نظریه زبان ها و ماشین ها

مدرس:
فرشید شیرافکن

دانشجوی دکتری دانشگاه تهران
(کارشناسی و کارشناسی ارشد : کامپیوتر نرم افزار) (دکتری: بیو انفورماتیک)

بخش سوم (قسمت ۱)

ماشین تورینگ

ماشین تورینگ یک کامپیوتر ساده دارای واحد پردازشی با حافظه محدود و نواری با ظرفیت نامحدود است.

دستوراتی که این ماشین می‌تواند انجام دهد بسیار محدود است.

ماشین تورینگ از ماشین‌های متناهی و پشته‌ای کاملتر است.

ماشین تورینگ پذیرنده زبانهای منظم، مستقل از متن، وابسته به متن و بدون محدودیت است.

ماشین تورینگ $\mathbf{M}$ یک هفت‌تایی است که به صورت $\mathbf{M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)}$ تعریف می‌شود.

$\mathbf{Q}$: مجموعه حالات داخلی

$\mathbf{\Sigma}$: الفبای ورودی

$\mathbf{\Gamma}$: الفبای نوار

$\mathbf{\delta}$: تابع انتقال

$\mathbf{B}$: سمبل خالی (متعلق به Γ است و در Σ نیست.)

$\mathbf{q_0}$: حالت شروع

$\mathbf{F}$: مجموعه حالت های پایانی

نوار ماشین تورینگ به سلول‌هایی تقسیم شده و هر سلول قادر به نگهداری فقط یک سمبل است.

به این نوار یک هد خواندن- نوشتن متصل است که می تواند به سمت راست یا چپ نوار حرکت کرده و در هر حرکت فقط یک سمبل را بخواند و بنویسد.

تابع انتقال δ در تورینگ، به صورت $Q\times\Gamma\rightarrow Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ تعریف می شود.

وضعیت $\delta(q_0,a)=(q_1,b,R)$ یعنی ماشین در وضعیت q_0 بوده و هد a را می بیند. ماشین به وضعیت q_1 رفته و a با b جایگزین می‌شود و هد به سمت راست می‌رود.

مثال

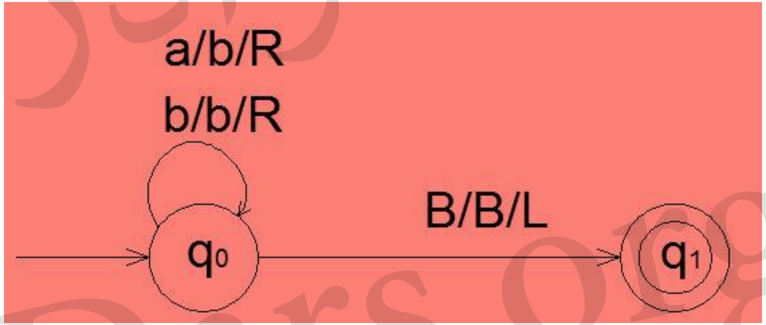
عملکرد ماشین تورینگ زیر چیست؟

$$Q=\{q_0,q_1\},\quad \Sigma=\{a,b\},\quad \Gamma=\{a,b,B\},\quad F=\{q_1\}$$

$$\delta(q_0,a)=(q_0,b,R)$$

$$\delta(q_0,b)=(q_0,b,R)$$

$$\delta(q_0,B)=(q_1,B,L)$$



با فرض اینکه رشته aa بر روی نوار باشد :

$$q_0aa \;\; \text{a} \;\; bq_0a \;\; \text{a} \;\; bbq_0B \;\; \text{a} \;\; bq_1b$$

ماشین تورینگ در نقش پذیرنده زبان

زبانی که ماشین تورینگ M می‌پذیرد به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$L(M)=\{w\in\Sigma^{+}: q_f\in F,\ x_1,x_2\in\Gamma^{*},\ q_0 w \overset{*}{\vdash} x_1 q_f x_2\}$$

بر اساس این تعریف ورودی w روی نوار نوشته شده و در هر یک از طرفین آن از سمبل فضای خالی استفاده می شود.

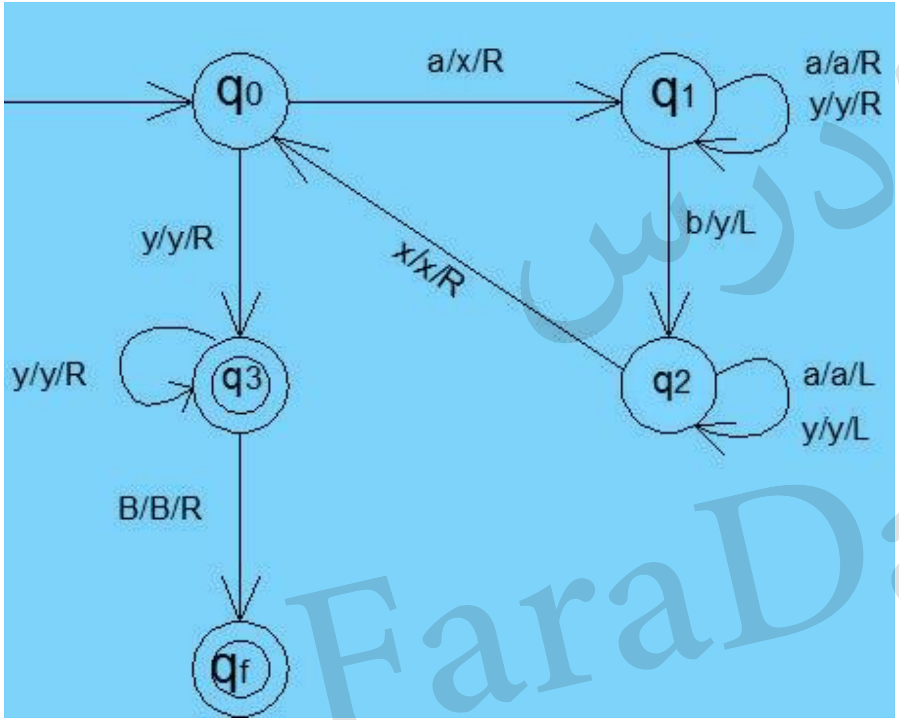
اگر w عضو L(M) نباشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می افتد :

۱– ماشین در یک حالت غیر پایانی متوقف می شود.

۲– ماشین به یک حلقه بی نهایت وارد شده و هرگز متوقف نمی شود.

بنابراین، هر رشته ای که باعث توقف M نشود، عضو L(M) نمی باشد.

مثال



ماشین تورینگی پذیرنده زبان:

$$\{a^n b^n : n \geq 1\}$$

بعنوان مثال، ورودی **aabb** پیکربندی های متوالی زیر را ایجاد می کند :

$\mathbf{q_0aabb}$ a $\mathbf{xq_1abb}$ a $\mathbf{xaq_1bb}$ a $\mathbf{xq_2ayb}$ a

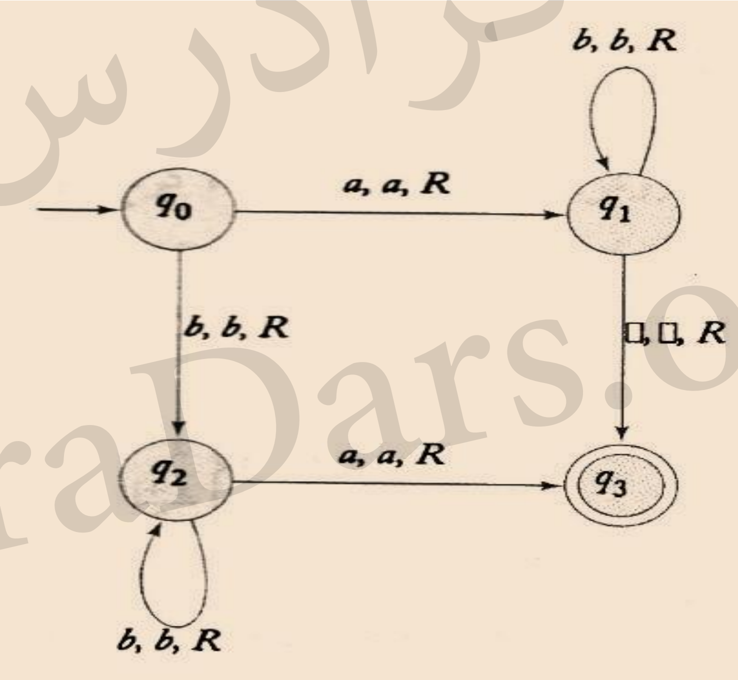
a $\mathbf{q_2xayb}$ a $\mathbf{xq_0ayb}$ a $\mathbf{xxq_1yb}$ a $\mathbf{xxyq_1b}$ a $\mathbf{xxq_2yy}$ a

a $\mathbf{xq_2xyy}$ a $\mathbf{xxq_0yy}$ a $\mathbf{xxyq_3y}$ a $\mathbf{xxyyq_3B}$ a $\mathbf{xxyyBq_fB}$.

مثال

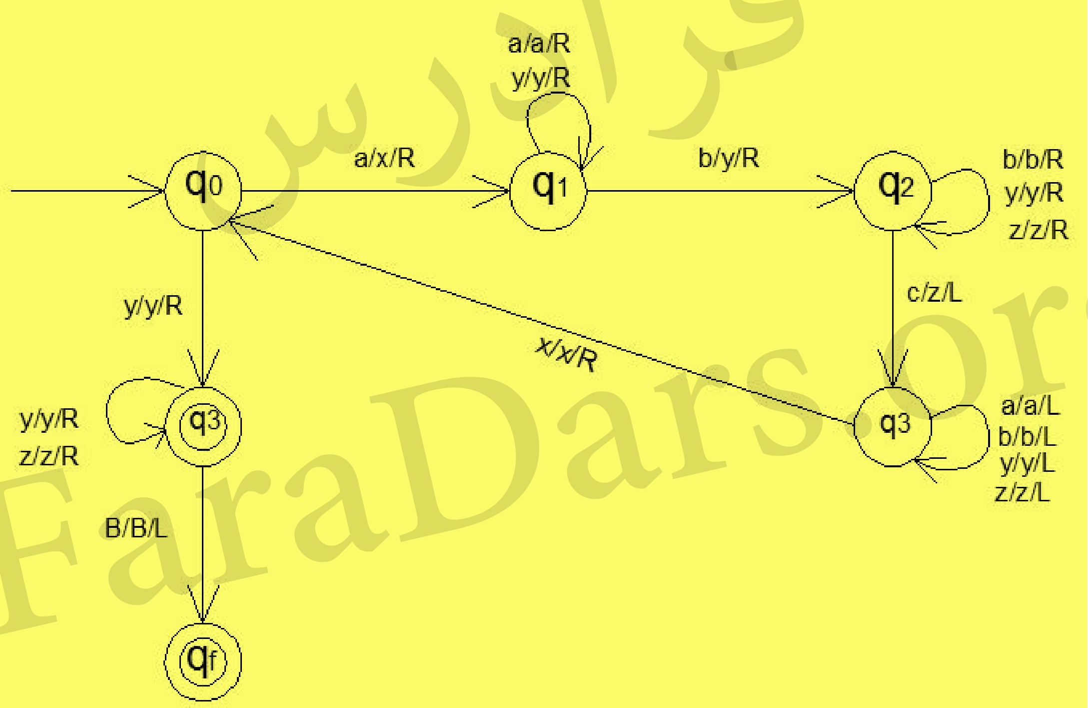
ماشین تورینگی پذیرنده زبان:

$$L = \{ab^n : n \geq 0\} \cup \{b^n a : n \geq 1\}$$



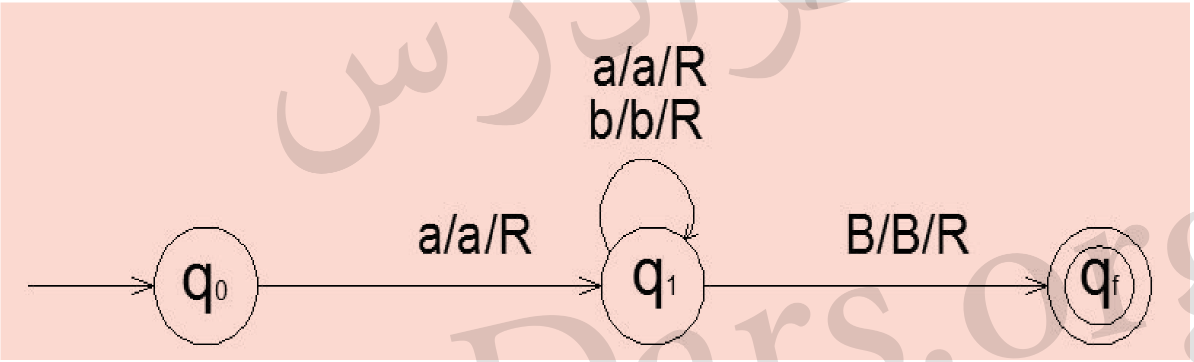
مثال

ماشین تورینگی پذیرنده زبان: $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$



مثال

ماشین تورینگی پذیرنده زبان: $L(a(a+b)^*)$



پس ماشین تورینگ می‌تواند زبان منظم را بپذیرد.

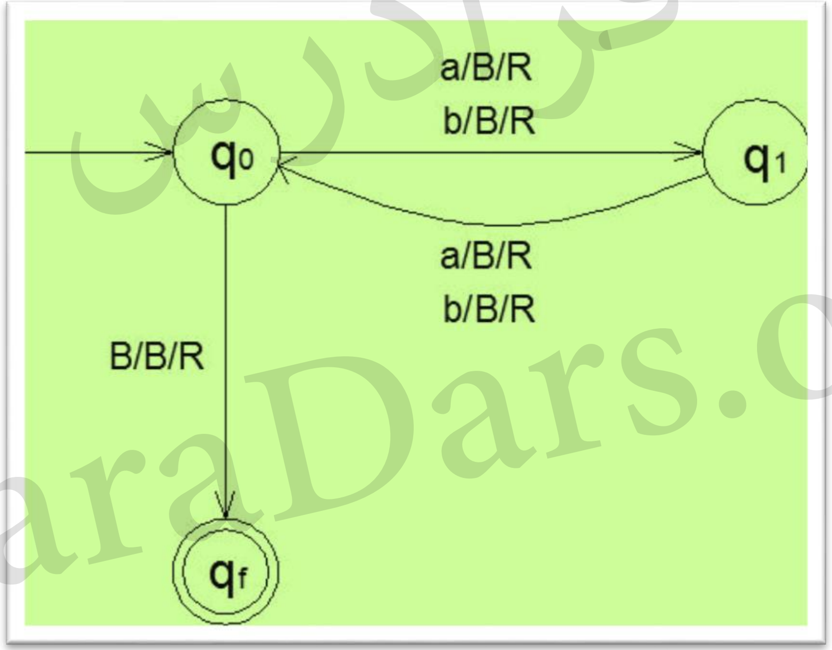
مثال

ماشین تورینگی پذیرنده زبان: $L = L(aba^*b)$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$$
$$\delta(q_1, b) = (q_2, b, R)$$
$$\delta(q_2, a) = (q_2, a, R)$$
$$\delta(q_2, b) = (q_f, b, R)$$

مثال

یک ماشین تورینگ طراحی کنید که زبان $L = \{w : |w|$ زوج است$\}$



مثال

یک ماشین تورینگ طراحی کنید که زبان $L=\{a^i b^j c^k : k=i\times j\ ,\ i,j,k\geq 1\}$ را تصمیم گیری کند.

کارهای انجام شده روی رشته ورودی توسط ماشین :

۱– ابتدا رشته ورودی را از چپ به راست پویش کرده تا مطمئن شود که رشته ورودی عضو $a^*b^*c^*$ است و اگر اینطور نبود به حالت عدم پذیرش می رود.

۲– هد به انتهای سمت چپ بر گردانده می شود.

۳– یکی از a ها را علامت زده و آنقدر به راست می رود تا به یک نماد b برسد. سپس b ها را با c ها تطبیق می‌دهد، یعنی با علامت زدن یک b، یک c را نیز علامت می زند. این کار را تا تمام شدن b ها ادامه می‌دهد.

۴- تمام b های علامت گذاری شده دوباره به نماد b برگردانده می شوند. تا زمانی که a باقی مانده باشد، مرحله سوم تکرار می شود. اگر تمام a ها علامت گذاری شده باشند، بررسی می شود که تمام c ها نیز علامت گذاری شده باشند. در این صورت رشته پذیرفته شده و در غیر این صورت رشته رد می شود.

این زبان را نمی توان با ماشین پشته ای پذیرفت.

ماشین تورینگ به عنوان مترجم

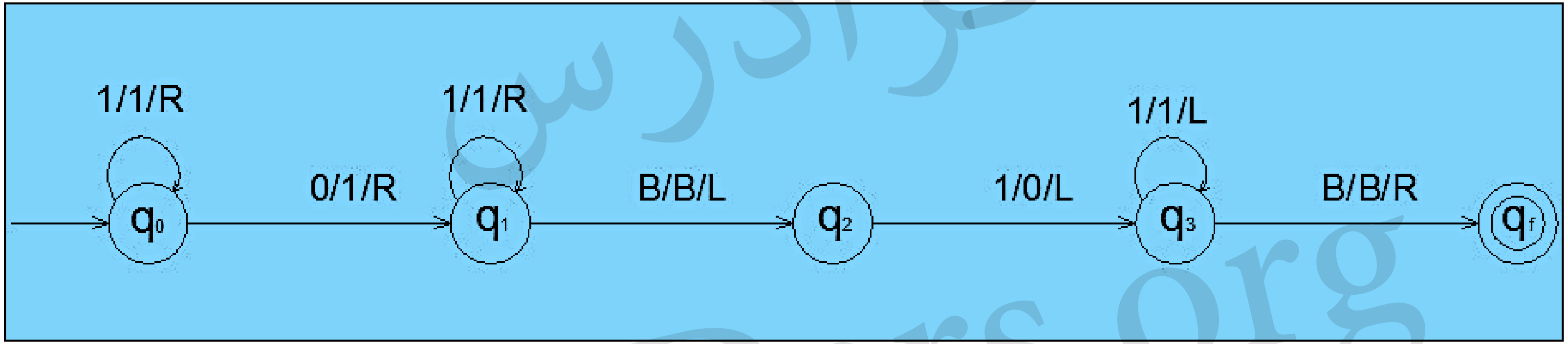
ماشین تورینگ علاوه بر دارا بودن خاصیت پذیرش زبان‌ها، یک مدل ساده انتزاعی برای کامپیوترهای رقمی می‌باشد. در واقع تمامی توابع ریاضی معمولی توسط ماشین تورینگ، محاسبه پذیر بوده و میزان پیچیدگی آنها، تاثیری بر این امر نخواهد داشت.

تابع f محاسبه پذیر توسط تورینگ گفته می شود، اگر ماشین تورینگ مفروض M وجود داشته باشد که برای همه w های موجود در دامنه تابع، داشته باشیم:

$$q_0 w \xrightarrow{*} q_f f(w)$$

مثال

ماشین تورینگی برای محاسبه جمع دو عدد صحیح مثبت x و y طراحی کنید.



بررسی جمع ۱۱۱ با ۱۱ :

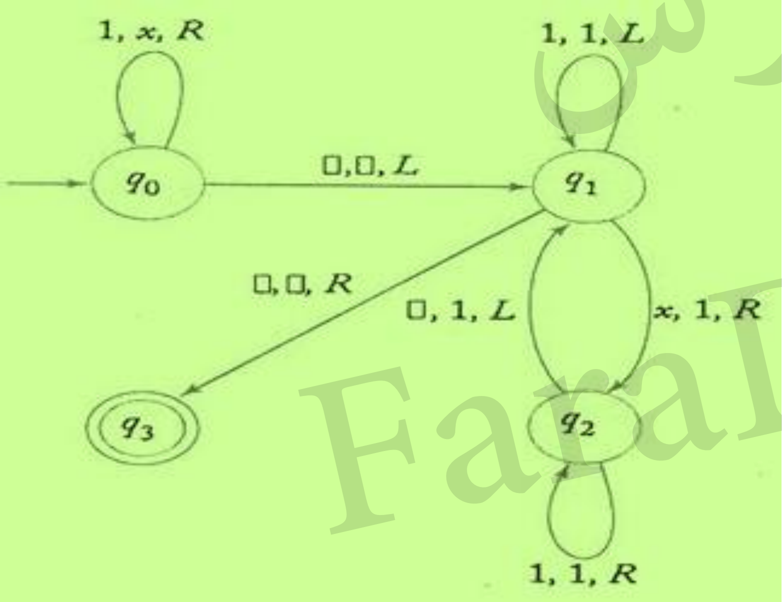
$q_0 111011$ a $1q_0 11011$ a $11q_0 1011$ a $111q_0 011$ a $1111q_1 11$ a $11111q_1 1$

a $111111q_1 B$ a $11111q_2 1$ a $1111q_3 10$ a ... a $q_3 B111110$ a $Bq_f 111110$.

مثال

ماشین تورینگ طراحی کنید که رشته هایی از ۱ را کپی کند. مثلا با دادن ۱۱ خروجی ۱۱۱۱ حاصل شود.

(یعنی برای هر $w \in \{1\}^+$ ، مقدار $q_0 w \overset{*}{\vdash} q_f ww$ را محاسبه کند.)



مراحل کار:

۱– هر یک از ۱ ها را با یک x جایگزین می کنیم.

۲– راست ترین x را پیدا کرده و آنرا با ۱ جایگزین می کنیم.

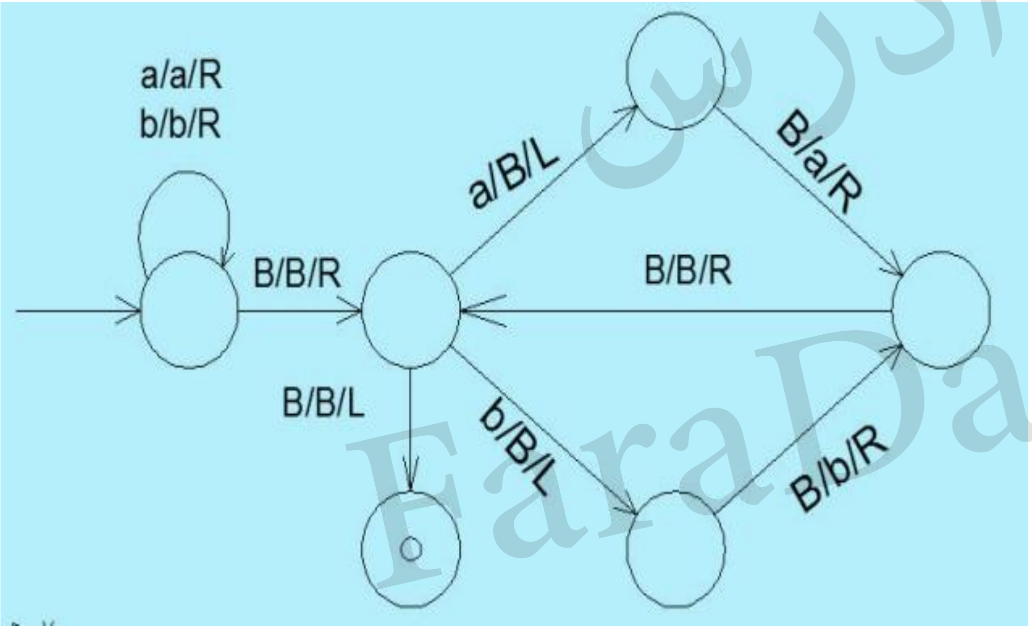
۳– به اولین سمبل خالی سمت راست فعلی رفته و در آنجا یک ۱ ایجاد می کنیم.

۴– مراحل ۲و۳ را آنقدر تکرار می کنیم تا هیچ x دیگری وجود نداشته باشد.

مثال

در الفبای {a,b} ، ماشین تورینگی برای اتصال دو رشته به یکدیگر طراحی کنید.

$$q_0 w_1 B w_2 \overset{*}{\vdash} q_f w_1 w_2$$



بین دو رشته یک بلانک قرار دارد.

ابتدا تمام حروف رشته اول را خوانده تا به B برسیم،

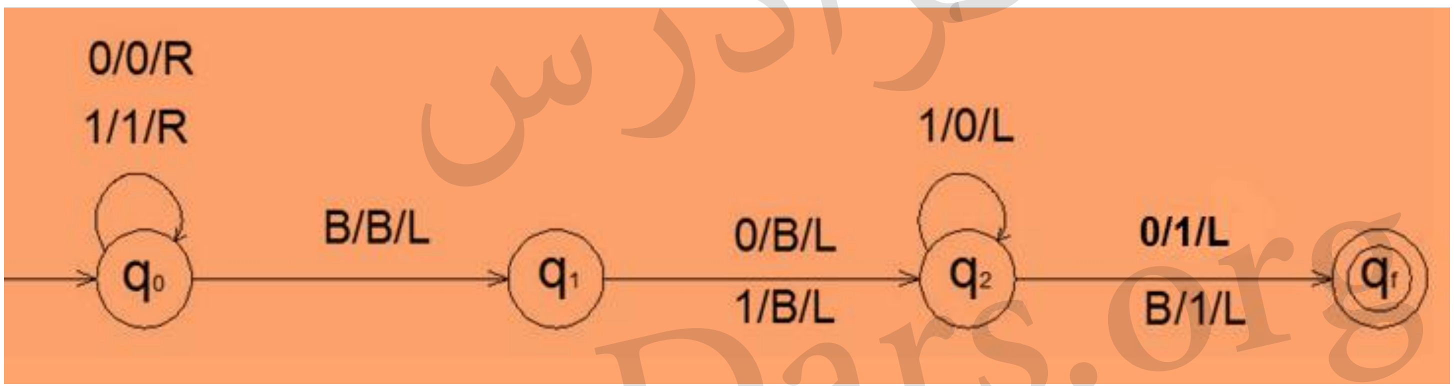
سپس بعد از خواندن B ، اگر در ابتدای رشته دوم حرف a بود

آن را به B تبدیل کرده و به سمت چپ برگشته و B را به a تغییر می دهیم

و اگر b بود آن را B کرده و به سمت چپ برگشته و B را به b تغییر می‌دهیم.

مثال

خروجی ماشین تورینگ زیر با ورودی **1101** و **111** را مشخص کنید.



$$F(x) = x \text{ div } 2 + 1$$

الف– ورودی 1101 (عدد دهدهی ۱۳) : خروجی 111 است.

ب– ورودی 111 (عدد دهدهی ۷) : خروجی 100 است.

مدل های دیگر ماشین تورینگ

ماشین‌های تورینگ استاندارد، معادل با مدل‌های پیچیده‌تر هستند.

طبق تز تورینگ، پیچیده کردن ماشین‌های تورینگ استاندارد از طریق تجهیز آنها به ابزار ذخیره سازی پیچیده تر، تاثیری بر قدرت ماشین ندارد.

چون هر نوع محاسبه ای که با این ماشین های جدید قابل انجام باشد، مدلی از محاسبه مکانیکی محسوب شده و به همین علت بوسیله یک مدل استاندارد هم قابل انجام است.

تز تورینگ

این فرضیه می‌گوید که هر نوع محاسبه‌ای که بطور **مکانیکی** قابل انجام باشد، با ماشین **تورینگ** هم قابل انجام است.

ویژگی های ماشین تورینگ استاندارد

۱- نامحدود بودن نوار ماشین از دو طرف (ممکن بودن حرکت به راست یا چپ به هر تعداد)

۲- معین بودن (به ازای هر پیکربندی فقط یک حرکت تعریف می‌شود.)

۳- عدم وجود هیچ فایل ورودی خاصی و همچنین عدم وجود هیچ وسیله خروجی خاصی.

مدل‌های دیگر ماشین های تورینگ

۱- اعمال تغییرات جزئی در تعریف ماشین تورینگ (سکون دار- با نوار نیمه متناهی – آف لاین)

۲- ماشین های تورینگ با حافظه پیچیده تر(چند نواره و چند بعدی)

۳- ماشین های تورینگ نامعین

۴- ماشین تورینگ عمومی

۵- اتوماتای کراندار خطی

ماشین های تورینگ سکون دار

هد در این نوع ماشین ها می تواند پس از بازنویسی محتوای سلول، در جای خود باقی بماند و به جلو یا عقب حرکت نکند.

گنجاندن این انتخاب جدید برای حرکت هد، قدرت ماشین را افزایش نمی دهد.

دسته ماشین های تورینگ سکون دار، هم ارز با دسته ماشین های تورینگ استاندارد می باشند.

ماشین های تورینگ با نوار نیمه نامتناهی

نوار در این ماشین فقط از یک طرف نامحدود است.

وقتی هد در انتها قرار می گیرد، حرکت به چپ مجاز نیست.

این محدودیت هیچ تاثیری بر قدرت ماشین نمی گذارد.

ماشین های تورینگ آف لاین

ماشین تورینگ offline ، علاوه بر نوار شامل یک فایل ورودی فقط خواندنی نیز می‌باشد.

در این نوع ماشین‌ها، تمامی حرکت‌ها توسط موارد زیر تصمیم گیری می شود :

الف– حالت درونی

ب– سمبلی که در حال حاضر از فایل ورودی خوانده می شود.

ج– آنچه که بوسیله هد خواندن–نوشتن مشاهده می شود.

ماشین های تورینگ با حافظه پیچیده تر

می توان ابزار ذخیره سازی ماشین تورینگ استاندارد را پیچیده تر کرد، اما این عمل قدرت ماشین را افزایش نمی دهد.

با ذکر دو مثال(چند نواره و چند بعدی)، این موضوع را نشان می دهیم.

ماشین های تورینگ چند نواره

ماشین تورینگی با چند نوار که هر نوار، دارای هد خواندن- نوشتن می‌باشد که به طور مستقل کنترل می شود.

تابع انتقال $\delta(q_0, a, e) = (q_1, x, y, L, R)$

ماشین در حالت q_0 بوده و اولین هد یک a و دومین هد یک e را می بیند.

سپس a روی اولین نوار با x جایگزین شده و هد به سمت چپ حرکت خواهد کردو ....

مثال

به کمک ماشین تورینگ دو نواره پذیرش زبان $\{a^n b^n\}$ بسیار ساده تر می شود.

در ابتدا رشته $a^n b^n$ روی نوار اول قرار دارد. سپس تمامی a ها را از نوار اول خوانده و به نوار دوم کپی می کنیم.

با رسیدن به اولین b روی نوار اول، آنها را با a های نوار دوم تطبیق می دهیم و به سادگی تعیین می کنیم آیا تعداد a ها و b ها برابر هستند یا خیر.

بنابراین بدون نیاز به جابجایی متوالی هد به راست و چپ، این عمل انجام شد.

ماشین های تورینگ چند بعدی

در این ماشین‌ها، نوار به صورت نامتناهی در بیش از یک بعد گسترش یافته است.

در ماشین تورینگ دو بعدی، هد علاوه بر حرکت به چپ و راست، می تواند به بالا و پایین نیز حرکت کند.

ماشین های تورینگ نامعین

ماشین تورینگ نامعین مشابه تورینگ معین است با این تفاوت که دارای تغییر وضعیت‌های متفاوتی می‌باشد، یعنی در هر لحظه از محاسبات، ماشین می تواند یکی از چندین انتخاب را دنبال کند.

برد تابع انتقال، مجموعه تمام انتقالات ممکنی است که بوسیله ماشین انتخاب می شوند.

$$Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}}$$

۱– دسته ماشین های تورینگ معین و دسته ماشین های تورینگ نامعین هم ارز هستند.

۲– یک ماشین تورینگ نامعین به هیچ وجه قدرتمندتر از نوع معین خود نیست.

۳– هر ماشین تورینگ نامعین را می توان بوسیله یک ماشین تورینگ معین شبیه سازی کرد.

۴– اگر M_N یک ماشین تورینگ نامعین باشد، آنگاه یک ماشین تورینگ معین مانند M_D وجود دارد، به طوری که : $L(M_N) = L(M_D)$

۱– یک آتاماتای پشته‌ای، مانند یک ماشین تورینگ نامعین است که نوار آن به صورت پشته استفاده می‌شود.

۲– دسته اتوماتای دو پشته ای، هم ارز با دسته ماشین‌های تورینگ است.

ماشین تورینگ عمومی

ماشین تورینگ عمومی M_u ، اتوماتی است که با در اختیار داشتن توصیف هر ماشین تورینگ M بعنوان ورودی و رشته w ، قادر به شبیه سازی محاسبه M روی w می باشد.

آتاماتای کراندار خطی (LBA)

یک اتومات کراندار خطی،یک ماشین تورینگ نامعین است، ولی با این محدودیت که مقدار نواری که می‌تواند استفاده کند تابعی از ورودی است.

همچنین قسمت قابل استفاده نوار به سلول‌هایی که حاوی ورودی است محدود می‌باشند و برای حفاظت از این محدوده از دو علامت کروشه],[استفاده می‌شود.

(LBA : Linear Bounded Automata)

مثال

زبان $\{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$ توسط یک **LBA** پذیرفته می‌شود.

چون محاسباتی که برای پذیرش این زبان نیاز است، احتیاجی به فضائی خارج از ورودی اولیه ندارد.

۱– هر زبان پذیرفته شده بوسیله یک اتومات پشته ای، بوسیله یک اتومات کراندار خطی هم پذیرفته می‌شود، اما زبان هایی وجود دارند که بوسیله اتوماتای کراندار خطی پذیرفته می شوند، اما هیچ اتوماتای پشته ای به ازای آن وجود ندارد. پس ماشین کراندار خطی، قویتر از ماشین پشته ای است.

۲– هر زبان مستقل از متن فاقد λ را می توان بوسیله یک **LBA** پذیرفت.

۳– هیچ روشی برای اثبات تناظر **LBA** های معین با نسخه نامعین خود وجود ندارد.

این اسلاید ها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«نظریه زبان ها و ماشین ها»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvsft110