Liste de projets 2017-18

Ludovic Goudenège[*] Jacques Printems[†]

Ce document décrit 5 projets à réaliser dans le cadre du cours de méthodes numériques pour l'actuariat dirigé par Ludovic Goudenège et Jacques Printems. Vous choisirez un sujet parmi les 5 proposés dans ce document. Les projets pourront éventuellement être modifiés suivant différentes directions, mais ces changements devront être motivés. Le rendu de projet doit contenir du code réalisé dans le langage de votre choix, et vous serez également évalués sur la qualité de votre programmation.

Votre projet doit être envoyé sous format pdf, ou sous forme de fichier compressé à chaque professeur.

1 Détermination fonds propres cadre Solva 2

Les projets qui suivent portent sur l'évaluation de la valeur économique de contrats d'assurance-vie ainsi que l'évaluation à un an du capital minimum requis (Solvency Capital Requirement, SCR) dans l'esprit de la réglementation Solva 2.

Quelque soit le projet, les calculs se scindent en général en quatre grands blocs :

(i) un modèle de dynamique des facteurs de risques (sous probabilité historique notée $\mathbb{P}$) ;

(ii) un modèle de projection (du bilan), qui peut-être différent selon que l'on se place du côté de l'assuré ou de celui de l'assureur ;

(iii) une méthode de calcul d'espérance actualisé de flux futurs (sous probabilité risque-neutre notée $\mathbb{Q}$), c.-à-d. la valeur économique du contrat : Monte Carlo, EDP, formules explicites . . . ;

(iv) une méthode de calcul du SCR : prise en compte de la marge pour risque ou non, modèle interne ou formule standard.

En général, les contrats d'assurance-vie implique une interaction actif-passif. Cela a pour conséquence de couple les bloc (i) et (iii) plus haut et par là de compliquer le calcul.

Afin d'unifier les notations à travers les projets, et avant de présenter ces derniers à la prochaine section, on décrit maintenant quelques grandeurs nécessaires à l'illustration de ce qui précède. On désignera par A_t la valeur de marché des actifs d'une compagnie d'assurance-vie (adossés à ces engagements), E_t le montant de ses engagements vis-à-vis de ses actionnaires (fonds propres) et L_t la valeur de marché de ces engagements vis-à-vis de ses assurés (provisionnement). On retient le schéma simplifié du bilan à la fin de l'année t (voir aussi (1.1)).

$$A_t = E_t + L_t. \tag{1.1}$$

[*]goudenege@math.cnrs.fr
[†]printems@u-pec.fr

On ne prendra pas en compte la marge pour risque ici. Ainsi, le SCR à $t = 0$ sera défini par l'approximation suivante (*Cf.* [BBR09]) :

$$SCR_0 = E_0 - \mathrm{VaR}_{0.5\%}(e^{-\int_0^1 r_s \, \mathrm{d}s} E_1),$$

avec r le taux court et où l'on a défini la VaR au niveau α d'une v.a.r. X comme

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X \le x) \ge \alpha\} =: F_X^{-1}(\alpha),$$

avec F_X^{-1} l'inverse généralisée de la fonction de répartition F_X de X.

On est donc amené à estimer la distribution (quantiles) de la v.a. E_1. En général, cela se fait par le biais de quantiles empiriques sur la base de simulations $E_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Comment simuler ? Comment projeter ?

1.1 Projet 1 : contrat MUST et *Least Square Monte Carlo*

La description qui suit s'appuie sur l'article [BBR09]. On se réferera à celui-ci pour des détails plus complet. C'est un contrat d'assurance vie avec versement de prime unique P, de maturité $T > 0$ fixe, taux minimum garanti g, taux de participation aux bénéfices δ. Le contrat expire à la date T que l'assuré soit présent ou non (pas de prise en compte de taux de mortalité, pas de rachat) avec un versement de L_T à l'assuré. Il n'y a donc qu'une seule prestation versée.

Les dynamiques des facteurs de risques (A_t, r_t) = (actif, taux court) sont écrites différement selon que l'on se place sous probabilité historique $\mathbb{P}$ ou probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Probabilité historique $\mathbb{P}$:

$$\mathrm{d}A_t = A_t(\mu \mathrm{d}t + \sigma_A \mathrm{d}V(t)), \quad A_0 > 0, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(r_\infty - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_r \mathrm{d}W_t, \quad r_0 > 0, \tag{1.3}$$

où V et W sont des browniens sous $\mathbb{P}$ de corrélation ρ.

