《数学分析讲义》习题答案

johnsmith0x3f

2023 年 12 月 5 日

目录

数学分析讲义 第一册

第一章　极限

1.1　实数

1.1.1

设 a 是有理数，b 是无理数. 求证：$a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数；当 $a \neq 0$ 时，ab 和 $\frac{b}{a}$ 也是无理数.

证明. 以加法为例. 考虑反证法. 若 $a+b=c\in\mathbb{Q}$，则 $b=c-a\in\mathbb{Q}$，矛盾，故 $a+b$ 是无理数. □

1.1.2

求证：两个不同的有理数之间有无理数.

证明. 对有理数 a,b $(a<b)$，取 $c=a+\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)\in(a,b)$ 即可证得. □

思考. 如何证明任意两实数间均有无理数?

1.1.3

求证：$\sqrt{2},\sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

证明. 考虑以下引理：

Lemma 1

对任意正整数 n，$\sqrt{n}$ 是有理数当且仅当 n 是完全平方数.

证明. 充分性是显然的，下证必要性. 设

$$\sqrt{n}=\frac{a}{b},$$

其中 a,b 是互质的正整数. 则

$$nb^2=a^2.$$

考虑 n 的某个质因子 p，有 $p\mid a^2$，进而 $p\mid a$. 又 a,b 互质，故 $p\nmid b$. 这说明 n 的唯一分解中所有质因子的次数都是偶数，从而 n 是完全平方数. □

由引理知，$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ 均为无理数. 则若 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数，可得 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ 亦为有理数，这与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾，故 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数. □

1.1.6

设实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 有相同的符号，且都大于 -1，证明:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证明. 设 $x_n=\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)-(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)$，则

$$x_{n+1}-x_n=a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)-1\right).$$

若 $a_i\geqslant 0$，显然有 $x_{n+1}\geqslant x_n$；若 $a_i<0$，此时 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)<1$，亦有 $x_{n+1}>x_n$，故 $\{x_n\}$ 为递增数列. 可得 $x_n\geqslant x_1=0$. □

事实上，此即 **Bernoulli 不等式**的一般形式.

Theorem 1: Bernoulli 不等式

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 同号，且都大于 -1，则有

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

特别地，当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=x$ 时，有

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

注意. *Bernoulli* 不等式的一般形式仅需其中 $n-1$ 项为零即可取等.

1.1.7

设 a,b 是实数，且 $|a|<1$，$|b|<1$，证明:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证明. 注意到 $(a-1)(b-1)>0$ 及 $(a+1)(b+1)>0$，即 $1+ab>\pm(a+b)$. 故

$$|1+ab|=1+ab>|a+b| \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$ □

1.2 数列极限

1.2.15

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^k-n^k\right)$，其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.

(1) 解. 注意到

$$0<\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i^2}<\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{(i-1)i}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}.$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$ □

(2) 解. 注意到

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right)<n^k\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=n^{k-1}.$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^k-n^k\right)=0.$ □

(3) 解. 易知 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=\frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}$，故 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2.$ □

(4) 解. 注意到

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n^2-n+2} < \sqrt[n]{n^2}.$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = 1$. □

(5) 解. 注意到 $\cos^2 3 + \cos^2 4 > \cos^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{5\pi}{4} = 1$，则当 $n > 3$ 时，有

$$1 < \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} < \sqrt[n]{n}.$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1$. □

1.2.16

设 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为 m 个正数，证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

证明. 不妨设 $A = \max(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m)$，则

$$A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant A\sqrt[n]{m}$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = A$. □

1.2.17

证明下列数列收敛:

(1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$，其中 $|\alpha_k| \leqslant M\ (k = 1, 2, \cdots)$，而 $|q| < 1$;

(4) $a_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$.

(1) 证明. 显然有 $0 < a_{n+1} < a_n$，故由单调有界原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛. □

(2) 证明. 显然有 $a_{n+1} > a_n$，又

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i+1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{2}.$$

故由单调有界原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛. □

(3) 证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\log_q\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{M}\right)\right]$，则当 $m > n > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| = |q|^n|\alpha_{n+1}q + \alpha_{n+2}q^2 + \cdots + \alpha_m q^{m-n}| < |q|^n\frac{M}{1-q} < \varepsilon.$$

则由 Cauchy 收敛准则知，数列 $\{a_n\}$ 收敛. □

(4) **证明.** 对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $m>n>N$ 时，有

$$|a_n-a_m|=\left|\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\cos i}{i(i+1)}\right|<\sum_{i=n+1}^{m}\left|\frac{1}{i(i+1)}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\varepsilon.$$

则由 Cauchy 收敛准则知，数列 $\{a_n\}$ 收敛. □

1.2.18

证明下列数列收敛，并求出其极限：

(1) $a_n=\frac{n}{c^n}\ (c>1)$;

(2) $a_1=\frac{c}{2}$，$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}\ (0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0$，$a_0>0$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$；（提示：先证明 $a_n^2\geqslant a$.）

(4) $a_0=1$，$a_n=1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$.（n 个 sin.）

(1) **证明.** 不妨设 $c=1+a\ (a>0)$，由此得

$$0<a_n=\frac{n}{c^n}=\frac{n}{1+na+\frac{n(n-1)}{2}a+\cdots+a^n}<\frac{2}{(n-1)a}.$$

则对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{a\varepsilon}\right]+1$，可得当 $n>N$ 时有 $|a_n|<\varepsilon$，故数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. □

(2) **证明.** 注意到 $a_1=\frac{c}{2}\leqslant 1-\sqrt{1-c}$，且

$$a_k\leqslant 1-\sqrt{1-c}\ \Rightarrow\ a_{k+1}\leqslant\frac{c}{2}+\frac{(1-\sqrt{1-c})^2}{2}=1-\sqrt{1-c}.$$

故 $a_n\leqslant 1-\sqrt{1-c}\ (n=1,2,\cdots)$. 进而

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-1)^2-\frac{1-c}{2}\geqslant\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-c}-1)^2-\frac{1-c}{2}=0.$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故收敛. □

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}\leqslant 1-\sqrt{1-c}.$$

解得 $a=1-\sqrt{1-c}$.

(3) **证明.** 注意到 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}$，则当 $n\geqslant 1$ 时

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n}-a_n\right)\leqslant 0.$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，故收敛. $\square$

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right) \geqslant \sqrt{a}.$$

解得 $\alpha = \sqrt{a}$.

(4) **证明.** 注意到 $a_0 = 1 \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，且

$$a_k \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2} \ \Rightarrow\ a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k+1} \leqslant 2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

故 $0 < a_n \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $(n = 0, 1, \cdots)$. 进而

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n+1}\left(-\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right) \geqslant 0.$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故收敛. $\square$

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$0 \leqslant a = 1 + \frac{a}{a+1} \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

解得 $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(5) **证明.** 显然有 $0 < a_{n+1} < a_n$，故由单调有界原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛. $\square$

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则有

$$a = \sin a \ \Rightarrow\ a = 0.$$

思考. 如何求一般递推数列的极限?

1.2.21

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列，满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 求证：若 $\{b_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 由题设知 $0 < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$，由单调有界原理知数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛. 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$ $\square$

1.2.25

设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ $(n \geqslant 1)$ 定义. 证明：$a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.

