



فرادرس

فراتر از یک کلاس درس  
www.faradars.org

# نظریه زبان ها و ماشین ها

مدرس:

**فرشید شیرافکن**

دانشجوی دکتری دانشگاه تهران

(کارشناسی و کارشناسی ارشد : کامپیوتر نرم افزار) (دکتری: بیوانفورماتیک)

# فصل دوم

(ادامه بخشی اول)

زبان منظم

## زبان منظم

اگر بتوان برای زبانی، یک عبارت منظم نوشت، آن زبان منظم است.

به ازای هر زبان منظم، یک عبارت منظم و به ازای هر عبارت منظم، یک زبان منظم وجود دارد.

FaraDars.org

## مثال

$$r = (aa)^* a(bb)^*$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$L(r) = \{a^{2k+1}b^{2t} : k \geq 0, t \geq 0\}$$

## مثال

$$r = a^+ (bb)^+$$

$$L(r) = \{a^n b^{2k} : n \geq 1, k \geq 1\}$$

## مثال

$$r = baa^+(a+b)^+$$

$$L = \{ba^n w : n \geq 2, w \in \{a, b\}^+\}$$

## مثال

$$r = ((a + b)(a + b))^*$$

$$L = \{w : |w| \bmod 2 = 0\}$$

## مثال

$$r = aaa^*(\lambda + b + bb + bbb)$$

$$L = \{a^n b^m : n \geq 2, m \leq 3\}$$



## مثال

آیا زبان زیر منظم است؟

$$L = \{uww^Rv : u, v, w \in \{a, b\}^+\}$$

بله - چون می توان یک عبارت منظم برای آن نوشت:

$$r = (a + b)^+(aa + bb)(a + b)^+$$

## مثال

$$L = \{vwv : v, w \in \{a, b\}^+, |v| = 2\}$$

$$r = aa(a+b)^*aa + ab(a+b)^*ab + ba(a+b)^*ba + bb(a+b)^*bb$$

## مثال

$$L = \{a^n b^m : (n + m) \text{ is even}\}$$

$$r = (aa)^* (bb)^* + (aa)^* a(bb)^* b$$

## بسته بودن

مسئله بسته بودن یک زبان منظم روی یک عملگر، یعنی آیا زبان حاصل در اثر اعمال عملگر، باز هم منظم خواهد بود؟

به طور نمونه اجتماع دو زبان منظم، زبانی منظم است، یعنی زبان های منظم تحت عمل اجتماع بسته هستند.

FaraDars.org

خانواده زبان های منظم تحت عملیات زیر بسته است:

اجتماع

اشتراک

الحاق

تفاضل

مکمل گیری

بستار ستاره ای

معکوس

## لم تزریق

یکی از راه های اثبات نامنظم بودن یک زبان، استفاده از لم تزریق (پمپاژ) است.

اگر  $L$  یک زبان منظم نامتناهی باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت  $m$  وجود دارد بطوریکه هر  $w \in L$  با شرط  $|w| \geq m$ ، را می توان به صورت  $w = xyz$  تجزیه کرد، با فرض  $|xy| \leq m$  و  $|y| \geq 1$  بطوریکه  $w_i = xy^i z$  به ازای تمام  $i = 0, 1, 2, \dots$  عضو  $L$  باشد.

## مثال

آیا زبان  $L = \{a^n b^n : n > 0\}$  منظم است؟

حل: فرض کنیم که  $L$  منظم باشد. حال رشته  $w = a^n b^n$  متعلق به  $L$  را به ۳

قسمت تجزیه می کنیم:  $x = a^{n-1}, y = a, z = b^n$

حال باید به ازای تمام  $i \geq 0$ ، رشته  $xy^i z$  متعلق به  $L$  باشد، ولی مثلاً به ازای

$i=2$  این چنین نیست:  $a^{n-1} a^2 b^n = a^{n+1} b^n \notin L$

بنابراین زبان داده شده منظم نیست.