Probabilité historique $\mathbb{Q}$:

$$\mathrm{d}A_t = A_t(r_t \mathrm{d}t + \sigma_A \mathrm{d}\widetilde{V}(t)), \quad A_0 > 0, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(\widetilde{r}_\infty - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_r \mathrm{d}\widetilde{W}_t, \quad r_0 > 0, \tag{1.5}$$

où $\widetilde{V}$ et $\widetilde{W}$ sont des browniens sous $\mathbb{Q}$ de corrélation ρ, où $\widetilde{r}_\infty = r_\infty - \frac{\sigma_r}{\kappa}\lambda$ avec λ le prix de marché du risque de taux supposé constant. Les valeurs numériques sont précisés dans [BBR09, §6].

On décrit maintenant les dynamiques de flux vues du point de vue des actionnaires (voir [BBR09]). À chaque date t (sur une base annuelle), les gains réalisés sur le marché sont $A_t^- - A_{t-1}^+$ où A_t^- et $A_t^+ = A_t^- - d_t + c_t$ sont les valeurs de l'actif juste avant et après le paiement des dividendes d_t et les contributions au capital c_t (nécessaire si le niveau du passif L_t dépasse le niveau de l'actif A_t^-). Sur cette base, on a

$$\begin{aligned}
L_t &= (1+g)L_{t-1} + \big(\delta(A_t^- - A_{t-1}^+) - gL_{t-1}\big)_+, \quad t \ge 1, \\
d_t &= (1-\delta)(A_t^- - A_{t-1}^+)\mathbf{1}_{\delta(A_t^- - A_{t-1}^+) > gL_{t-1}} + (A_t^- - A_{t-1}^+ - gL_{t-1})\mathbf{1}_{\delta(A_t^- - A_{t-1}^+) \le gL_{t-1} \le (A_t^- - A_{t-1}^+)}, \\
c_t &= \max(L_t - A_t^-, 0).
\end{aligned}$$

Ici les profits futurs sont $X_t = d_t - c_t$ pour $t \leq T-1$ et $X_T = d_T - c_T + A_T - L_T$.

Dans l'optique du calcul du SCR, la v.a. d'intérêt E_1 est alors (voir *supra*)

$$E_1 = V_1 + X_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s\geq 2}^{T} e^{-\int_1^s r_u \, \mathrm{d}u} X_s \mid \mathcal{F}_1\right) + X_1, \tag{1.6}$$

ou (point de vue assuré)

$$E_1 = A_1^+ - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s\geq 2}^{T} e^{-\int_1^s r_u \, \mathrm{d}u} L_T \mid \mathcal{F}_1\right) + X_1.$$

Comme V_1 est une fonction de (A_1, r_1), on remplace l'expression de V_1 dans (1.6) par une combinaison linéaire finie de fonctions polynomiales [1] en (A_1, r_1), soit $(e_k(A_1, r_1))_{1\leq kk \leq M}$:

$$V_1 \approx V_1^{(M)}(A_1, r_1) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k e_k(A_1, r_1).$$

Le calcul des cœfficients (α_k) se fait grâce à une régression linéaire. On simule pour cela N trajectoires $(A_t^{(i)}, r_t^{(i)})$, $i = 1, \ldots, N$, pour $t \in [0, T]$ (sous $\mathbb{P}$ jusqu'à $t = 1$, puis sous $\mathbb{Q}$ jusqu'à T). On forme ensuite les quantités dont V_1 est l'espérance conditionnelle, soit (voir (1.6))

$$PV^{(i)} = \sum_{s\geq 2}^{T} e^{-\int_1^s r_u^{(i)} \, \mathrm{d}u} X_s^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

On résoud enfin le problème de moindre carré dans $\mathbb{R}^M$:

$$\widehat{\alpha}^{(N)} = \mathrm{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[PV^{(i)} - \sum_{k=1}^{M} \alpha_k e_k\left(A_1^{(i)}, r_1^{(i)}\right) \right]^2 \right\}.$$

On pose enfin

$$V_1 \approx V_1^{(M)}(A_1, r_1) \approx V_1^{(M,N)}(A_1, r_1) = \sum_{k=1}^{M} \widehat{\alpha}_k^{(N)} e_k(A_1, r_1).$$

C'est la méthode de Longstaff-Schwartz (voir [LS01]) ou de Monte Carlo Moindres Carrés.

1.2 Projet 2 : contrat d'épargne en € avec PB et rachat

On s'appuie ici sur les travaux de ([BPJ14]). Il s'agit d'un contrat d'épargne en € avec versement de prime unique P à $t = 0$, de maturité $T > 0$ avec participation aux bénéfices (taux de revalorisation), taux minimum garanti (TMG) et possibilité de rachat (taux de rachat conjoncturel). On ne prend pas ici en compte la mortalité. On cherche à mesurer l'impact du rachat anticipé sur le niveau de fonds propres minimum. Nous adoptons un cadre continu en temps qui permet d'obtenir une formulation EDP.

1. Il peut s'agir de polynômes à 2 indéterminées de degré au plus d par exemple. Dans ce cas le nombre maximal de fonctions de base vaut $M_{max} = \frac{(d+2)!}{d!2!} = (d+2)(d+1)/2$.

Le taux de revalorisation r_S est ici modélisé à l'aide de deux facteurs de risques (x_t, r_t) où r_t désigne le taux court. On supposera ici

$$r_S(t) = f(x_t, r_t) = \max(r_t + x_t, TMG).$$

À tout instant t, l'assuré est susceptible d'effectuer un rachat et de recevoir le montant de la prime initiale majorée du taux de servi r_S, c.-à-d. *la valeur de rachat du contrat*,

$$VR(t) = P \exp\left(\int_0^t r_S(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

On modélise ici le taux de rachat μ à l'aide d'une fonction g du seul facteur de risque x :

$$\mu(t) = g(x_t) = \mu_i + \eta(x_t)_-, \quad \mu_i, \eta > 0.$$

Ici, on adopte le point de vue de l'assuré. On montre que le *Best Estimate* à la date t s'écrit

(1.7)

$$BE(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r(u)+\mu(u))\,\mathrm{d}u}\mu(s)VR(s)\,\mathrm{d}s + e^{-\int_t^T (r(s)+\mu(s))\,\mathrm{d}s}VR(T) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

On montre qu'alors par une application de la formule de Feynman–Kac (voir cours) que

$$BE(t,T) = PM(t)\phi(t, x_t, r_t), \tag{1.8}$$

où

$$PM(t) = VR(t)e^{-\int_0^t \mu(u)\,\mathrm{d}u},$$

désigne par définition la provision mathématique (valeur actuelle probable de la valeur de rachat) et où ϕ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}\phi + (f - r)\phi + (1-\phi)g = 0, \quad t < T, \tag{1.9}$$

avec la condition terminale $\phi(T) = 1$ et où $\mathcal{L}$ désigne le générateur infinitésimale associé aux processus markoviens (x_t, r_t).

L'opérateur $\mathcal{L}$ s'obtient à partir de la dynamique de (x, r). On peut retenir des processus Ornstein-Uhlenbeck :

$$\mathrm{d}x_t = \kappa_x(x_\infty - x_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_x \mathrm{d}W_t^x, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}r_t = \kappa_r(r_\infty - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_r \mathrm{d}W_t^r, \quad r_0 > 0, \tag{1.11}$$

où W^x et W^r sont des browniens sous $\mathbb{P}$ de corrélation ρ.

La v.a. d'intérêt, E_1 s'exprime alors comme

$$E_1 = A_1 - F_1 - BE(1,T).$$

L'approximation de la distribution de E_1 passe donc par des simulations sous probabilité historique de A_1,[2] des facteurs de risque (x_1, r_1) ainsi que la résolution numérique d'une EDP en chacune de ces trajectoires. Notons que l'on a

$$F_1 = \int_0^1 VR(s)e^{-\int_0^s \mu(u)\,\mathrm{d}u}\mu(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 PM(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s$$

On peut trouver des valeurs numériques dans [BPJ14].

2. modélisé par un processus log-normal.

