ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Semestre d'automne 2021
Prof. Laurent Villard
Francesco Pastore

Physique Numérique I – Exercice 3

à rendre jusqu'au mercredi 24 novembre 2021 sur le site
http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174651

3 Pendule suspendu dans une boîte en mouvement. Mode propre, résonance, chaos et attracteurs étranges. Schéma de Verlet

On considère un pendule simple, constitué d'une masse ponctuelle m, d'une tige rigide de longueur L de masse négligeable, attachée dans une boîte à un point O'. La boîte, définissant un référentiel $\mathcal{R}'$, est en mouvement de *translation* par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du sol. Le point O' est en mouvement circulaire uniforme de fréquence angulaire Ω et de rayon r autour d'un point fixe O de $\mathcal{R}$. Voir figure ci-contre. On tient compte également d'une force de frottement $F_{\text{visc}} = -\kappa \vec{v}\,'$, où κ est un coefficient donné et $\vec{v}\,'$ est la vitesse par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$.

On prendra dans tout cet exercice $m = 0.12\text{kg}$, $L = 0.18\text{m}$, $g = 9.81\text{m/s}^2$.

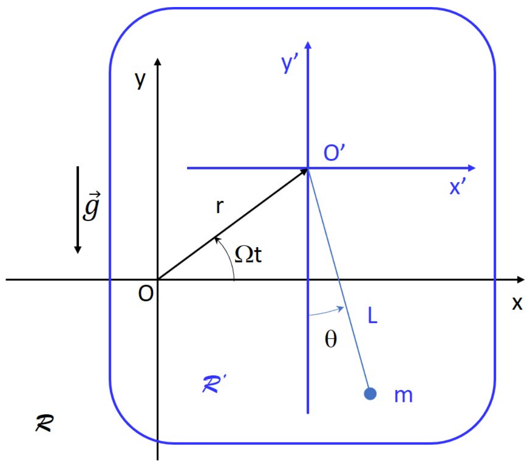

Fig.1 Pendule avec point d'attache O' dans une boîte $\mathcal{R}'$. Le point O' est en mouvement circulaire uniforme par rapport au sol $\mathcal{R}$.

Les buts de cet exercice sont (1) d'étudier divers mouvements possibles du pendule : petits mouvements ($\theta << 1$) en l'absence de force de frottement ($\kappa = 0$) et de mouvement de la boîte ($r = 0$), afin de comparer avec la solution analytique, puis des effets non-linéaires, avec grande amplitude (θ quelconque), frottement ($\kappa \neq 0$) et rotation ($r \neq 0,\ \Omega \neq 0$) ; (2) d'appliquer et de vérifier un schéma numérique du 2e ordre, symplectique, le schéma de Verlet.

3.1 Calculs analytiques

(a) Obtenir l'équation différentielle du mouvement sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\theta, \dot{\theta}, t) \\ f_2(\theta, \dot{\theta}, t) \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Indication : se placer dans le référentiel de la boîte $\mathcal{R}'$.

(b) Obtenir l'expression de l'énergie mécanique, E_{mec}, dans le référentiel de la boîte $\mathcal{R}'$.

(c) Obtenir l'expression de la puissance des forces non-conservatives, P_{nc}, dans le référentiel de la boîte $\mathcal{R}'$.

(d) Calculer la solution dans le cas sans frottement ni mouvement de la boîte, pour de petits mouvements ($\kappa = 0,\ r = 0,\ \theta \ll 1$). *Indication : linéariser les équations.* En particulier, donner l'expression de la fréquence propre ω_0.

3.2 Implémentation en C++

Télécharger les fichiers PendulumMain.cpp, Pendulum.hpp, Verlet.hpp et ParameterScan.m du site Moodle. Dans le code, il faut en particulier implémenter :

(a) le calcul de f_2 du membre de droite de l'Eq.(1) ;

(b) l'intégration selon le schéma de Verlet *(indication : s'inspirer de l'Eq.(2.98) des notes de cours et de l'extension du schéma pour des forces dépendant non seulement de la position mais aussi de la vitesse)* ;

(c) le calcul de l'énergie mécanique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la boîte, E_{mec}.

(d) le calcul de la puissance des forces non conservatives dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la boîte, P_{nc}.

3.3 Simulations et Analyses

On effectue des simulations avec le programme `Pendule` que l'on vient d'écrire. Pour lancer des séries de simulations avec plusieurs valeurs d'un paramètre d'entrée, on peut utiliser, en l'adaptant, le script `ParameterScan.m`.

(a) *Petits mouvements, boîte fixe, sans force de frottement* ($r = 0$, $\kappa = 0$) *:*
Choisir une condition initiale : $\theta_0 = 10^{-10}$ et $\dot{\theta}_0 = 0$.

  (i) Faire une série de simulations avec des Δt différents et montrer que la solution converge vers la solution analytique. (Il suffit ici de simuler une durée t_{fin} de 1 à 2 périodes d'oscillation). *Indication : définir l'erreur*

$$\epsilon = \sqrt{(\theta_n - \theta_a)^2 + (\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_a)^2/\omega_0^2} \qquad (2)$$

  où les subscripts 'n' et 'a' indiquent la solution numérique et la solution analytique, respectivement.

(b) *Grands mouvements, toujours avec* $\kappa = 0$, $r = 0$ *:*

  (i) Faire une série de simulations avec différentes valeurs de θ_0 entre 10^{-2} et $\pi - 10^{-2}$, avec un Δt choisi de telle sorte à être suffisamment précis (se référer à l'étude de convergence du point précédent). Mesurer la période d'oscillation en fonction de l'amplitude θ_0.

  (ii) Pour une valeur de θ_0 pas trop petite, vérifier la conservation de l'énergie mécanique, en faisant une étude de convergence de l'erreur avec Δt.

(c) *Avec excitation circulaire et force de frottement* ($r \neq 0,\ \Omega \neq 0,\ \kappa \neq 0$) *:*

  (i) Résonance : En effectuant des simulations de $t_{fin} = 60$s, avec $r = 0.005$m, $\kappa = 0.01$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, varier la fréquence Ω autour de la fréquence propre ω_0 calculée en 3.1 (d). Pour chaque simulation, mesurer l'amplitude maximale $\max|\theta|$ atteinte et représenter les résultats en fonction de Ω. Discuter le résultat.

  (ii) Chaos : Pour $\Omega = \omega_0$, $\kappa = 0.1$, $\theta_0 = 0$, faire des simulations de $t_{fin} = 100$s avec différentes valeurs de r entre 0.01 et 0.15m. Chercher des types de mouvements différents : périodique (ou quasi-périodique), et chaotique. Dans un cas, vérifier le théorème de l'énergie mécanique $dE_{mec}/dt = P_{nc}$.

(iii) Chaos : pour un cas donnant un comportement chaotique, effectuer une paire de simulations avec des positions initiales différant l'une de l'autre de $\Delta\theta_0 = 10^{-10}$. Représenter sur un graphe lin-log l'écart $|\Delta\theta(t)|$ entre les deux mouvements. Pour comparaison, faire de même pour une paire de simulations dans un cas non chaotique.

(iv) Chaos et convergence numérique : pour un cas donnant un comportement chaotique, comparer les trajectoires obtenues avec des Δt différents mais très petits. Que conclure sur la convergence ?

(d) *Section de Poincaré et attracteurs étranges :*

(i) Pour un cas donnant un comportement chaotique, effectuer de très longues simulations (plusieurs milliers de périodes) et obtenir les sections de Poincaré : ensemble des positions instantanées de l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$ aux instants $t = nT$, où $T = 2\pi/\Omega$ est la période d'excitation et n un entier naturel. *Indication : prendre une simulation avec t_{fin} égal à un multiple entier de T, $t_{fin} = NT$, et un nombre entier m de pas de temps par période, donc $N_{steps} = Nm$. Faire un output tous les m pas de temps fournit donc la section de Poincaré.*

(e) *Facultatif*

- Varier l'amplitude r et la fréquence Ω et essayez d'obtenir différents attracteurs.
- Pour un cas chaotique, varier la condition initiale et montrer que la section de Poincaré reste pratiquement la même.
- Etudier le cas d'une boîte en mouvement oscillatoire vertical.
- ...

3.4 Soumission du rapport et du code C++

Rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentées et discutées en détail.
Aux points mentionnés ci-dessus, on attribue **[5 pts]** à la qualité de la présentation de votre rapport (clarté des arguments, lisibilité des figures, etc).
N.B. On trouve plusieurs documents LaTeX (introduction, examples, références) dans un dossier spécifique sur Moodle (Dossier LaTeX).

(a) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice3_Nom1_Nom2.pdf`, ainsi que le fichier source LaTeX `RapportExercice3_Nom1_nom2.tex`.

(b) Préparer le fichier source C++ `Exercice3_Nom1_Nom2.cpp`.

(c) Si vous avez fait des calculs avec Matlab ou Python, préparer le(s) fichier(s) script(s) Matlab `Analyse_Nom1_Nom2.m` ou Python `Analyse_Nom1_Nom2.py` correspondants.

(d) Déposez les fichiers sur Moodle en cliquant ici.