



فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

نظریه زبان ها و ماشین ها

مدرس:

فرشید شیرافکن

دانشجوی دکتری دانشگاه تهران

(کارشناسی و کارشناسی ارشد : کامپیوتر نرم افزار) (دکتری: بیوانفورماتیک)

بخش دوم

زبان مستقل از متن

گرامر مستقل از متن

اتوماتای پشته ای

برای ساخت برنامه‌های قدرتمندتر باید تا حدی از قید محدودیت‌های موجود در گرامرهای
منظم رها شویم.

از زبان‌های مستقل از متن در طراحی زبان‌های برنامه‌سازی و ساخت کامپایلر استفاده می‌شود.

گرامر مستقل از متن:

گرامر مفروض $G = (V, T, S, P)$ در صورتی مستقل از متن خوانده می شود که تمام

قوانین P به فرم $A \rightarrow x$ باشند که در آن $A \in V$ و $x \in (V \cup T)^*$.

به طور کلی شرط مستقل از متن بودن این است که در سمت چپ قوانین، فقط یک متغیر وجود داشته باشد.

زبان مستقل از متن:

زبان L مستقل از متن نامیده می شود، اگر و تنها اگر گرامر مستقل از متن G وجود داشته باشد بطوریکه $L = L(G)$.

گرامرهای منظم، مستقل از متن نیز هستند.

هر زبان منظمی، یک زبان مستقل از متن نیز می باشد.

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$

$$S \rightarrow aSb \mid ab$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$$S \rightarrow aSb \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^{n+1} : n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aSb \mid b$$

$$a^n b^n b$$

$$S \rightarrow Xb$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

روش دوم:

مثال

گرامر تولید کننده زبان : $L = \{a^{n+1}b^n : n \geq 0\}$

$$S \rightarrow aSb \mid a$$

$$S \rightarrow aX$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

روش دوم:

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^{n+3}b^n : n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aSb \mid aaa$$

$$S \rightarrow aaaX$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

روش دوم :

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^{n-3} : n \geq 3\}$:

$$\{a^{k+3}b^k : k \geq 0\}$$

$$S \rightarrow aSb \mid aaa$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^n a^k b^k : n \geq 0, k \geq 0\}$:

$$S \rightarrow MM$$

$$M \rightarrow aMb \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aSbb \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^{n+2}b^{3n} : n \geq 0\}$

$S \rightarrow aSbbb \mid aa$

FaraDars.org

مثال

گرامر تولید کننده زبان : $L = \{a^n b c^{2n} : n \geq 0\}$

$$S \rightarrow aScc \mid b$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^{2n+2}b^{n+2} : n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aXb$$

$$X \rightarrow aaXb \mid ab$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b c^m : n \neq m\}$:

$$S \rightarrow aSc \mid aS \mid Sc \mid ab \mid bc$$

FaraDars.org

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{b^n a^n : n \geq 0\}$

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2$$

$$S_1 \rightarrow aS_1b \mid \lambda$$

$$S_2 \rightarrow bS_2a \mid \lambda$$

مثال

گرامری برای زبان : $L = \{a^n b^k : 2n \leq k \leq 3n\}$

$$S \rightarrow aSbb \mid aSbbb \mid \lambda \quad (n \geq 0, k \geq 0)$$

نحوه تولید رشته $a^3 b^7$

$$S \Rightarrow aSbb \Rightarrow aaSbbbb \Rightarrow aaaSbbbbbbb \Rightarrow aaabbbbbbbb$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان : $L = \{a^n b^k : k > n\}$

$(n \geq 0, k \geq 0)$

$S \rightarrow XB$

$X \rightarrow aXb \mid \lambda$

$B \rightarrow bB \mid b$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n b^k : n > k\}$

$$S \rightarrow AX$$

$$(n \geq 0, k \geq 0)$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

مثال

یک گرامر مستقل از متن برای زبان $L = \{a^n b^k : n \neq k\}$:

ترکیب دو حالت $n > k$ و $k > n$

$$S \rightarrow AX \mid XB$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : m = n + k\}$: $(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0)$

فرم: $a^n b^n b^k c^k$

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

$$Y \rightarrow bYc \mid \lambda$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : n = k + m\}$

$$a^k a^m b^m c^k$$

$$(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0)$$

$$S \rightarrow aSc \mid X$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : k = |n - m|\}$: $(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0)$

شرط به معنی $k = n - m$ و $k = -(n - m)$ است.

