科大数分习题答案

johnsmith0x3f

2023 年 10 月 4 日

目录

数学分析讲义 第一册

第一章　极限

1.1　实数

1. 假设 $a \oplus b = c$ 为有理数，则 $b = a \otimes c$，其中 $\oplus$ 和 $\otimes$ 为任意一对互逆的四则运算. 这与有理数集对四则运算的封闭性矛盾，故假设不成立，c 为无理数.

3. 若 $\sqrt{2}$ 为有理数，则存在最小的正整数 q 使得 $\sqrt{2}q$ 是正整数，然而令 $r = \sqrt{2}q - q < q$，则 $\sqrt{2}r$ 亦为正整数，故 $\sqrt{2}$ 为无理数. 同理可得 $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ 均为无理数.

   假设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为有理数，则 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ 为有理数，与 $\sqrt{6}$ 为无理数矛盾，故 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为无理数.

6. 设数列 $\{x_n\} = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) - (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $x_{n+1} - x_n = a_{n+1}\left[(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) - 1\right]$.

   若 $a_i \geqslant 0$，显然有 $x_{n+1} \geqslant x_n$；若 $-1 \leqslant a_i < 0$，此时 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) < 1$，亦有 $x_{n+1} > x_n$，故 $\{x_n\}$ 为递增数列. 可得 $x_n \geqslant x_1 = 0$.

7. 注意到 $(a-1)(b-1) > 0$ 和 $(a+1)(b+1) > 0$，即 $1 + ab > \pm(a+b)$.

   故 $|1+ab| = 1 + ab > |a+b|$，即 $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$.

1.2　数列极限

9. 不能，易举出反例. 如 $a_n = \frac{1}{2^n}$.

   事实上，只有当 $a \neq 0$ 时，才能通过极限的四则运算得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

12. (1) 未证 $\{a_n\}$ 收敛.

    (2)(3) 极限的四则运算仅在有限次内成立.

15. (2) 注意到 $0 < (n+1)^k - n^k = n^k\left[(1+\frac{1}{n})^k - 1\right] < n^k(1+\frac{1}{n}-1) = n^{k-1}$.

    由 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-1} = 0$ 及夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^k - n^k\right] = 0$.

16. 不妨设 $A=\max\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\}$，则 $1<\frac{1}{A}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ 及夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{A}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=1$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

17. (3)(4) 利用 Cauchy 收敛准则易证.

18. (2)(4) 实质上是求数列不动点，由数学归纳法结合定义法易求得极限.

21. 由题设知 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，又 $\frac{a_n}{b_n}>0$，由单调有界原理知 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$，故 $\{a_n\}$ 收敛.

25. 由题设知 $a_n>0$，故有 $a_{n+1}>a_n$.

假设存在 $M>0$, 使 $a_n\leqslant M$ 恒成立, 则 $a_{M^2+1}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{M^2}}\geq 1+M^2\cdot\frac{1}{M}>M$，与假设矛盾.

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增且无界，即 $a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

26. 由题设知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^*$ 使得 $n>N$ 时有 $A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon$.

由于 $\{b_n\}$ 严格单调递减，则有 $(A-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n+1})$.

取正整数 $m>n$，累加得 $(A-\varepsilon)(b_n-b_m)<a_n-a_m<(A+\varepsilon)(b_n-b_m)$.

即 $\left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}-A\right|<\varepsilon$，令 $m\to\infty$ 即得 $\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<\varepsilon$.

1.3 函数极限

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{n^2}+\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

9. (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot 2x\cdot x}{x^2}=4$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)=e^2$.

10. (2) $\forall\ \varepsilon>0$，当 $0<|x|<\varepsilon$ 时有 $\left|x^2\sin\frac{1}{x}-0\right|<|x^2|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|=|x|<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

18. 设常数 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{1+x}}{1+\frac{x}{k}}=\sqrt[k]{\dfrac{1+x}{1+x+\frac{k-1}{2}x^2+\cdots+x^k}}=1$.

即 $x\to0$ 时 $\sqrt[k]{1+x}\sim1+\frac{x}{k}$. 由此易解 (3)(5)(6).

第 1 章综合习题

5. (1) $A_n < A_{n+1} \leqslant M$.

   (2) $|a_m - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| + \cdots + |a_m - a_{m-1}| = |A_{m-1} - A_n| < \varepsilon \ (m > n)$.

6. (a) 若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^\alpha = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^\alpha$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0$.

   (b) 否则不妨设 $a_{n+1} - a_n \leqslant ka_1 \ (k > 0)$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{ka_1}{a_n} \leqslant 1 + k$. 则 $0 < a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \leqslant a_n^\alpha\left((1+k)^\alpha - 1\right) < ka_n^\alpha$.

   由 $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n^\alpha = 0$ 及夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0$.

8. $a \neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$. 又由均值不等式有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   由 Cauchy 命题易知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   故由夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

   $a = 0$ 时运用不等式 $0 < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 即可.

12. 若 $\{b_n\}$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}}{\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}} = a$$

   否则由 Stolz 定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} b_{n+1}}{b_{n+1}} = a$.

16. 由 Dirichlet 逼近定理知，对任意 $k \in \mathbf{N}^*$，存在 $i,\ j \in \mathbf{N}^*$ 满足 $0 < |\{i\xi\} - \{j\xi\}| < \frac{1}{k}$.

   不妨令 $k > \frac{1}{b-a}$，取最小正整数 n 满足 $n|\{i\xi\} - \{j\xi\}| > a$.

   若 $n|\{i\xi\} - \{j\xi\}| \geqslant b > a + \frac{1}{k} > a + |\{i\xi\} - \{j\xi\}|$，则 $(n-1)|\{i\xi\} - \{j\xi\}| > a$，矛盾.

   故存在 $n|\{i\xi\} - \{j\xi\}| \in (a,\ b)$.

第二章 单变量函数的连续性

2.1 连续函数的基本概念

15. 易知 $f(nx)=nf(x)$ $(n\in\mathbf{N})$，进而有 $f\left(\frac{p}{q}x\right)=\frac{p}{q}f(x)$ $(p,\ q\in\mathbf{Z},\ q\neq 0)$.

    对任意无理数 r，以有理数逼近之，得到收敛于 r 的无穷数列.

    又知 $f(x)$ 连续，故 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ 对任意实数 λ 成立，故有 $f(x)=xf(1)$.

17. (6) $x\to\infty$ 时，$\sqrt{x^2+k}=|x|\sqrt{1+\frac{k}{x^2}}\sim|x|(1+\frac{k}{2x^2})$.

    故 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=-50$.

    (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$.

2.2 闭区间上连续函数的性质

6. 设 $g(x)=f(x)-f(x+a)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$，则 $g(0)=-g(a)$，由介值定理可得欲证.

7. 不妨设 $f(x_1)\leqslant f(X_2)\leqslant\cdots\leqslant f(x_n)$，则 $f(x_1)<f(\xi)<f(x_n)$，显然存在这样的 ξ.

16. $f(x)=\sin x^2$.

第 2 章综合习题

5. 设 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$ $(0\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n})$，则 $g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(1-\frac{1}{n})=0$.

    则或 $g(0)=0$；或存在 $g\left(\frac{i}{n}\right)\cdot g\left(\frac{j}{n}\right)<0$ $(0\leqslant i<j<n)$，由零点定理可得欲证.

8. (2) 由题设知 $|x_{n+1}-x_0|\leq k|x_n-x_0|$，故 $0<|x_n-x_0|\leq k^{n-1}|x_1-x_0|$. 由夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

10. 事实上可以证明 $f(b)$ 即为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上能取到的最大值.

第三章　单变量函数的微分学

3.1　导数

17. (1) 设 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}\ (x\neq 1)$,

则 $P_n=f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}+(x+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

(2) $Q_n=f'(x)+xf''(x)=\dfrac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$.

(3) 设 $g(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(\frac{2n+1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}}$,

则 $R_n=g'(1)=\dfrac{((n+1)\cos(n)-n\cos(n+1)-1)}{4\sin^2\frac{1}{2}}$.

3.2　微分

3. (1) $\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2t}\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1+t^2}{4t^3}\end{cases}$.

3.3　微分中值定理

4. (3) 对 $f(x)=x\ln x$ 分别在 $\left(a,\ \frac{a+b}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a+b}{2},\ b\right)$ 上运用 Lagrange 中值定理易得.

18. 由题设知对任意 $x>0$ 存在 $\xi\in(0,\ x)$ 使得 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)<f'(x)$.

则 $\frac{\mathrm{d}\frac{f(x)}{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，即 $\frac{f(x)}{x}$ 严格递增.

20. 设 $g(x)=e^x\left[f(x)-f'(x)\right]$，则 $g(0)=g(1)=0$.

故由 Rolle 定理知,存在 $\xi\in(0,\ 1)$,满足 $g'(\xi)=e^{\xi}\left[f(\xi)-f''(\xi)\right]=0$,即 $f(\xi)=f''(\xi)$.

23. (1) 显然有 $x^p+(1-x)^p\leqslant x+1-x=1$.

不妨设 $x<\frac{1}{2}$，则 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2^p}-x^p\leqslant(1-x)^p-\dfrac{1}{2^p}$.

由 Lagrange 中值定理知，存在 $x<\xi_1<\frac{1}{2}<\xi_2<1-x$，满足

$$\frac{\frac{1}{2^p}-x^p}{\frac{1}{2}-x}=p\xi_1^{p-1}<p\xi_2^{p-1}=\frac{(1-x)^p-\frac{1}{2^p}}{1-x-\frac{1}{2}}$$

则原式得证.

(3) 由 Lagrange 中值定理知，存在 $0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\frac{\pi}{2}$，满足

$$\frac{\tan x_1-0}{x_1-0}=\frac{1}{\cos^2\xi_1}<\frac{1}{\cos^2\xi_2}=\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}$$

整理后即得原式.

(5) 注意到不等式两侧均为关于 x 的偶函数，而易知 $x=0$ 时等号成立，故不妨设 $x>0$.

由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi\in(0,\ x)$，满足

$$\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-0}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

带入原式易证.

3.4 未定式的极限

4. 由 Cauchy 中值定理知，存在 $\xi\in(a,\ b)$ 满足

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

3.5 函数的单调性和凸性

1. 显然 $n=1$ 时成立.

假设 $n=k\ (\geqslant 1)$ 时结论成立，设 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}=1$，则

$$f(\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k}{1-\alpha_{k+1}})\leqslant\frac{\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_kf(x_k)}{1-\alpha_{k+1}}$$

则由凸函数定义知

$$f\left((1-\alpha_{k+1})\cdot\frac{\sum_{i=1}^k\alpha_ix_i}{1-\alpha_{k+1}}+\alpha_{k+1}x_{k+1}\right)\leqslant(1-\alpha_{k+1})\cdot\frac{\sum_{i=1}^k\alpha_if(x_i)}{1-\alpha_{k+1}}+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})$$

整理后即得 $n=k+1$ 时成立.

故由数学归纳法知，命题成立.

3.6 Taylor 展开

8. 对任意 $x\in(0,\ 2)$，由 Taylor 公式得

$$\begin{cases} f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2, & \xi_1\in(0,\ x) \\ f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2, & \xi_2\in(x,\ 2) \end{cases}$$

两式相减得 $f'(x)=\frac{f(2)-f(0)}{2}+\frac{x^2f''(\xi_1)-(x-2)^2f''(\xi_2)}{4}\leqslant 1+\frac{x^2+(x-2)^2}{4}\leqslant 2.$

同理可得 $f'(x)\geqslant -2$，即 $|f'(x)|\leqslant 2.$

第 3 章综合习题

5. **引理**：对任意 $i,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 0\leqslant i\leqslant 2^n$，有

$$f\left(\frac{ix_1+(2^n-i)x_2}{2^n}\right)\leqslant \frac{i}{2^n}f(x_1)+\left(1-\frac{i}{2^n}\right)f(x_2)$$

证明 用数学归纳法证明.

(a) 当 $n=1$ 时，显然成立.

(b) 当 $n=k(\geqslant 2)$ 时，假设成立，则对于 $0<j<2^{k+1}$：

若 j 为偶数，显然成立；若 j 为奇数，不妨设 $j<2^k$，则

$$\begin{cases} f\left(\frac{(j-1)x_1+(2^{k+1}-j+1)x_2}{2^{k+1}}\right)\leqslant \frac{j-1}{2^{k+1}}f(x_1)+\left(1-\frac{j-1}{2^{k+1}}\right)f(x_2) \\ f\left(\frac{(j+1)x_1+(2^{k+1}-j-1)x_2}{2^{k+1}}\right)\leqslant \frac{j+1}{2^{k+1}}f(x_1)+\left(1-\frac{j+1}{2^{k+1}}\right)f(x_2) \end{cases}$$

在 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 中，令 $\begin{cases} x_1=\frac{(j-1)x_1+(2^{k+1}-j+1)x_2}{2^{k+1}} \\ x_2=\frac{(j+1)x_1+(2^{k+1}-j-1)x_2}{2^{k+1}} \end{cases}$，即可得欲证.

对任意实数 $\lambda\in(0,\ 1)$，令 $a_1=0,\ b_1=1$.

当 $\lambda<\frac{a_n+b_n}{2}$ 时，令 $a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，否则令 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=b_n$.

则由区间套定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lambda$.

又由引理知，$f[a_nx_1+(1-a_n)x_2]\leqslant a_nf(x_1)+(1-a_n)f(x_2)$.

则由 $f(x)$ 连续知 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，即 $f(x)$ 为凸函数.

6. 设 $y=f'(x)$，则 $f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{1-x}$ $(0<x<1)$.

两边同时积分，得 $|\ln y|=-2\ln(1-x)+C$，解得 $f'(x)(x-1)^{\pm 2}=e^{C}$.

设 $g(x)=f'(x)(x-1)^2$，由 Rolle 定理知存在 $\eta\in(0,\ 1)$，满足 $f'(\eta)=0$.

则 $g(\eta)=g(1)=0$，故由 Rolle 定理知存在 $\xi\in(\eta,\ 1)$，满足 $g'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

9. 设 $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x$，则 $g(0)=g(1)=1$.

由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,\ 1)$，满足 $g'(\xi)=-\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}-1=0$，即 $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

19. 设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]x^2$，则 $g(-1)=g(0)=g(1)$.

则由 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(-1,\ 0)$ 及 $\xi_2\in(0,\ 1)$，满足 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g(0)=0$.

故知存在 $\eta_1\in(\xi_1,\ 0)$ 及 $\eta_2\in(0,\ \xi_2)$，满足 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$.

故又知存在 $\zeta\in(\eta_1,\ \eta_2)$，满足 $g'''(\zeta)=0$，即 $f'''(\zeta)=3$.

20. 假设命题不成立，即存在 $x_0>0$，使得 $x>x_0$ 时均有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$.

则 $f(x)$ 在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递增.

由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi\in(x,\ ax)$，满足 $\frac{f(ax)-f(x)}{(a-1)x}=f'(\xi)\geqslant f(a\xi)>f(ax)$.

故有 $(1-ax+x)f(ax)\geqslant f(x)$，当 $x>\frac{1}{a-1}$ 时，得 $f(x)<0$，矛盾，故命题成立.

21. **引理**：设 $x,\ y>0$，$p,\ q$ 是大于 1 的正数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$$

证明 由 $\ln x$ 凹性知 $\ln xy=\frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right)$，即 $xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$.

令 $x=\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$，$y=\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$，则有 $\frac{a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{a_i^p}{p\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)}+\frac{b_i^q}{q\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)}$.

则 $\dfrac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，即 $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

第四章　不定积分

4.1　不定积分及其基本计算方法

3. (12)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C\end{aligned}$$

7. (26)

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= -\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^x}{1+x}+C\end{aligned}$$

4.2　有理函数的不定积分

1. (8)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x &= -\frac{x^8}{8(x^8+1)}+\int \frac{x^7}{x^8+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\ln(x^8+1)-\frac{x^8}{8(x^8+1)}+C\end{aligned}$$

2. (10)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)}\mathrm{d}x \quad (\tan\varphi=-\frac{a}{b}) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)}{\cos t}\mathrm{d}t \quad (t=x+\varphi) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b\cos t-a\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{b(x+\varphi)+a\ln|\cos(x+\varphi)|}{a^2+b^2}+C\end{aligned}$$

第五章　单变量函数的积分学

5.1　积分

2. 对任意 $x_{i-1} < x_i$，总能找到 ξ_i 使得 $f(\xi_i) \equiv 0$ 或 $f(\xi_i) \equiv 1$，则极限 $S_n(T) - I$ 不存在.

3. $f(x) = 2D(x) - 1$，其中 $D(x)$ 为 Dirchlet 函数.

9. (1) 设 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，由 $g(x) \geqslant 0$ 知 $\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x$.
   即存在 $\lambda \in [m, M]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
   又 $f(x)$ 连续，则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \lambda$.

   (2) 令 $f(x) = (x+1)^2$，$g(x) = x$，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$，而 $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$.
   故不存在满足条件的 ξ.

13.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x) + \varphi(x)$$

18. (3)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

   (4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p = \frac{1}{1+p}$$

19. (2) 易知 $0 < \frac{x^n}{1+x} < x^n$.
   又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$.
   由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} = 0$.

22. (14)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t \quad (t=\tan x)\\
&= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\bigg|_0^a+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\bigg|_a^0\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

23. **证**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)f(\sin(\pi-x))\mathrm{d}x\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+1+\cos^2 x}\\
&= -\arctan(\cos x)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

24. 易知在 $(0,1)$ 上有 $\frac{x^2}{2}<\sin x^2<x^2$，则原式易证.

27. 设 $g(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ $(0<\alpha<1)$，则

$$\begin{cases} g(0)=g(1)=0\\ g'(\alpha)=f(\alpha) \ \Rightarrow\ g''(\alpha)=f'(\alpha)<0 \end{cases} \quad\Rightarrow\ g(\alpha)\geqslant 0$$

5.2 函数的可积性

3. 由题设知存在 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $0\leqslant |f(x)|\leqslant \max\{M,-m\}$，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

   不妨把 $f(x)$ 按取值正负分为两部分，分别记作 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$；具体地，令

$$f_1(x)=\max\{f(x),0\},\ f_2(x)=\min\{f(x),0\}$$

则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

5.3 积分的应用

4.

$$\begin{aligned}V &\sim \int_0^h \pi\left(R^2-(R-h+x)^2\right)\mathrm{d}x \\ &= -\pi\int_0^h \left(x^2+2(R-h)x+h(h-2R)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\pi\left(\frac{x^3}{3}+(R-h)x^2+h(h-2R)x\right)\Big|_0^h \\ &= \pi h^2(R-\frac{h}{3})\end{aligned}$$

5.4 广义积分

1. (12)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln x)^n\mathrm{d}x &= (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t\ (x=e^{-t}) \\ &= (-1)^{n+1}\Gamma(n+1)\end{aligned}$$

2. (1) 由 $\frac{x}{1+x^2}$ 奇性知 $\displaystyle\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\equiv 0.$

然而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}\end{aligned}$$

则原积分发散.

3. (2) (a) 当 $\alpha = 1$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_0^{+\infty}$ 发散.

(b) 当 $\alpha \neq 1$ 时，易知 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^{+\infty}$，则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty\ (\alpha < 1)$$
$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\infty\ (\alpha > 1)$$

综上，无论 α 取何实数值，$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 必发散.

第 5 章综合习题

1. (1) 设 $t = 2\pi - x$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin mt \cdot \cos nt \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx - \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \\ &= 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((m-n)x\big) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((m+n)x\big)\end{aligned}$$

则结论显然.

2. (2) 由分部积分法知

$$\begin{aligned}B(m,n) &= \int_0^1 x^m (1-x)^n \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} B(m, n-1) - \frac{n}{m+1} B(m,n)\end{aligned}$$

即 $B(m,n) = \frac{n}{m+n+1} B(m, n-1)$.

易知 m, $n \geqslant 0$ 时 $B(m,n)$ 均有意义，则

$$\begin{aligned}B(m,n) &= \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1)!}B(m,0)\\ &= \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1)!}B(0,m)\\ &= \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1)!}\cdot\frac{m!}{(m+1)!}\\ &= \frac{n!m!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

3. (c)

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x+2\pi}(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t})\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{x+\pi}\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}+1+e^{\sin(t+\pi)}-e^{-\sin(t+\pi)}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\\ &= 2\pi+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(1+x)(f(x)-2\pi)$.

4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\ (x=\arctan t)$$

而

$$\frac{1}{2n+2}=\int_0^1\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t<\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1\frac{t^n}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}$$

10. 设 $\varphi(t)=\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)=\left.\dfrac{\varphi(xt)}{x}\right|_{t=0}^{1}=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$.

故 $F(x)$ 可导，$F'(x)=\frac{xf(x)-\varphi(x)+\varphi(0)}{x^2}$.

11. (2)

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u\ (u=\frac{1}{t})\\ &= \lim_{x\to 0_+}-\frac{2}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}\mathrm{d}u\\ &= 2\lim_{x\to 0_+}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

12. 设 $\varphi(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$，则

$$
\begin{aligned}
LHS &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\varphi(b+h)-\varphi(b)-\varphi(a+h)+\varphi(a)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(b+h)-\varphi(b)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}\\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}
$$

13.

$$
\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{f(x)\cos(\lambda x)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x\right)=0
$$

14.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{k\pi}\sin t\mathrm{d}t+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{k\pi}^x|\sin t|\mathrm{d}t \quad \left(k=\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2k}{x}+0\\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

16. 设 $f(x_0)=M$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得 $f(x)>M-\varepsilon\ \ (x\in U(x_0,\delta))$.

设 $g_\delta(x)=\begin{cases}M-\varepsilon & x\in U(x_0,\delta)\\ 0 & x\notin U(x,\delta)\end{cases}$，则 $0<g(x)<f(x)\leqslant M$.

则对任意 $\varepsilon>0$ 均有

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b g_\delta^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(M-\varepsilon)\delta^{\frac{1}{n}}=M-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M
$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=M$.

18. 考虑 $h(x)=f(x)+\lambda g(x)$，显然有

$$
\int_a^b h^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0
$$

上式可看作关于 λ 的二次不等式，则有

$$
\Delta=4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0
$$

整理后即得欲证.

19. 设 $\min\{|f(x)|\}=|f(x_0)|$，则

$$|f(a)|=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^{a} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{a} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

21.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2}(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})^2 \\
&= \frac{M}{2n}
\end{aligned}$$

22. 见此解.

第六章　常微分方程初步

6.1　一阶微分方程

4. (3) 整理原式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + y^2$$

若 $y \neq 0$，作代换 $u = \frac{x}{y}$，等式化为

$$u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = u + y^2 \ \left(u = \frac{x}{y},\ y \neq 0\right)$$

则可进一步解得 $x = \frac{1}{2}y^3 + Cy$.

验证知 $y = 0$ 亦为方程的解.

6. (1) 不妨设 $u = \frac{y}{x^2}$，则原式化为

$$2xu + x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x\left(\sqrt{1+u} - 1\right)$$

进一步整理得

$$-\frac{\mathrm{d}u}{2u - \sqrt{1+u} + 1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

再设 $v = \sqrt{1+u}$，化为

$$-\frac{2v\mathrm{d}v}{(v-1)(2v+1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得

$$-\frac{1}{3}\left(2\ln(v-1) + \ln(2v+1)\right) = \ln|x| + C$$

即

$$(v-1)^2(2v+1)=\frac{C'}{x^3}.$$

则 y 可解. 或设 $u=\sqrt{x^2+y}$，详见此解.

7.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\notin\{0,1\})$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)\ (u=y^{1-n})$$

设 $u=C(x)e^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}=(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$$
$$C(x)=\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

则 $u=e^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$，进一步可得 y.

13. (2) 设 $p=y'$，则原式化为

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-1$$

也即 $p\mathrm{d}p=-\frac{\mathrm{d}y}{y^3}$，易解得 $y=\sqrt{Cx^2-\frac{1}{C}}$.

6.2 二阶线性微分方程

1. (3) 由题设知 $y_1(x)=x$，$p(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，则

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\frac{x^2+1}{x_0^2-1}$$

故通解 $y_0(x)=c_1x+c_2(x^2+1)$.

2. (2) $y=x+1$ 为一特解.

3. 其对应的齐次方程为

$$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=0$$

观察知 $y_1=\arctan x$ 为一特解，则可进一步求出 y_2.