1.3 Projet 3 : contrat d'épargne en € avec PB et stratégie rationnelle de rachat

Le contrat est le même que dans le projet 2 mais ici on suppose que l'assuré a une stratégie rationnelle de rachat. Il cherche à maximiser la valeur de rachat en exerçant le rachat en un temps d'arrêt τ optimal (voir cours). Dans ce cas, le juste prix de ce contrat change donc et la formule (1.7) est remplacée par

(1.12)
$$BE^{\star}(t,T) = \sup_{t<\tau<T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^{\tau} e^{-\int_t^s (r(u)+\mu(u))\,\mathrm{d}u}\mu(s)VR(s)\,\mathrm{d}s + e^{-\int_t^{\tau}(r(s)+\mu(s))\,\mathrm{d}s}VR(\tau) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

La même technique montre que l'on peut écrire le *Best Estimate* comme dans (1.8) comme le produit de la provision mathématique avec une fonction $\psi := \psi(t,x,r)$ solution de l'inéquation variationnlle

$$\max\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi + (1-\psi)g + (f-r)\psi,\ 1-\psi\right) = 0, \tag{1.13}$$

$$\psi(T,\cdot) = 1. \tag{1.14}$$

On pourra consulter (`printems@u-pec.fr`) pour plus d'information.

2 Impact de l'incertitude de modèle sur la valorisation d'un contrat d'épargne

On considère un contrat d'épargne avec versement de prime unique unitaire de maturité T avec participation aux bénéfices et rachat. La politique de revalorisation est modélisée ici par un unique facteur de risque $t \mapsto x(t)$ représentant le surplus de rémunération par rapport au taux sans risque r. Ainsi, la valeur de rachat du contrat à la date t s'écrit

$$VR(t) = e^{\int_0^t (x(s)+r(s))\,\mathrm{d}s}.$$

Toute sortie du contrat est soit un décès, soit un rachat total. On choisit ici d'aggréger les deux instants de sorties à l'aide de la même fonction de hasard *locale* :

$$g(x(t),t) = \mu(t) - \eta x(t), \quad \eta > 0,$$

où $t \mapsto \mu(t)$ représente le taux de sortie structurel (décès + rachat structurel) et où le second terme représente un taux de rachat conjoncturel).

La dynamique de x est celle d'un processus gaussien de retour à la moyenne

$$\mathrm{d}x(t) = k(x_\infty - x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t), \quad k,\sigma > 0, \quad x_\infty \in \mathbb{R}.$$

Le cœfficient σ s'interprète comme la stabilité de la politique de revalorisation de la compagnie d'assurance. Sa valeur est en général calibrée d'après les calculs des provisionnements pour $t = 0$ dans le cadre du Pilier I. En général, il est mal connu. En effet, les différentes tentatives de calibration induisent des fluctuations.

On supposera travailler sur une tête de provision mathématique unitaire. Pour cela, on sait que la valeur économique du contrat (le ratio BE/PM) est donnée par la solution $\phi = \phi(x,t)$ de l'EDP

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + k(x_\infty - x)\frac{\partial\phi}{\partial x} + x\phi + (1-g)\phi = 0, \tag{2.15}$$

où $t < T$, $x \in \mathbb{R}$ avec la condition terminale

$$\phi(\cdot, T) = 1. \tag{2.16}$$

Cette équation diffère de celle vue en cours, car le facteur de risque est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. On peut voir le lien avec une transformation logarithmique $S = \exp(x)$ ou encore $\log(S) = x$.

Le coût de la garantie (*total fees*) γ peut s'interpréter comme la valeur de $-x$ pour laquelle le contrat vaut 1€ (la valeur du contrat vaut alors le montant de la prime initiale : *fair price*), soit [3]

$$\phi(-\gamma) = 1. \tag{2.17}$$

2.1 Projet 4 : Incertitude en chaos polynômial

On se propose dans ce projet de mesurer l'impact de l'incertitude sur σ sur le calcul de la valeur économique du contrat (le *Best Estimate*) et sur le *coût de la garantie* associée.

On doit donc représenter la fonction ϕ comme dépendante du paramètre incertain σ. On souhaite mesurer l'incertitude sur la valeur de σ sur ϕ^σ et γ^σ. On propose pour cela de modéliser ici la volatilité à l'aide d'un bruit gaussien, soit

$$\sigma^2 = \sigma^2(\xi) = (\mu + \nu\xi)^2, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \mu, \nu > 0. \tag{2.18}$$

On note $p(x)$ la densité de ξ, soit $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Finalement, on note $\phi(x,t,\xi) = \phi^{\sigma(\xi)}(x,t)$ et $\gamma(\xi) = \gamma^{\sigma(\xi)}$ et on décompose $\phi(x,t,\xi)$ sur la base orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}; p(x)\,\mathrm{d}x)$ des polynômes de Hermite (décomposition en chaos) :

$$\phi(x,t,\xi) = \sum_{j\geq 0} \phi_j(x,t) H_j(\xi), \tag{2.19}$$

où $(H_n)_{n\geq 0}$ désigne la famille des polynômes de Hermite définis par la récurrence

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = X, \quad n \geq 1. \tag{2.20}$$

Exemple : $H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$, $H_3 = X^3 - 3X$, $H_4 = X^4 - 6X^2 + 3$, ...