证明. 考虑反证法. 假设存在 $M > 0$，使 $0 < a_n \leqslant M$ 恒成立，则

$$a_{M^2+1} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{M^2}} \geqslant 1 + M^2 \cdot \frac{1}{M} > M$$

与假设矛盾. 故 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. $\square$

1.2.26

给出 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

证明. 由题设知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $n > N$ 时有

$$A - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < A + \varepsilon.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格单调递减，则有

$$(A - \varepsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (A + \varepsilon)(b_n - b_{n+1}).$$

取正整数 $m > n$，累加得

$$(A - \varepsilon)(b_n - b_m) < a_n - a_m < (A + \varepsilon)(b_n - b_m).$$

即 $\left|\frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} - A\right| < \varepsilon$，令 $m \to \infty$ 即得 $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$. □

1.3 函数极限

1.3.7

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2} + \sin\frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n\alpha}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

证明. 注意到 $n \to \infty$ 时，有 $\sin\frac{i\alpha}{n^2} \sim \frac{i\alpha}{n^2}$ $(i \in 1, 2, \cdots, n)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\alpha}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i\alpha}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\alpha}{2n^2} = \frac{\alpha}{2}$$ □

思考. 如何证明 $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \cdots + \sin\frac{\alpha}{n}\right) = +\infty$?

1.3.9

求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

(4) 解. 整理得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2}=e^2$$

□

第 1 章综合习题

1.0.6

设 $\{a_n\}$ 是正严格单调递增数列. 求证: 若 $a_{n+1}-a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0.$$

并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha\in(0,1)$ 有 $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0$, 但是 $a_{n+1}-a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n=n\ln n$.)

证明. 不妨设 $0<a_{n+1}-a_n\leqslant M$ $(M>0)$, 则

$$0<a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}<a_n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{M}{a_n}\right)^{\alpha}-1\right)<a_n^{\alpha}\left(1+\frac{M}{a_n}-1\right)=Ma_n^{\alpha-1}.$$

故由夹逼原理知, $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0$. □

对其逆命题, 考虑反例 $a_n=n\ln n$, 易得不成立.

注. 事实上, 若以 n 为标准, 逆命题中 $a_{n+1}-a_n$ 无界的条件要求 a_n 是一个 $k(>1)$ 阶无穷大量, 也即 $a_n\sim n^k$ $(n\to\infty)$. 然而在我们试取某个具体的 k 后, 我们发现使 $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0$ 成立的 α 的范围缩小到了 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$. 那么为了证伪逆命题, 我们需要 k 无限地接近 1. 另一方面, 我们知道对任意 $\alpha>0$ 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=0$. 这启发我们将 $\ln n$ 视为一个 "ε 阶无穷大量", 其中的 ε 蕴含了极限思想, 表示 "无穷小但不为零". 如此一来, 我们自然地想到取 $a_n=n\ln n$, 也即 $k=1+\varepsilon$, 便得到了我们想要的结果. 此外, 将 $\ln x$ 视为 "ε 阶无穷大量" 的思想亦有助于我们理解 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 的原函数这一事实.

1.0.7

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

此即 **Cauchy 命题**.

Theorem 2: Cauchy 命题

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$$

证明. 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得当 $n > N$ 时，有

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon.$$

设 $S = a_1+a_2+\cdots+a_N$，则当 $n > N$ 时，有

$$\frac{S+(n-N)(a-\varepsilon)}{n} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} < \frac{S+(n-N)(a+\varepsilon)}{n}.$$

令 $n\to\infty$，则由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a. \qquad \square$$

亦可由 Stolz 定理立得.

1.0.8

证明：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a.$$

证明. 当 $a \neq 0$ 时，有 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. 又由均值不等式有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

由 Cauchy 命题易知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

故由夹逼原理知，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

当 $a = 0$ 时，利用不等式 $0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 即可类似地证明. $\square$

或利用

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right) = \exp(\ln a) = a,$$

亦可证明.

1.0.12

设 $\{a_n\}$ 且 $a_n \to a \in \mathbb{R}$，又设 b_n 是正数列，且 $c_n = \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) 数列 $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n) \to +\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

证明. 设 $B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$. 若 $n\to\infty$ 时 $B_n \to B \in \mathbb{R}$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $m > n > N$ 时有

$$|B_n - B_m| = |b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_m| < \varepsilon.$$

又 $\{a_n\}$ 收敛，不妨设 $|a_n| \leqslant M$，则

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_mb_m| < M\varepsilon.$$

故由 Cauchy 收敛准则知，数列 $\{\sum_{k=1}^n a_kb_k\}$ 收敛，进而数列 $\{c_n\}$ 收敛.

否则若 $n\to\infty$ 时 $B_n \to +\infty$，则由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{b_n} = a.$$

则 (1)，(2) 俱得证. □

1.0.16

设 ξ 是一个无理数. a, b 是实数，且 $a < b$，求证：存在整数 m, n 使得 $m + n\xi \in (a, b)$，即，集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

证明. 不妨设 $\xi > 0$，考虑以下引理:

Lemma 2: Dirichlet 逼近定理

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}_+$，存在 $p, q \in \mathbb{Z}$ 使得 $0 < |qx - p| < \frac{1}{k}$.

证明. 考虑 k 个区间

$$\left[0, \frac{1}{k}\right), \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right), \dots, \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right)$$

及 $k+1$ 个数

$$0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{kx\},$$

则由鸽巢原理知，必有两个数位于同一区间内，不妨设为 $\{ix\}, \{jx\}$，则

$$0 < |\{ix\} - \{jx\}| = |(i-j)x - ([ix] - [jx])| < \frac{1}{k}.$$

取 $p = [ix] - [jx]$，$q = i - j$，则引理得证. □

设 $m_0 + n_0\xi > a$ 是 S 中最小的满足此性质的数，则若 $m_0 + n_0\xi \geqslant b$，取 $k = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1$，由引理有 $m_0 + n_0\xi - |q\xi - p| > b - \frac{1}{k} > a$，矛盾，故必有 $m_0 + n_0\xi \in (a, b)$. □

第二章　单变量函数的连续性

2.1　连续函数的基本概念

2.1.15

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且对于任意 x, y 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求证 $f(x) = cx$，其中 c 是常数.

证明. 易知 $f(nx) = nf(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$，进而对任意有理数 $\frac{p}{q}$ 有

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

由有理数的稠密性知，对任意实数 α，总存在有理数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. 考虑

$$f(a_n x) = a_n f(x),$$

由于 $f(x)$ 连续，令 $n \to \infty$ 即得 $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. 故 $f(x) = xf(1)$，也即 $c = f(1)$. □

2.2　闭区间上连续函数的性质

2.2.6

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续，且 $f(0) = f(2a)$. 证明：在区间 $[0, a]$ 上存在某个 x_0，使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

证明. 设 $g(x) = f(x) - f(x+a)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$，则 $g(0) = -g(a)$，由零点定理可得欲证. □

2.2.7

试证：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为此区间中的任意值，则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right).$$

更一般地，若 $q_1,q_2,\ldots,q_n\in\mathbb{R}_+$，且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$，则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).$$

证明. 显然有 $\min\left(f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\right)\leqslant f(\xi)\leqslant\max\left(f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\right)$，则由介值定理可得欲证. $\square$

2.2.16

给出一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

解. $f(x)=\sin x^2$. 由连续且有界想到基本初等函数中的 $\sin x$（或 $\cos x$），而不一致连续的条件启发我们寻找一个任意陡的函数，故想到 $\sin x^2$. $\square$

第 2 章综合习题

2.0.5

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$. 证明：对任意自然数 n，在区间 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

证明. 设 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$ $(0\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n})$，若存在 $g(\xi)=0$，命题得证；否则有 $g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(1-\frac{1}{n})=0$，其中必有两项异号，由零点定理可得欲证. $\square$

