50. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 23. 3. 2012

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Potapljač želi v morju postaviti lebdečo sondo. Da bi sonda obmirovala na želeni globini, ji doda nekaj uteži in jo pritrdi na zračno blazino, ki jo napolni z zrakom iz svoje jeklenke. Blazina ima maso 2,25 kg, največja prostornina pa je lahko 200 dm^3. Sonda ima prostornino 50 dm^3, prostornina uteži pa je zanemarljivo majhna.

   a) Kolikšna je masa sonde z utežmi, da sonda in z zrakom napolnjena blazina lebdita tik pod vodno gladino?

   b) Potapljač se s sondo in blazino potopi na globino 30 m in z zrakom iz svoje jeklenke ponovno napolni blazino. Kolikšno maso uteži mora dodati ali odvzeti, da sonda lebdi v tej globini?

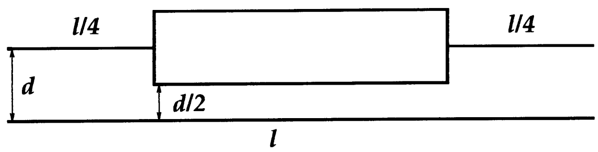
   Gostota vode je 1000 kg/m^3, temperatura vode na gladini je 20 °C, na globini 30 m pa 15 °C. Zračni tlak na vodni gladini je 101,3 kPa. Kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol, splošna plinska konstanta je 8300 J/kmolK.

   Potapljač ima v jeklenki stisnjen zrak in na dani globini blazino vedno napolni do največje prostornine; prav tako tudi poskrbi, da je tlak v blazini enak okoliškemu.

2. Po dveh vzporednih žicah z dolžino l = 1 m v razmiku d = 2 cm, tečeta tokova I = 30 A v isto smer.

   a) S kolikšno silo privlači spodnja žica zgornjo? Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

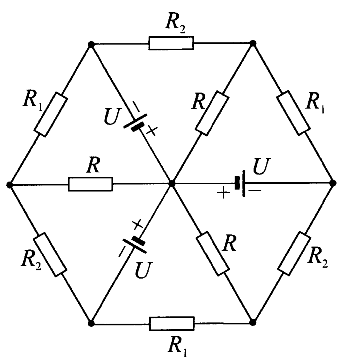
   b) Zgornjo žico preoblikujemo tako, kot kaže slika (osnovnica okvira je dolga $l/2$, višina pa d). Presek vseh žic je enak. Kolikšna je sedaj sila spodnje žice na zgornje vezje (okvir in oba odseka z dolžinama po $l/4$), če se tok v odsekih z dolžinama po $l/4$ ne spremeni?



   c) Žice v pravokotniku zamenjamo z žicami iz enake kovine, tako da sta preseka žic v spodnji in zgornji veji različna. Kolikšno naj bo razmerje ploščin presekov žic, da bo sila spodnje žice enaka kot v primeru a). Katera, zgornja ali spodnja, žica naj bo debelejša? Tok se v odsekih z dolžinama po $l/4$ ne spremeni.

   V vseh primerih računaj silo tako, kot da so žice zelo dolge.

3. V vezje na sliki so kot izvir priključene tri baterije, vse z enako gonilno napetostjo U = 9 V in zanemarljivim notranjim uporom. V vezju imamo še tri upornike z uporom R = 150 Ω, tri upornike z R_1 = 90 Ω in tri upornike z R_2 = 60 Ω. *Namig*: Razmisli, ali so tokovi skozi enake elemente enaki.



   a) Kolikšen tok teče skozi posamezno baterijo?

   b) Kolikšna moč se troši v tem vezju?

Skupina II – rešitve

1. *Podatki:* $m_B = 2{,}25$ kg, $V_B = 200$ dm^3, $V_S = 50$ dm^3, $h = 30$ m, $T_0 = 20$ °C, $T_1 = 15$ °C, $p_0 = 101{,}3$ kPa, $M = 29$ kg/kmol, $\rho_v = 1000$ kg/m^3.

   a) Vzgon vode, ki izpodrine prostornino sonde in blazine, uravnovesi težo sonde z utežmi, težo blazine in težo zraka v blazini:

$$(V_B + V_S)\rho_v g = (m_B + m_S + m_u)g + V_B \rho_0 g\,.$$

   Pri tem je ρ_0 gostota zraka pri temperaturi T_0 in tlaku p_0:

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0} = 1{,}21\ \mathrm{g/dm^3}\,.$$

   Dobimo

$$m_S + m_u = (V_B + V_S)\rho_v - V_B\rho_0 - m_B = 247{,}5\ \mathrm{kg}\,.$$

   [5 *t.*]

   b) V globini h se spremeni gostota zraka

$$\rho_1 = \frac{(p_0 + \rho g h)M}{R T_1} = 4{,}80\ \mathrm{g/dm^3}\,.$$

   Podobno kot pri a) sedaj velja (prostornine se ne spremenijo):

$$(V_B + V_S)\rho_v g = (m_B + m_S + m_u + \Delta m)g + V_B \rho_1 g\,.$$

   Spremeni se le masa uteži in masa zraka v blazini:

$$\Delta m = V_B(\rho_0 - \rho_1) = -720\ \mathrm{g}\,.$$

   Odvzeti moramo za 720 g uteži. [5 *t.*]

2. *Podatki:*

   Glej nalogo III a) – c).

   a) [2 *t.*], b) [3 *t.*], c) [5 *t.*]

3. *Podatki:* $U = 9$ V, $R = 150\,\Omega$, $R_1 = 90\,\Omega$, $R_2 = 60\,\Omega$

a) Skozi vse enake upornike tečejo enaki tokovi, prav tako tečejo enaki tokovi skozi baterije. Skozi R naj teče tok I iz središča navzven, skozi R_1 tok I_1 v smeri urinega kazalca in skozi R_2 v obratni smeri. Velja

$$I = I_1 + I_2 .$$

Zapišimo še 2. Kirchhoffov izrek za sklenjeni krog *baterija* – R – R_1 in sklenjeni krog *baterija* – R – R_2:

$$U = RI + R_1 I_1 ,$$

$$U = RI + R_2 I_2 .$$

Enačbi odštejemo in dobimo

$$0 = R_1 I_1 - R_2 I_2 \qquad \text{ali} \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_2}\, I_1 .$$

Iz prve enačbe sledi

$$U = R(I_1 + I_2) + R_1 I_1 = \left(R + \frac{RR_1}{R_2} + R_1\right) I_1$$

in

$$I_1 = \frac{UR_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2} = 19{,}4\,\mathrm{mA}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2}\, I_1 = \frac{UR_1}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2} = 29{,}0\,\mathrm{mA}$$

$$I = I_1 + I_2 = 48{,}4\,\mathrm{mA}$$

[7 *t.*]

b) Skupna moč je enaka

$$P = 3(RI^2 + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) = 1{,}35\,\mathrm{W} .$$

[3 *t.*]

50. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 23. 3. 2012

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Leteče lampijone so Kitajci poznali že 300 let pred našim štetjem. To so majhni baloni na topel zrak. Balon ima polmer 0,7 m in tehta samo 13 g (skupaj z gorivom in gorilnikom). Zrak v balonu segreva majhen gorilnik z močjo 250 W. Toplotna prevodnost plašča balona je 0,011 W/mK, debelina plašča pa 0,9 mm. Lampijone spuščamo s tal pri temperaturi 7 °C.

   a) Kolikšna rezultanta sil deluje na lampijon pri tleh?

   b) Izračunaj, kolikšno ravnovesno višino dosežejo lampijoni.

   Tlak pri tleh je 101 kPa. Kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol, splošna plinska konstanta je 8300 J/kmolK. Predpostavi, da se temperatura z višino ne spreminja. Prostornina lampijona je ves čas konstantna.

   Pri računanju smiselno upoštevaj, da se gostota in tlak z višino le malo spreminjata, zato lahko v nekaterih izrazih za tlak in gostoto zraka vzameš kar vrednosti pri tleh.

2. Vodoravno zapornico, ki zapira vhod na parkirišče, ponavadi dviga motor, ki ga napaja elektrika iz omrežja. Kaj lahko pa se zgodi, da kakšen dan pride do izpada elektrike – takrat mora zapornico lastnoročno odpirati in zapirati vratar.

   a) Avto je peljal mimo zapornice, ki je v navpičnem položaju. Vratar jo z rahlim sunkom (le spravi jo iz ravnovesja) spet zapre. Kolikšna je kotna hitrost zapornice v vodoravni legi? Zapornica je vrtljiva okrog enega krajišča.

   b) Pripeljal je naslednji avto. S kolikšnim sunkom sile mora vratar suniti zapornico, da se bo ravno ustavila v navpični legi? Sune jo v krajišču, v navpični smeri. Zapornica je vrtljiva okrog drugega krajišča.

   Zapornica tehta 5 kg in je dolga 3 m. Obravnavamo jo kot homogeno togo palico, katere vztrajnostni moment okrog središča je $mr^2/12$, kjer je r dolžina palice.

3. Po dveh vzporednih žicah z dolžino $l = 1$ m v razmiku $d = 2$ cm, tečeta tokova $I = 30$ A v isto smer.

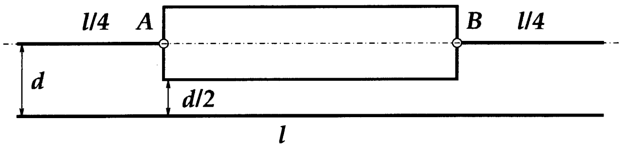
   a) S kolikšno silo privlači spodnja žica zgornjo? Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

   b) Zgornjo žico preoblikujemo tako, kot kaže slika (osnovnica okvira je dolga $l/2$, višina pa d). Presek vseh žic je enak. Kolikšna je sedaj sila spodnje žice na zgornje vezje (okvir in oba odseka z dolžinama po $l/4$), če se tok v odsekih z dolžinama po $l/4$ ne spremeni?

   c) Žice v pravokotniku zamenjamo z žicami iz enake kovine, tako da sta preseka žic v spodnji in zgornji veji različna. Kolikšno naj bo razmerje ploščin presekov žic, da bo sila spodnje žice enaka kot v primeru a). Katera, zgornja ali spodnja, žica naj bo debelejša? Tok se v odsekih z dolžinama po $l/4$ ne spremeni.

   d) Okvir se lahko prosto vrti okoli (navidezne) osi skozi točki A in B. Kolikšna je frekvenca nihanja v primeru c) pri majhnih zasukih od ravnovesne lege? Dolžinska gostota kovine, iz katere je gornji krak žice, je 60 g/m.

   V vseh primerih računaj silo tako, kot da so žice zelo dolge. Teže ne upoštevamo. Pri računanju vztrajnostnega momenta zanemari navpični stranici okvira. Za majhne zasuke velja $\varphi \approx \sin\varphi \approx \tan\varphi$.



Skupina III – rešitve

1. *Podatki:*

1. *Podatki:* $r = 0{,}7$ m, $m = 13$ g, $P = 250$ W, $\lambda = 0{,}011$ W/mK, $d = 0{,}9$ mm, $T = 7\,°\mathrm{C}$, $p_0 = 101$ kPa, $M = 29$ kg/kmol.

   a) Razliko med notranjo in zunanjo temperaturo dobimo iz podanega toplotnega toka, ki teče skozi plast s površino $S = 4\pi r^2$ in debelino d:

$$P = \frac{S\lambda(T_n - T_z)}{d}, \qquad T_n = T_z + \frac{Pd}{4\pi r^2 \lambda} = 3{,}3\,\mathrm{K}.$$

   Sila na lampijon je enaka razliki med vzgonom in težo lampijona in zraka v njem

$$F = \frac{4\pi r^3}{3}(\rho_z - \rho_n)g - mg = \frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M}{R}\left(\frac{1}{T_z} - \frac{1}{T_n}\right)g - mg = 79\,\mathrm{mN}.$$

   [4 *t.*]

   b) Ko lampijon doseže ravnovesje, je vsota sil nanj enaka 0:

$$\frac{4\pi r^3}{3}(\rho_z' - \rho_n)g - mg = 0,$$

   pri tem se gostota zraka v notranjosti ne spremeni, pri računanju gostote okoliškega zraka pa moramo upoštevati, da se tlak zmanjša, $p = p_0 - \rho g h$. Ker je po predpostavki razlika majhna, lahko v tej zvezi vzamemo za gostoto kar gostoto zraka pri tleh:

$$p = p_0 - \rho_0 g h, \qquad \rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_z} = 1{,}26\,\mathrm{kg/m^3}.$$

   Dobimo

$$\frac{4\pi r^3}{3}\left(\frac{(p_0 - \rho_0 g h)M}{R T_z} - \frac{p_0 M}{R T_n}\right)g - mg = 0.$$

   [4 *t.*]

   Račun od tu dalje se nekoliko poenostavi, če opazimo, da je vsota prvega, tretjega in zadnjega člena na levi ravno sila pri tleh:

$$F - \frac{4\pi r^3 \rho_0 g}{3}\frac{Mgh}{R T_z} = 0, \qquad h = \frac{3F\,R T_z}{4\pi r^3 \rho_0 M g^2} = 36\,\mathrm{m}.$$

   V nasprotnem primeru je splošni rezultat nekoliko bolj dolgovezen:

$$h = \frac{3RT_z}{4\pi r^3 \rho_0 M g}\left[\frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M}{R}\left(\frac{1}{T_z} - \frac{1}{T_n}\right) - m\right] = \frac{p_0}{\rho_0 g}\frac{\Delta T}{(T + \Delta T)} - \frac{3mRT_z}{4\pi r^3 \rho_0\, M g}.$$

   [2 *t.*]

2. *Podatki:* $m = 5$ kg, $l = 3$ m.

a) Ohranja se vsota kinetične rotacijske energije in potencialne energije. Na začetku ima zapornica potencialno energijo $W_p = mg\,\frac{l}{2}$, na koncu pa kinetično $W_k = \frac{1}{2}J\omega^2$.

Vztrajnostni moment okoli krajišča izračunamo s Steinerjevim izrekom:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\,ml^2.$$

[2 *t.*]

Iz ohranitve energije sledi

$$\frac{1}{6}\,ml^2\,\omega^2 = mg\,\frac{l}{2}\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 3{,}13\;\mathrm{s}^{-1}\,.$$

[4 *t.*]

b) Navor sunka sile spremeni vrtilno količino zapornice od vrednosti 0 do vrednosti $J\omega$, pri čemer je ω enaka hitrosti, ki jo je zapornica imela na koncu v primeru a):

$$l\,F\Delta t = J\omega = \frac{1}{3}\,ml^2\,\omega\,, \qquad F\Delta t = \frac{ml}{3}\,\omega = m\sqrt{\frac{gl}{3}} = 15{,}6\;\mathrm{Ns}\,.$$

[4 *t.*]

3. *Podatki:* $l = 1$ m, $d = 2$ cm, $I = 30$ A, $\rho_l = 60$ g/m.

a)

$$F_0 = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d} = 9 \text{ mN}.$$

2t

[1 *t.*]

b) Odseka z dolžinama $l/2$ prispevata polovico izraza pri a), okvir pa

$$F_{\text{okvir}} = \frac{\mu_0 I \frac{1}{2} I \frac{l}{2}}{2\pi \frac{d}{2}} + \frac{\mu_0 I \frac{1}{2} I \frac{l}{2}}{2\pi \frac{3d}{2}}.$$

Skupaj torej

$$F = \frac{7\mu_0 I^2 l}{12\pi d} = \frac{7}{6} F_0 = 10{,}5 \text{ mN}.$$

3t

[2 *t.*]

c) Če z $S_2/S_1 = \eta$ označimo razmerje med presekom žice v zgornji veji in žice v spodnji veji okvira, za tokova v vejah velja

$$\frac{I_2}{I_1} = \eta \quad \text{in} \quad I_1 + I_2 = I, \quad \text{od koder izrazimo} \quad I_1 = \frac{I}{1+\eta}, \quad I_2 = \frac{\eta I}{1+\eta}.$$

V tem primeru lahko sili na spodnjo in zgornjo stranico zapišemo kot

$$F_1 = \frac{\mu_0 I I_1 \frac{l}{2}}{2\pi \frac{3d}{2}} = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\mu_0 I^2 l}{6\pi d} = \frac{\eta F_0}{3(1+\eta)},$$

in

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_2 \frac{l}{2}}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{1}{1+\eta} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{F_0}{1+\eta},$$

Sila je v tem primeru

$$F = \tfrac{1}{2}F_0 + F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}F_0 + \frac{1}{1+\eta}\left[F_0 + \frac{\eta}{3} F_0\right]$$

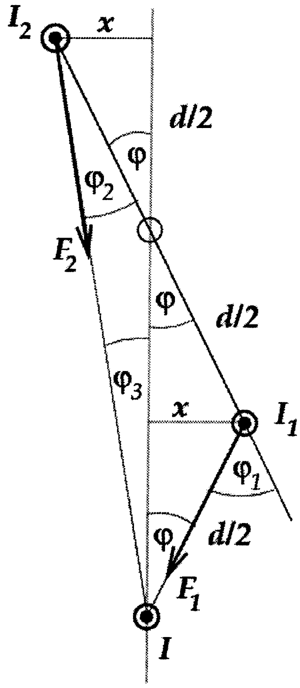
Iz zahteve $F = F_0$, po krajšanju enačbe z F_0, sledi

$$\tfrac{1}{2} = \frac{1}{1+\eta}\left[1 + \frac{\eta}{3}\right], \qquad 3(1+\eta) = (6+2\eta), \qquad \eta = 3.$$

Sile na vse odseke so enake in enake $\frac{1}{4} F_0$, kar bi lahko tudi vnaprej uganili. Zgornja žica je debelejša. [3 *t.*]

5t

d)



Izračunajmo navor, ki deluje na okvir, ko okvir za majhen kot φ zasučemo iz mirovne lege. Sila, ki deluje na zgornjo stranico, je po velikosti enaka

$$F_2 = \frac{1}{4} F_0$$

in enako sila na spodnjo stranico, F_1. Razdalja do osi je pri obeh silah $d/2$, kota φ_1 in φ_2 med silo in ustreznim $\vec{r}$, pa izluščimo iz slike.
(Na sliki so koti pretirano veliki.) Velja $x \ll d/2$ in v trikotnikih s kotom φ na vrhu se daljša kateta zanemarljivo malo razlikuje od hipotenuze; za obe bomo privzeli dolžino $d/2$. Dobimo $\varphi_1 = 2\varphi$ ter

$$\tan\varphi_3 \approx \varphi_3 = \frac{x}{\frac{3d}{2}}, \quad \tan\varphi \approx \varphi = \frac{x}{\frac{d}{2}}, \quad \varphi_3 \approx \frac{\varphi}{3}$$

in končno

$$\varphi_2 = \varphi - \varphi_3 = \frac{2\varphi}{3}.$$

Navor na okvir sedaj zapišemo

$$M = \frac{d}{2} F_1 \sin\varphi_1 - \frac{d}{2} F_2 \sin\varphi_2 \approx \frac{d}{2}\frac{F_0}{4}\varphi_1 - \frac{d}{2}\frac{F_0}{4}\varphi_2 = \frac{d}{2}\frac{F_0}{4}\frac{4\varphi}{3} = \frac{dF_0}{6}\varphi$$

in suče okvir v mirovno lego. Tako kot pri sučnem nihalu lahko zapišemo $M = D\varphi$, $D = dF_0/6$.

Za frekvenco nihanja pri dovolj majhnih zasukih velja $\omega^2 = D/J$. Če zanemarimo navpični prečki, je vztrajnostni moment enak vztrajnostnemu momentu dveh točkastih delcev z masama m_1 in m_2 na razdalji $d/2$ od osi vrtenja. Za vztrajnostni moment dobimo

$$J = m_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4m_2}{3}\frac{d^2}{4} = \frac{\rho_l l}{6} d^2,$$

pri čemer smo upoštevali, da je masa spodnje žice m_1 tri krat manjša od mase zgornje.

Za frekvenco nihanja končno sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{F_0}{\rho_l l d}} = \sqrt{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho_l d^2}} = 2{,}74\,\mathrm{s}^{-1}.$$

[4 *t*.]