## مثال

آیا زبان  $\{a^n : n \geq 2\}$  منظم است؟

**حل:** فرض کنیم که  $L$  منظم باشد. حال رشته  $w = a^k$  با فرض اول بودن  $k$  متعلق به  $L$  را به ۳ قسمت تجزیه می کنیم:

$$x = a^{k-t-h} \text{ و } y = a^t \text{ و } z = a^h$$

حال باید به ازای تمام  $i \geq 0$ ، رشته  $xy^iz$  متعلق به  $L$  باشد، ولی مثلاً به ازای  $i=k+1$  این چنین نیست:

$$a^{k-t-h} a^{t(k+1)} a^h = a^k a^{tk} = a^{(1+t)k} \notin L$$

مقدار  $(1+t)k$  اول نیست، چون به  $k$  و  $1+t$  بخش پذیر است. بنابراین زبان داده شده منظم نیست.



فرادرس  
گرامر

FaraDars.org

## گرامر

گرامر  $G$  به صورت چهار تایی  $G = (V, T, S, P)$  تعریف می شود که :

$V$  : مجموعه متناهی از اشیاء به نام متغیرها

$T$  : مجموعه متناهی از اشیاء به نام سمبل های پایانی (ترمینال)

$S$  : سمبل ویژه ای به نام متغیر شروع ( $S \in V$ )

$P$  : مجموعه متناهی از قوانین  $x \rightarrow y$   $x \in (V \cup T)^+$   $y \in (V \cup T)^*$

مجموعه های  $V$  و  $T$  غیر تهی و جدا از هم می باشند.

# مثال

$$S \rightarrow Aab$$
$$A \rightarrow Aab$$
$$A \rightarrow a$$
$$T = \{a, b\}$$
$$V = \{S, A\}$$

متغیرها با حروف بزرگ نمایش داده می شوند.

ترمینالها با حروف کوچک نمایش داده می شوند.

## انواع گرامر :

گرامرها به چهار دسته تقسیم می شوند :

### ۱- منظم

قواعد آن به صورت  $A \rightarrow Bx \mid xB$  یا  $A \rightarrow xB \mid x$  باشد. (  $A, B \in V$  و  $x \in T^*$  )

### ۲- مستقل از متن

گرامری که در سمت چپ کلیه قواعد آن، فقط یک متغیر باشد.

### ۳- حساس به متن

قوانین آن به فرم  $x \rightarrow y$  باشند که در آن  $x$  و  $y$  عضو  $(V + T)^+$  باشند و  $|x| \leq |y|$ .

### ۴- بدون محدودیت

هیچ شرط و محدودیتی برای قواعد تولید ندارد. تنها محدودیت این است که  $\lambda$  نباید در سمت چپ قواعد تولید باشد.

# مثال

آیا گرامر مستقل از متن است؟ منظم است؟ حساس به متن است؟

$$1. S \rightarrow AB$$

$$2. A \rightarrow aAb$$

$$3. bB \rightarrow bbbB$$

$$4. aAb \rightarrow aa$$

$$5. B \rightarrow \lambda$$

مستقل نیست: چون در سمت چپ همه قواعد باید فقط یک متغیر باشد.

منظم نیست: چون مستقل از متن نیست.

حساس به متن نیست: چون طول سمت چپ باید از سمت راست بیشتر باشد.

## زبان تولید شده توسط گرامر

$$G = (V, T, S, P)$$

$$L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow^* w\}$$

## مثال

$$S \rightarrow aS \mid a \Rightarrow a^+$$

نحوه تولید رشته aa :

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aa$$



## مثال

$$S \rightarrow abS \mid a \Rightarrow (ab)^* a$$

نحوه تولید رشته : ababa

$$S \Rightarrow abS \Rightarrow ababS \Rightarrow ababa$$

## مثال

$$S \rightarrow aSb \mid \lambda \Rightarrow \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

نحوه تولید رشته : aabb

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

# مثال

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid \lambda$$

$$Y \rightarrow cY \mid \lambda$$

$$L = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$$

تولید رشته  $a^2 b^2 c$  :

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow aXbY \Rightarrow aaXbbY \Rightarrow aabbY \Rightarrow aabbcY \Rightarrow aabbc$$

# مثال

گرامر حساس به متن زیر چه زبانی را تولید می کند؟

$S \rightarrow abc \mid aAabc$

$Ab \rightarrow bA$

$Ac \rightarrow Bbcc$

$bB \rightarrow Bb$

$aB \rightarrow aa \mid aaA$

زبان حساس به متن  $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$

نحوه تولید رشته  $a^2 b^2 c^2$  :

$S \Rightarrow aAabc \Rightarrow abAc \Rightarrow abBbcc \Rightarrow aBbbcc \Rightarrow aabbcc$

# گرامر منظم (regular)

FaraDars.org

## گرامر منظم

گرامر خطی از چپ: همه قواعد آن به صورت  $A \rightarrow Bx \mid x$  است.