2.0.8

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，满足条件：$a\leqslant f(x)\leqslant b$，且对 $[a,b]$ 中任意的 x,y 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,$$

其中常数 $k\in(0,1)$，证明

(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$，并定义数列 $\{x_n\}$：$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 给出一个在实轴上的连续函数，使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

(1) **证明.** 设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(a)\geqslant 0$，$g(b)\leqslant 0$. 故由零点定理知存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $g(x_0)=0$，也即 $f(x_0)=x_0$. 若存在另一 $x_0'\in[a,b]$ 满足 $f(x_0')=x_0'$，则

$$|f(x_0)-f(x_0')|=|x_0-x_0'|>k|x_0-x_0'|,$$

与题设矛盾. 故 x_0 是唯一的. □

(2) **证明.** 由题设有 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$ $(n\geqslant 2)$. 设 $M=\left|\dfrac{x_2-x_1}{k^2}\right|$，则对任意 $m>n$，有

$$\begin{aligned}|x_n-x_m|&\leqslant|x_n-x_{n+1}|+\cdots+|x_{m-1}-x_m|\\&\leqslant Mk^n+Mk^{n+1}+\cdots+Mk^m.\end{aligned}$$

故由 1.2.17.(3) 及夹逼原理知，数列 $\{x_n\}$ 是基本列. 进而由 Cauchy 收敛准则知，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$，则

$$x=f(x)\ \Rightarrow\ x=x_0.$$

也即 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$. □

事实上，此即

Theorem 3: 压缩映射原理

设 $f:[a,b]\to[a,b]$，且存在 $k\in(0,1)$ 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$$

对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 均成立，则

1° 存在唯一的 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$；

2° 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0\in[a,b]$，$x_{n+1}=f(x_n)$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$.

2.0.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x\in[a,b)$ 存在 $y\in(x,b)$ 使得 $f(y)>f(x)$. 求证：$f(b)>f(a)$.

证明. 由题设知，存在数列 $\{x_n\}$，满足 $x_0=a$，$x_n<x_{n+1}<b$，且 $f(x_n)<f(x_{n+1})$. 由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设其收敛到 c，则必有 $c=b$，否则对任意 $x\in(c,b)$ 均有 $f(c)\geqslant f(x)$，与题设矛盾. 而当 $n>1$ 时，我们有

$$a=f(x_0)<f(x_1)<f(x_n).$$

由于 $f(x)$ 连续，令 $n\to\infty$ 即得 $f(a)<f(x_1)\leqslant f(b)$. □

第三章　单变量函数的微分学

3.1　导数

3.1.17

求下列各式的和

(1) $P_n = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$;

(2) $Q_n = 1^2 + 2^2x + \cdots + n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n = \cos 1 + 2\cos 2 + \cdots + n\cos n$.

(1) 解. 设

$$f(x) = \frac{x(1-x^n)}{1-x} = x + x^2 + \cdots + x^n \ (x \neq 1),$$

则

$$P_n = f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

□

(2) 解.

$$Q_n = f'(x) + xf''(x) = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}.$$

□

(3) 解. 设

$$g(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(\frac{2n+1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}},$$

则

$$R_n = g'(1) = \frac{(n+1)\cos n - n\cos(n+1) - 1}{4\sin^2\frac{1}{2}}.$$

□

3.2 微分

3.2.3

对下列函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \varphi\cos\varphi, \\ y = \varphi\sin\varphi; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \cos^3\varphi, \\ y = \sin^3\varphi. \end{cases}$

(1) 解.

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}y = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2t}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1+t^2}{4t^3}. \end{cases}$$

□

3.3 微分中值定理

3.3.4

证明下列不等式.

(1) 当 $a > b > 0$, $n > 1$ 时，有 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x > 0$ 时，有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(3) 当 $0 < a < b$ 时，有 $(a+b)\ln\frac{a+b}{2} < a\ln a + b\ln b$;

(4) 当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

(3) 证明. 设 $f(x) = x\ln x$，则在 $(a, \frac{a+b}{2})$ 和 $(\frac{a+b}{2}, b)$ 上，由 Lagrange 中值定理有

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} = 1 + \ln\xi_1 < 1 + \ln\xi_2 = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}$$

整理后即得欲证. □

事实上,此为 **Jensen 不等式**的一种形式:当 $f(x)$ 是凸函数,即 $f''(x) > 0$ 时,有 $\frac{f(a)+f(b)}{2} > f(\frac{a+b}{2})$.

3.3.7

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f'(x)<1$，又 $f(0)=f(1)$，证明：对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

证明. 不妨设 $x_1<x_2$，则由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(\xi)|<1,$$

也即 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|=x_2-x_1$. 则若 $x_2-x_1<\frac{1}{2}$，结论成立；否则有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|<1-(x_2-x_1)\leqslant\frac{1}{2}$. □

3.3.12

设对所有的实数 x,y，不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ 都成立. 证明：$f(x)$ 恒为常数.

证明. 两边同除 $|x-y|$ 得

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant M|x-y|.$$

令 $y\to x$，得 $f'(x)=0$，故 $f(x)$ 恒为常数. □

3.3.18

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微，$f(0)=0$，$f'(x)$ 严格递增，证明 $\frac{f(x)}{x}$ 严格递增.

证明. 由题设知对任意 $x>0$ 存在 $\xi\in(0,\ x)$ 使得 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)<f'(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,$$

即 $\frac{f(x)}{x}$ 严格递增. □

3.3.20

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数，且 $f(0)=f'(0)$，$f(1)=f'(1)$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f(\xi)=f''(\xi)$.

证明. 设 $g(x)=e^x\left(f(x)-f'(x)\right)$，则 $g(0)=g(1)=0$. 进而由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,\ 1)$，满足 $g'(\xi)=e^{\xi}\left(f(\xi)-f''(\xi)\right)=0$，也即 $f(\xi)=f''(\xi)$. □

3.3.23

证明下列不等式.

(1) $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1,\ x \in (0,1],\ p > 1$;

(2) $\tan x > x - \frac{x^3}{3},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1},\ 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$;

(4) $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x},\ x > 0$;

(5) $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$;

(6) $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，且右端的 $\frac{4}{3}$ 为最优系数;

(7) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} < 4,\ x \in (1, +\infty)$;

(8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}},\ x \in (0,1),\ a \in (0,1)$.

(1) **证明**. 先证右边. 显然有 $x^p + (1-x)^p \leqslant x + 1 - x = 1$.

对于左边，不妨设 $x < \frac{1}{2}$，则

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^p} - x^p \leqslant (1-x)^p - \frac{1}{2^p}.$$

由 Lagrange 中值定理知，存在 $x < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1-x$，满足

$$\frac{\frac{1}{2^p} - x^p}{\frac{1}{2} - x} = p\xi_1^{p-1} < p\xi_2^{p-1} = \frac{(1-x)^p - \frac{1}{2^p}}{1 - x - \frac{1}{2}},$$

则原式得证. □

(3) **证明**. 由 Lagrange 中值定理知，存在 $0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \frac{\pi}{2}$，满足

$$\frac{\tan x_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{1}{\cos^2 \xi_1} < \frac{1}{\cos^2 \xi_2} = \frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1},$$

整理后即得原式. □

(5) **证明**. 注意到不等式两侧均为关于 x 的偶函数, 而易知 $x = 0$ 时等号成立, 故不妨设 $x > 0$. 由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi \in (0,\ x)$，满足

$$\frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

代入原式即得. □

3.4 未定式的极限

3.4.4

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(ab>0)$ 上连续，在 (a,b) 上可微. 求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明. 由 Cauchy 中值定理知，存在 $\xi\in(a,\ b)$ 满足

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

整理后即得. □

3.5 函数的单调性和凸性

3.5.1

证明 Jensen 不等式.

