

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

نظریه زبان ها و ماشین ها

مدرس:

فرشید شیرافکن

دانشجوی دکتری دانشگاه تهران

(کارشناسی و کارشناسی ارشد : کامپیوتر نرم افزار) (دکتری: بیوانفورماتیک)

بخش دوم (قسمت ۳)

اتوماتای پیشته ای

ماشین پشته‌ای (PDA (Push Down Automaton)

علاوه بر اجزاء ماشین متناهی، دارای یک پشته نیز می‌باشد.

این ماشین، علاوه بر خواندن نوار ورودی از چپ به راست، قادر به نوشتن هر تعداد نماد درون یک

پشته (push) و بازیابی آنها (pop) می‌باشد.

ماشین‌های پشته‌ای پذیرنده زبانهای مستقل از متن می‌باشند.

ماشین پشته ای از ماشین متناهی قویتر است، یعنی زبان های بیشتری را می پذیرد.

اتوماتای پشته ای بر دو نوع معین (DPDA) و نامعین (NPDA) است.

اتوماتای پشته ای نامعین

پذیرنده پشته ای نامعین بوسیله هفت تایی $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$ تعریف می شود:

Q : مجموعه متناهی از حالت های داخلی واحد کنترل

Σ : الفبای ورودی

q_0 : حالت شروع واحد کنترل

Γ : الفبای پشته

z : سمبل ته پشته

δ : تابع انتقال

F : مجموعه حالات پایانی

تعریف :

زبان مورد پذیرش توسط یک npda ، مجموعه تمام رشته هایی است که

npda با رسیدن به انتهای آن رشته ها، می تواند در حالت پایانی قرار

گیرد.

تابع انتقال

$$\delta(q_i, a, A) = (q_j, B) \quad \text{قانون}$$

اگر ماشین در وضعیت q_i باشد و a مقابل هد نوار خوان باشد و A بالای پشته باشد، آنگاه ماشین به حالت q_j تغییر وضعیت داده و A را از پشته pop کرده و B را push می کند.

$$Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

این تابع ۳ ورودی و دو خروجی دارد.

ورودی ها : حالت جاری ماشین، سمبل خوانده شده از نوار یا λ و سمبل بالای پشته.

خروجی ها : حالت بعدی ماشین و سمبلی که در بالای پشته push می شود.

تفسیر چند قانون نمونه :

۱- قانون $\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 1)\}$: قرار دادن 1 به جای 0.

۲- قانون $\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10)\}$: پوش مقدار 1.

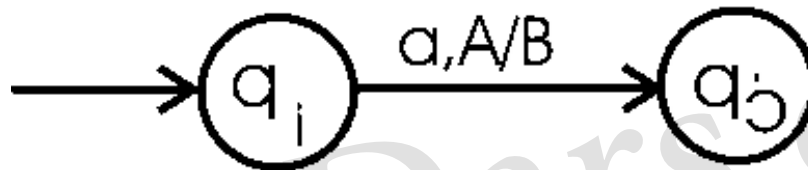
۳- قانون $\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, \lambda)\}$: پاپ مقدار 0.

تمرین

نحوه عملکرد $\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 1), (q_2, \lambda)\}$ را تشریح کنید.

FaraDars.org

گراف انتقال برای $\delta(q_i, a, A) = (q_j, B)$:



مثال

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a\}$$

زبان مورد پذیرش ماشین npda زیر:

$$\Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{0, 1\}$$

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, 1z), (q_f, z)\}$$

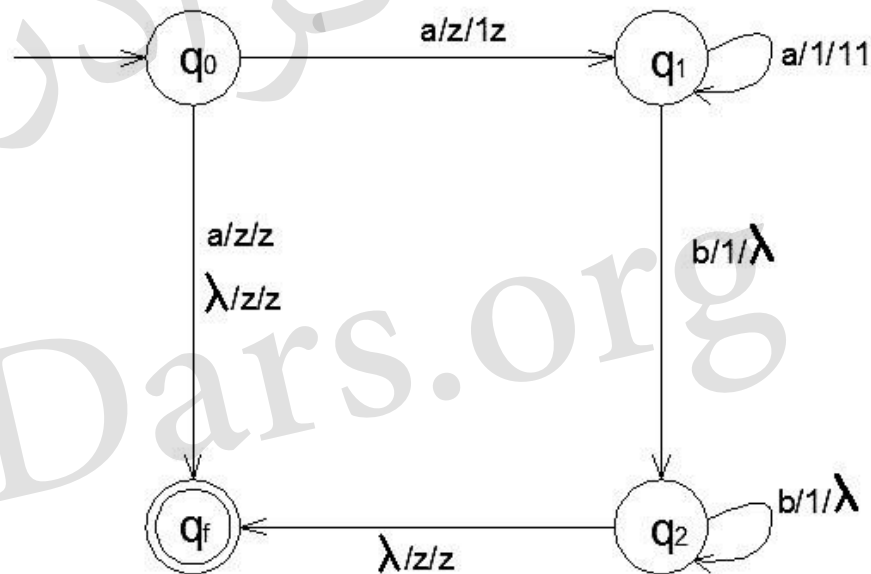
$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$$

$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$$

$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$$

$$\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$$

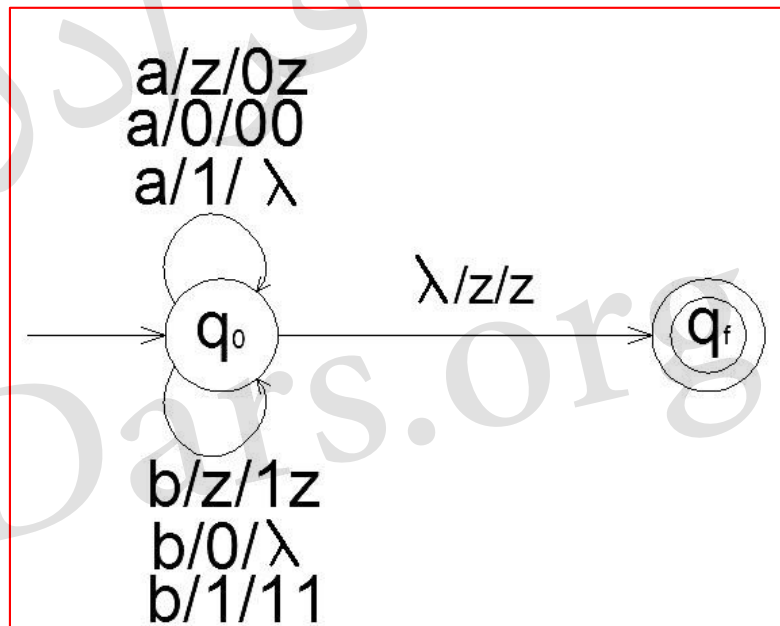
$$\delta(q_2, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$$



مثال

$$L = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)\}$$

زبان مورد پذیرش ماشین npda زیر:



مثال

$$L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$$

زبان مورد پذیرش ماشین npda زیر:

با دیدن هر a ، دو تا 1 در پشته $push$ کرده و با دیدن هر b ، یک عدد 1 از پشته pop می کنیم.