5. (2) 易得对应齐次方程的通解为 $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

则

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{3t} \cdot xe^{3x} - te^{3t} \cdot e^{3x}}{W(t)} f(t)\mathrm{d}t$$

进而可得原方程通解.

9. (4) 设 $x = e^{\lambda t}$，则得到特征方程 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$.

解得 $\lambda = \pm i$，故通解为 $x = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

第七章　无穷级数

7.1　数项级数

2. (13) 对任意 $0 < k < \frac{1}{4}$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $\ln n < n^k$.

故

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-k}}$$

由比较审敛法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ 收敛.

(14) 易知

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^k} = \begin{cases} \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty} = +\infty & k = 1 \\ \frac{(\ln \ln x)^{1-k}}{1-k} \Big|_3^{+\infty} = +\infty & k \neq 1 \end{cases}$$

故由 Cauchy 积分判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^k}$ 发散.

(15) $n \to \infty$ 时

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} \sim \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{n^3} = \frac{1}{e^{\frac{n}{2}}}$$

故原级数收敛.

(16) 当 $n \to \infty$ 时

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \frac{a^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{a^n}{e}$$

故 $a \geqslant 1$ 时原级数发散，$a < 1$ 时原级数收敛.

4. (3) 设 $A_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - ka_{k+1}\right)$$

又由 $\lim_{n\to\infty} na_n = a$ 知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} A_n + a - 0$，原级数收敛.

6. 设 $c_n = a_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_k$，则 $\{c_n\}$ 单调有界，故 $\{c_n\}$ 收敛，进而 $\{a_n\}$ 收敛.

7. 前两项易证.

对最后一项，取 $b_n = \frac{1}{n}$ 即证.

12. (8) 由 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 知 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

故原级数收敛.

15. (1) 易知 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$ 有界, $\{\frac{1}{n}\}$ 单调递减趋于 0, 则由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 收敛.

(2) 同理，取 $a_n = \cos\frac{n\pi}{4}$，$b_n = \frac{1}{\ln n}$，由 Dirichlet 判别法易证.

(3) 由 Dirichlet 判别法易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ 收敛. 进而由 Abel 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

(4) 由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}} = 0$ 知原级数收敛.

7.2 函数项级数

2. (6) 由 Stirling 公式知 $n\to\infty$ 时有

$$n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{x}{e}\right)^n$$

故级数收敛域为 $(-e, e)$.

8.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}\right)\lim_{x\to+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

10. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，则

$$f'(x)=f^2(x)$$

结合 $f(0)=1$ 解得 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则考虑证 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

由 $f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x)$ 及 $f_n(0)=1$ 解得 $f_{n+1}(x)=\exp\left(\displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\right)$.

a) 当 $n=1$ 时，$f_2(x)=\exp\left(\displaystyle\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t\right)=e^x$，则 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$.

b) 若当 $n=k\ (\geqslant 2)$ 时，$f_{k-1}(x)\leqslant f_k(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$ 成立，则

$$\begin{cases} f_{k+1}(x)=\exp\left(\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\exp\left(\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right)=\frac{1}{1-x} \\ \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}=\exp\left(\int_0^x\left(f_k(t)-f_{k-1}(t)\right)\mathrm{d}t\right)\geqslant e^0=1 \end{cases}$$

即 $f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$，故 $f_n(x)$ 单调有界，收敛至 $\frac{1}{x-1}$.

11. (1) 由题设知 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有极值，且极值单调递减趋于 0，故一致连续.

(2) 充分性见定理 7.34.

对于必要性，令 (1) 中的 $u_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 即得.

7.3 幂级数与 Taylor 展式

1. (8)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{n^2}}{2^n}}=\frac{x^n}{2}$$

则当 $x<1$ 时级数收敛，$x>1$ 时级数发散.

$x=1$ 时，$\frac{x^n}{2}=\frac{1}{2}<1$，则级数收敛.

故 $R=1$.

3. (5) 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$，则 $f'(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+xf(x)$.

解得 $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\displaystyle\int e^{-\frac{x^2}{2}}+C\right)$.

4. (1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}&=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\\&=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\\&=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\ln 2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}&=\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''\bigg|_{x=-\frac{1}{2}}+\frac{x}{1-x}\bigg|_{x=-\frac{1}{2}}\\&=-\frac{67}{54}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}\\&=-\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^3}\right)\bigg|_{x=-1}\\&=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{3}\ln 2\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+e\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3e\\&=5e\end{aligned}$$

7.

$$y=\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{\lambda}{6(1+\lambda)^4}x^3$$

7.4 级数的应用

6. 由 Stolz 定理知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln(n-1)!}{\ln n^n-\ln(n-1)^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+1}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

第 7 章综合习题

3. 先证充分性：不妨设 $|a_n|\leqslant M$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_1}=\frac{a_{n+1}}{a_1}-1\leqslant\frac{M}{a_1}-1$$

即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

再证必要性：

由级数收敛知，对任意 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使得当 $m>n\geqslant N$ 时有

$$1-\frac{a_n}{a_m}<\left|\sum_{k=n}^{m-1}a_{k+1}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\right|<\varepsilon$$

即对任意 $m>N$ 有 $a_m<\frac{a_N}{1-\varepsilon}<2a_N$.

取 $M=\max\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ 2a_N\}$，则恒有 $a_n\leqslant M$，即 $\{a_n\}$ 有界.

4. (a) 当 $\alpha\geqslant 1$ 时：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{a_k^\alpha}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k^\alpha}{a_{k+1}^\alpha}\right)\frac{1}{a_k^\alpha}=\frac{1}{a_1^\alpha}-\frac{1}{a_{n+1}^\alpha}<\frac{1}{a_1^\alpha}$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^\alpha}$ 收敛.

(b) 当 $0<\alpha<1$ 时：

由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi\in(a_n,a_{n+1})$ 使得

$$\frac{a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha}{a_{n+1}-a_n}=\alpha\xi^{\alpha-1}>\alpha a_{n+1}^{\alpha-1}$$

即 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^\alpha} < \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{a_n^\alpha} - \dfrac{1}{a_{n+1}^\alpha}\right)$.
故

$$S_n < \frac{1}{\alpha a_1^\alpha} - \frac{1}{\alpha a_{n+1}^\alpha} < \frac{1}{\alpha a_1^\alpha}$$

即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^\alpha}$ 收敛.

5. 易知

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+c_n)\right) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = e^M = M_1$$

则原不等式可化为

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)} - \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+c_k)} \leqslant -\frac{b_n\Phi(a_n)}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_n)} < 0$$

不妨设 $d_n = \dfrac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+c_k)}$，则 d_n 单调递减有下界，即 $\{d_n\}$ 收敛.
而若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = d > 0$，则

$$d_{n+1} - d_n \leqslant -b_n\frac{\Phi(d)}{M_1} \ \Rightarrow\ d_{n+1} \leqslant d_1 - \frac{\Phi(d)}{M_1}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$，矛盾，故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = 0$，进而有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right) \geqslant \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leqslant \frac{4}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \\ &\leqslant 2\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &= 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\end{aligned}$$

对 n 求和得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N}2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\
&=2\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}-\frac{2}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$，则有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}
$$

或见此解及此解.

7. 不妨令 $a_1=0$，则由上述结论知

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\geqslant \frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)}
$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

9. 设 $f_n(x)=x^{a_n}\ (n\in\mathbf{N})$，则 $f_{n+1}(x)=x^{\frac{a_n+1}{2}}=x^{a_{n+1}}$.

易证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$.

11. 设 $|f_0(x)|\leqslant M$，则 $|f_n(x)|\leqslant\frac{Ma^n}{n!}$，显然一致收敛于 0.

事实上有

$$
\begin{aligned}
\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f_0(t)\mathrm{d}t &= \frac{(x-t)^n}{n!}\left(\int_0^t f_0(u)\mathrm{d}u\right)\bigg|_0^x+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\int_0^t f_0(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)\mathrm{d}t\\
&=\cdots\\
&=\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\\
&=f_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

若我们先假设 $\{f_n(x)\}$ 收敛至 $f(x)$，则有 $f(x) = f'(x)$，解得 $f(x) = Ce^x$. 由题设知 $f(0) = 0$，故 $C = 0$，也即 $f(x) \equiv 0$.