Theorem 4: Jensen 不等式

若 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是 I 中 n 个点，则对任意满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 的正数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

证明. 归纳证明. 显然 $n=1$ 时成立. 假设 $n=k$ $(\geqslant 1)$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，设 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}=1$，则

$$f(\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}})\leqslant\frac{\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_kf(x_k)}{1-\lambda_{k+1}}.$$

由凸函数定义知

$$f\left((1-\lambda_{k+1})\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_ix_i}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\leqslant(1-\lambda_{k+1})\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_if(x_i)}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}).$$

整理后即得 $n=k+1$ 时成立. 故原命题成立. □

3.5.2

证明加权均值不等式.

Theorem 5: 加权均值不等式

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是正数，且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. 则有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

证明. 设 $A_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$，$G_n = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$，则

$$\ln\left(\frac{G_n}{A_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \ln\left(\frac{x_i}{A_n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{x_i}{A_n} - 1\right) = 0.$$

整理后即得. □

亦可借助 Jensen 不等式证明.

3.6 Taylor 展开

3.6.8

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且对任意 $x \in [0,2]$，有 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''(x)| \leqslant 1$. 证明：$|f'(x)| \leqslant 2$，$x \in [0,2]$.

证明. 对任意 $x \in [0,2]$，由 Taylor 公式得

$$\begin{cases} f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2, & 0 \leqslant \xi_1 \leqslant x, \\ f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2, & x \leqslant \xi_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

两式相减得

$$|f'(x)| = \left| \frac{f(2)-f(0)}{2} + \frac{x^2 f''(\xi_1) - (x-2)^2 f''(\xi_2)}{4} \right| \leqslant 1 + \frac{x^2 + (x-2)^2}{4} \leqslant 2.$$ □

第 3 章综合习题

3.0.5

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果任给 I 中两点 x_1, x_2，有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

证明. 先考虑以下引理：

Lemma 3

对任意 $x_1, x_2 \in I$, $i, n \in \mathbb{N}_+$, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$，有

$$f\left(\frac{ix_1+(2^n-i)x_2}{2^n}\right) \leqslant \frac{i}{2^n}f(x_1)+\left(1-\frac{i}{2^n}\right)f(x_2).$$

证明. 考虑归纳证明. 当 $n=1$ 时，结论显然成立.
若当 $n=k(\geqslant 1)$ 时，结论成立，则当 $n=k+1$ 时，若 $i=0$ 或 $i=2^n$，结论是显然的，故我们考虑证明 $0<i<2^{k+1}$ 的情况. 若 i 为偶数，结论显然成立；若 i 为奇数，不妨设 $i<2^k$，则

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(i-1)x_1+(2^{k+1}-i+1)x_2}{2^{k+1}}\right) &\leqslant \frac{i-1}{2^{k+1}}f(x_1)+\left(1-\frac{i-1}{2^{k+1}}\right)f(x_2), \\ f\left(\frac{(i+1)x_1+(2^{k+1}-i-1)x_2}{2^{k+1}}\right) &\leqslant \frac{i+1}{2^{k+1}}f(x_1)+\left(1-\frac{i+1}{2^{k+1}}\right)f(x_2). \end{aligned}$$

则将

$$x_1'=\frac{(i-1)x_1+(2^{k+1}-i+1)x_2}{2^{k+1}},\ x_2'=\frac{(i+1)x_1+(2^{k+1}-i-1)x_2}{2^{k+1}}$$

代入 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 中即可得结论成立. □

对任意实数 $\lambda \in (0,\ 1)$，可利用上述结论逼近之，再由函数连续性得

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

即 $f(x)$ 是凸函数. □

3.0.6

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的两阶可微函数，$f(0)=f(1)=0$. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明. 设 $g(x)=f'(x)(x-1)^2$，由 Rolle 定理知存在 $\eta \in (0,\ 1)$，满足 $f'(\eta)=0$. 则 $g(\eta)=g(1)=0$，故再由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (\eta,\ 1)$，满足 $g'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$. □

注. 下简述选取辅助函数 $g(x)$ 的思路. 我们试图利用 *Rolle* 定理证明此题，这要求等式 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 可化成 $g'(\xi)=0$ 的形式，也即有 $g(x)=C$. 解此常微分方程，得到 $f'(x)(x-1)^2=C$，故可令 $g(x)=f'(x)(x-1)^2$.

3.0.9

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$. 求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证明. 设 $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x$，则 $g(0)=g(1)=1$. 由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,\ 1)$，满足 $g'(\xi)=-\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}-1=0$，即 $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$. □

3.0.19

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

证明. 设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)x^2$，则 $g(-1)=g(0)=g(1)$. 则由 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(-1,\ 0)$ 及 $\xi_2\in(0,\ 1)$，满足 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g(0)=0$. 故知存在 $\eta_1\in(\xi_1,\ 0)$ 及 $\eta_2\in(0,\ \xi_2)$，满足 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$. 进而又知存在 $\zeta\in(\eta_1,\ \eta_2)$，满足 $g'''(\zeta)=0$，即 $f'''(\zeta)=3$. □

注. 此题中 $g(x)$ 的选取思路与本节第 *6* 题不同. 仍然是考虑 *Rolle* 定理, 则我们需要某个 $\phi(x)$ 满足 $\phi'(\xi)=f'''(\xi)-3=0$, 故 $\phi(x)=f''(x)-3x+a$, 依此类推, 还应有 $\varphi(x)=f'(x)-\frac{3}{2}x^2+ax+b$ 及 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+c$，为能导出欲证，应有 $g(-1)=g(0)=g(1)$，由此可解得参数 a,b,c.

3.0.20

设 $a>1$，函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明. 用反证法. 假设命题不成立，即存在 $X>0$，使得 $x>X$ 时均有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(X,\ +\infty)$ 上单调递增. 由 Lagrange 中值定理知，当 $x>X$ 时存在 $\xi\in(x,\ ax)$，满足

$$\frac{f(ax)-f(x)}{(a-1)x}=f'(\xi)\geqslant f(a\xi)>f(ax).$$

故有 $(1-ax+x)f(ax)\geqslant f(x)$. 则当 $x>\frac{1}{a-1}$ 时有 $f(x)<0$，与题设矛盾，故命题成立. □

3.0.21

证明 Hölder 不等式.

Theorem 6: Hölder 不等式

设 $\{a_i\},\{b_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是正数. 有 $p,q\in(1,+\infty)$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明. 考虑以下引理：

Lemma 4: Young 不等式

设 $x,y\in(0,+\infty)$，$p,q\in(1,+\infty)$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

证明. 由 $\ln x$ 凹性知

$$\ln xy=\frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right).$$

整理后即得. □

令 $x=\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$，$y=\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$，则由引理有

$$\frac{a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{a_i^p}{p\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)}+\frac{b_i^q}{q\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)},$$

累加得

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

整理后即得欲证. □

第四章　不定积分

4.1　不定积分及其基本计算方法

4.1.3

用第二代换法求下列不定积分，其中的 a 均为正常数.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-2}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}}$;

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$;

(6) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$;

(9) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(10) 解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x &= 14\int \frac{t^{19}+t^{14}}{t^{15}+1}\mathrm{d}t \ (x=t^{14}) \\
&= \frac{14}{5}\int \frac{u^2}{u^2-u+1}\mathrm{d}u \ (u=t^5) \\
&= \frac{14}{5}\int \mathrm{d}u + \frac{7}{5}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u - \frac{7}{5}\int \frac{\mathrm{d}\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{14}{5}x^{5/14} + \ln\left(x^{5/7}-x^{5/14}+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^{5/14}-1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

□

(12) 解.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C.\end{aligned}$$

□

3.4.7

求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$;

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^6}$;

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\tan x)\sin^2 x}$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

(11) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(18) $\displaystyle\int \frac{\arctan e^x}{e^x}\mathrm{d}x$;

(19) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x$;

(20) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(21) $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$;

(22) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$;

(23) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$;

(24) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

(25) $\displaystyle\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$;

(26) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

(26) 解.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

□

4.2 有理函数的不定积分

4.2.1

求下列有理函数的不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$;

(2) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x$.

(8) 解.

$$\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{x^8}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}(x^8) = \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + \frac{1}{8(x^8+1)} + C.$$

□

第五章　单变量函数的积分学

5.1　积分

5.1.2

证明：Dirchlet 函数在任意区间 $[a,b]$ 上不可积.（因此有界的函数未必可积.）

证明. 考虑其 Riemann 和. 对任意 $x_{i-1} < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，总能找到一组 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $f(\xi_i) \equiv 0$ 或 $f(\xi_i) \equiv 1$，故 $\lim_{\|T\|\to 0} S_n(T)$ 不存在. □

5.1.3

举例说明，一个函数的绝对值在 $[a,b]$ 上可积，不能保证该函数在 $[a,b]$ 上可积.（提示：适当地修改 Dirchlet 函数可得出这样的例子. 比较习题 2.1 中第 5 题.）

证明. 取 $f(x) = 2D(x) - 1$，其中 $D(x)$ 为 Dirchlet 函数. □

5.1.9

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且是非负（或非正）的，证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 举例说明，(1) 中对于函数 $g(x)$ 的假设是必不可少的.（提示：在 $[-1,1]$ 上，取 $f(x) = g(x) = x$.）

(1) *证明.* 由题设知存在常数 m, M 满足 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 由 $g(x) \geqslant 0$ 知

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

即存在 $\lambda \in [m, M]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 又 $f(x)$ 连续，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \lambda$. □

(2) 证明. 令 $f(x)=g(x)=x$，则 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x=1$，而 $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x=0$. 故不存在满足条件的 ξ. □

5.1.13

设函数 $f(x)$ 处处连续. 记 $F(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解. 设 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=\left(\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t\right)'=(x\varphi(x))'=xf(x)+\varphi(x).$$

□

5.1.18

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^4}\displaystyle\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^3 x}\displaystyle\int_0^{\tan x} \arcsin t^2\mathrm{d}t$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，其中 p 是正常数.

(1) 解. 由积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t=x\sin\xi^3$. 故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\xi^3}{x^3}=1.$$

□

(2) 解. 由积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,\tan x)$，使得 $\int_0^{\tan x} \arcsin t^2\mathrm{d}t=\tan x\arcsin\xi^2$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\xi^2}{\sin^2 x\cos x}=1.$$

□

(3) 解.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

□

(4) 解.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p=\frac{1}{1+p}.$$

□

5.1.19

求下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}\mathrm{d}x$，其中 a,b 为常数，且 $0<a<b$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，其中 a 为正常数;

(2) 解. 易知 $0<\frac{x^n}{1+x}<x^n$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

故由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.$$

□

5.1.22

计算下面的积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{4}[x]\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$;

(11) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int_{-1}^{1}e^{|x|}\arctan e^x\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x$;

(14) 解. 由

$$\int\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

知

$$\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^a+\lim_{a\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\bigg|_a^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

5.1.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并用这一结果计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

证明. 易知

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)f(\sin(\pi - x))\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

故

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = -\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

5.1.24

证明:

$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x < \frac{1}{3}.$$

证明. 易知当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时有 $\frac{x^2}{2} < \frac{2}{\pi}x^2 \leqslant \sin x^2 \leqslant x^2$，在 $[0,1]$ 上积分即得. □

5.1.27

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的连续函数，证明：对任意 $\alpha \in (0,1)$，有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若仅假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，证明同样的结论.

证明. 由 $f(x)$ 单调递减有

$$(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x) \geqslant \alpha(1-\alpha)f(\alpha) \geqslant \alpha\int_\alpha^1 f(x)$$

整理后即得. □

5.1.28

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且对任意 $x\in[a,b]$ 有 $|f'(x)|\leqslant M$.

(1) 若 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

(提示：通过对积分的上限求导能得出 (1) 的一个证明，即考虑函数 $G(t)=\int_a^t|f(x)|\mathrm{d}x-\frac{M}{2}(t-a)^2$，$a\leqslant t\leqslant b$.)

(1) **证明**. 依提示设 $G(t)$，则 $G(a)=0$，$G(b)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x-\frac{M}{2}(b-a)^2$，而

$$G'(t)=|f(t)|-M(t-a).$$

又由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi\in(a,t)$ 使得

$$\frac{|f(t)|}{t-a}=\frac{|f(t)|-|f(a)|}{t-a}=|f'(\xi)|\leqslant M.$$

故 $G'(t)\leqslant 0$，也即 $G(b)\leqslant G(a)=0$. 原命题得证. □

(2) **证明**. 由 (1) 有

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2\cdot\frac{M}{2}\cdot(\frac{b-a}{2})^2=\frac{M}{4}(b-a)^2.$$ □

5.2 函数的可积性

5.2.3

证明：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积，而且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明. 由题设知对任意划分，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0,$$

设 ω_i' 为 $|f(x)|$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，则

$$0<\omega_i'=|f(\xi_i)|_{\max}-|f(\xi_i)|_{\min}<|f(\xi_i)_{\max}-f(\xi_i)_{\min}|=\omega_i.$$

故由夹逼原理知 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i=0$，即 $|f(x)|$ 可积. 故

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

也即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

5.3 积分的应用

5.3.4

求证：以 R 为半径，高为 h 的球缺的体积为 $\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$.

证明. 易知

$$V=\int_0^h \pi\left(R^2-(R-h+x)^2\right)\mathrm{d}x=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

□

5.4 广义积分

5.4.1

判断下列广义积分是否收敛，并求出收敛的广义积分的值. 以下 n 均为自然数.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(7) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(9) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_0^{1} (\ln x)^n\mathrm{d}x$.

(12) **解.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln x)^n\mathrm{d}x &= (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t \ (x=e^{-t})\\ &= (-1)^{n+1}\Gamma(n+1).\end{aligned}$$

□

5.4.2

广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值定义为

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

显然，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则其主值也收敛，但反过来不一定成立. 研究下列广义积分主值的收敛性.

(1) $P.V. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $P.V. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1) 解. 由 $\frac{x}{1+x^2}$ 的奇性知 $\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \equiv 0$. 然而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

等号右侧两积分均发散，故原积分发散. □

5.4.3

若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，并且以 a 为瑕点，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

这是本节讲的两类广义积分的组合，其中 $b > a$ 是任一个实数. 当上面两个广义积分都收敛时，我们称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称为发散.

(1) 证明 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ 收敛，并求其值;

(2) 证明，对任意实数 α，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 发散.

(2) 证明.

(a) 当 $\alpha = 1$ 时

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_0^{+\infty}$$

发散.

(b) 当 $\alpha \neq 1$ 时

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^{+\infty}$$

亦发散.

综上，无论 α 取何值，$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 必发散. □

第 5 章综合习题

5.0.1

设 m,n 为正整数，证明

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n;\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$

(1) **证明.** 设 $t=2\pi-x$，则

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin mt\cdot\cos nt\mathrm{d}t=0.$$ □

(2) **证明.** 易知

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx))\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((m-n)x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((m+n)x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则结论显然. □

5.0.2

设 m,n 为正整数，记

$$B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x.$$

证明：(1) $B(m,n)=B(n,m)$；　(2) $B(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

证明. (1) 是显然的，下证 (2). 易知有

$$B(m+1,n-1)=B(m,n-1)-B(m,n),$$

则

$$B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=0+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n(B(m,n-1)-B(m,n))}{m+1},$$

即 $B(m,n)=\frac{n}{m+n+1}B(m,n-1)$. 又知 $B(0,0)=1$，则

$$B(m,n)=\frac{n!}{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+2)}\cdot\frac{m!}{(m+1)!}=\frac{n!m!}{(m+n+1)!},$$

在 $m,n\geqslant 0$ 时成立. □

5.0.3

计算下列积分:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$，其中 n 为自然数;

(c) 设 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+2\pi}\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t$，求 $\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$;

(c) 解. 设 $\varphi(x)=e^{\sin x}-e^{-\sin x}$，则有 $\varphi(x)+\varphi(x+\pi)=0$，则

$$\int_{x}^{x+2\pi}(1+\varphi(t))\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+\pi}(1+\varphi(t)+1+\varphi(t+\pi))\mathrm{d}t=2\pi.$$

故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(1+x)(f(x)-2\pi)$. □

5.0.4

证明:

$$\frac{1}{2n+2}<\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\frac{1}{2n}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明. 设 $x=\arctan t$，则

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

而

$$\frac{1}{2n+2}=\int_{0}^{1}\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t<\int_{0}^{1}\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_{0}^{1}\frac{t^n}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n},$$

则命题得证. □

5.0.10

设 $f(x)$ 处处连续，$f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在. 记 $F(x)=\int_0^x f(xy)\mathrm{d}y$，证明 $F(x)$ 处处可导，并求出 $F'(x)$.

证明. 显然 $F(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时，设 $\varphi(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$，则

$$F(x)=\left.\frac{\varphi(xy)}{x}\right|_{y=0}^{1}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.$$

此时显然有 $F'(x)=\frac{xf(x)-\varphi(x)+\varphi(0)}{x^2}$. 又

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),$$

则 $F(x)$ 处处可导. □

5.0.11

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1;\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$$

记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 试研究 $F(x)$ 在哪些点可导.

(2) 设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求证 $f'_+(0)=0$.

(2) 证明.

$$\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0_+}\frac{\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u-0}{x-0}\quad\left(u=\frac{1}{t}\right)\\ &=\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin u}{u^2}\bigg|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\right)+\frac{2}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}\mathrm{d}u\\ &=2\lim_{x\to 0_+}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}}{x}=2\lim_{x\to 0_+}x\cos\frac{1}{x}=0. \end{aligned}$$

□

5.0.12

设函数 f 处处连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b (f(x+h)-f(x))\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

证明. 设 $\varphi(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned} LHS&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\varphi(b+h)-\varphi(b)-\varphi(a+h)+\varphi(a)\right)\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(b+h)-\varphi(b)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}\\ &=f(b)-f(a). \end{aligned}$$

□

5.0.13

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微. 证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

(提示：分部积分.)

证明.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{f(x)\cos(\lambda x)}{\lambda}\bigg|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x\right)=0.$$

□

5.0.14

证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$$

证明.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{k\pi}^x|\sin t|\mathrm{d}t\quad\left(k=\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2k}{x}+0=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

□

5.0.16

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且对任意 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant 0$. 记 $f(x)$ 在该区间上的最大值为 M，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

证明. 设 $f(x_0)=M$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得 $f(x)>M-\varepsilon$ $(x\in U(x_0,\delta))$. 不妨设

$$g_\delta(x)=\begin{cases}M-\varepsilon, & x\in U(x_0,\delta);\\ 0, & x\notin U(x_0,\delta),\end{cases}$$

则 $0<g(x)<f(x)\leqslant M$. 故有

$$M-\varepsilon=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b g_\delta^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b M\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M,$$

也即 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M$. □

5.0.18

证明柯西积分不等式.

Theorem 7: Cauchy–Schwarz Inequality

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，则有

$$\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

当且仅当 $g(x)\equiv 0$ 或存在实数 λ 使得 $f(x)=\lambda g(x)$ 时，等号成立.

证明. 若 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=0$，则 $g(x)\equiv 0$，显然成立；否则对任意实数 λ，有

$$0\leqslant\int_a^b(f(x)-\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

此为关于 λ 的一元二次不等式，故有

$$\Delta=4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 0.$$

整理后即得. □

5.0.19

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明：对任意 $a\in[0,1]$，有

$$|f(a)|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证明. 设 $|f(x_0)|=|f(x)|_{\min}$，则

$$|f(a)|=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^a f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^a f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x.$$ □

5.0.21

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微，且 $|f'(x)|\leqslant M$，证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}.$$

证明. 易知

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\sum_{k=1}^n\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|,$$

又由 5.1.28 知

$$\sum_{k=1}^n\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{M}{2}(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})^2=\frac{M}{2n},$$

则命题得证. □

5.0.22

设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个可微函数，且对任意实数 x,y 满足

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|.$$

求证：对任意实数 x，有

$$(f'(x))^2<2f(x).$$

证明. 若 $f'(x)=0$，则结论显然. 若 $f'(x)>0$，设 $x_0=x-f'(x)$，则有

$$f(x)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t+f(x_0)>\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{x_0}^{x}(f'(x)-(x-t))\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(f'(x))^2.$$

同理可证 $f'(x)<0$ 的情况. $\square$

类似地，我们可以证明若 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant L|x-y|$，则有 $(f'(x))^2\leqslant 2Lf(x)$.

第六章　常微分方程初步

6.1　一阶微分方程

6.1.4

求下列线性方程和贝努利方程的解.

(1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

(2) $y'+\frac{1-2x}{x}=1$;

(3) $y'=\frac{y}{x+y^3}$;

(4) $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$;

(5) $y'=y\tan x+y^2\cos x$;

(6) $y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x$.

(3) 解. 整理原式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+y^2.$$

若 $y\neq 0$，作代换 $u=\frac{x}{y}$，等式化为

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+y^2\ \left(u=\frac{x}{y},\ y\neq 0\right),$$

则可进一步解得 $x=\frac{1}{2}y^3+Cy$. 验证可知 $y=0$ 亦为方程的解. □

6.1.6

求解下列微分方程.

(1) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$;

(2) $y'=\cos(x-y)$;

(3) $y'-e^{x-y}+e^x=0$;

(4) $y'\sin y+x\cos y+x=0$.

(1) 解. 不妨设 $u=\frac{y}{x^2}$，则原式化为

$$2xu+x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=x\left(\sqrt{1+u}-1\right),$$

进一步整理得

$$-\frac{\mathrm{d}u}{2u-\sqrt{1+u}+1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

再设 $v=\sqrt{1+u}$，化为

$$-\frac{2v\mathrm{d}v}{(v-1)(2v+1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得

$$-\frac{1}{3}\left(2\ln(v-1)+\ln(2v+1)\right)=\ln|x|+C,$$

即

$$(v-1)^2(2v+1)=\frac{C}{x^3}.$$

则 y 可解. □

或设 $u^2=x^2+y$，则此题亦可解.

6.1.7

试用常数变易法导出贝努利方程的通解.

解. 由定义有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\notin\{0,1\})$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)\ (u=y^{1-n}).$$

设 $u=C(x)e^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}=(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$$
$$C(x)=\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

故 $u=e^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$，进而可得 y. □

6.1.13

求下列二阶方程满足初始条件的特解.

(1) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$，$y(1)=1$，$y'(1)=0$;

(2) $y^3y''=-1$，$y(1)=1$，$y'(1)=0$.

(2) 解. 设 $p=y'$，则原式化为

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-1,$$

也即 $p\mathrm{d}p=-\frac{\mathrm{d}y}{y^3}$，易解得 $y=\sqrt{Cx^2-\frac{1}{C}}$. □

6.2 二阶线性微分方程

6.2.1

在下列方程中，已知方程的一个特解 y_1，试求它们的通解.

(1) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0,\ y_1=\frac{\sin x}{x}$;

(2) $y''\sin^2 x=2y,\ y_1=\cot x$;

(3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ y_1=x$.

(3) 解. 由题设知 $y_1(x)=x,\ p(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，则

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\frac{x^2+1}{x_0^2-1}.$$

故通解 $y_0(x)=c_1x+c_2(x^2+1)$. □

6.2.2

先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解，然后求方程的通解.

(1) $x^2y''-2xy'+2y=0,\ x\neq 0$;

(2) $xy''-(1+x)y'+y=0,\ x\neq 0$.

(2) 解. 注意到 $y=x+1$ 为一特解. 原式变形得

$$\begin{aligned}y-y'&=x(y'-y'')\\ \frac{\mathrm{d}x}{x}&=\frac{\mathrm{d}(y-y')}{y-y'},\end{aligned}$$

也即 $y-y'=Cx$，解得 $y=C(x+1)$，此即通解. □

6.2.3

已知方程 $(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$ 的一个特解 $y_1=x^2$，试求该方程满足初始条件 $y(-1)=0,\ y'(-1)=0$ 的特解.

解. 原方程对应的齐次方程为

$$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=0.$$

解得其通解为 $y=c_1\arctan x+c_2$，则原方程通解为 $y=x^2+c_1\arctan x+c_2$. 令 $y(-1)=0,\ y'(-1)=0$ 得特解 $y_2=x^2+4\arctan x+\pi-1$. □

6.2.5

求下列常系数非齐次方程的一个特解.

(1) $y'' + y = 2\sin\frac{x}{2}$;

(2) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$.

(2) 解. 易得对应齐次方程的通解为 $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. 则

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{3t} \cdot x e^{3x} - t e^{3t} \cdot e^{3x}}{W(t)} f(t)\mathrm{d}t$$

进而可得原方程通解. □

6.2.9

求下列方程的通解.

(1) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$;

(2) $x''' - 2x'' + x' - 2x = 0$;

(3) $x^{(4)} - 8x'' + 18x = 0$;

(4) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$.

(4) 解. 设 $x = e^{\lambda t}$, 则得到特征方程 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. 进而解得 $\lambda = \pm i$, 故通解为 $x = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. □

第七章　无穷级数

7.1　数项级数

7.1.2

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \dfrac{\pi}{3^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{\pi}{4n}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1000^n}{n!}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

(14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^k}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$;

(16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n$，$a>0$.

(13) 解. 对任意 $0<k<\frac{1}{4}$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $\ln n < n^k$. 故

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-k}}.$$

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ 收敛. □

(14) 解. 易知

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln\ln x|_3^{+\infty}=+\infty, & k=1;\\ \frac{(\ln\ln x)^{1-k}}{1-k}\Big|_3^{+\infty}=+\infty, & k\neq 1.\end{cases}$$

故由 Cauchy 积分判别法知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}$ 发散. □

(15) 解. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}\sim\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{n^3}=\frac{1}{e^{\frac{n}{2}}}.$$

故原级数收敛. □

(16) 解. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n=\frac{a^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\sim\frac{a^n}{e}.$$

故 $a\geqslant 1$ 时原级数发散，$a<1$ 时原级数收敛. □

7.1.4

证明或回答下列论断:

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，是否有 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$;

(3) 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=a$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) **证明.** 设 $A_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$，则由题设知 $\lim_{n\to\infty}A_n$ 存在，不妨设之为 A. 又由 $\lim_{n\to\infty}na_n=a$ 知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(A_n+(n+1)a_{n+1}-a_{n+1})=A+a-0.$$

故原级数收敛. □

7.1.6

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个非负数列，满足 $a_{n+1}<a_n+b_n$，而且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 设 $c_n=a_n-a_1-\sum_{k=1}^{n-1}b_k$，则由单调有界原理知 $\{c_n\}$ 收敛，进而得 $\{a_n\}$ 收敛. □

7.1.7

证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证明. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}2(a_n^2+b_n^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2.$$

故二者均收敛. 令 $b_n=\frac{1}{n}$，即可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛. □

7.1.12

研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$.

(8) *解*. 由 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 知 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0$. 故原级数条件收敛，亦绝对收敛. □

7.1.15

研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

(1) *解*. 熟知

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

有界，而数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调递减趋于零，故由 Dirichlet 判别法知原级数收敛. □

(2) 解. 取 $a_n=\cos\frac{n\pi}{4}$, $b_n=\frac{1}{\ln n}$, 由 Dirichlet 判别法易知原级数收敛. □

(3) 解. 由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ 收敛. 进而由 Abel 判别法知原级数收敛. □

(4) 解. 易知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=0$, 则由 Leibniz 判别法知原级数收敛. □

7.2 函数项级数

7.2.2

确定下列函数项级数的收敛域.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n-3^n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

(6) 解. 由 Stirling 公式知 $n\to\infty$ 时有

$$n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{x}{e}\right)^n.$$

故级数收敛域为 $(-e,e)$. □

7.2.10

递归定义 $[0,1)$ 上的连续可微序列 $\{f_n\}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x),\ f_{n+1}(0)=1.$$

求证: 对任意 $x\in[0,1)$ 有 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

证明. 考虑归纳证明. 由 $f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x)$ 及 $f_n(0)=1$ 解得

$$f_{n+1}(x)=\exp\left(\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

(a) 当 $n=1$ 时, $f_2(x)=\exp\left(\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t\right)=e^x$, 则 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$.

(b) 若当 $n=k\ (\geqslant 2)$ 时，$f_{k-1}(x)\leqslant f_k(x)\leqslant \frac{1}{1-x}$ 成立，则

$$\begin{cases} f_{k+1}(x)=\exp\left(\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant \exp\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right)=\frac{1}{1-x} \\ \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}=\exp\left(\int_0^x \left(f_k(t)-f_{k-1}(t)\right)\mathrm{d}t\right)\geqslant e^0=1 \end{cases}$$

即 $f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)\leqslant \frac{1}{1-x}$，故 $f_n(x)$ 单调有界，收敛至 $\frac{1}{1-x}$.

□

7.2.11

证明 Dini 定理.

Theorem 8: Dini 定理

若函数项级数 $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 I 上逐点收敛到 $S(x)$，且通向 $u_n(x)$ 在区间 I 上是连续且非负（或非正）的，那么 $S(x)$ 在 I 上连续的充要条件是此级数在 I 上一致收敛.

证明. 充分性的证明见定理 7.34. 对于必要性，令 $f_n(x)=S(x)-S_n(x)$，则 $f(x)$ 连续，故有极值，且该极值单调递减（或递增）趋于零，则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到零，也即函数项级数 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛. □

7.3 幂级数与 Taylor 展式

7.3.1

求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0,\ b>0)$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

(8) 解. 易知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{n^2}}{2^n}}=\frac{x^n}{2},$$

则由 Cauchy 判别法知 $x<1$ 时级数收敛，$x>1$ 时级数发散，即 $R=1$. □

7.3.3

求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$;

(5) 解. 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}}{\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n+1}=0$$

知收敛域为 $\mathbb{R}$.

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$，则 $f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+xf(x)$. 解得

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}+C\right).$$

□

7.3.4

求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}$;

(1) 解. 熟知 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x).$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\ln 2.$$

□

(2) 解. 熟知 $\sum_{n=3}^{\infty}x^n=\frac{x^3}{1-x}$，则

$$\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''=\frac{2x^3}{(1-x)^3}+\frac{6x^2}{(1-x)^2}+\frac{6x}{1-x}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=-\frac{41}{27}. \qquad \square$$

(3) 解. 熟知 $\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^3}=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(1+x+x^2)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi+\frac{1}{3}\ln 2. \qquad \square$$

(4) 解. 考虑以下引理.

Lemma 5

对任意 $k\in\mathbb{N}_+$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=B_ke,$$

其中 B_k 为 Bell 数.

证明. 当 $k\geqslant 1$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}.$$

将二项式展开即得. $\square$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e+2e+e=5e. \qquad \square$$

7.3.7

方程 $y+\lambda\sin y=x$ $(\lambda\neq-1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$，试求它的幂级数展开式的前四项.

解. 不妨设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 令 $x=0$，则有 $a_0+\lambda\sin a_0=0$，而由于 $y(x)$ 是确定的，故只能有 $a_0=0$. 原式两边求导，得 $y'+\lambda y'\cos y=1$，再令 $x=0$，得 $a_1+\lambda a_1=1$，也即 $a_1=\frac{1}{1+\lambda}$. 依此类推，可求得

$$y=\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{\lambda}{6(1+\lambda)^4}x^3. \qquad \square$$

7.4 级数的应用

7.4.6

证明：当 $n\to\infty$ 时，$\ln(n!)\sim\ln n^n$.

证明. 由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln(n-1)!}{\ln n^n-\ln\left((n-1)^{n-1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+1}=1.\end{aligned}$$

□

或由 Stirling 公式立得.

第 7 章综合习题

7.0.3

设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明. 先证充分性. 不妨设 $a_n\leqslant M$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_1}=\frac{a_{n+1}}{a_1}-1\leqslant\frac{M}{a_1}-1.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

再证必要性. 由级数收敛知，对任意 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，存在 $N\in\mathbb{N}_+$，使得当 $m>n\geqslant N$ 时有

$$1-\frac{a_n}{a_m}=a_n\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right)<\left|\sum_{k=n}^{m-1}a_{k+1}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\right|<\varepsilon.$$

故对任意 $m>N$ 有 $a_m<\frac{a_N}{1-\varepsilon}<2a_N$. 取 $M=\max\{a_1, a_2, \dots, 2a_N\}$，则恒有 $a_n\leqslant M$，即 $\{a_n\}$ 有界. □

7.0.4

设 $\alpha>0$，$\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

证明.

(a) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \frac{1}{a_k^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k^\alpha}{a_{k+1}^\alpha}\right) \frac{1}{a_k^\alpha} = \frac{1}{a_1^\alpha} - \frac{1}{a_{n+1}^\alpha} < \frac{1}{a_1^\alpha}.$$

故原级数收敛.

(b) 当 $0 < \alpha < 1$ 时，由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi \in (a_n, a_{n+1})$ 使得

$$\frac{a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha}{a_{n+1} - a_n} = \alpha \xi^{\alpha-1} > \alpha a_{n+1}^{\alpha-1},$$

即

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_n^\alpha} - \frac{1}{a_{n+1}^\alpha}\right).$$

故

$$S_n < \frac{1}{\alpha a_1^\alpha} - \frac{1}{\alpha a_{n+1}^\alpha} < \frac{1}{\alpha a_1^\alpha},$$

即原级数收敛. □

7.0.5

设 $\Phi(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上正的严格增函数，$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是三个非负数列，满足

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n \Phi(a_n) + c_n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

求证 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c$，则

$$1 \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + c_n)\right) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = e^c = C,$$

则原不等式可化为

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}(1 + c_k)} - \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1 + c_k)} \leqslant -\frac{b_n \Phi(a_n)}{\prod_{k=1}^{n}(1 + c_n)} < 0.$$

不妨设 $d_n = \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+c_k)} \geqslant 0$，则 d_n 单调递减有下界，即 $\{d_n\}$ 收敛. 若 $\lim_{n\to\infty} d_n = d > 0$，则

$$d_{n+1} - d_n \leqslant -b_n \frac{\Phi(d)}{M_1} \quad \Rightarrow \quad d_{n+1} \leqslant d_1 - \frac{\Phi(d)}{M_1} \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

则 $\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$，矛盾，故 $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$，进而有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

7.0.6

设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

而且上式右端的系数 2 是最佳的.

证明. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right) \geqslant \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

即

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \leqslant 2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

对 n 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} 2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\\ &= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= 2\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{k^2}{(N+1)^2 a_k}\right).\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

□

此题亦可用数学归纳法证明，见此解. 事实上，我们有更强的结论，见此解，其亦确定了最佳系数.

7.0.7

设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增实数列，且对任意正整数 n 有 $a_n \leqslant n^2\ln n$，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

证明. 不妨令 $a_1=0$，则由上题结论知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1}-a_1} \geqslant \frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

□

7.0.9

设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由

$$f_0(x)=1,\ f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义，证明当 $n\to\infty$ 时，函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

证明. 设 $f_n(x)=x^{a_n}$ $(n\in\mathbb{N})$，则 $f_{n+1}(x)=x^{a_{n+1}}=x^{\frac{a_n+1}{2}}$，也即 $a_0=0$, $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{2}$，则易证 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$，即 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x$. □

7.0.11

设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上连续函数，证明按照下列公式

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(u)\mathrm{d}u$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

证明. 设 $|f_0(x)|\leqslant M$，则可归纳证得 $|f_n(x)|\leqslant\frac{Ma^n}{n!}$，显然一致收敛于 0. □

事实上有

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f_0(t)\mathrm{d}t&=\frac{(x-t)^n}{n!}f_1(t)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)\mathrm{d}t\\&=\cdots\\&=\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\\&=f_{n+1}(x).\end{aligned}$$

.

数学分析讲义 第二册

第八章　空间解析几何

8.1　向量与坐标系

8.1.5

证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

证明. 考虑第一个等号. 注意到 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\&=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

其余同理. □

8.1.8

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的单位向量，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

解. 变形 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，则

$$\sum_{\text{cyc}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sum_{\text{cyc}}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=-3-\sum_{\text{cyc}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$. □

8.1.13

已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证明. 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$ 知

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}.$$

同理有 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. □

8.2 平面与直线

8.2.3

设平面过点 $(5,-7,4)$ 且在 x,y,z 三轴上的截距相等，求平面方程.

解. 设平面法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，其在三轴上的截距为 d，则有

$$\begin{cases} a(d-5)+b(0+7)+c(0-4)=0, \\ a(0-5)+b(d+7)+c(0-4)=0, \\ a(0-5)+b(0+7)+c(d-4)=0. \end{cases}$$

解得 $a=b=c$，故平面方程为 $(x-5)+(y+7)+(z-4)=0$. □

8.3 二次曲面

8.3.8

一动点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离，试求此动点 P 的轨迹，并判定它是什么曲面.

解. 由题对 P 有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|.$$

整理得 $x^2+y^2=-8z+16$. 故其为曲线

$$\begin{cases} x^2=-8z+16, \\ y=0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转所得的曲面. □

8.4 其它常用坐标系和坐标变换

第 8 章综合习题