Comme conséquence directe de (2.20), on a aussi la relation utile

$$X^2 H_n = H_{n+2} + (2n+1)H_n + n(n-1)H_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{2.21}$$

Il est bien connu que $\left(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\right)_{n\geq 0}$ constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}; p(x)\,\mathrm{d}x)$. En particulier,

$$\mathbb{E}(H_m(\xi)H_n(\xi)) = \delta_{m,n} n!$$

Ainsi, les cœfficients ϕ_k (cœfficients en chaos de ϕ) s'obtiennent par

$$\phi_k(x,t) = \mathbb{E}(\phi(x,t,\xi)H_k(\xi))/k! \tag{2.22}$$

Finalement, en multipliant (2.15) par H_k, puis en prenant l'espérance, (2.18), (2.20), (2.21) and (2.22) aboutissent à un système d'EDP couplées d'inconnues $(\phi_k)_{k\geq 0}$. Enfin, on se

3. Pourquoi $x \mapsto \phi(x,t)$ est-elle toujours bijective ?

restreindra pour des raisons numériques dans (2.19) aux termes ϕ_k pour $k \leq d$ (troncature en chaos).

$\diamond$

Objectifs :

(i) Déterminer le système linéaire bloc $(d+1) \times (d+1)$ couplant les EDP ;
(ii) Déterminer le *Best Estimate* moyen $\mathbb{E}(\phi(x, 0, \xi)) = \phi_0(x, 0)$ à $t = 0$;
(iii) Estimer les *Ajustements pour Incertitude*[4] du provisionnement :$\mathbb{E}((\phi(x, 0, \xi) - z)_+)$ pour quelques quantiles z (90%, 95%, 99%) de $\phi(x, 0, \xi)$;
(iv) Déterminer le coût moyen de la ganratie : $\mathbb{E}(\gamma) = \mathbb{E}(-(\phi(\cdot, 0, \xi))^{-1}(1))$;
(v) Discussion sur les discrétisations (troncature en chaos, en espace, en temps, ...)

On pourra consulter (`printems@u-pec.fr`) pour les valeurs numériques des cœfficients.

2.2 Projet 5 : Incertitude sur la mortalité

Dans ce projet, on décide de modéliser l'incertitude sur la fonction g

$$g(x(t), t) = \mu(t) - \eta x(t), \quad \eta > 0,$$

où $t \mapsto \mu(t)$ représente le taux de sortie structurel (décès + rachat structurel) et où le second terme représente un taux de rachat conjoncturel). La fonction μ peut être construite comme dépendante de paramètres aléatoires représentant l'intensité de la mortalité. Par exemple sous la forme $\mu(t) = \lambda$.

Objectifs :

(i) Déterminer la valeur de γ^λ pour plusieurs λ fixés.
(ii) Déterminer la valeur moyenne $\mathbb{E}[\gamma^\lambda]$ et la variance $\mathbb{V}[\gamma^\lambda]$ pour une loi choisie sur λ par une méthode d'estimation de type Monte-Carlo.
(iii) Estimer les *Ajustements pour Incertitude* pour quelques quantiles, ou plus simplement les intervalles de fluctuations.
(iv) Discuter de la validité du modèle notamment dans les régimes $\lambda \to 0$ et $\lambda \to 1$.

On pourra consulter (`goudenege@math.cnrs.fr`) pour des valeurs numériques.

Références

[BBR09] Daniel Bauer, Daniela Bergmann, and Andreas Reuss. Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach. Technical Report 2009-05, Fakultät für Mathematik und Wirtschatswissenschaften, Universität Ulm, May 2009.

[BPJ14] François Bonnin, Frédéric Planchet, and Marc Juillard. Best estimate calculations of savings contracts by closed formulas : application to the ORSA. *Eur. Actuar. J.*, 4(1) :181–196, March 2014.

[LS01] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing American options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1) :113–147, 2001.

4. Dans le même esprit que le CVA (*Credit Value Adjustment*)