}+(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_{N-1}) & 1-\mu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-(\frac{\Delta t}{\Delta x})k_0(x_\infty-x_N)+(\Delta t)(x_N+1-g(x_N)) \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -2\mu\nu 1\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & -\nu^2 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -2\mu\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & -2\mu\nu 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & -\nu^2 6\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \ddots & 0 \\ -\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & -2\mu\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & -2\mu\nu(d+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -2\mu\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 \end{pmatrix} J=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} R_n=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n^2$$

$$C=\begin{pmatrix} \nu\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & \nu\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu\mu(d+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & \nu\mu(d+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} \frac{\nu^2}{2}2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & \frac{\nu^2}{2}2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\nu^2}{2}(d+2)(d+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & \frac{\nu^2}{2}(d+2)(d+1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} -\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & -\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -(2d+1)\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & -(2d+1)\nu^2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix} F=\begin{pmatrix} \frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & \frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (2d+1)\frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \cdots & (2d+1)\frac{\nu^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

Maintenant que nous avons discréditer l'EDP sur une grille en espace et en temps, il nous manque plus qu'à initialiser l'EDP au temps finale T :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_{0,0}^T & \cdots & \Phi_{0,N}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{d,0}^T & \cdots & \Phi_{d,N}^T \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\Phi(x_0,T,\xi)H_0(\xi))/0! & \cdots & \mathbb{E}(\Phi(x_N,T,\xi)H_0(\xi))/0! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}(\Phi(x_0,T,\xi)H_d(\xi))/d! & \cdots & \mathbb{E}(\Phi(x_N,T,\xi)H_d(\xi))/d! \end{pmatrix} \\ &\underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(H_0(\xi))/0! & \cdots & \mathbb{E}(H_0(\xi))/0! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}(H_d(\xi))/d! & \cdots & \mathbb{E}(H_d(\xi))/d! \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec (*) provenant de la condition terminale de l'EDS $\Phi(.,T)=1$. Montrons à présent que : $\forall$ k≥ 1 $\mathbb{E}(H_k(\xi))=0$.

On peut montrer que $H_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i k! \xi^{k-2i}}{2^i i!(k-2i)!}$. Or les puissances impaires d'une loi normale centrée réduite ont une espérance nulle. On s'intéesse donc qu'au cas k=2p (qui implique k-2i pair) :

$\mathbb{E}(H_{2p}(\xi)) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i (2p)! \mathbb{E}(\xi^{2(p-i)})}{2^i i!(2(p-i))!} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} = 0$ d'après la formule du binome de Newton. Et on a biensur $\mathbb{E}(H_0(\xi)) = 1$. Finalement :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{0,0}^T & \cdots & \Phi_{0,N}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{d,0}^T & \cdots & \Phi_{d,N}^T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Question (ii) : Best Estimate

En utilisant la question précédente on peut retrouver la valeur Φ^0 et en particulier $\forall i \leq N$ $\Phi^0_{0,i}$ qui est donc le Best Estimate moyen sur notre grille d'espaces.

Question (iii) : Ajustement pour Incertitude

Le calcule de l'Ajustement par Incertitude se fait par une méthode classique de Monte Carlo sur nos variables gaussiennes ξ. La fonction Φ se calcul en utilisant la formule $\Phi = \langle \Phi_., H_. \rangle$ avec $(\Phi_k)_{k\leq N}$ calculer avec les simulations de la question (i) et $(H_k)_{k\leq N}$ les polynomes de Hermites.

Question (iv) : Coût moyen de la garantie

Dans cette question, le coût moyen de la garantie se réécrit par méthode de Monte-Carlo ainsi :
$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M} x_k$ tq $x_k \in E_k$ avec $\forall k \leq M, E_k = \{x_i$ tq $\Phi(x_{i-1}, 0, \xi_k) < 1$, $\Phi(x_i, 0, \xi_k) > 1$ et x_i $i \leq N$ fixés$\}$.
Par convention $x_k = 0$ quand $E_k = \emptyset$.

Question (v) : Discussion

Afin de pallier aux divergences numériques lors des simulation de nos Φ_k, nous avons dû tatônner les pas d'espace et de temps. La stabilité de la méthode est fortement corrélée au paramètrage de ces pas et reste donc un facteur déterminant au pricing du contrat. Un bon calibrage est donc nécéssaire. Nous avons choisis dans notre cas une fenêtre en temps et en espace pour un pas de 0.001 et de 0.5 respectivement.

D'autre part, le paramètre d de la troncature en chaos ne joue pas un rôle déterminant pour le calcul de Φ. En effet, une troncature suffisamment grande implique que l'on considère suffisamment de polynomes d'Hermitte pour approximer de façôn convenable la fonction. Plus on considére de polynôme, plus l'approximation devient précise mais cette amélioration devient négligeable passé un certain seuil.

Enfin, nous proposons dans le notebook une nouvelle méthode basée sur le théorème de Faynman-Kac. Une comparaison des 2 méthodes montre des résultats similaires si un bon calibrage des fenêtres a été effectué.