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, 11z)\}$$

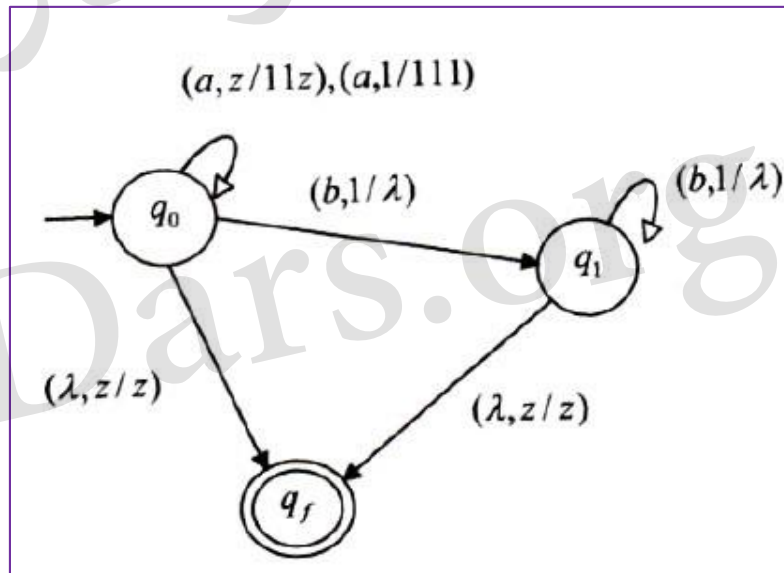
$$\delta(q_0, a, 1) = \{(q_1, 111)\}$$

$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$$

$$\delta(q_0, b, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$$



مثال

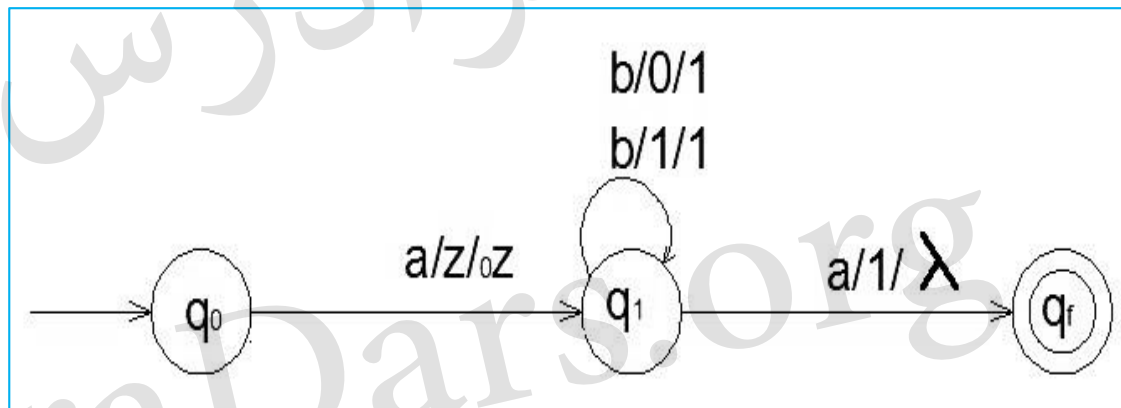
زبان ماشین npda : ab^+a

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, 0z)\}$$

$$\delta(q_1, b, 0) = \{(q_1, 1)\}$$

$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_1, 1)\}$$

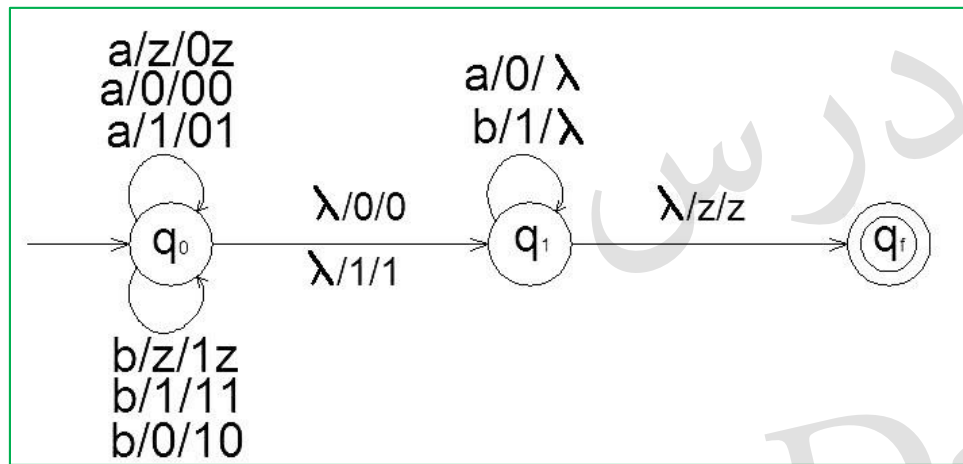
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_f, \lambda)\}$$



مثال

زبان ماشین npda : $L = \{ww^R : w \in \{a,b\}^+\}$

در وسط رشته، λ قرار دارد.



$(q_0, abba, z) \rightarrow (q_0, bba, 0z) \rightarrow (q_0, ba, 10z) \rightarrow (q_1, ba, 10z) \rightarrow (q_1, a, 0z) \rightarrow (q_1, \lambda, z) \rightarrow (q_f, z).$

اتوماتای پشته ای معین

اتومات پشته‌ای $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$

معین گفته می شود اگر هم در تعریف npda صدق کند

و همچنین دارای محدودیت هایی به این شرح باشد که به ازای هر $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $b \in \Gamma$:

۱- $\delta(q, a, b)$ حداکثر یک عضو داشته باشد.

این شرط صرفاً مستلزم آن است که به ازای هر سمبل ورودی مفروض و هر عنصر بالای پشته، حداکثر یک حرکت قابل انجام باشد.

۲- اگر $\delta(q, \lambda, b)$ تهی نباشد، آنگاه $\delta(q, c, b)$ باید به ازای هر $c \in \Sigma$ تهی باشد.

بر اساس شرط دوم، چنانچه در یکی از پیکربندی های مفروض به یک انتقال برخورد کنیم، آنگاه هیچ حرکتی برای جلو بردن و مصرف ورودی امکان پذیر نمی باشد.

به طور مثال اگر قانون $\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$ داشته باشیم، آنگاه نباید قانونی مانند

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, 0z)\}$ وجود داشته باشد.

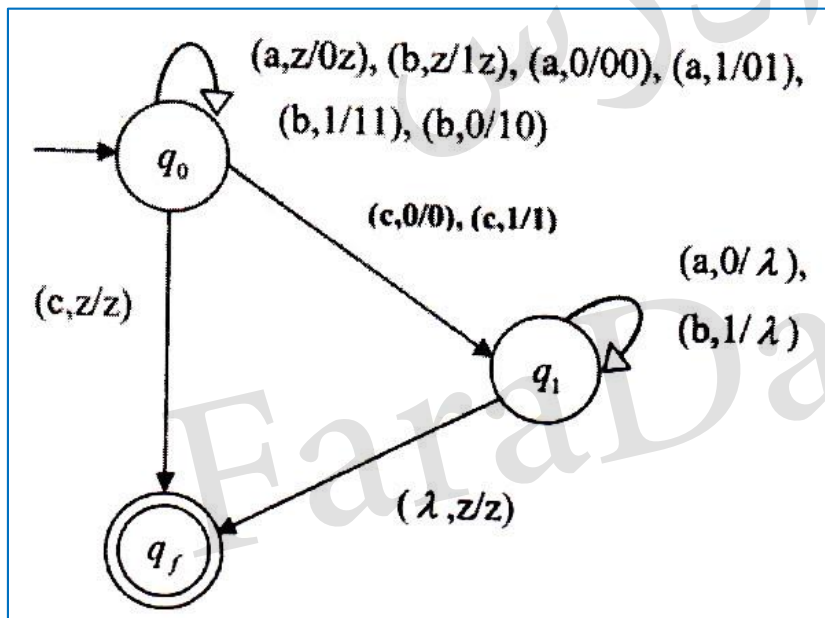
زبان مستقل از متن معین

زبان L یک زبان مستقل از متن معین (قطعی) نامیده می شود اگر و تنها اگر یک $dpda$ به نام

M وجود داشته باشد که $L=L(M)$.

مثال

زبان مستقل از متن $L = \{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\}$ ، معین است، چون می توان یک dpda برای آن ساخت.



تمرین

نشان دهید که زبان زیر یک زبان مستقل از متن معین است:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* : n_a(w) = n_b(w)\}$$

مثال

زبان مستقل از متن زیر، معین نیست، چون باید یک یا دو b را با هر یک از a ها تطابق دهد. اطلاعات موجود در ابتدای رشته چنان نیست که بتوان به کمک آن انتخاب خود را قطعی کرد.

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$$

مثال

زبان مستقل از متن زیر ، معین نیست ، چون وسط رشته باید با آزمایش و خطا حدس زده شود.

$$L = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$$

مثال

آیا زبان مستقل از متن $L = \{a^n b^n : n \geq 1\} \cup \{a\}$ معین است؟

حل: بله - چون می توان برای آن یک dpda طراحی کرد:

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_3, 1z)\}$$

$$\delta(q_3, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$$

$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$$

$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_2, z)\}$$

که q_2 و q_3 حالت های پایانی هستند.

²³ در نگاه اول ممکن است فکر کنید که این زبان نامعین است. اما چون توانستیم یک dpda برای آن بسازیم، این زبان معین است.

- ۱- خانواده زبان های مستقل از متن معین، تحت اجتماع، اشتراک و معکوس بسته **نیستند**.
- ۲- زبان های مستقل از متن معین، تحت عمل مکمل گیری بسته می باشند.
- ۳- خانواده زبان های مستقل از متن معین، تحت تفاضل منظم بسته است.
- ۴- اجتماع یک زبان مستقل از متن معین با یک زبان منظم، مستقل از متن معین می باشد.
- ۵- تمامی زبان های منظم، مستقل از متن معین می باشند. چون هر زبان منظمی را می توان با یک **dfa** پذیرفت و چنین **dfa** یک **dpda** با پشته استفاده نشده است.
- ۶- زبان های مستقل از متن معین، هیچگاه ذاتا مبهم نیستند.

ساخت اتوماتای پشته ای با استفاده از گرامر در فرم گریباخ

می توان با داشتن گرامر در فرم گریباخ برای یک زبان مستقل از متن، ماشین پشته ای برای آن طراحی کرد.

FaraDars.org

پدا بسازید که زبان تولید شده بوسیله گرامر $S \rightarrow aSbb \mid a$ را پذیرش کند.

ابتدا گرامر را به فرم گریباخ در می آوریم:

$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_1, Sz)\}$$

$$S \rightarrow aSA \mid a$$

$$\delta(q_1, a, S) = \{(q_1, SA), (q_1, \lambda)\}$$

$$A \rightarrow bB$$

$$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, B)\}$$

$$B \rightarrow b$$

$$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_f, \lambda)\}$$

مثال

یک npda ای طراحی کنید که زبان تولید شده توسط گرامر $S \rightarrow aSbb \mid aab$ را بپذیرد.

ابتدا گرامر $S \rightarrow aSbb \mid aab$ را به فرم گریباخ در می آوریم:

$$S \rightarrow aSA \mid aD$$

$$A \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow b$$

$$D \rightarrow aB$$



$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_1, Sz)\}$$

$$\delta(q_1, a, S) = \{(q_1, SA)\}$$

$$\delta(q_1, a, S) = \{(q_1, D)\}$$

$$\delta(q_1, a, D) = \{(q_1, B)\}$$

$$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, B)\}$$

$$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$$

تشخیص مستقل از متن بودن یک زبان

یکی از روش های تشخیص مستقل از متن بودن یک زبان، امکان طراحی یک ماشین پشته ای برای آن زبان است.

FaraDars.org

مثال

آیا $L = \{a^n b^m c^n d^m : m, n \geq 0\}$ مستقل از متن است؟

پاسخ:

خیر - ترتیب قرار گرفتن نمادها طوری است که نمی توان توسط یک پشته، تساوی تعداد a ها با تعداد c ها و همچنین تعداد b ها با تعداد d ها را کنترل کرد.

مثال

آیا $L = \{a^n b^n c^m d^m : m \geq n \geq 0\}$ مستقل از متن است؟

پاسخ:

خیر - می توان تساوی تعداد نمادهای a با b و تعداد c با d را چک کرد. اما با همان پشته دیگر نمی توان شرط $m \geq n$ را نیز چک کرد.

مثال

آیا زبان $\{a^{3n}b^{2n}a^{5n} : n \in \mathbb{N}\}$ مستقل از متن است؟

پاسخ:

خیر - بعد از تطبیق تعداد a ها با b ها ، مقدار n فراموش شده و نمی توان تعداد a در a^{5n} را چک کرد.

این اسلاید ها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«نظریه زبان ها و ماشین ها»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvsft110