1 Learning Outcome

Differentiation:

- ☐ gradient of the graph of any function
- ☐ derivative meaning and notation
- ☐ rules for finding derivative, including power rule, sum or differences of functions, constant multiplications
- ☐ Chain Rule for composite functions
- ☐ find tangents and gradients using differentiation
- ☐ connected rates of change
- ☐ locate stationary point
- ☐ distinguish between local maximum and local minimum
- ☐ increasing and decreasing nature of function
- ☐ sketch the curve

Integration:

- ☐ integration as the reversee process of differentiation
- ☐ integrate $(ax+b)^n$
- ☐ integration rules for sums and difference, constant multiples
- ☐ evaluate definite integral
- ☐ eveluate improper integral
- ☐ find area of a region bounded by two functions
- ☐ find the volume of revolution abour one axis

2 Key Concepts

1. 导数 derivative 是原函数 $f(x)$ 在任意 x 处的切线的斜率
2. 导数的标记手段还是很多的，比如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y', f'(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ 等
3. 求算导数的 power rule：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$
4. constant multiplication 运算：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} k \cdot f(x) = k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$
5. 导数求算中的加减法运算：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \pm g(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. 导数求算中的 Product Rule：$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
7. 导数求算中的 Quotient Rule：$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
8. 导数求算中的 Chain Rule：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
9. 寻找函数 $y = f(x)$ 在某一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线 tangent line 的做法：首先找出导数 $f'(x)$，然后将 x_0 代入到导数表达式中得到 $f'(x_0)$，最后用点斜式 point-slope 的方式表达出切线 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
10. 法线 normal line 就是与切线互相垂直的直线，因此依旧采用点斜式的方式来表达 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
11. 驻点 stationary point 是导数为 0 处，或者说切线斜率为 0 处。因此必定需要求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 绝对没有错
12. 原函数的递增递减性质与其导数的正负性紧密相关：原函数递增，导数必定大于 0；导数大于 0，也可以推导出原函数递增；反之一样的结论。因此可以求算原函数单调性的区间
13. 相关变化率问题 connected rate of change，必定会有两个量随时间发生变化假设为 A 和 B。在解决这一类问题时必定会利用到 chain rule，因此可以直接写出 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$。去题目当中找寻给定的 rate of change，以及 A 和 B 之间的函数关系就可以了。
14. 积分 integration 是微分 differentiation 的反向运算，因此有如果 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数的话，那么 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$，即对 $f'(x)$ 求算不定积分，结果必定为 $f(x)$ 的一系列函数

15. 利用 integration by substitution 可以求算 $\int(ax+b)^n$，结果为 $\frac{1}{a\cdot(n+1)}\cdot(ax+b)^{n+1}+C$

16. 积分求算过程中的 constant multiplication 运算:$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$。因此常系数可以直接从被积表达式 integrand 拿出来

17. 求算定积分 definite integral, 首先会在不定积分的基础上增加上下限，其次计算结果为一个常数值。和不定积分的关系是：$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$

18. improper integral 反常积分当中在积分上下限中包含无穷，或者间断点，通常是 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 或者是 $\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ 的类型，对于这类无法直接带入上下限，或者函数无定义的情况，采用极限的手段来求算这一类积分

19. 求算由两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 包围的面积时，第一步需要找出积分上下限，或者两个函数的交点，$f(x)=g(x)$，确定出 $x=a$ 和 $x=b$ 作为积分上下限；第二步，列出面积积分表达式 $A=\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$（高的减去低的）；第三部求解定积分就可以了。但是注意，有的情况下需要水平切割，因此微元是 $\mathrm{d}y$，那么积分的上下限需要转换为 y 的最大最小值，且 integrand 要变成 $x_2(y)-x_1(y)$

20. 求算旋转体的体积，仅需要利用微元转出来的结果是一个薄薄的 disc 或者 washer。这个薄圆片的厚度是 $\mathrm{d}x$，表面积为 πr^2。所以只需要找出来半径 r 与 x 的表达式即可。如果转出来的旋转体是空心的的。表面积需要改写为 $r_2^2-r_1^2$。r_2 是较大的半径，r_1 是较小的半径，都是关于 x 的表达式。因此最后求算定积分即可 $\int_a^b \pi(f(x))^2\mathrm{d}x$。或者是 $\int_a^b \pi\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]\mathrm{d}x$