گرامر خطی از راست: همه قواعد آن به صورت  $A \rightarrow xB \mid x$  است.

گرامری که خطی از راست یا خطی از چپ باشد را گرامر منظم می گویند.

$$A, B \in V$$

$$x \in T^*$$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$S \rightarrow aA \mid ab$

$A \rightarrow bS$



$(ab)^+$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid \lambda \\ A &\rightarrow bS \end{aligned}$$



$$(ab)^*$$



# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$S \rightarrow aA \mid a$$

$$A \rightarrow aA \mid bA \mid a \mid b$$



$$a(a + b)^*$$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$S \rightarrow aS \mid abS \mid \lambda$



$(a + ab)^*$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$S \rightarrow aaS \mid aA \mid bA$$
$$A \rightarrow bA \mid \lambda$$

$$(aa)^* (a + b)b^*$$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bS \mid aA \\ A &\rightarrow bA \mid \lambda \end{aligned}$$



$$b^* ab^*$$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$S \rightarrow aS \mid abX$$
$$X \rightarrow bX \mid \lambda$$

$$a^*abb^*$$

# مثال

زبان منظم تولید شده توسط گرامر منظم داده شده

$$S \rightarrow aaS \mid abbX$$
$$X \rightarrow baX \mid \lambda$$

$$(aa)^* abb(ba)^*$$

# مثال

گرامر منظمی برای زبان  $L = \{a^n b^m : n \geq 2, m \geq 3\}$  بنویسید.

**$S \rightarrow aaA$**

**$A \rightarrow aA \mid bbbB$**

**$B \rightarrow bB \mid \lambda$**

# مثال

گرامر تولید کننده زبان  $L = \{w : |w| \bmod 3 = 0\}$  را بنویسید.  $\Sigma = \{a\}$

گرامر تولید کننده رشته هایی با حرف  $a$  که طول آنها مضرب ۳ باشد برابر است با :

$S \rightarrow aaaS \mid \lambda$



# مثال

گرامر تولید کننده زبان  $L = \{w : |w| \bmod 3 = 2\}$  را بنویسید.  $\Sigma = \{a\}$

$S \rightarrow aaaS \mid aa$

# مثال

گرامر تولید کننده زبان  $L = \{w : |w| \bmod 3 > 0\}$  را بنویسید.

$(\Sigma = \{a\})$

$S \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow aaaS_1 \mid a$

$S_2 \rightarrow aaaS_2 \mid aa$

FaraDars.org

## مثال

گرامر منظمی تولید کننده زبان  $\{a^n b^m : \text{هر دو زوج هستند } m \text{ و } n\}$

$S \rightarrow aaS \mid X$   
 $X \rightarrow bbX \mid \lambda$

## مثال

گرامر منظمی بنویسید که زبان  $\{a^n b^m : n \text{ و } m \text{ هر دو فرد هستند}\}$  را تولید کند.

**$S \rightarrow aaS \mid aY$**

**$Y \rightarrow bbY \mid b$**

# مثال

گرامر منظمی بنویسید که زبان  $L = \{a^n b^m : n+m \text{ زوج است}\}$  را تولید کند.

برای اینکه جمع  $n$  و  $m$  زوج باشد، باید هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. این دو حالت در مثالهای قبل بررسی شدند.

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2$$

$$S_1 \rightarrow aaS_1 \mid X$$

$$X \rightarrow bbX \mid \lambda$$

$$S_2 \rightarrow aaS_2 \mid aY$$

$$Y \rightarrow bbY \mid b$$

این اسلاید ها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس  
«نظریه زبان ها و ماشین ها»  
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

**faradars.org/fvsft110**