این دو حالت را می توان به صورت $m = n + k$ و $n = k + m$ نشان داد.

این حالتها در مثالهای قبل بررسی شد و باید با هم ترکیب شوند.

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : k > n + m\}$: $(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 1)$

$$S \rightarrow aSc \mid X$$

$$X \rightarrow bXc \mid cY$$

$$Y \rightarrow cY \mid \lambda$$

$$a^n b^m c^+ c^m c^n$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : k < n + m\}$:

$$a^n (a + b)^+ b^m c^m c^n$$

$$(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0)$$

$$S \rightarrow aSc \mid aS \mid aX \mid bX$$

$$X \rightarrow bXc \mid bX \mid \lambda$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : k \neq n + m\}$: $(n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0)$

شرط به معنی $k > n + m$ یا $k < n + m$ است.

این دو حالت را با هم ترکیب می کنیم.

FaraDars.org

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^m c^k : k = n.m\}$ بنویسید.

حل : نمی توان یک گرامر مستقل از متن برای این زبان نوشت. پس این زبان مستقل از متن نیست.

FaraDars.org

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{(ab)^n(cd)^n : n \geq 1\}$:

$S \rightarrow aXd$

$X \rightarrow bSc \mid bc$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{(ab)^n(cde)^n : n \geq 1\}$:

$S \rightarrow aXde$

$X \rightarrow bSc \mid bc$

FaraDars.org

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{aa(bc)^n be(dde)^n : n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aaX$$

$$X \rightarrow bYe$$

$$Y \rightarrow cXdd \mid \lambda$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{ab(bbaa)^n bba(ba)^n \mid n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow abX$$

$$X \rightarrow bbYa$$

$$Y \rightarrow aaXb \mid \lambda$$

مثال

گرامر مستقل از متنی برای زبان $L = \{a^n b^k c^k d^n : n \geq 0, k \geq 1\}$:

$$S \rightarrow aSd \mid bXc \mid \lambda$$

$$X \rightarrow bXc \mid \lambda$$

FaraDars.org

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$:

زبان تولید شده شامل رشته‌هایی با تعداد a و b های برابر است.

(جملات با a یا b شروع می‌شوند.)

$$S \rightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان : $L = \{w : n_a(w) = n_b(w) + 1\}$

$$S \rightarrow XaX$$

$$X \rightarrow XX \mid aXb \mid bXa \mid \lambda$$

نحوه تولید ababa :

$$S \Rightarrow XaX \Rightarrow aXbaX \Rightarrow abaX \Rightarrow ababXa \Rightarrow ababa$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : n_a(w) > n_b(w)\}$:

$$S \rightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid aS \mid Sa \mid a$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{w : |w| \bmod 3 \geq |w| \bmod 2\}$:

$$\Sigma = \{a\}$$

طول رشته باید $6k$ ، $3k+1$ و یا $3k+2$ باشد.

$$S \rightarrow aX \mid aaX \mid Y$$

$$X \rightarrow aaaX \mid \lambda$$

$$Y \rightarrow aaaaaaY \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان : $L = \{w \in \{a,b\}^* : ww^R\}$

جمله های این زبان مانند **abba** است که نیمه دوم، معکوس نیمه اول است.

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{w \in \{a,b\}^+ : ww^R\}$:

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb$$

FaraDars.org

مثال

گرامر تولید کننده زبان $\{w \in \{a,b\}^* : w = w^R\}$:

جمله های زبان این گرامر مانند aba است که از هر دو طرف یکسان خوانده می شوند.

$$S \rightarrow aX \mid bY \mid \lambda$$

$$X \rightarrow Sa \mid \lambda$$

$$Y \rightarrow Sb \mid \lambda$$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{a^n w w^R b^n : n \geq 1, w \in \{a, b\}^*\}$:

$S \rightarrow aSb \mid aMb$

$M \rightarrow aMa \mid bMb \mid \lambda$

مثال

گرامر تولید کننده زبان $L = \{uvwv^R : u, v, w \in \{a, b\}^+, |u| = |w| = 2\}$

$S \rightarrow XY$

$X \rightarrow aa \mid bb \mid ab \mid ba$

$Y \rightarrow aYa \mid bYb \mid aXa \mid bXb$

مثال

گرامر مستقل از متن زیر چه زبانی را تولید می کند؟

$$S \rightarrow AB \mid \lambda$$

$$A \rightarrow 1A \mid S$$

$$B \rightarrow 0B \mid S$$

زبان گرامر داده شده، زبان منظم $(1^*0^*)^+$ است.

گرامر فوق یک گرامر مستقل از متن است که زبان منظم تولید می کند.

مثال

$$S \rightarrow XYZ \mid \lambda$$

$$X \rightarrow aX \mid S$$

$$Y \rightarrow bY \mid S$$

$$Z \rightarrow cZ \mid S$$



$$(a^*b^*c^*)^+$$

مثال

گرامر منظم فقط زبان منظم تولید می کند، اما گرامر مستقل از متن علاوه بر زبان مستقل از متن، می تواند زبان منظم هم تولید کند.

FaraDars.org

لم تزریق

به کمک لم تزریق می توان تشخیص داد که یک زبان مستقل از متن **نیست**.

لم تزریق : فرض کنید L یک زبان مستقل از متن نامتناهی باشد. آنگاه عدد صحیح و مثبت m وجود

دارد، بطوریکه هر w متعلق به L با فرض $|w| \geq m$ را می توان به صورت $w = uvxyz$ با

شرایط $|vxy| \leq m$ و $|vy| \geq 1$ چنان تجزیه کرد که به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$uv^i xy^i z \in L$$

مثال

به کمک لم تزریق، نشان دهید که زبان $L = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$ مستقل از متن نیست.

حل: فرض کنیم که L مستقل از متن باشد. حال رشته $w = a^n b^n c^n$ متعلق به L را به ۵ قسمت تجزیه

کرد: $x = a^n, y = b, z = b^{n-2}, u = b, v = c^n$

حال باید به ازای تمام $i \geq 0$ ، رشته $w = a^n b^n c^n$ متعلق به L باشد، ولی به ازای $i=2$ این چنین نیست:

$$a^n b^i b^{n-2} b^i c^n = a^n b^{n+2} b^{n-2} b^2 c^n = a^n b^{n+2} c^n \notin L$$

با اعمال قوانین لم تزریق روی زبان $L = \{a^n b^n : n > 0\}$ ، متوجه می‌شویم که به ازای هر

مقدار i ، رشته تزریق شده در L است. از این موضوع نمی‌توان نتیجه گرفت که L

مستقل از متن است و فقط می‌توان گفت که از لم تزریق نتوانستیم نتیجه‌ای بگیریم.

توسط لم تزریق می توان نشان داد که زبانهای زیر مستقل از متن نمی باشند :

$$\{ww : w \in \{a,b\}^*\}$$

$$\{a^n b^m c^k : k = mn\}$$

$$\{ww^R w : w \in \{a,b\}^*\}$$

$$\{a^n b^n c^m : n \neq m\}$$

$$\{w : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$$

$$\{a^{n!} : n > 0\}$$

این اسلاید ها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«نظریه زبان ها و ماشین ها»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvsft110