

Rogério Moreira Lima Silva
Marcelo Lyra Brandão

Manual de Problemas Resolvidos

ELETROMAGNETISMO
VOLUME I

„PAPEL  VIRTUAL„

Copyright© 2000 por Marcelo Lyra Brandão e Rogerio
Moreira Lima Silva

Título Original: Manual de Problemas Resolvidos -
Eletromagnetismo

Editor-Chefe: Tomaz Adour
Editoração Eletrônica: Andrea Cavalcanti
Revisão: Patrícia Simões Carneiro

Papel Virtual Editora
Rua Marquês de São Vicente, 225
Prédio Genesis - sala 21-A - PUC-Rio
Gávea - Rio de Janeiro - RJ CEP: 22453-900

Tel: (021) 239-0170 Ramais: 2057 / 2026 (fax)
E-mail: editor@papelvirtual.com.br
Endereço Eletrônico: www.papelvirtual.com.br

Brandão, Marcelo L.
Manual de Exercícios Resolvidos:
Eletromagnetismo / Marcelo L Brandão,
Silva, Rogerio M L. - São Luís, 1999.
V.1, 136 pg.
1. Eletromagnetismo - exercícios I
Silva, Rogerio M L. II Título

CDD 535.14
CDU 537.8

Marcelo Lyra Brandão
Doutor em Engenharia Elétrica pela Unicamp
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia de
Eletricidade da Ufma

Rogério Moreira Lima Silva
Estudante de Engenharia Elétrica da Ufma

Manual de Problemas Resolvidos
Eletromagnetismo

VOLUME I

A meus avós; em especial a meu avô William Moreira Lima.

A minha família, em especial aos meus pais.

A meu tio Aluizio Moreira Lima, pelo empenho pessoal.

À minha noiva, Cintia Karine Carneiro Rocha, por tudo.

R. M. L. Silva

PREFÁCIO

Este manual tem por finalidade auxiliar os estudantes de Engenharia Elétrica no estudo do eletromagnetismo. O manual é direcionado a resolução de problemas do livro “Eletromagnetismo, Kraus / Carver”, mas são resolvidos também exercícios de outros livros. É relevante citar que se optou por seguir a ordem de capítulos do livro acima citado, ou seja, “Eletromagnetismo, Kraus / Carver”.

Neste primeiro volume serão apresentadas resoluções de exercícios dos capítulos 1(um) ao 9 (nove) e no segundo volume, dos capítulos 10(dez) ao 14(catorze). Também serão fornecidas ao final de cada capítulo as referências bibliográficas para pesquisa da teoria, a qual forma a base teórica necessária para perfeito entendimento dos exercícios resolvidos.

Esperamos que este manual seja utilizado por professores que adotem o livro “Eletromagnetismo, Kraus / Carver” ou “Eletromagnetics, Kraus”, e que o mesmo seja de grande valia para melhor entendimento da teoria.

Tendo em vista que todo e qualquer trabalho não está imune a erros e consequentemente eventuais correções, os leitores que desejarem fazer críticas e, ou, sugestões devem dirigir-se aos autores no Departamento de Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (UFMA).

Marcelo Lyra Brandão

lyra@dee.ufma.br

Rogerio Moreira Lima Silva

rogeriomls@zipmail.com.br

rogeriomls@ig.com.br

rogermils@telemar-ma.com.br

SUMÁRIO

Capítulo 1	13
Capítulo 2	19
Capítulo 3	33
Capítulo 4	51
Capítulo 5	59
Capítulo 6	87
Capítulo 7	95
Capítulo 8	103
Capítulo 9	113
Bibliografia Consultada	133
Biografia dos autores.....	135

LISTA DE FIGURAS

Figura Prob. 2-2	21
Figura Prob. 3-3	36
Figura Prob. 3-4	38
Figura Prob. 3-5	39
Figura Prob. 3-8a	44
Figura Prob. 3-8b	46
Figura Prob. 3-9	46
Figura Prob. 3-10	48
Figura Prob. 4-2	52
Figura Prob. 5-2	60
Figura Prob. 5-3a	61
Figura Prob. 5-3b	62
Figura Prob. 5-5	65
Figura Prob. 5-6a	67
Figura Prob. 5-6b	68
Figura Prob. 5-6c	68
Figura Prob. 5-9	72
Figura Prob. 5-12	73
Figura Prob. 5-13a	75
Figura Prob. 5-13b	75
Figura Prob. 5-14	77
Figura Prob. 5-15	79
Figura Prob. 5-16a	81
Figura Prob. 5-16b	81
Figura Prob. 5-18	83
Figura Prob. 5-19	85
Figura Prob. 5-20	86
Figura Prob. 6-5	90
Figura Prob. 6-7	93
Figura Prob. 8-2	104
Figura Prob. 8-3a	105

Figura Prob. 8-3b	105
Figura Prob. 8-4a	106
Figura Prob. 8-4b	107
Figura Prob. 8-5	108
Figura Prob. 8-6	109
Figura Prob. 8-7	110
Figura Prob. 9-11	122
Figura Prob. 9-15	125
Figura Prob. 9-16	127
Figura Prob. 9-17	128
Figura Prob. 9-18	130

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1- Dar:

- a) A descrição dimensional
- b) As fórmulas dimensionais em termos dos símbolos M,L,T e I
- c) As unidades de SI, para as seguintes expressões:

$$\frac{dl}{dt} \int F . dl \quad \frac{dl}{dx}$$

onde l é o comprimento, t o tempo e F a força

Fonte:[1]

Sol:

a) $\frac{dl}{dt} = \text{velocidade}$

$$\int F . dl = \text{trabalho}$$

$$\frac{dl}{dx} = \text{a dim ensional}$$

b)

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}} = \frac{L}{T}$$

$$\int F \cdot dl = (\text{força}) * (\text{comprimento}) = (\text{massa}) * (\text{aceleração}) * (\text{comprimento})$$

$$= (\text{massa}) * \left(\frac{\text{velocidade}}{\text{tempo}} \right) * (\text{comprimento}) = \frac{(\text{massa}) * (\text{comprimento})}{(\text{tempo})^2}$$

$$\Rightarrow \int F \cdot dl = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{(\text{comprimento})}{(\text{comprimento})} = \frac{L}{L} = 1$$

c)

$$\frac{dl}{dt} = m / s(\text{metros}..por..segundo)$$

$$\int F \cdot dl = J(\text{joules})$$

$$\frac{dl}{dx} = a \text{ dimensional}$$

1.2) Dar o que se pede no problema 1.1 para

$$\iiint \rho \cdot dv; V; E; \int E \cdot dl; \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}; \frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}; J; BIL$$

Fonte:[1]

Sol:

$$a) \iiint \rho .dv = c \arg a$$

$$V = potencial$$

$$E = \text{intensidade de campo elétrico}$$

$$\int E .dl = potencial$$

$$\frac{1}{4 .\pi .\epsilon_0} = constate$$

$$\frac{Q^2}{4 .\pi .\epsilon_0 .r^2} = força$$

$$J = \text{densidade de corrente}$$

$$BIL = Força$$

$$b) \iiint \rho .dv = \frac{Q}{V}(V) = Q = I.T$$

$$V = -\int E .dl = E.L = \frac{F}{Q} .L = \frac{M.L}{T^2} . \frac{L}{Q} = \frac{M.L}{T^2} . \frac{L}{I.T} =$$

$$\Rightarrow V = \frac{ML^2}{T^3 I}$$

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{\frac{ML}{T^2}}{IT} = \frac{ML}{T^3 I}$$

$$\frac{1}{4 .\pi .\epsilon_0} = K; F = K \frac{Q}{r^2} \Rightarrow K = \frac{Fr^2}{Q} = \frac{\frac{ML}{T^2} L^2}{IT}$$

$$K = \frac{ML^3}{T^4 I^2}$$

$$J = \frac{\partial I}{\partial S} = \frac{I}{L^2}$$

$$BIL = ?$$

$$\oint \vec{H} .d\vec{l} = \mu .i \Rightarrow H = \frac{\frac{h}{L} .I}{L} = \frac{hI}{L^2}$$

$$h = \text{indutância} \cdot \text{por} \cdot \text{metro}$$

$$v = l \frac{di}{dt} \Rightarrow l = \frac{v}{di/dt} = \frac{V}{I/T} = \frac{VT}{I}$$

mas,

$$V = \frac{ML^2}{T^3 I}, l = \frac{\frac{ML^2}{T^3 I} T}{I} = \frac{ML^2}{T^2 I^2} (\text{indutância})$$

$$\frac{l}{m} = \frac{\frac{ML^2}{T^2 I^2}}{L} = \frac{ML}{T^2 I^2} (\text{indutância} \cdot \text{por} \cdot \text{metro} \cdot \text{ou} \cdot \mu)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{ML}{T^2 I^2} \cdot \frac{I}{L} = \frac{ML}{T^2 I}, \text{ logo:}$$

$$BIL = \frac{ML}{T^2 I} IL = \frac{ML^2}{T^2}$$

c) $\iiint \rho dv = C (\text{coulombs})$

$$V = V (\text{volts})$$

$$E = \frac{V}{m} (\text{volts} \cdot \text{por} \cdot \text{metro})$$

$$\int E dl = \text{volts}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{m}{F} (\text{metros} \cdot \text{por} \cdot \text{faraday})$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = N (\text{Newtons})$$

$$J = \frac{A}{m^2} (\text{ampères} \cdot \text{por} \cdot \text{metro} \cdot \text{quadrado})$$

$$BIL = N (\text{newtons})$$

¹ Referências para estudo da teoria

¹ Referência para estudo da teoria:

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**
Editora Guanabara Dois, 1978.

⇒ capítulo 1 (um)

CAPÍTULO 2

CAMPO ELETROSTÁTICO - PARTE 1

2.1)

(a) Que carga elétrica seria necessária colocar na Terra e na Lua para que tal força de atração se iguale a força de atração gravitacional? Suponha que as cargas sejam colocadas na mesma proporção que as massas. Considere a massa da Terra 6.10^{24} Kg, e da Lua 7.10^{27} Kg, sendo a separação de 40Mm. A constante gravitacional $6,7.10^{-11}$ Nm²/Kg² (é análoga a lei de Coulomb)

(b) Se as separações fossem de sinais contrários qual seria o momento do dipolo.

Fonte:[1]

Sol:

(a)

Dados: $m_1=6.10^{24}$ Kg; $m_2=7.10^{22}$ Kg; $G=6,7.10^{-11}$ Nm²/Kg²; $r=400$ Mm

Sabe-se que $\epsilon_0=8,85$ pF/m $p=3,14$

$$F_e = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}; F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F_e = F_G \Rightarrow \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow q_1 \cdot q_2 = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2$$

$$\Rightarrow q_1 \cdot q_2 = 3,13 \cdot 10^{27} \text{ C}^2$$

são proporcionais, logo:

$$\begin{array}{l} m_1 + m_2 \rightarrow 1 \\ m_1 \rightarrow p \end{array} \quad p = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0,99 \rightarrow m_1 = p \cdot (m_1 + m_2)$$

$$\begin{array}{l} m_1 + m_2 \rightarrow 1 \\ m_2 \rightarrow p' \end{array} \quad p' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,01 \rightarrow m_2 = p' \cdot (m_1 + m_2)$$

como, $\begin{array}{l} m_1 \sim q_1 \\ m_2 \sim q_2 \end{array} \Rightarrow q_1 = p \cdot (q_1 + q_2); q_2 = p' \cdot (q_1 + q_2)$

$$q_1 \cdot q_2 = p \cdot p' \cdot (q_1 + q_2)^2 \Rightarrow q_1 + q_2 = \sqrt{\frac{q_1 \cdot q_2}{p \cdot p'}} \Rightarrow q_1 + q_2 = 5,24 \cdot 10^{14} \text{ C}$$

$$q_1 = p \cdot (q_1 + q_2) = 0,99 \cdot (5,24 \cdot 10^{14}) = 518 \cdot 10^{12} = 518 \text{ TC}$$

$$q_2 = p' \cdot (q_1 + q_2) = 0,01 \cdot (5,24 \cdot 10^{14}) = 6,04 \cdot 10^{12} = 6,04 \text{ TC}$$

(b)

para o dipolo $Q \cdot l = \sqrt{q_1 \cdot q_2} \cdot l_2 = 2,24 \cdot 10^{22} \text{ Cm}$

2.2) A figura mostra uma longa barra isolante sem massa, de comprimento L , presa por pino no seu centro e equilibrada com peso W a uma distância x de sua extremidade esquerda. Nas extremidades esquerda e direita da barra são colocadas cargas q e $2q$, respectivamente. A uma distância h diretamente abaixo dessas cargas está fixada uma carga positiva $+Q$ (veja figura).

- (a) Determine a posição x do peso quando a barra estiver equilibrada.
- (b) Qual deverá ser o valor de h para que a barra não exerça nenhuma força vertical sobre o suporte quando em equilíbrio? (Despreze a interação entre as cargas nos extremos opostos da barra.) Fonte:[5]

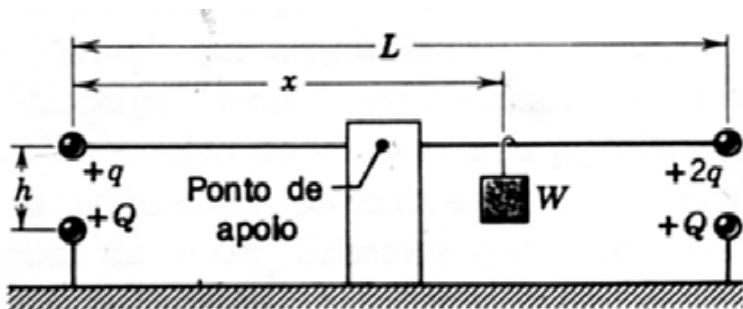


Fig. Prob. 2-2

Fonte:[5]

Sol:

(a)

$$x = x_1 + x_2 \rightarrow x_1 = \frac{L}{2}$$

$$F_1 = \frac{Q \cdot 2q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot h^2}; F_2 = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot h^2}$$

$$\sum T = F_1 \cdot \frac{L}{2} - W \cdot x_2 - F_2 \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{L}{2} \left(\frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot h^2 \cdot W} \right)$$

$$x = \frac{L}{2} + x_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \left(\frac{Q \cdot q}{4\pi \epsilon \cdot h^2 \cdot W} \right) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot h^2 \cdot W} \right)$$

(b)

$$\sum F = F_1 + F_2 - W = 0 \Rightarrow W = F_1 + F_2$$

$$W = \frac{3 \cdot q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot h^2} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3 \cdot q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot W}}$$

2.3) Duas pequenas esferas condutoras de massa m suspensas por fios de seda de comprimento L possuem uma carga q . Considerando que o ângulo q é tão pequeno que a $\text{tg} q$ possa ser substituída por $\text{sen} q$: Mostre que para esta aproximação temos:

$$x = \left(\frac{q^2 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot m \cdot g} \right)^{1/3}$$

Fonte:[5]

Sol:

$$\text{tg} \theta = \frac{F}{mg} = \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot mg \cdot x^2}; \text{sen} \theta = \frac{x}{2L}$$

$$\text{mas } q \text{ muito pequeno } \text{tg} \theta \cong \text{sen} \theta = \frac{x}{2L}$$

$$\frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot mg \cdot x^2} = \frac{x}{2L} \Rightarrow x = \left(\frac{q^2 L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot m \cdot g} \right)^{1/3}$$

2.4) Duas partículas cada uma de massa m e com carga q , estão suspensas de um ponto comum, por cordas de comprimento l . Determine o ângulo q que cada corda forma com a vertical. {Fonte:[7]}

Sol:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon x^2}$$

temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{F}{T} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon T x^2}; \cos \theta = \frac{mg}{T}; \text{tg } \theta = \frac{F}{mg} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon mg x^2}$$

$$\frac{\text{tg}^3 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \text{tg}^3 \theta \cdot \cos^2 \theta = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon m g x^2} \right)^3 \left(\frac{2\pi\epsilon m g x^3 l}{l q^2} \right)^2 =$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\epsilon m g l^2}$$

2.5) Uma certa carga Q deve ser dividida em duas: $(Q-q)$ e q . Qual é a relação entre Q e q para que a repulsão seja máxima? {Fonte:[5]}

Sol:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q(Q-q)}{r^2} = \frac{(Qq - q^2)}{4\pi\epsilon r^2}$$

$$\frac{dF}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{(Q - 2q)}{4\pi\epsilon r^2} = 0 \Rightarrow Q - 2q = 0$$

$$Q = 2q$$

2.6) Mostre que as placas de um capacitor de placas paralelas se atraem com uma força dada por $F = \frac{q^2}{2\epsilon \cdot A}$.

Prove o que foi dito, calculando o trabalho necessário para aumentar a separação entre as placas de x para $x+dx$, a carga q permanecendo constante. {Fonte:[5]}

Sol:

Para o capacitor de placas paralelas, aplicando a lei de Gauss, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow E \cdot A = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon \cdot A}$$

$$dF = \vec{E} \cdot dq \Rightarrow F = \int_0^q \frac{q}{\epsilon \cdot A} dq = \frac{1}{\epsilon \cdot A} \left(\frac{q^2}{2} \Big|_0^q = \frac{q^2}{2\epsilon \cdot A} \right)$$

2.7) Em um trabalho que foi escrito em 1911, Ernest Rutherford disse: “Para se ter alguma idéia das forças necessárias para desviar uma partícula a através de um grande ângulo, considere um átomo contendo uma carga pontual Ze no seu centro e envolvida por uma distribuição de carga negativa, $-Ze$, uniformemente distribuída dentro de uma esfera de raio R .” O campo elétrico E num ponto dentro do átomo, a uma distância r do seu centro, é

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^3} \right)$$

Verifique esta equação {Fonte:[5]}

Sol:

para $r > R$,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q'}{\epsilon} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q'}{\epsilon} \Rightarrow E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q'}{\epsilon}$$

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \Rightarrow \rho = \frac{q'}{\frac{4\pi \cdot r^3}{3}} = \frac{q}{\frac{4\pi \cdot r^3}{3}}$$

$$q' = q$$

$$E_+ = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

para $r < R$,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q'}{\epsilon} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q'}{\epsilon} \Rightarrow E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q'}{\epsilon}$$

$$E = \frac{q'}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \Rightarrow \rho = \frac{q'}{\frac{4\pi \cdot r^3}{3}} = \frac{q}{\frac{4\pi \cdot R^3}{3}}$$

$$\Rightarrow q' = q \frac{r^3}{R^3}$$

$$E_- = \frac{q \cdot r}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R^3}$$

$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right)$$

2.8) Duas cargas puntiformes, $-q$ e $+q/2$, estão situadas na origem e no ponto $(a,0,0)$, respectivamente. Em que ponto, ao longo do eixo x , o campo elétrico se anula? {Fonte:[5]}

Sol:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-q}{x^2} + \frac{q}{2(x-a)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-x^2 + 4ax - 2a^2}{x^2 2(x-a)^2} \right)$$

o campo elétrico se anula em $E = 0$

$$\Rightarrow -x^2 + 4ax - 2a^2 = 0$$

$$x^2 - 4ax + 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 8a^2}}{2} = 2a \pm 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1), \text{ satisfaz}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{2}a(\sqrt{2} - 1), \text{ não satisfaz (não utilizar)}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2}a \left[(\sqrt{2})^2 - 1 \right]}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\rightarrow x = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2} - 1}$$

2.9) Usando a Lei de Gauss, determine a carga elétrica total dentro de um volume cúbico de 2m de lado situado no octante positivo com três arestas coincidentes com os eixos x,y e z e um vértice na origem, sendo o vetor densidade de fluxo elétrico \vec{D} dado por:

(a) $\vec{D} = \hat{x} 2x^2$

(b) $\vec{D} = \hat{x} x.y.z$

(c) $\vec{D} = \hat{x}(x+3) + \hat{y}(y+4) + \hat{z}(z+5)$

(d) $\vec{D} = \hat{x} x.y.z + \hat{y} x^2.y^2.z^2 + \hat{z} x^3.y^3.z^3$

Fonte:[1]

Sol:

(a)

$$Q = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) . dv = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 4x . dx . dy . dz \Rightarrow Q = 32C$$

(b)

$$Q = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) . dv = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xy.z . dx . dy . dz \Rightarrow Q = 8C$$

(c)

$$Q = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) . dv = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (1+1+1) . dx . dy . dz \Rightarrow Q = 24C$$

(d)

$$Q = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) . dv = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (yz + 2.x^2.y.z^2 + 3.x^3.y^3.z) . dx . dy . dz$$

$$\Rightarrow Q = 164,44C$$

2.10) Carrega-se uniformemente um cilindro infinitamente longo de raio R

(a) Mostre que E a uma distância r do eixo do cilindro ($r < R$)

$$\text{é dado por } E = \frac{\rho \cdot r}{2 \cdot \epsilon},$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga.

(b) Que resultado poderíamos esperar para $r > R$?

{Fonte:[5]}

Sol:

(a)

para $r < R$,

$$\epsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q = \iiint \rho \cdot dv$$

$$\epsilon \cdot E \cdot 2\pi \cdot r^2 = \rho \pi \cdot r^2 \cdot L$$

$$\frac{E}{L} = \frac{\rho \cdot r}{2 \cdot \epsilon}$$

(b)

para $r > R$,

$$\epsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q = \iiint \rho \cdot dv$$

$$\epsilon \cdot E \cdot 2\pi \cdot r^2 = \rho \pi \cdot R^2 \cdot L$$

$$\frac{E}{L} = \frac{\rho \cdot R^2}{2 \cdot \epsilon \cdot r}$$

2.11) Se $\vec{E} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$, achar o fluxo elétrico sobre uma esfera de raio R.

Fonte:[1]

Sol:

$$\vec{E} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \quad \left| \vec{E} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R;$$

$$\vec{E} = \left| \vec{E} \right| \cdot \hat{r} \quad d\vec{s} = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \hat{r};$$

$$\psi_e = \varepsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$\psi_e = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot R^3$$

2.12) Uma distribuição de potencial dada por $V = 3y^{1/2}$ V. Qual a expressão de E? Qual é o seu valor vetorial (módulo, direção e sentido) nos pontos (0;0), (4;0) e (0;4)? {Fonte:[1]}

Sol:

$$\vec{\nabla}V = -\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -3 \frac{1}{2} y^{-1/2} \hat{y} = -\frac{3}{2\sqrt{y}} \hat{y}$$

$$E(0;0) = \infty V/m; E(4;0) = \infty V/m; E(0;4) = -0,75 \hat{y} V/m$$

2.13) Uma distribuição de potencial é dada por :

$V = 7y^2 + 12x$ V. Qual é a expressão de \vec{E} . Qual é o seu valor (módulo, direção e sentido) nos pontos (0,0); (5,0); (0,3) e (5,3)? {Fonte:[1]}

Sol:

$$V = 7y^2 + 12x;$$

$$\vec{\nabla} V = -\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} \right) = -12 \hat{x} - 14y \hat{y}$$

$$\vec{E} = -12 \hat{x} - 14y \hat{y} \text{ V/m}$$

em (0,0)

em (0,3)

$$\vec{E}(0,0) = -12 \hat{x} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(0,3) = -12 \hat{x} - 42 \hat{y} \text{ V/m}$$

em(5,0)

em(5,3)

$$\vec{E}(5,0) = -12 \hat{x} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(5,3) = -12 \hat{x} - 42 \hat{y} \text{ V/m}$$

2.14) Duas bolas dielétricas de pequeno diâmetro 10g podem deslizar livremente numa linha plástica vertical. Cada bola tem uma carga de $1\mu\text{C}$.

(a) Achar a distância entre elas, se a bola inferior é impedida de se mover

(b) Qual é o momento do dipolo

Fonte:[1]

Sol:

Dados: $m=10\text{g}$; $g=9,81\text{m/s}^2$; $q=1\mu\text{C}$

Sabe-se que: $\epsilon_0=8,85\text{pF/m}$

(a)

$$W = q.V$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon.y} \quad q \frac{q}{4\pi\epsilon.y} = m.g.y \Rightarrow y = \frac{q}{2\sqrt{\pi\epsilon.m.g}}$$

$$W = mg.y \\ \Rightarrow y = 0,303m$$

(b)

$$Q.l = 10^{-6}.0 = 0$$

2.15) Uma distribuição de potencial é dada por:

$$V = k.r^{1/2}.\text{sen } \theta . \text{ Achar } \vec{E} .$$

Fonte:[1]

Sol:

$$V = k.r^{1/2}.\text{sen } \theta ; \Rightarrow V = k.\sqrt{r}.\text{sen } \theta ; \vec{E} = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} . \frac{1}{r} . \frac{\partial V}{\partial \theta} ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k}{2\sqrt{r}} \text{sen } \theta ; \frac{\partial V}{\partial \theta} = k.\sqrt{r}.\text{cos } \theta ;$$

$$\vec{E} = -\hat{r} \frac{k}{2\sqrt{r}} . \text{sen } \theta - \hat{\theta} . \frac{1}{r} . k.\sqrt{r}.\text{cos } \theta$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} \frac{k\sqrt{r}}{2r} . \text{sen } \theta - \hat{\theta} . \frac{1}{r} . k.\sqrt{r}.\text{cos } \theta$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k.\sqrt{r}}{r} \left(-\frac{\hat{r}.\text{sen } \theta}{2} - \hat{\theta}.\text{cos } \theta \right) \quad ; \Rightarrow \vec{E} = \frac{k.\sqrt{r}}{r} \left(-\frac{\hat{r}.\text{sen } \theta}{2} - \hat{\theta}.\text{cos } \theta \right)$$

² Referências para estudo da teoria

² **Referência para estudo da teoria:**

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**
Editora Guanabara Dois, 1978

⇒ capítulo 2 (dois)

KRAUS, John D. **Eletromagnetics**

McGraw-Hill International Editions , 1991

⇒ capítulo 2 (dois)

CAPÍTULO 3

CAMPO ELETROSTÁTICO - PARTE 2

3.1) Um capacitor foi construído para operar com uma capacitância constante, em meio a uma temperatura oscilante. O capacitor é do tipo placas paralelas com separadores de plástico para alinhar as placas.

(a) Mostre que a razão da mudança da capacitância C com

a temperatura T é dada por
$$\frac{dC}{dT} = C \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right)$$

onde A é a área da placa e x é a distância entre as placas.

(b) Se as placas fossem de alumínio, qual deveria ser o coeficiente de expansão térmica dos separadores para que a capacitância não variasse com a temperatura?

(Ignore o efeito dos separadores sobre a capacitância)

{Fonte:[5]}

Sol:

Letra (a)

$$C = \frac{\varepsilon.A}{x}$$

$$\frac{dC}{dT} = \frac{\frac{d(\varepsilon.A)}{dT} \cdot x - A \frac{d(\varepsilon.x)}{dT}}{x^2} = \frac{\varepsilon.x \frac{dA}{dT} - \varepsilon A \frac{dx}{dT}}{x^2} = \frac{\varepsilon}{x} \frac{dA}{dT} - \frac{\varepsilon.A}{x^2} \frac{dx}{dT}$$
$$C \frac{\varepsilon.A}{x} \rightarrow \frac{C}{x} = \frac{\varepsilon.A}{x^2}$$

$$\frac{dC}{dT} = \frac{C}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{C}{x} \frac{dx}{dT} = C \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right)$$

Letra (b)

$$\frac{dC}{dT} = 0 \rightarrow C \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right) = 0, \text{ mas } C \neq 0, \text{ logo:}$$

$$\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right) = 0 \rightarrow \frac{dA}{dT} = \frac{A}{x} \frac{dx}{dT}, \text{ mas } C = \frac{\varepsilon.A}{x} \rightarrow \frac{C}{\varepsilon} = \frac{A}{x},$$

logo:

como $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, e ε_r do alumínio é grande, então $\frac{dA}{dT}$ diminui

3.2) Um capacitor tem placas quadradas de lados iguais a, que fazem entre si um ângulo. Mostre que para pequenos valores de θ , a capacitância é dada por:

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d} \right)$$

Sugestão: O capacitor pode ser dividido em tiras muito finas que estão efetivamente em paralelo. {Fonte:[5]}

Sol:

$$A = a^2; dC = \frac{\epsilon_0 dA}{y+d}; dA = a.dr$$

$y = r.\text{sen } \theta$, para pequenos valores de θ , temos $y \approx r.\theta$:

$$C = \epsilon_0 a \int_0^a \frac{dr}{d+r.\theta} = \frac{\epsilon_0 .a}{\theta} \left(\ln(r.\theta + d) \right) \Big|_0^a = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} [\ln(a\theta + d) - \ln d]$$

$$C = \frac{\epsilon_0 .a}{\theta} \ln \left(\frac{a\theta + d}{d} \right)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{a\theta}{d} \right); \text{ obs.: } \rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots, \text{ isto é,}$$

expandindo em série de potência a função $\ln(1+x)$, assim temos:

$$\ln \left(1 + \frac{a\theta}{d} \right) = \frac{a\theta}{d} - \frac{1}{2} \left(\frac{a\theta}{d} \right)^2 + \dots,$$

para pequenos valores de θ , temos que:

$$\ln \left(1 + \frac{a\theta}{d} \right) \approx \frac{a\theta}{d} - \frac{1}{2} \left(\frac{a\theta}{d} \right)^2 \rightarrow \ln \left(1 + \frac{a\theta}{d} \right) \approx \frac{a\theta}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{d} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \left[\frac{a\theta}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d} \right) \right] = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d} \right)$$

$$A = a^2$$

$$\rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d} \right)$$

3.3) Uma barra isolante “semi-infinita” possui uma carga por unidade de comprimento, de valor ρ_L . Mostre que o campo elétrico, no ponto P, forma um ângulo de 45° com a barra e que este resultado é independente da distância R.

Fonte:[5]

Sol:

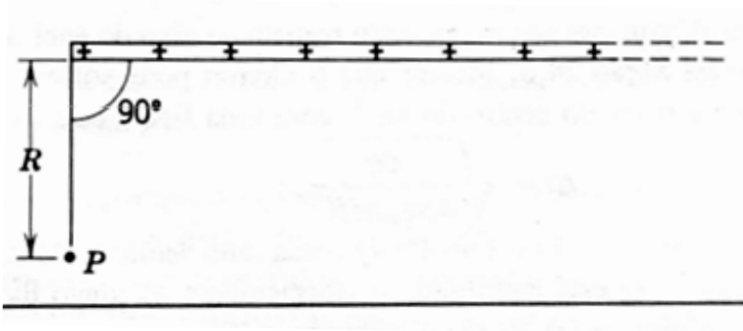


Fig. Prob. 3-3

Fonte:[5]

$$dE = dE_x + dE_y$$

$$dE_x = dE \cdot \sin \theta \Rightarrow E = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi\epsilon(R^2 + x^2)} \cdot \sin \theta = \int_0^\infty \frac{\rho_L \cdot dx \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon(R^2 + x^2)}$$

$$\text{chamando } x = R \cdot \tan \theta \rightarrow dx = R \sec^2 \theta \cdot d\theta$$

$$x \rightarrow 0 \quad \theta \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow \pi / 2$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_L \cdot R \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon(R^2 + R^2 \tan^2 \theta)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_L \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon R^2 \cdot \sec^2 \theta} = \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon R} \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon R} \end{aligned}$$

$$dE_y = dE \cdot \cos \theta \Rightarrow E = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi\epsilon(R^2 + x^2)} \cdot \cos \theta = \int_0^\infty \frac{\rho_L \cdot dx \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon(R^2 + x^2)}$$

$$\text{chamando } x = R \cdot \tan \theta \rightarrow dx = R \sec^2 \theta \cdot d\theta$$

$$x \rightarrow 0 \quad \theta \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow \pi / 2$$

$$\begin{aligned} E_y &= \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_L \cdot R \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon(R^2 + R^2 \tan^2 \theta)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_L \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon R^2 \cdot \sec^2 \theta} = \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon R} \left(\sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon R} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{E_x}{E_y} = \frac{\rho_L}{\frac{4\pi\epsilon R}{\rho_L}} = 1 \quad \tan \theta = 1 \rightarrow \theta = \tan^{-1}[1] = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad, ou } \operatorname{tg} \theta = 45^\circ$$

3.4) Uma barra isolante, de comprimento L , tem uma carga $-q$ distribuída uniformemente ao longo de sua extensão, como mostra a figura.

- Qual é a densidade linear de carga da barra?
- Qual é o campo elétrico no ponto P a uma distância “ a ” da extremidade da barra?
- Se P estivesse muito longe da barra em comparação com L , ela se comportaria como uma carga pontual? Mostre que a sua resposta, para o item (b) reduz-se ao campo elétrico de uma carga pontual, para $a \gg L$.

Fonte:[5]

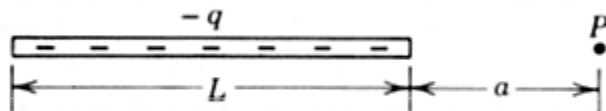


Fig. Prob. 3-4.

Fonte:[5]

Sol:

Letra (a)

$$dq = \rho_L \cdot dl \rightarrow \int_0^q dq = \int_0^L \rho_L \cdot dl \rightarrow q = \rho_L \cdot L \rightarrow \rho_L = \frac{q}{L}$$

Letra (b)

$$dE = \frac{dq}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \rightarrow E = \int_0^L \frac{dq}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon} \int_0^L \frac{dl}{(l+a)^2} = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon} \left(-\frac{1}{l+a} \Big|_0^L \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_L \cdot L}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a(L+a)}, \text{ mas } q = \rho_L \cdot L, \text{ logo:}$$

$$\rightarrow E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a \cdot (L+a)}$$

Letra (c)

Para $a \gg L$, implica que $L \rightarrow 0$ vamos aplicar isto como limite

$$\text{em } E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a \cdot (L+a)}$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} E = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a \cdot (L+a)} = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a^2}$$

então $E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot a^2}$, para $a \gg L$; logo reduz-se ao campo elétrico de uma carga pontual

3.5) Uma barra de vidro fino é encurvada num semicírculo de raio R . Uma carga $+q$ está distribuída uniformemente ao longo da metade superior, e uma carga $-q$, distribuída uniformemente ao longo da metade inferior, como mostra a figura. Determine o campo elétrico no ponto P que está no centro do semicírculo.

Fonte:[5]

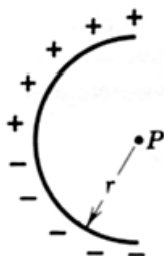


Fig. Prob. 3-5

Fonte:[5]

Sol:

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{\rho_L dl \cos \theta}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

$$E_y = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon} \int \frac{dl \cdot \cos \theta}{R^2} = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon} \int \frac{R \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{R^2}$$

$$E_y = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R} \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R} \left(\sin \theta \Big|_{3\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\rho_L}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R} (2)$$

$$E_y = \frac{\rho_L}{2\pi \cdot \epsilon \cdot R}$$

$$\text{temos que } \rightarrow \rho_L = \frac{q}{l} = \frac{q}{\pi \cdot R}$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{q}{2\pi^2 \cdot \epsilon \cdot R^2}$$

3.6)

- (a) Um disco circular de raio R tem uma densidade superficial uniforme de carga ρ_s . Determine o campo elétrico de um ponto sobre o eixo do disco a uma distância z do plano de disco.
- (b) Um cilindro reto, de raio R e altura L, está orientado ao longo do eixo z. Possui uma densidade volumétrica de carga $\rho(z) = \rho_0 + \beta \cdot z$, em relação a uma origem no centro do cilindro. Determine a força sobre uma carga q situada no centro do cilindro. {Fonte:[7]}

Sol:

Letra (a)

$$E = \int \frac{dq \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon \cdot r^2} = \int_0^R \frac{2\pi \cdot a \cdot \rho_s \cdot da \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot \epsilon \cdot (z^2 + a^2)} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \int_0^R \frac{a \cdot da \cdot \cos \theta}{(z^2 + a^2)}$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \int_0^\theta \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\rho_s}{2\epsilon} (1 - \cos \theta) = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

Obs.: Utilizamos as relações abaixo:

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{z^2 + R^2}}; \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}; \operatorname{tg} \theta = \frac{a}{z}$$

$$a = z \operatorname{tg} \theta \Rightarrow da = z \sec^2 \theta \cdot d\theta$$

$$z^2 + a^2 = z^2 \sec^2 \theta$$

e aplicando técnicas de resoluções de integrais trigonométricas temos que:

$$\int_0^R \frac{a \cdot da \cdot \cos \theta}{(z^2 + a^2)} = \int_0^\theta \frac{z \operatorname{tg} \theta \cdot z \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \cdot \cos \theta}{z^2 \cdot \sec^2 \theta} =$$

$$= \int_0^\theta \operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \int_0^\theta \sin \theta \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^R \frac{a \cdot da \cdot \cos \theta}{(z^2 + a^2)} = \int_0^\theta \sin \theta \cdot d\theta$$

Letra (b)

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right); \Rightarrow dE = \frac{d\rho_s}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

$$\rho_s = \frac{q}{A}; \rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho.V \Rightarrow \rho_s = \frac{\rho.V}{A} = \frac{\rho\pi.R^2.z}{\pi.R^2} = \rho.z$$

$$\Rightarrow d\rho_s = \rho.dz$$

$$\Rightarrow dE = \frac{\rho.dz}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right); \rho(z) = \rho_0 + \beta.z$$

$$\Rightarrow dE = \frac{(\rho_0 + \beta.z).dz}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

$$\Rightarrow E = \int \frac{(\rho_0 + \beta.z)}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) dz$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon} \left[\int_0^{l/2} \rho_0 dz - \int_0^{l/2} \frac{\rho_0 z dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \int_0^{l/2} \beta.z.dz - \int_0^{l/2} \frac{\beta.z^2.dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$\int \frac{z.dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$\int \frac{z^2.dz}{\sqrt{z^2 + R^2}}, \text{ vamos fazer substituições trigonométricas}$$

($z=R.tg\theta$); e chegamos em:

$$\int \frac{z^2.dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{z\sqrt{z^2 + R^2}}{2} - \frac{R^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{R} + \frac{z}{R} \right|$$

$$E = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\rho_0 l}{2} - \rho_0 \sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2} + \rho_0 R + \beta \cdot \frac{l^2}{8} - \beta \left(\frac{l}{4} \sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2} - \frac{R^2}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 1} + \frac{l}{2R} \right| \right) \right]$$

fazendo $\rho_0 = 0$; implica em:

$$E = \frac{\beta}{2\epsilon} \left[\frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2} \right) - R^2 \cdot \ln \left| \frac{l}{2R} + \sqrt{1 + \frac{l^2}{4R^2}} \right| \right]$$

3.7) O potencial para um ponto axial de um disco carregado

$$\text{é } V = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right)$$

Mostre que E para pontos axiais é dado por

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

{Fonte:[5]}

Sol:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \right]$$

$$E = -\frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(\frac{2z}{2\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right)$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

3.8) Uma carga q está distribuída uniformemente num anel quadrado de lado l . Determinar E e V no centro do anel.
 {Fonte:[1]}

Sol:

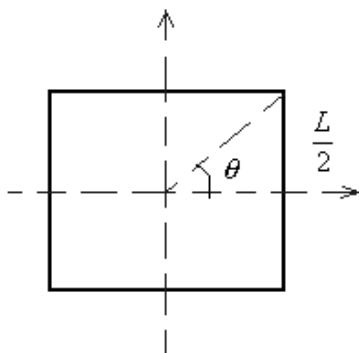


Fig. Prob. 3-8a

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r}$, da figura acima vemos que pelo teorema de Pitágoras temos:

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{2}} \right) \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\ln \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2} \right) - \ln \left(-\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\ln \left(\frac{\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2}}{-\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{q}{l} ; \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon l} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

Como o campo elétrico é um vetor observamos que no centro do quadrado ele se anula devido à simetria da figura

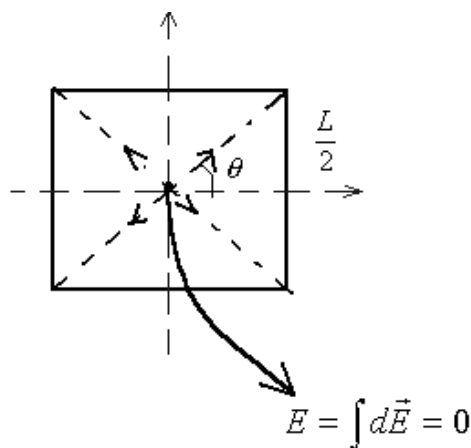


Fig. Prob. 3-8b

3.9) Distribuimos sobre uma barra fina uma carga por unidade de comprimento dada por $\rho_L = kx$, k é uma constante. A barra tem um comprimento L contido no eixo dos x com uma de suas extremidades na origem ($x=0$), conforme indica a figura.

- considerando o potencial no infinito igual a zero, calcule o valor de V no ponto P sobre o eixo dos y
- Determine o componente vertical E_y , da intensidade do campo elétrico
- Porque não podemos calcular o componente horizontal (E_x) do campo elétrico em P usando o resultado do item (a)? {Fonte:[5]}

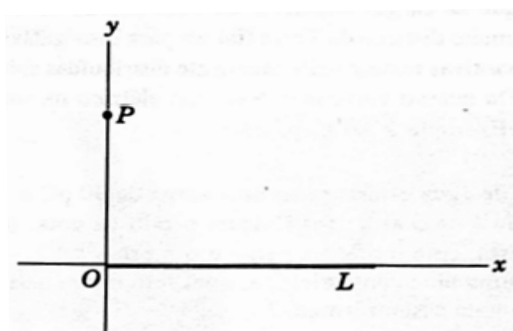


Fig. Prob. 3-9
{Fonte:[5]}

Sol:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; dq = \rho_L \cdot dx = k \cdot x \cdot dx$$

Letra (a)

$$V = \int_0^L \frac{dq}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{4\pi\epsilon} \int_0^L \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{4\pi\epsilon} \left[\sqrt{x^2 + y^2} \Big|_0^L \right]$$

$$V = \frac{k}{4\pi\epsilon} \left(\sqrt{L^2 + y^2} - y \right)$$

Letra (b)

$$\vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{4\pi\epsilon} \left(\sqrt{L^2 + y^2} - y \right) \right] = -\frac{k}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2 \cdot y}{2\sqrt{L^2 + y^2}} - 1 \right)$$

$$\vec{E}_y = \frac{k}{4\pi\epsilon} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}} \right)$$

Letra (c)

Porque o cálculo foi feito em função de y, não aparecendo a variável x, observe que teríamos assim:

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ como } V \text{ é função de } y, \text{ temos: } \vec{E}_x = -\frac{\partial V(y)}{\partial x} = 0$$

3.10) Seja ρ_L a carga por unidade de comprimento distribuída uniformemente ao longo de um segmento de reta de comprimento L.

- Determine o potencial (escolhido como sendo zero no infinito) num ponto P, afastado por uma distância y de uma das extremidades do segmento carregado e situado sobre seu prolongamento (Veja figura).
- Use o resultado do item (a) para calcular o componente do campo elétrico em P na direção y (ao longo do segmento de reta).
- Determine o componente do campo elétrico em P numa direção perpendicular ao segmento de reta. {Fonte:[5]}

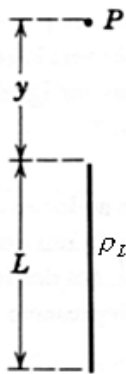


Fig. Prob. 3-10

{Fonte:[5]}

Sol:

Letra (a)

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow V = \int_0^L \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dl}{(l+y)} =$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln(l+y) \right)_0^L$$

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} [\ln(L+y) - \ln y] = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L+y}{L} \right)$$

Letra (b)

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial L} = -\frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \left(\ln \left[\frac{L+y}{y} \right] \right) \right]$$
$$E = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\frac{L+y}{y}} \frac{-L}{y^2} \right) = \frac{\rho_L \cdot L}{4\pi\epsilon \cdot y \cdot (L+y)}$$

Letra (c)

$$\vec{E}_x = \vec{E} \cdot \cos 90^\circ = 0$$

³¹ Referências para estudo da teoria

³ **Referência para estudo da teoria:**

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**
Editora Guanabara Dois, 1978.
⇒ capítulo 3 (três)

KRAUS, John D. **Eletromagnetics**
McGraw-Hill International Editions, 1991
⇒ capítulo 4 (quatro)

CAPÍTULO 4

CORRENTE ELÉTRICA ESTACIONÁRIA

4.1) Se $\vec{J} = x\hat{x}3yz \text{ A/m}^2$, ache a corrente I através de um quadrado de $2m$ de lado com um dos vértices na origem e outros em $(0,2,0)$; $(0,0,2)$ e $(0,2,2)$

Fonte:[1]

Sol:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint \left(x\hat{x}3yz \right) \left(x\hat{x} dy \cdot dz \right) = \int_0^2 \int_0^2 3yz \cdot dy \cdot dz$$

$$\Rightarrow I = 12A$$

4.2) Um resistor tem a forma de um tronco de cone circular reto, como é mostrado na figura. Os raios das bases são a e b , e a altura é L . Se a inclinação for suficientemente pequena, podemos supor que a densidade de corrente seja uniforme através de qualquer seção transversal.

(a) Calcule a resistência deste sistema



Fig. Prob. 4-2
{Fonte:[5]}

(b) Mostre que o resultado de (a) se reduz a $\rho \frac{L}{A}$, quando

$$a = b$$

{Fonte:[5]}

Sol:

(a)

$$dR = \rho \frac{dl}{\pi y^2}; \sin \theta = \frac{(y-a)}{l} \rightarrow (y-a) = l \cdot \sin \theta, \text{ mas para}$$

pequenos valores de θ , temos que:

$$(y-a) \approx l \cdot \theta$$

$$dy = \theta \cdot dl \rightarrow dl = \frac{dy}{\theta}$$

$$dR = \frac{\rho}{\pi \cdot y^2} \cdot \frac{dy}{\theta}$$

$$dR = \frac{\rho}{\pi \cdot \theta} \frac{dy}{y^2}$$

$$R = \frac{\rho}{\pi \theta} \int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{\rho}{\pi \theta} \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_a^b \rightarrow R = \frac{\rho}{\pi \theta} \left(\frac{b-a}{ab} \right); y-a = l\theta$$

para $y = b$, temos:

$$b-a = L\theta \rightarrow L = \frac{b-a}{\theta}$$

$$\text{logo: } R = \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{b-a}{\theta} \right) \frac{1}{ab} = \frac{\rho \cdot L}{\pi ab}$$

(b)

$$\text{fazendo-se } a = b, \quad R = \frac{\rho \cdot L}{\pi \cdot b \cdot b} = \frac{\rho L}{\pi \cdot b^2} = \frac{\rho \cdot L}{A}$$

4.3) Uma arruela lisa de espessura t tem raio interno r e raio externo r_z . Sendo a condutividade σ , determine a resistência

- Entre as bordas interna e externa
- Entre as superfícies planas, e
- Ao longo da arruela (idêntica a resistência entre as bordas de um corte de espessura infinitesimal na direção radial).

Fonte:[1]

Sol:

(a)

$$dR = \frac{dl}{\sigma.A} = \frac{2\pi.dr}{\sigma.2\pi.r.t} = \frac{dr}{\sigma.tr} \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma.t} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d.r}{r} = \frac{1}{\sigma.t} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(b)

$$dR = \frac{t}{\sigma.A} = \frac{t}{\sigma.2\pi.r.dr} \Rightarrow R = \frac{t}{\sigma 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2}} = \frac{t}{\sigma\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

(c)

$$dR = \frac{2\pi.r}{\sigma.t.dr} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{\sigma.t \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}} = \frac{2\pi}{\sigma.t. \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

4.4) Um longo fio de cobre de raio r é esticado paralelamente a uma placa infinita de cobre e a uma distância h desta. A região que está acima da placa e circundando o fio é preenchida com um meio de condutividade σ . Demonstre que a resistência elétrica entre os dois eletrodos de cobre, por unidade de comprimento do fio, é dada por

$$R = \frac{l}{2\pi\sigma} \cosh^{-1} \frac{h}{r}$$

Fonte:[7]

Sol:

$$dR = \frac{dx}{\sigma.A} = \frac{dx}{\sigma.2\pi..r.l}$$

mas $l = \sqrt{x^2 - r^2}$, logo: $\begin{cases} l \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow r \\ l \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow h \end{cases}$

$$dR = \frac{dx}{2\pi.r.\sigma.\sqrt{x^2 - r^2}} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi.r.\sigma} \int_r^h \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{1}{2\pi.r.\sigma} \left(\cosh^{-1} \frac{x}{r} \Big|_r^h \right)$$

$$R = \frac{1}{2\pi.r.\sigma} \left(\cosh \frac{h}{r} - \cosh[1] \right) = \frac{1}{2\pi.\sigma.r} \cosh^{-1} \frac{h}{r}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2\pi.\sigma.r} \cosh^{-1} \frac{h}{r} \quad (\Omega)$$

4.5) Em geral, cargas superficiais estão presentes na fronteira entre 2 condutores (condutividades σ_1 e σ_2 , e permissividade de ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente) por onde flui uma corrente. Mostre que a densidade superficial de carga ρ_s é dada por

$$\rho_s = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$$

{Fonte:[1]}

Sol:

Em uma fronteira entre 2 condutores temos que:

$$J_{n_1} = J_{n_2} = J_n$$

Para campos eletrostáticos, temos que:

Componente do campo	Relação de Fronteira	Condição
Tangencial	$E_{t_1} = E_{t_2}$	(1) 2 meios quaisquer
Normal	$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S$	(2) 2 meios quaisquer com carga na fronteira

Para campos eletrostáticos não se tem uma situação específica para 2 meios condutores, então:

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S \Rightarrow \rho_S = D_{n_1} - D_{n_2} = \varepsilon_1 \cdot E_{n_1} - \varepsilon_2 \cdot E_{n_2}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma},$$

$$\text{logo } \rho_S = \frac{\varepsilon_1 \cdot J_{n_1}}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2 \cdot J_{n_2}}{\sigma_2}; \text{ mas } J_{n_1} = J_{n_2} = J_n, \text{ então}$$

$$\rho_S = \frac{\varepsilon_1 \cdot J_n}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2 \cdot J_n}{\sigma_2} = J_n \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \right)$$

4.6) A lei da conservação de carga, que relaciona a densidade volumétrica em qualquer ponto no espaço com a densidade de corrente nas vizinhanças desse ponto, é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

Como você justifica a relação acima? Explique? (fisicamente) porque a soma é igual a zero.

Sol:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV = 0$$

Aplicando o teorema da Divergência, temos:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{fluxo da densidade de corrente}$$

sobre a superfície S que envolve o volume V

Se $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} > 0$ existe fluxo líquido de carga para fora $\frac{\partial q}{\partial t} < 0$,
ou seja diminui a densidade de carga da região.

Se $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} < 0$ existe fluxo líquido de carga para dentro

$\frac{\partial q}{\partial t} > 0$, ou seja aumenta a densidade de carga da região.

A soma deve ser igual a zero para que uma compense a outra, ou seja,

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s},$$

daí vem a lei dos nós para os casos dos circuitos a parâmetros concentrados, uma particularidade da teoria de campos “O somatório das correntes que entram num nó é igual ao somatório das correntes que saem”.

4.7) Em que situação a equação da continuidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

passa a ser escrita como $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$? Justifique.

Sol:

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \text{constante},$$

ou seja, se a densidade volumétrica de carga não varia, a carga não varia, logo não existe corrente $I \rightarrow J$ também não existe pois:

$$I = \iint_S \vec{J} d\vec{s}$$

Observe que $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dq}{dV} \right) = \frac{d}{dV} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)$, o que implica que se varia a densidade volumétrica de carga ρ , varia a carga q .

⁴Referências para estudo da teoria

Referência para estudo da teoria:

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**

Editora Guanabara Dois, 1978.

\Rightarrow capítulo 4 (quatro)

KRAUS, John D. **Eletromagnetics**

McGraw-Hill International Editions, 1991

\Rightarrow capítulo 5 (cinco)

CAPÍTULO 5

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS CAMPO MAGNETOSTÁTICO DE CORRENTES ELÉTRICAS ESTACIONÁRIAS

5.1) Dois condutores retos, longos e paralelos conduzem 10A. Se os condutores estiverem separados de 20mm um do outro, qual é a força por metro de comprimento sobre um condutor, se as correntes fluírem (a) em sentidos opostos e (b) no mesmo sentido? {Fonte:[1]}

Sol:

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I'}{2 \cdot \pi \cdot R} \Rightarrow \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I I'}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

Dados:

$$I = 10A$$

$$F = ? \quad \Rightarrow \frac{F}{l} = 100mN / m$$

$$R = 20mm$$

a) Sentido oposto (repulsiva); b) mesmo sentido (atrativa).

5.2) Um condutor reto e longo com uma corrente de 10A coincide com o eixo-z. A corrente flui no sentido positivo de z. Se $\vec{B} = x\hat{3} + y\hat{4}$ (T), ache o vetor força \vec{F} por comprimento do condutor. {Fonte:[1]}

Sol:

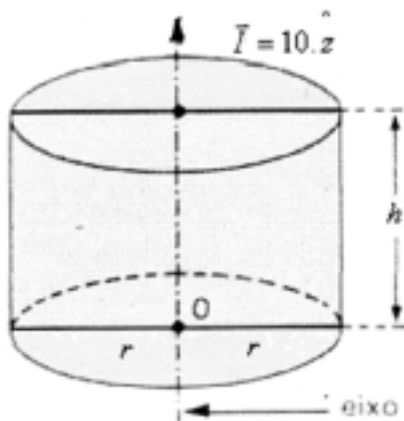


Fig.Prob. 5-2

$$\vec{I} = 10\hat{z} \quad \vec{B} = x\hat{3} + y\hat{4}$$

$$d\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B})dl \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dl} = (\vec{I} \times \vec{B}) = (10\hat{z}) \times (x\hat{3} + y\hat{4})$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = y\hat{3} - x\hat{4} = -40x\hat{x} + 30y\hat{y}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = -40x\hat{x} + 30y\hat{y} \text{ (N/m)}$$

5.3) (a) Se $\vec{B} = \hat{z} 6 \sin(\pi.x/2) \sin(\pi.y/2) (T)$; ache o fluxo magnético total sobre uma área quadrada com 2m de lado, com as bordas coincidindo com os eixos positivos x e y e um canto na origem.

(b) Se $\vec{B} = \left(\hat{z} . k / r \right) (T)$, qual é o fluxo magnético através de um círculo de raio r_0 ? {Fonte:[1]}

Sol:

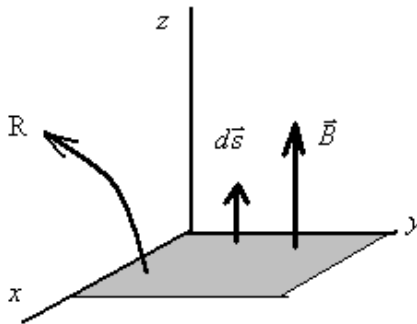


Fig. Prob. 5-3a

Letra (a)

$$\psi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_R \hat{z} 6 \sin(\pi.x/2) \sin(\pi.y/2) \hat{z} ds$$

$$\psi_m = \int_0^2 \int_0^2 6 \sin(\pi.x/2) \sin(\pi.y/2).dx.dy$$

$$\psi_m = 6 \cdot \left(\int_0^2 \sin(\pi.x/2) dx \right) \left(\int_0^2 \sin(\pi.y/2) dy \right)$$

$$\psi_m = 6 \left(\left. \frac{-2}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x / 2) \right|_0^2 \right) \left(\left. \frac{-2}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot y / 2) \right|_0^2 \right) =$$

$$= 6 \frac{2}{\pi} (2) \cdot \frac{2}{\pi} (2) = \frac{96}{\pi^2}$$

$$\psi_m = \frac{96}{\pi^2} \text{ (Wb) ou } \psi_m \cong 9,73 \text{ (Wb)}$$

Letra (b)

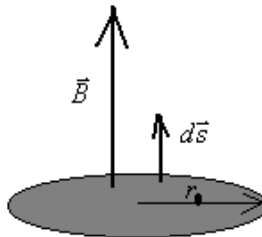


Fig. Prob. 5-3b

$$\psi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}; \quad \psi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_A \hat{z} \frac{k}{r_0} \cdot \hat{z} ds = \frac{k}{r_0} \iint ds = \frac{k}{r_0} \pi r_0^2 = \pi \cdot k \cdot r_0$$

5.4) Se $\vec{B} = B \cdot \hat{z}$ (T), qual é o fluxo magnético através de uma elipse?

$$\text{Onde : } e = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{razão...axial}}$$

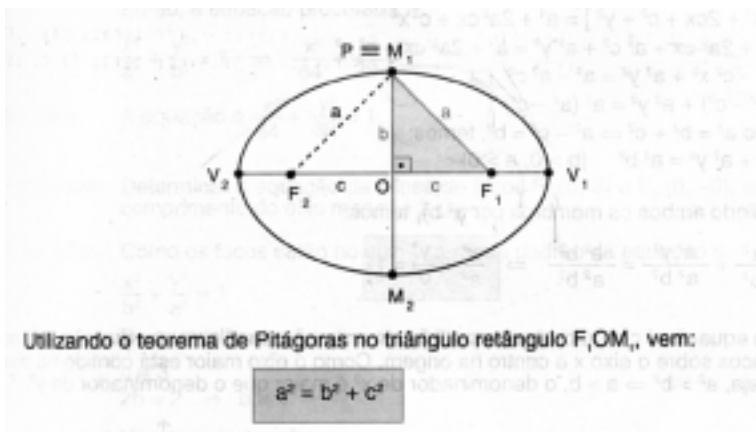
b = semi-eixo menor

a = semi-eixo maior

$r = a - \text{distância...do...centro...da...elipse...ao...foco}$

obs.: considere densidade de campo magnético B uniforme sobre a superfície.

Sol:



Fonte: [15]

$$\psi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \iint ds = B \iint dx \cdot dy = B \iint |J| d\rho \cdot d\theta$$

$$x = a\rho \cdot \cos \theta$$

$$y = b \cdot \rho \cdot \sen \theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = -ab\rho \sen^2 \theta - ab\rho \cos^2 \theta = -ab\rho$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -a\rho \sen \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = b\rho \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = a \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = b \sen \theta$$

$$\psi_m = B \iint ab\rho.d\rho.d\theta$$

$$\psi_m = B.a.b.\int_0^1 \rho.d\rho.\int_0^{2.\pi} d\theta$$

$$\psi_m = B.a.b.\frac{\rho}{2}\bigg|_0^1.\theta\bigg|_0^{2.\pi}$$

$$\psi_m = B.a.b.\frac{1}{2}.2.\pi = B.a.b.\pi$$

5.5) Mostre que um condutor com corrente I e comprimento l situado no eixo-z entre os pontos z_1 e z_2 tem uma densidade de fluxo \vec{B} para uma distância R (para todo ângulo ξ) dada por

$$B = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.R} \left(\frac{z_2}{\sqrt{R^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{R^2 + z_1^2}} \right) (T)$$

Observe que se o centro do condutor é simétrico com a origem ($-z_1 = z_2$) e se $R \gg l$, $B = \frac{\mu_0.I.l}{4.\pi.R^2}$. {Fonte:[1]}

Sol:

Vamos primeiro determinar a densidade de fluxo \vec{B} , num ponto P, distante z do eixo de um círculo de raio R , determina-se o campo num ponto P ao longo do eixo do anel; depois varre-se de um ponto P_1 , distante z_1 , até um ponto P_2 , distante z_2 .

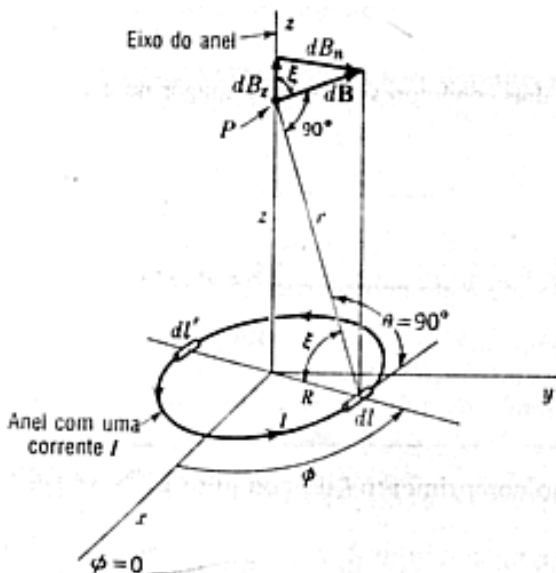


Fig. Prob. 5-5

{Fonte:[1]}

Temos que \vec{B} é dado por $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I dl \sin \theta}{4\pi \cdot r^2}$

A componente na direção do eixo-z é dada por

$$dB_z = dB \cos \xi = dB \frac{R}{r}$$

$$\theta = 90^\circ, dl = R \cdot d\phi \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R \cdot d\phi}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I R^2}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi, \text{ observe que o elemento normal}$$

dB_n , se anula pela simetria circular ao longo da variação de ϕ de 0 a 2π , logo:

$$B = B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ este é o valor de } \vec{B}$$

em um ponto P, qualquer distante z o eixo do círculo.

Vamos agora varrê-lo ao longo do eixo-z, de z_1 a z_2 .

Pela análise dimensional vamos dividir pelo comprimento l , para que a unidade permaneça em T, e não se modifique para T/m, então teremos:

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{dz}{l} = \frac{\mu_0 I \cdot R^2}{2l \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2l} \left(\frac{z_2}{R^2 \sqrt{R^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{R^2 \sqrt{R^2 + z_1^2}} \right)$$

$$dl = R d\phi. \quad l = R \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow l = 2\pi \cdot R,$$

$$\text{logo: } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left(\frac{z_2}{\sqrt{R^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{R^2 + z_1^2}} \right)$$

para $R \gg l$ e $-z_1 = z_2 = z$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left(\frac{2z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}} \right)$$

$z \rightarrow l$, para $R \gg l$. Desprezamos o fator de 2, temos:

$$B \rightarrow \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \cdot \frac{l}{R}$$

$$B \cong \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi \cdot R^2}$$

5.6) Um fio de forma parabólica conduz uma corrente I . Ache a densidade de fluxo magnético \vec{B} no foco. {Fonte:[1]}

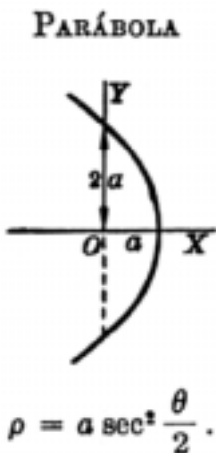


Fig. Prob. 5-6a

Fonte:[8]

Sol:

1ª Sol: (solução aproximada)

PARÁBOLA

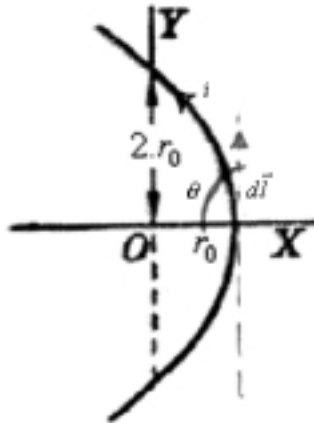


Fig. Prob. 5-6b

Temos que \vec{B} é dado por $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I dl \sin \theta}{4\pi \cdot r^2}$,

Para elementos infinitesimais, temos:

PARÁBOLA

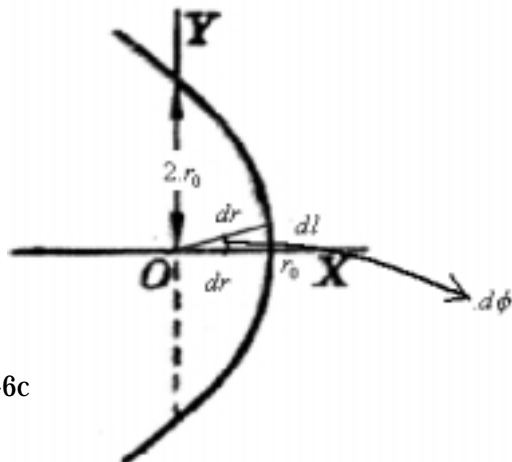


Fig. Prob. 5-6c

Fonte: [8]

Da figura temos: $dl = dr.d\phi$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0.I dr.d\phi}{4.\pi.r^2}$$

$$B = \int_0^\pi \int_{r_0}^{-\infty} \frac{\mu_0.I dr.d\phi}{4.\pi.r^2} = \frac{\mu_0.I}{4.\pi} \int_0^\pi \left(\int_{r_0}^{-\infty} \frac{dr}{r^2} \right) d\phi =$$

$$= \frac{\mu_0.I}{4.\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{r} \Big|_{r_0}^{-\infty} \right) d\phi = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.r_0} \int_0^\pi d\phi$$

$$B = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.r_0} \pi = \frac{\mu_0.I}{4.r_0}, \text{ lembrando que } r_0 \text{ é a distância focal,}$$

e I a corrente que circula no fio.

2ª Sol: (solução aproximada)

Utilizando a equação (7), página 225, da Referência:
Kraus, John D. Eletromagnetics
McGraw-Hill International Editions, 1991

Temos que: $B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$, logo:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.r_0} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0.i.\theta \Big|_0^\pi}{4.\pi.r_0} \Rightarrow B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.r_0} \pi \Rightarrow B = \frac{\mu_0.i}{4.r_0},$$

lembrando que r_0 é a distância focal, e I a corrente que circula no fio.

3ª Sol: (solução completa)

$$r = r_0 \sec^2 \frac{\phi}{2} \rightarrow \frac{dr}{d\phi} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \sec^2 \frac{\phi}{2}$$

$$dl = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

$$dl = \sqrt{\left(r_0 \sec^2 \frac{\phi}{2}\right)^2 + \left(r_0 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \sec^2 \frac{\phi}{2}\right)^2} d\phi$$

$$dl = r_0 \sec^3 \frac{\phi}{2} d\phi$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r_0 \sec^3 \frac{\phi}{2} d\phi}{(r_0)^2 \sec^4 \frac{\phi}{2}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d\phi}{4 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \sec \frac{\phi}{2}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \cos \frac{\phi}{2} d\phi}{4 \cdot \pi \cdot r_0}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r_0} 2 \cdot \int_0^\pi \cos \frac{\phi}{2} d\phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r_0} 2 \cdot \left(2 \sin \frac{\phi}{2} \Big|_0^\pi\right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot r_0} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot r_0} \cong \frac{\mu_0 \cdot I}{(3,14) \cdot r_0}$$

5.7)(a) Qual é o torque máximo numa bobina quadrada com 200 espiras situadas no campo com densidade de fluxo uniforme $B=4T$? A bobina tem 150mm de lado e conduz uma corrente de 8A.

(b) Qual é o momento magnético da bobina?

Fonte:[1]

Sol:

$$B = 4 \text{ [T]}$$

$$N = 200 \text{ [espiras]}$$

$$I = 8 \text{ [A]}$$

$$l = 150 \text{ [mm]}$$

Letra (a)

$$T_M = N.I.A.B = N.I.l^2 B \Rightarrow T_M = 144 \text{ [Nm]}$$

Letra (b)

$$m' = N.I.A = N.I.l^2 \Rightarrow m' = 36 \text{ [Am}^2\text{]}$$

5.8) Calcule a indutância de uma bobina toroidal com núcleo de ar, área da seção transversal de 1000mm^2 e raio médio de 500mm . O toroide tem um rolamento uniforme de 10.000 espiras. {Fonte:[1]}

Sol:

$$A = 1000\text{mm}^2$$

$$r = 500 \text{ mm}$$

$$N=10000 \text{ espiras}$$

$$L = \frac{\mu.N^2 A}{l} = \frac{\mu.N^2 A}{2\pi.r} \Rightarrow L = 4.10^{-2} H$$

$$L = 40mH$$

5.9) Um longo condutor reto de raio r carrega uma corrente I que é coincidente com o eixo z . Encontre o campo magnético na parte de dentro do condutor.

Sol:

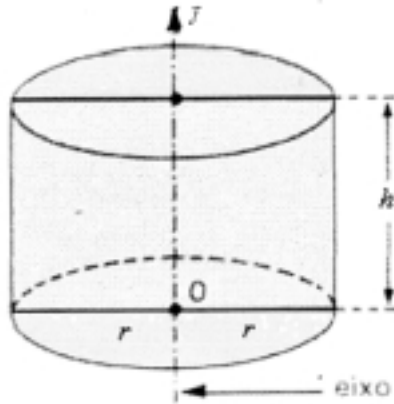


Fig. Prob. 5-9

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I' \Rightarrow H_\phi \cdot 2\pi \cdot r = I' \Rightarrow H_\phi = \frac{I'}{2\pi \cdot r}$$

A densidade de corrente é a mesma em qualquer $r \leq R$,
pois para $r > R \rightarrow \vec{J} = 0$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \frac{dJ}{ds} = I$$

$$\frac{I'}{\pi \cdot r^2} = \frac{I}{\pi \cdot R^2} \rightarrow I' = \frac{I \cdot r^2}{R^2}$$

$$H_\phi = \frac{I'}{2\pi \cdot r} = \frac{I \cdot r^2 / R^2}{2\pi \cdot r} = \frac{I \cdot r}{2\pi \cdot R^2}$$

$$\text{como } H = \hat{\phi} \cdot H_\phi \Rightarrow H = \hat{\phi} \cdot \frac{I \cdot r}{2\pi \cdot R^2}$$

5.10) Se $\vec{F} = \hat{x}x^2 + \hat{y}2yz - \hat{z}x^2$, ache $\vec{\nabla}_x \vec{F}$ e o caminho de $\vec{\nabla}_x \vec{F}$ {Fonte:[1]}

Sol:

$$\vec{\nabla}_x \vec{F} = -\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2.y.z)}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial(2.y.z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{F} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x}\hat{y} - \frac{\partial(2.y.z)}{\partial z}\hat{x} = -\hat{x}2.y + \hat{y}2x$$

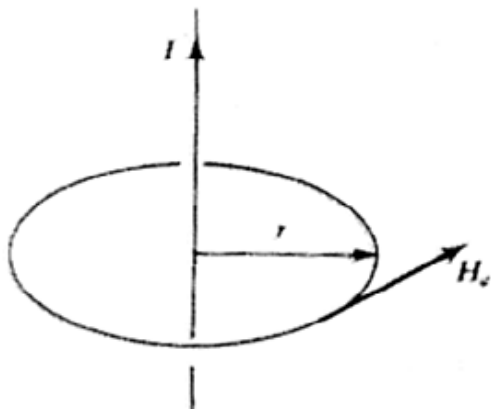
5.11) Calcule a intensidade de campo magnético devido a um condutor reto e infinitamente longo, percorrido por uma corrente I ampères, em um ponto afastado r metros do condutor.

Sol:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = H_\varphi \cdot 2\pi \cdot r = I \text{ ou } H_\varphi = \frac{I}{2\pi \cdot r} \text{ [A/m]}$$

5.12) Uma espira retangular é colocada no campo do condutor do problema 5.11 como mostra a figura abaixo. Qual é o fluxo total enlaçando a espira?

Fonte:[1]



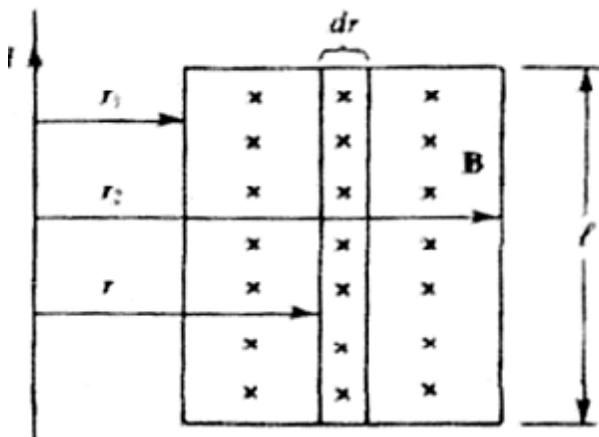


Fig. Prob. 5-12

Fonte:[1]

Sol:

$$B_{\phi} = \mu \cdot H_{\phi} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r} \quad [\text{T}]$$

$$d\psi_m = B_{\phi} \cdot ds = \frac{\mu \cdot I \cdot l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

$$\psi_m = \frac{\mu \cdot I \cdot l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad \psi_m = \frac{\mu \cdot I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad [\text{Wb}]$$

5.13) Considere o circuito da figura abaixo. Os segmentos curvos são círculos de raio a e b . Os segmentos retílineos estão ao longo dos raios. Ache o campo magnético \vec{B} em P, considerando uma corrente i no circuito.

Fonte:[5]

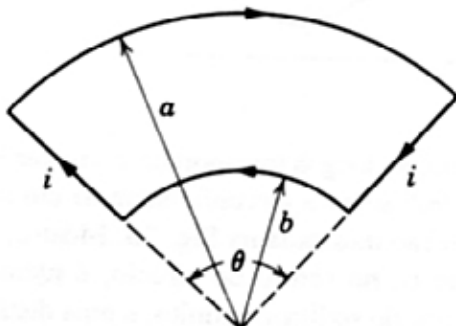


Fig. Prob. 5-13a

Fonte:[5]

Sol:

Temos que:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i . dl \sin \theta}{4 \pi . r^2}$$

As seções he e fg indicadas na figura abaixo não contribuem, pois $dl . \sin \theta = 0$, pois $\theta = 0$.

Ao longo do trecho fe , temos:

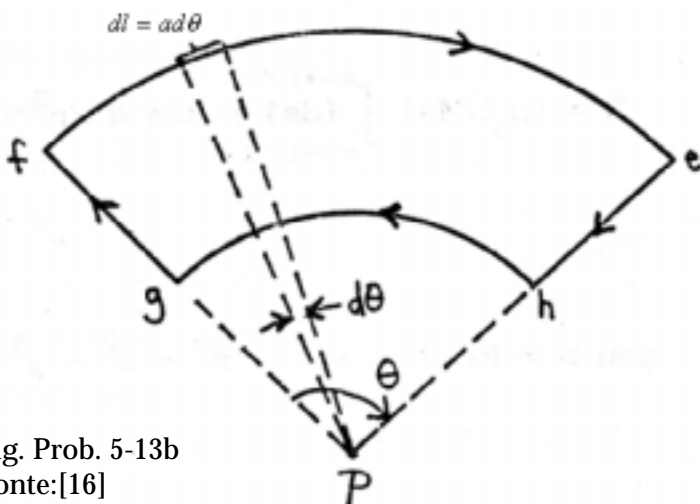


Fig. Prob. 5-13b

Fonte:[16]

$$B = \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \right) \int \frac{dl \sin \theta}{r^2}, \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$B_2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \right) \int \frac{(a \cdot d\theta) \cdot \sin 90^\circ}{a^2} = \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot a} \right) \int_0^\theta d\theta = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \theta}{4\pi \cdot a}$$

De modo análogo o trecho gh é $B_1 = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \theta}{4\pi \cdot b}$,

como $a > b \Rightarrow B_1 > B_2$. Observe que B_1 está apontando para fora e B_2 está para dentro; é só ver o sentido da corrente e aplicar a regra da mão direita.

$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$, como $B_1 > B_2$ logo está apontando para fora.

5.14) Um segmento retilíneo de fio, de comprimento L, transporta uma corrente i. Mostre que o campo magnético

\vec{B} associado a este segmento, a uma distância R tomada sobre sua mediatriz, é dada em módulo por

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4 \cdot R^2}}$$

Fonte:[5]

Sol:

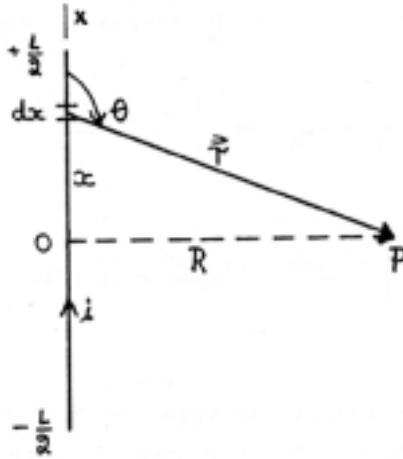


Fig. Prob. 5-14

Fonte:[16]

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2}, \text{ observe que da figura acima tiramos que:}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

$$\text{para } x = \frac{L}{2} \rightarrow \sin(\pi - \theta) = \frac{2 \cdot R}{\sqrt{L^2 + 4 \cdot R^2}}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

$$\text{para } x = \frac{L}{2} \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4 \cdot R^2}}$$

e da figura

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \& \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{2.R}{\sqrt{L^2 + 4.R^2}} \quad \& \quad x = \frac{L}{2} \rightarrow \cos \theta = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4.R^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 + R^2}\right)^3}, \text{ por simetria temos que:}$$

$$B = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi} . 2. \left[\int_0^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 + R^2}\right)^3} \right]$$

chamando

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{R}{x} \rightarrow x = \frac{R}{\text{tg } \theta} = R \cdot \cot \theta \rightarrow dx = -R \cdot \text{cosec}^2 \theta \cdot d\theta \\ &\rightarrow \left(\sqrt{x^2 + R^2}\right)^3 = \left(\sqrt{R^2 \cdot \text{cosec}^2 \theta}\right)^3 = R^3 \cdot \text{cosec}^3 \theta \end{aligned}$$

$$x = 0 \rightarrow \cot \theta' = 0 \rightarrow \theta' = \frac{\pi}{2}$$

observe que: $x = \frac{L}{2} \rightarrow \theta'' = \theta$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi} 2 \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{-R \cdot \text{cosec}^2 \theta \cdot d\theta}{R^3 \text{cosec}^3 \theta} = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi} \cdot \frac{-2}{R^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\theta} \frac{d\theta}{\text{cosec} \theta} = \\ &= \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi} \cdot \frac{-2}{R^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\theta} \text{sen } \theta \cdot d\theta \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R} - 2(-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\theta} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R} 2 \left(\cos \theta - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R} 2(\cos \theta)$$

$$B = -\frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

o sinal menos indica o sentido de B , logo o módulo de B , é

dado por $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$

5.15) Ache a densidade de fluxo magnético B no centro de uma espira quadrada com $2m$ de lado e com uma corrente de $3A$. {Fonte:[5]}

Sol:

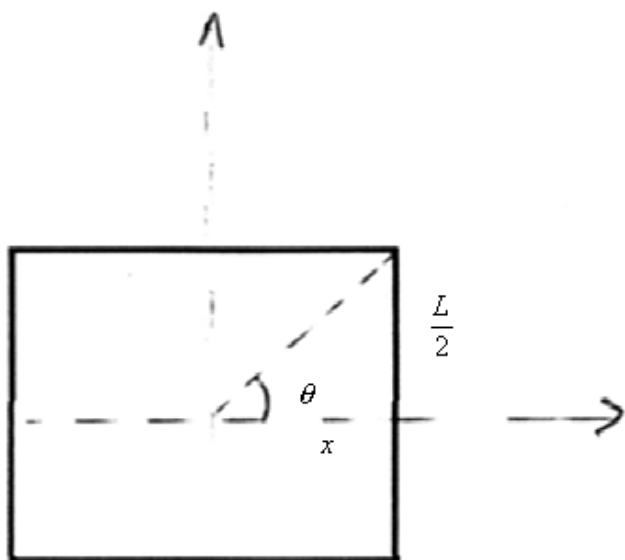


Fig. Prob. 5-15

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dx}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{\left(x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)} \right) \left(\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right)$$

$$dB = \frac{\mu_0 I \left(\frac{L}{2}\right)}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{dx}{\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot L}{8 \cdot \pi} \cdot 8 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot L}{\pi} \left(\frac{x}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right) \Bigg|_0^{\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2\sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot I}{\pi \cdot L}, \text{ foi dado que } I = 3A \text{ e } L = 2m, \text{ então,}$$

$$\Rightarrow B = 1,7 \cdot 10^{-6} T \Rightarrow B = 1,7 \mu T$$

obs.: 1) Sabe-se que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

2) O fator de 8 multiplicando a integral, vem do fato de dividirmos em 8 segmentos de comprimento $\frac{L}{2}$.

5.16) O fio mostrado na figura abaixo transporta uma corrente i . Qual é o campo magnético \vec{B} no centro C do semicírculo produzido por: (a) por cada segmento retilíneo de comprimento L ; (b) pelo segmento semicircular de raio R e (c) pelo fio inteiro? {Fonte:[5]}



Fig. Prob. 5-16a

Fonte:[5]

Sol:

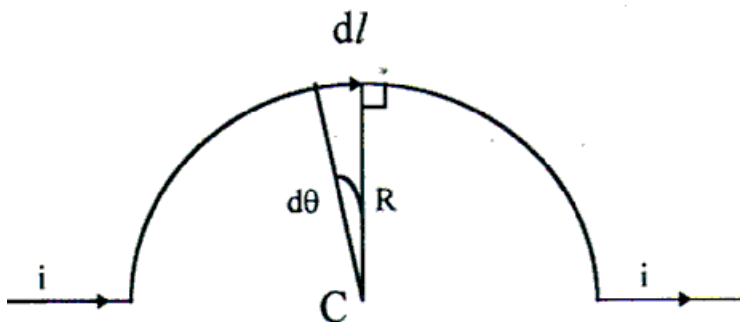


Fig. Prob. 5-16b

Fonte:[16]

(a) Campo dos segmentos retilíneos

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2}, \theta = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

(b) Campo do semicírculo

$$dB_2 = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot R^2}, \theta = 90^\circ \text{ e } R \text{ é o raio da circunferência;}$$

$$\text{logo } dB_2 = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot \pi \cdot R^2} R \cdot d\theta \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot \pi \cdot R} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \pi$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot R}$$

(c) Campo no fio inteiro

$$B = B_1 + B_2 = 0 + \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot R} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4 \cdot R}$$

5.17) Mostre que a densidade de fluxo magnético no centro de uma espira de forma circular com uma corrente I é dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot r}$$

Sol:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot dl \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x=r \cdot \cos \theta \\ y=r \cdot \sin \theta \end{cases} \rightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(-r \cdot \sin \theta \cdot d\theta)^2 + (r \cdot \cos \theta \cdot d\theta)^2} =$$

$$= r \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \cdot d\theta = r \cdot d\theta$$

$$dx = -r \cdot \sin \theta \cdot d\theta; dy = r \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I r d\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\theta \right)_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

5.18) Mostre que a densidade de fluxo magnético no centro do eixo das coordenadas de uma espira em forma de um "Espiral de Archimedes" com uma corrente I é dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\ln \left| \theta + \sqrt{1 + (\theta)^2} \right| - \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\theta} \right)^2} + G \right]$$

onde $G = 1 + \sqrt{\lim_{\theta_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\theta_i} \right)^2}$

Sol:

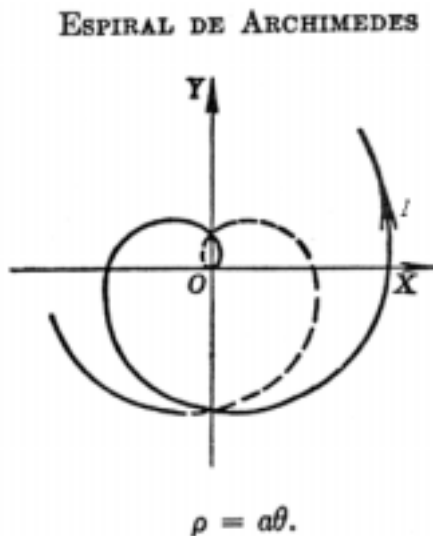


Fig. Prob. 5-18
Fonte: [8]

$$r = a\theta \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = a$$

$$dl = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta$$

$$dl = a\sqrt{1+\theta^2} d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 I \cdot a \cdot \sqrt{1+\theta^2} d\theta}{a^2 \cdot \theta^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a} \frac{\sqrt{1+\theta^2} d\theta}{\theta^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a} \int_0^\theta \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2} d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a} \left[\ln \left| \theta + \sqrt{1+(\theta)^2} \right| - \sqrt{1+\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} + G \right]$$

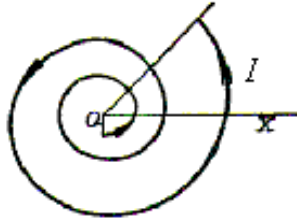
$$G = 1 + \sqrt{\lim_{\theta_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\theta_i}\right)^2}$$

5.19) Mostre que a densidade de fluxo magnético no centro do eixo das coordenadas de uma espira em forma de uma "Espirale Logarítmica" com uma corrente I é dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \cdot (1 - e^{-a\theta})$$

Sol:

ESPIRAL LOGARÍTMICA



$$\rho = e^{a\theta}, \text{ ou } \\ \log \rho = a\theta.$$

Fig. Prob. 5-19

$$dB = \frac{\mu_0 I . dl \text{ sen } \xi}{4.\pi.r^2}, \rightarrow dl \text{ perpendicular a}$$

$$r \Rightarrow \xi = 90^\circ \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I . dl}{4.\pi.r^2}$$

$$r = e^{a.\theta}, \frac{dr}{d\theta} = a.e^{a\theta}, dl = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

$$dl = \sqrt{e^{2a\theta} + a^2 . e^{2a\theta}} d\theta \Rightarrow dl = e^{a\theta} \sqrt{1+a^2} d\theta$$

$$dl = \sqrt{e^{2a\theta} + a^2 . e^{2a\theta}} d\theta \Rightarrow dl = e^{a\theta} \sqrt{1+a^2} d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4.\pi.(e^{a\theta})^2} . e^{a\theta} \sqrt{1+a^2} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4.\pi} . e^{-a\theta} \sqrt{1+a^2} d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I \sqrt{1+a^2}}{4.\pi} \int_0^\theta e^{-a\theta} d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \sqrt{1+a^2}}{4.\pi} \left(-\frac{1}{a} e^{-a\theta} \right) \Big|_0^\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \sqrt{1+a^2}}{4\pi.a} (1 - e^{-a\theta}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} (1 - e^{-a\theta})$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \cdot (1 - e^{-a\theta})$$

5.20) Mostre que a densidade de fluxo magnético no centro do eixo das coordenadas de uma espira em forma de um "Espiral Hiperbólica" com uma corrente I é dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi.a} \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}| \right]$$

Sol:

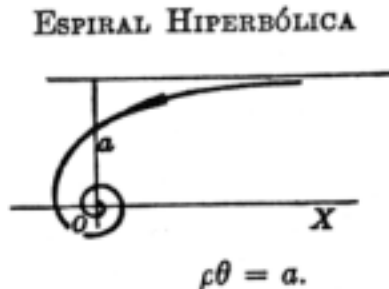


Fig. Prob. 5-20

Fonte:[8]

Referências para estudo da teoria⁵

⁵Referências:

Kraus, John D ; Carver, Keith R. Eletromagnetismo
Editora Guanabara Dois, 1978

\Rightarrow capítulo 5 (cinco)

Kraus, John D. Eletromagnetics
McGraw-Hill International Editions , 1991

\Rightarrow capítulo 6 (seis)

CAPÍTULO 6

O CAMPO MAGNETOSTÁTICO DE MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS

6.1- Uma agulha magnetizada de momento magnético 20 Am^2 está situada num campo magnético uniforme de $50 \mu\text{T}$ de densidade de fluxo. Ache o torque máximo na agulha. {Fonte:[1]}

Sol:

$$T = IAB = mB = (20 \text{ Am}^2)(50 \mu\text{T}) = 1 \text{ mNm}$$

6.2- Uma barra uniformemente magnetizada com um volume de $0,01 \text{ m}^3$ tem um momento magnético de 500 Am^2 . Se a densidade de fluxo $B=50 \text{ mT}$ na barra, qual será o valor de H na barra? {Fonte:[1]}

Sol:

$$M = \frac{m}{v} = \frac{500 \text{ Am}^2}{0,01 \text{ m}^3} = 50 \text{ KA} / \text{m}$$

$$B = \mu_0(H + M) \Rightarrow H = \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0}$$

$$H = \frac{50mT - (4\pi \cdot 10^{-7} H / m)(50KA / m)}{4\pi \cdot 10^{-7} H / m} = -10KA / m$$

6.3- Uma barra de ferro retangular tem um comprimento x_1 e uma área de seção transversal A. A permeabilidade é uma função de x dada por $\mu = \mu_0 + \frac{\mu_1 - \mu_0}{x_1} x$, ache a permeabilidade da barra. {Fonte: [1]}

Sol:

$$\Re = \frac{\int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}} \Rightarrow \wp = \frac{1}{\Re}$$

$$\wp = \frac{\iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}}{\int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l}} = \frac{\iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}}{\int \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) d\vec{l}} = \frac{\iint ds}{\int_0^{x_1} \frac{dx}{\mu}} = \frac{\iint ds}{\int_0^{x_1} \frac{dx}{\left[\mu_0 + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{x_1} \right) x \right]}}$$

$$\wp = \frac{A}{x_1 \int_0^{x_1} \frac{dx}{x_1 \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)x}} = \frac{A}{\frac{x_1}{\mu_1 - \mu_0} \ln \left[x_1 \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)x \right]_0^{x_1}} =$$

$$= \frac{(\mu_1 - \mu_0)A}{x_1 \cdot \ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right)}$$

6.4- Um anel de ferro tem uma área de seção transversal uniforme de 150mm^2 e um raio médio de 200mm . O anel é contínuo exceto por um entreferro de 1mm de largura. Ache o número de espiras necessário no anel para produzir uma densidade de fluxo $B=0,5\text{T}$. Despreze a franja. Quando $B=0,5\text{T}$ no ferro $\mu_r = 250$. {Fonte:[1]}

Sol:

Dados: $B=0,5\text{T}$; $R_m=200\text{mm}$; $g=1\text{mm}$; $A=150\text{mm}^2$

$$\mathfrak{R}_f = \frac{l - g}{\mu \cdot A} = \frac{2\pi \cdot R_m - g}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = 26,65(\text{MA} / \text{Wb})$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{g}{\mu_0 \cdot A} = 5,04(\text{MA} / \text{Wb})$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = BA \cdot (\mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_g) = 2,4.(KAesp)$$

6.5-Um eletroímã consiste de um “yoke” de ferro em forma de U e de uma barra de ferro como mostra a fig. 6-5. Uma lâmina fina de cobre sobre a barra evita o contato de ferro com ferro entre a barra e o “yoke”. Se o fluxo magnético através do circuito for 15mWb e área de contato da barra e do “yoke” for de $0,015\text{m}^2$ por pólo, qual será o peso que o “yoke” suportará (incluindo o peso da barra)? Despreze a franja.

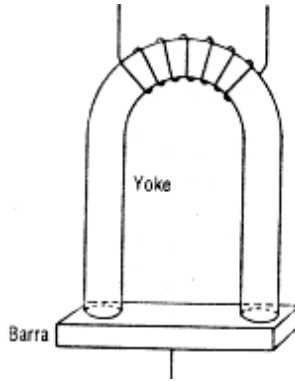


Fig. Prob. 6-5

Fonte:[1]

Sol:

Dados: $\Phi = 15mWb$; $A = 0,015m^2$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot A \Rightarrow B = \frac{\Phi}{A} = \frac{15mWb}{0,015m^2} = 1T$$

$$F = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = \frac{(1T)^2 (0,015m^2)}{2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7} H / m)} = 5,97 KN$$

$$P = 2F = 11,94 KN$$

em Kgf, temos que dividir por 9,81

$$P = \frac{11,94kN}{9,81} = 1217,5kgf$$

6.6- (a) Se a área de contato do eletroímã do problema 6.5 fosse reduzida a $0,005\text{mm}^2$, afinilando-se as seções do “yoke”, qual seria o peso que o “yoke” suportaria? Suponha que o fluxo total é o mesmo que antes e despreze a franja. (b) Na prática, o que impede a força de atração aumentar indefinidamente quando a área é reduzida?

Sol:

Letra (a)

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{15\text{mWb}}{0,005\text{m}^2} = 3\text{T}$$

$$F = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = \frac{(3\text{T})^2 (0,005\text{m}^2)}{2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} / \text{m})} = 17,9\text{KN}$$

$$P = 2F = 35,81\text{KN}$$

em Kgf, temos que dividir por 9,81

$$P = \frac{35,81\text{KN}}{9,81} = 3650,34\text{Kgf}$$

Letra (b)

A impossibilidade de se reduzir a área indefinidamente.

6.7- Um ímã de ferro circular de $0,02\text{m}^2$ de área de seção transversal e 300mm de raio tem um entreferro de 1mm e um enrolamento de 1200 espiras. Se a corrente através da bobina for de 6 A, qual será a força que tenderá a fechar o entreferro? Considere $\mu_r = 1000$ para o ferro e despreze a franja.

Sol:

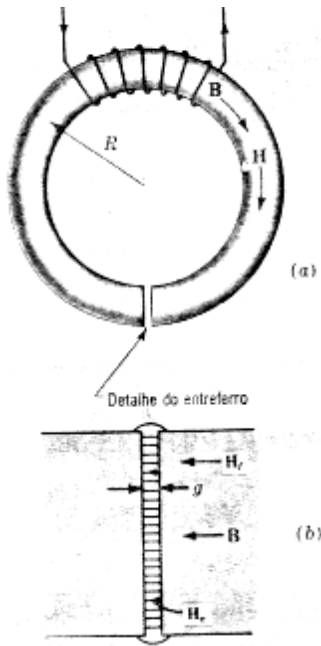


Fig. Prob. 6-7

Fonte:[1]

Sabe-se que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$

Dados:

$g = 1\text{mm}$; $R = 300\text{mm}$; $A = 0,02\text{m}^2$; $\mu_r = 1000$; $N = 1200$
 espiras; $i = 6\text{A}$

$$\mathfrak{L}_{mm} = N.i = \Phi(\mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_g) \Rightarrow \Phi = \frac{N.i}{\mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_g}$$

$$\mathfrak{R}_f = \frac{(l - g)}{\mu \cdot A} = \frac{(2\pi \cdot R - g)}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = 74,96 \text{KA} / \text{Wb}$$

$$\mathfrak{R}_g = \frac{g}{\mu_0 \cdot A} = 39,79 \text{KA} / \text{Wb}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{N \cdot i}{\mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_g} = 62,75 \text{mWb} \Rightarrow B = \frac{\Phi}{A} = 3,14 \text{T}$$

$$F = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = 78,3 \text{KN}$$

6.8- Um circuito magnético cujos braços são de aço fundido. Esta assim distribuído, a parte 1 tem $l_1 = 34 \text{cm}$ e $S_1 = 6 \text{cm}^2$; a parte 2 tem $l_2 = 16 \text{cm}$ e $S_2 = 4 \text{cm}^2$. Calcule a corrente I_1 , supondo $I_2 = 0,5 \text{A}$, $N_1 = 200$ espiras, $N_2 = 100$ espiras e $\Phi = 120 \mu \text{Wb}$. {Fonte:[4]}

Sol:

Dados: $l_1 = 34 \text{cm}$; $S_1 = 6 \text{cm}^2$; $l_2 = 16 \text{cm}$; $S_2 = 4 \text{cm}^2$;
 $I_2 = 0,5 \text{A}$; $N_1 = 200$; $N_2 = 100$ & $\Phi = 120 \mu \text{Wb}$.

$$\Phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = 0,4 \text{T}$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = 0,3 \text{T}$$

Consultando a curva de magnetização*, temos que:

$$H_1 = 145 A/m$$

$$H_2 = 180 A/m$$

$$\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 \Rightarrow N_1 \cdot I_1 - N_2 \cdot I_2 = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + N_2 \cdot I_2}{N_1} = 0,65 A$$

⁶ Referências para estudo da teoria.

* Ver a curva de magnetização pág. 164, fig. 11-13 do livro:
EDMINISTER, Joseph A. **Eletromagnetismo**.

⁶ **Referências para estudo da teoria:**

KRAUS, John D; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**.

Editora Guanabara Dois, 1978.

⇒ capítulo 6 (seis)

EDMINISTER, Joseph A. **Eletromagnetismo**.

Editora McGraw-Hill do Brasil, 1980.

⇒ capítulo 11 (onze)

CAPÍTULO 7

EQUAÇÃO DE LAPLACE

7.1) Encontre a função potencial na região entre os discos circulares paralelos . Despreze espraiamento.{Fonte:[4]}

Sol:

O potencial é função de z , ou seja “ $V(z)$ ”, logo:

$$\bar{\nabla}^2 V = 0 \rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{dV}{dz} \right) = 0$$

$$\rightarrow \int d \left(\frac{dV}{dz} \right) = \int 0.dz \rightarrow \frac{dV}{dz} = A$$

$$\rightarrow \int dV = \int A.dz \rightarrow V = A.z + B$$

7.2) Calcule a função potencial e a intensidade de campo elétrico entre dois cilindros concêntricos circulares retos. {Fonte:[4]}

Sol:

O potencial é função de r , ou seja “ $V(r)$ ”, logo:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 V &= 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dV}{dr} \right) = 0 \\ \rightarrow \int d \left(r \cdot \frac{dV}{dr} \right) &= \int 0 \cdot dr \rightarrow r \cdot \frac{dV}{dr} = A \\ \rightarrow \int dV &= \int \frac{A}{r} dr \rightarrow V = A \ln r + B\end{aligned}$$

$$E = -\bar{\nabla} \cdot V(r) = -\frac{A}{r} \cdot \vec{r}$$

7.3) Em coordenadas cilíndricas, dois planos estão isolados ao longo do eixo z . Despreze espalhamento e encontre a expressão para \vec{E} entre os planos.

Fonte:[4]

Sol:

O potencial é função de ϕ , ou seja “ $V(\phi)$ ”, logo:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 V &= 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \\ \rightarrow \frac{d^2 V}{d\phi^2} &= 0 \rightarrow \int d \left(\frac{dV}{d\phi} \right) = \int 0 \cdot d\phi \rightarrow r \cdot \frac{dV}{d\phi} = A \\ \rightarrow \int dV &= \int \frac{A}{r} d\phi \rightarrow V = A \cdot \phi + B\end{aligned}$$

$$V = A.\phi + B \quad (V)$$

$$E = -\vec{\nabla}.V(\phi) = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\phi} = -\frac{1}{r} \frac{d}{d\phi} (A.\phi + B).\vec{\phi}$$

$$E = -\frac{A}{r}.\vec{\phi} \quad (V/m)$$

7.4) Resolva a equação de Laplace para a região compreendida entre dois cones. Em θ_1 o potencial vale V_1 , e em θ_2 é zero. Os vértices dos cones são isolados em $r = 0$. {Fonte:[4]}

Sol:

O potencial é função de θ , ou seja “ $V(\theta)$ ”, logo:

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0 \rightarrow \int d \left(\sin \theta \cdot \frac{dV}{d\theta} \right) =$$

$$\left| = \int 0.d\theta \rightarrow \sin \theta \cdot \frac{dV}{d\theta} = A \right.$$

$$\rightarrow \int dV = \int \frac{A}{\sin \theta} .d\theta \rightarrow V = A.\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + B$$

pois, chamando $z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ temos:

$$\cos \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \sin \theta = \frac{2z}{1+z^2}; d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\int \frac{A.d\theta}{\sin \theta} = \int A \frac{1}{\frac{2z}{1+z^2}} \frac{2dz}{1+z^2} = A \int \frac{1+z^2}{2z} \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\rightarrow A \int \frac{dz}{z} = A \ln z + B = A \ln \left(tg \frac{\theta}{2} \right) + B$$

As constantes são encontradas a partir de:

$$V_1 = A \cdot \ln \left(tg \frac{\theta_1}{2} \right) + B; 0 = A \cdot \ln \left(tg \frac{\theta_2}{2} \right) + B$$

$$\Rightarrow V = V_1 \cdot \frac{\ln \left(tg \frac{\theta}{2} \right) - \ln \left(tg \frac{\theta_2}{2} \right)}{\ln \left(tg \frac{\theta_1}{2} \right) - \ln \left(tg \frac{\theta_2}{2} \right)}$$

7.5) Um potencial em coordenadas cilíndricas é função de r e ϕ , mas não de z . Obtenha as equações diferenciais separadas para R e ϕ , onde $V = R(r) \cdot \Phi(\phi)$, e resolva-as. A região é sem cargas. {Fonte:[4]}

Sol:

$$\bar{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \Phi \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Phi}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{dR}{dr} = - \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

Como um lado da igualdade só depende de r e o outro só de ϕ ; então:

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{dR}{dr} = a^2 \Rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - \frac{a^2 \cdot R}{r^2} = 0,$$

multiplicando ambos os lados da equação por r^2 , temos:

$$\Rightarrow r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} - a^2 \cdot R = 0, \text{ que é uma equação de euller,}$$

fazendo a substituição de variável

$$r = e^{-t} \rightarrow t = \ln r; \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-t}$$

$$\rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = e^{-t} \cdot \frac{dR}{dt} \rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dr} \right) \frac{dt}{dr}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \cdot \frac{dR}{dt} \right) e^{-t} = \left(\frac{d(e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dR}{dt} + e^{-t} \cdot \frac{d^2 R}{dt^2} \right) e^{-t}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} = \left(-e^{-t} \cdot \frac{dR}{dt} + e^{-t} \cdot \frac{d^2 R}{dt^2} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right)$$

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} - a^2 \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot \left(\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right) + e^t \cdot \left(e^{-t} \cdot \frac{dR}{dt} \right) - a^2 \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dt} - a^2 \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R}{dt^2} - a^2 \cdot R = 0$$

tirando a equação característica, temos:

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -a \end{cases}$$

$$R(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = C_1 \cdot e^{at} + C_2 \cdot e^{-at}$$

$$R(t) = C_1 (e^t)^a + C_2 (e^t)^{-a}$$

voltando a equação original, por meio de $r = e^t$, temos:

$$R(r) = C_1 \cdot r^a + C_2 \cdot r^{-a}$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = a^2 \rightarrow \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \Phi \cdot a^2 = 0$$

tirando a equação característica, temos:

$$\lambda^2 + a^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm a \cdot i$$

$$\rightarrow \lambda = 0 \pm a \cdot i$$

logo para o caso em que as raízes são complexas, temos como solução a equação diferencial :

$$\Phi(\phi) = e^{0 \cdot \phi} (C_3 \cdot \cos a\phi + C_4 \cdot \sin a\phi)$$

$$\Phi(\phi) = C_3 \cdot \cos a\phi + C_4 \cdot \sin a\phi$$

7.6) O potencial de Coulomb atenuado pela presença dos

demais elétrons $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$ ocorre comumente num

meio condutor . Calcule o campo elétrico e a densidade de carga correspondente. {Fonte:[8]}

Sol:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}.V = -\frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla} \left(e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) + e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) + e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) \vec{r} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Sabemos que: $\vec{r} = \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\hat{r}}{r}$; logo, temos:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\hat{r}}{r} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\nabla^2.V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) =$$

$$\left| = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \nabla^2 \left(e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) + \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \right] = -\rho \right.$$

$$\rightarrow \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\lambda^2.r} - 4\pi.\delta(r) \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} =$$

$$= -\rho \rightarrow q \cdot \left(-\frac{1}{4\pi\lambda^2 r} + \delta(r) \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} = \rho$$

$$\Rightarrow \rho = \left(\delta(r) - \frac{1}{4\lambda^2 r} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

pois, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r)$. Verificar em (Reitz, Fundamentos da Teoria Eletromagnética; página 54, eq.2-58)

⁶ Referências para estudo da teoria

⁷ **Referência para estudo da teoria:**

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**
 Editora Guanabara Dois, 1978.

\Rightarrow capítulo 7 (sete)

EDMINISTER, Joseph A. **Eletromagnetismo**.
 Editora McGraw-Hill d Brasil, 1980.

\Rightarrow capítulo 8 (oito)

CAPÍTULO 8

CAMPOS MAGNÉTICOS VARIANDO NO TEMPO

8.1) (a) Um anel de 3 voltas, com $0,5\text{m}^2$ de área, situado no ar, tem um campo magnético normal ao plano do anel. Se a densidade de fluxo magnético variar de 5mTs^{-1} , qual é a força eletromotriz que aparecerá nos terminais do anel? (b) Se a fem nos terminais do anel for de 100mV , qual será a taxa de variação do campo magnético?{Fonte:[1]}

Sol:

$$v = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot A$$

letra(a)

$$A = (3) \cdot (0,5\text{m}) = 1,5\text{m}^2; \frac{\partial B}{\partial t} = 5\text{mT} / \text{s} \Rightarrow v = (5\text{mT}) \cdot (1,5\text{m}^2) = 7,5\text{mV}$$

letra(b)

$$v = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot A \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{v}{A} = \frac{100\text{mV}}{1,5\text{m}^2} = 66,67\text{mT} / \text{s}$$

8.2) Um pêndulo de fio com uma escova oscila normal a um campo magnético uniforme de 250mT, como mostra a figura. A velocidade de qualquer ponto do pêndulo a uma distância r do seu ponto de apoio é dada por $v = w.d(r/R)\cos wt$, onde d é o deslocamento horizontal máximo ou meia amplitude. Se o comprimento R do pêndulo for de 4m, seu período na superfície terrestre será aproximadamente 4s

$$\left| T_{(s)} = 2\pi \sqrt{R_{(m)} / 9,8(m.s^{-2})} \right|.$$

Empregando este valor para o período, determine a fem máxima que aparece nos terminais se $d=100\text{mm}$. {Fonte:[1]}

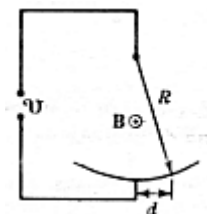


Fig. Prob. 8-2

Fonte:[1]

Sol:

$$v = \oint (\vec{V}_x \vec{B}) d\vec{l} = V.B.l = V.B.\theta.R$$

$$V = w.d.\frac{r}{R}.\cos wt \rightarrow V_{\max} = w.d.\frac{R}{R}.1 = w.d = \frac{2\pi.d}{T}$$

$$v_{\max} \rightarrow V_{\max}$$

$$v_{\max} = \frac{2\pi.d}{T}.B.\theta.R$$

da figura tiramos $\sin \theta = \frac{d}{R} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)$, logo

$$v_{\max} = \frac{2\pi.d}{T} . B . R . \sin^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)$$

8.3) Ache a fem induzida num fio reto que se move perpendicular a um campo magnético uniforme B com uma velocidade v como na figura. O campo magnético está restrito ao raio R das peças polares de um imã. {Fonte:[1]}

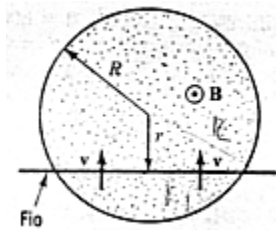


Fig. Prob. 8-3a
{Fonte:[1]}

Sol:

$$v = \oint (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{l} = V . B . 2l = 2 . V . B . \sqrt{R^2 - r^2} , \text{ pois}$$

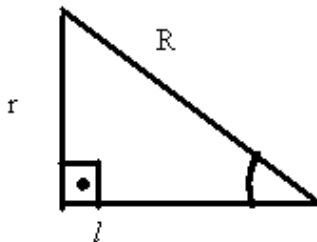


Fig. Prob. 8-3b
{Fonte:[1]}

de onde temos pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + l^2 \Rightarrow l = \sqrt{R^2 - r^2}$$

8.4) Um aro condutor com único raio gira perpendicular B (figura). O campo magnético está restrito ao raio R das peças polares de um imã. Um circuito externo faz contato com o eixo e o raio de escovas. (a) Se o aro for girado $N \text{ s}^{-1}$, ache a fem induzida no circuito. (b) Se uma corrente I passar através do circuito, ache o torque no aro. (c) Se a corrente fluir como indicado, o torque será no sentido horário ou anti-horário? {Fonte:[1]}

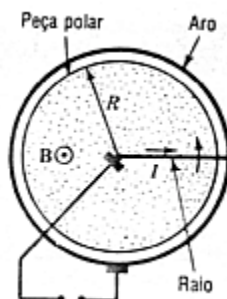


Fig. Prob. 8-4a
{Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$\mathcal{V} = \oint (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = V \cdot B \cdot l$$

$$l = \frac{2\pi \cdot R}{2} = \pi \cdot R \text{ e } V = \omega \cdot R = N \cdot R; \text{ pois } \omega = N(\text{rad} / \text{s})$$

$$\mathcal{V} = V \cdot B \cdot l = N \cdot R \cdot B \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot N \cdot B \cdot R^2 (\text{Volt})$$

Letra (b)

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad m = I.A \Rightarrow T = I.A.B$$

da figura tiramos a área

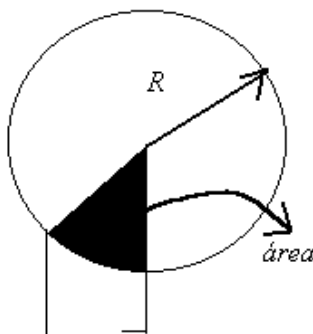


Fig. Prob. 8.4b

$$A = \frac{R.R}{2} = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow T = I \cdot \frac{R^2}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot I \cdot B \cdot R^2 \text{ (Nm)}$$

8.5) (a) Um disco fino de cobre de 300mm de diâmetro está situado com o plano normal a um campo magnético uniforme e constante $B=600\text{mT}$. Se o disco girar 30rs^{-1} , ache a fem desenvolvida nos terminais conectados às escovas como mostra a figura. Uma escova faz contato com o eixo. Este arranjo é chamado de *gerador de disco de Faraday*. (b) Se o campo magnético variar com o tempo, como dado por $B=B_0\text{senwt}$, onde $B_0=600\text{mT}$ e $w=2\pi \times 5 \text{ rads}^{-1}$, ache a fem desenvolvida nos terminais. {Fonte:[1]}

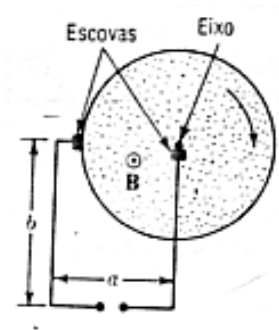


Fig. Prob. 8-5

Fonte:[1]

Sol:

Letra (a)

Dados: $d = 2R = 300\text{mm}$; $\omega = 30\text{r.s}^{-1}$; $B = 600\text{mT}$

$$\text{fem} = v = \oint (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{l} = V \cdot B \cdot l$$

$$l = \frac{2\pi \cdot R}{2} = \pi \cdot R = 0,47\text{m}$$

$$V = \omega \cdot R = 4,5\text{m/s}$$

$$B = 600\text{mT}$$

$$v = V \cdot B \cdot l = 1,27(\text{V})$$

Letra (b)

Dados: $\omega = 2\pi \cdot 5\text{r.s}^{-1}$; $B_0 = 600\text{mT}$ onde $B = B_0 \sin \omega t$

$$v = \oint (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = V \cdot B \cdot l - \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} (B_0 \cdot \sin \omega t) \right] \cdot a \cdot b \right\}$$

$$v = V \cdot B \cdot l - B_0 \cdot \omega \cdot a \cdot b \cdot \cos \omega t = 1,27 - 18,8 \cdot ab \cos 10\pi \cdot t (\text{V})$$

8.6) Ache a indutância mútua entre um fio longo e uma espira retangular de fio como mostra a figura. {Fonte:[1]}

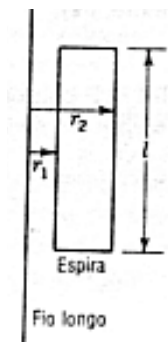


Fig. Prob. 8-6

Fonte:[1]

Sol:

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} = \frac{N_1 N_2}{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{N_1 N_2}{I} \frac{I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow M = \frac{N_1 N_2}{2\pi} I \ln \frac{r_2}{r_1}$$

pois,

$$\Rightarrow \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint \frac{\mu I}{2\pi r} l dr \frac{\mu I l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} (\text{Wb})$$

$$e, \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\phi \cdot 2\pi \cdot r = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

$$e, \Rightarrow B = \mu H \rightarrow B_\phi = \mu H_\phi = \frac{\mu I}{2\pi \cdot r}$$

8.7) Uma barra condutora reta, presa a um peso, está suspensa por molas metálicas num campo magnético uniforme B como na figura. O comprimento da barra é de 500mm. Ache a corrente I (grandeza e sentido) necessária para equilibrar a barra e o peso se $B=2T$ e a massa da barra e do peso for de 5kg. {Fonte:[1]}

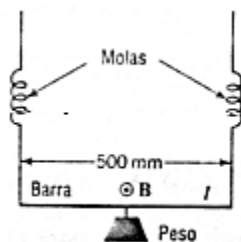


Fig. Prob. 8-7

Fonte:[1]

Sol:

$$dF = (I \times B) dl \rightarrow F = (I \times B) l$$

$$\sum F = 0 \rightarrow F_{el} - mg + F_{el} = 0 \rightarrow F_{el} = \frac{mg}{2}$$

$$F = 2.F_{el} = m.g$$

$$F = B.I.l \rightarrow mg = B.I.l \rightarrow I = \frac{m.g}{B.l}$$

$$\rightarrow I = \frac{m.g}{B.l} = 49(A)$$

8.8) Levitação magnética. Uma barra condutora estreita com um peso é suspensa por um par de molas em um campo magnético uniforme (como mostra a figura do problema 8.9) O comprimento da barra é de 500mm e $B=2T$. Se $I=60A$, encontre a máxima massa da barra e do peso que pode fazê-la “boiar” ou levitar. {Fonte:[2]}

Sol:

$$\rightarrow F = (BxI)l \rightarrow F = B.I.l \rightarrow mg = B.I.l$$

$$\rightarrow m = \frac{B.I.l}{g} = 6,12(kg)$$

8.9) Ache a densidade de corrente de deslocamento de um campo magnético no ar dado por

$$(a) H_y = H_0 \cdot \text{sen}(wt - \beta \cdot x),$$

$$(b) \vec{H} = \hat{x} H_x \cdot \text{sen} 2x \cdot \text{sen}(wt - \beta \cdot y) + \hat{z} H_z \text{ sen } 2x \cdot \cos(wt - \beta \cdot y)$$

Fonte:[1]

Sol:

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \vec{J} \rightarrow$$

$$\hat{x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{J}$$

Letra (a)

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot \hat{z} = \vec{J} \rightarrow \vec{J} = \hat{z} H_0 \cdot \cos(wt - \beta \cdot x) \cdot (-\beta)$$

$$\rightarrow \vec{J} = -\hat{z} \beta \cdot H_0 \cdot \cos(wt - \beta \cdot x)$$

Letra (b)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} &\rightarrow x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + y \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + z \left(-\frac{\partial H_y}{\partial y} \right) = \vec{J} \\ &\rightarrow \vec{J} = x [\beta H_z \sin 2x \sin (wt - \beta y)] - \\ &- [2 H_z \cos 2x \cos (wt - \beta y)] y + z [\beta H_x \sin 2x \cos (wt - \beta y)]\end{aligned}$$

⁸ Referências para estudo da teoria

⁸ **Referência para estudo da teoria:**

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**

Editora Guanabara Dois, 1978.

⇒ capítulo 8 (oito)

KRAUS, John D. **Eletromagnetics**

McGraw-Hill International Editions, 1991

⇒ capítulo 10 (dez)

CAPÍTULO 9

RELAÇÃO ENTRE A TEORIA DOS CIRCUITOS E DO CAMPO: EQUAÇÕES DE MAXWELL

9.1) (a) Partindo da lei de Ampère, obtenha a equação de Maxwell na forma integral baseada nesta lei. (b) Obtenha a relação pontual ou diferencial correspondente, aplicando o Teorema de Stokes. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = \mu_0 (i_{cond} + i_{desl}) = \mu_0 \left(\iint (\vec{J} + \frac{dq}{dt}) d\vec{s} \right)$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \rightarrow \frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{dt} \rightarrow \iint \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} = \frac{dq}{dr} = i_{desl}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iint \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} \right) = \mu_0 \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B}.d\vec{l} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} \rightarrow \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0}.d\vec{l} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H}.d\vec{l} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

Letra (b)

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\iint (\vec{\nabla}_x \vec{H}) d\vec{s} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

9.2) (a) Partindo da lei de Faraday, obtenha a equação de Maxwell na forma integral baseada nesta. (b) Obtenha a relação pontual ou diferencial correspondente aplicando o teorema de Stokes. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$\psi_m = \iint \vec{B}.d\vec{s}, \text{ mas } v = -\frac{d\psi_m}{dt} \text{ e } v = \oint \vec{E}.d\vec{l}$$

$$v = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B}.d\vec{s} \rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}$$

Letra (b)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\iint (\vec{\nabla}_x \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

9.3) (a) Partindo da lei de Gauss para os campos elétricos, obtenha a expressão de Maxwell na forma integral baseada nesta lei. (b) Obtenha a relação pontual ou diferencial correspondente. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$\varepsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \rightarrow \oint (\varepsilon \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{s} = q \rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$$

Letra (b)

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint \rho \cdot dv \rightarrow \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dv = \iiint \rho \cdot dv \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

9.4) (a) Partindo da lei de Gauss aplicada aos campos magnéticos, obtenha a expressão de Maxwell na forma integral baseada nesta lei. (b) Obtenha a relação pontual ou diferencial correspondente. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$\psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}, \text{ mas na superfície fechada temos } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Letra (b)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

9.5) Porque as equações de Maxwell não são completamente simétricas?

Fonte:[1]

Sol:

$$F_{mm} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}, \text{ ou } \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$v = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}, \text{ ou } \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\psi_{el} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho \cdot dv, \text{ ou } \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\psi_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ ou } \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Observe que:

A lei de Gaus do campo elétrico $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho \cdot dv = q$ (ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$) indica a existência de cargas elétricas isoladas (“monopólos elétricos”).

E a lei de Gaus do campo magnético $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ (ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) indica a inexistência de cargas magnéticas isoladas (“monopólos magnéticos”)

⇒ Conclusão: As equações de Maxwell não são simétricas porque cargas magnéticas isoladas não existem (enquanto cargas elétricas isoladas existem).

9.6) Um condutor cilíndrico longo de raio R e $\sigma = \infty$ conduz uma corrente $I = I_0 \sin \omega t$. Como função do raio r (para $r < R$ e $r > R$) ache (a) a densidade de corrente de condução (b) a densidade de corrente de deslocamento $J_d(r)$ e (c) a densidade de fluxo magnético $B(r)$. Considere $d < r$. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot A, \quad \vec{J} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}$$

$$v = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E l, \text{ mas, pela lei de ohm, temos: } v = R \cdot I$$

$$\Rightarrow E \cdot l = R \cdot I \rightarrow E \cdot l = R \cdot J \cdot A \rightarrow J = \frac{E \cdot l}{R \cdot A}, \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \frac{l}{R \cdot A} \cdot \vec{E} \rightarrow \frac{J}{E} = \frac{l}{R \cdot A} \rightarrow \sigma = \frac{l}{R \cdot A} \rightarrow R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$

para $0 \leq r \leq R$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot \iint d\vec{s} = J \cdot \pi \cdot R^2$$

$$I = I_0 \cdot \sin \omega t \Rightarrow I_0 \cdot \sin \omega t = J \cdot \pi \cdot R^2 \rightarrow J = \left(\frac{I_0}{\pi \cdot R^2} \right) \sin \omega t$$

para, $r \geq R$ $I = 0 \rightarrow J = 0$

Letra (b)

$J_d = 0$, pois se faz no meio como $\sigma = \infty \Rightarrow J_d = 0 \forall r$

Letra (c)

$$\text{para } 0 \leq r \leq R \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iiint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} \Rightarrow H \cdot 2\pi \cdot R = I' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot r = I' \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I'}{2\pi \cdot r}$$

$$\text{mas } J_{(r < R)} = J_{(r > R)} \Rightarrow I' \pi \cdot R^2 = I \pi \cdot r^2 \Rightarrow I' = I \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r^2}{2\pi \cdot R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r}{2\pi \cdot R^2}$$

para $r > R$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iiint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\text{temos } \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \rightarrow H \cdot 2\pi \cdot r = I \rightarrow \frac{B}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot r = I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

9.7) Um capacitor de placas paralelas de raio R e separação d tem uma voltagem aplicada no centro dada por $V = V_0 \sin \omega t$. Como função do raio r (para $r < R$) ache (a) a densidade de corrente de deslocamento $J_d(r)$ e (b) o campo magnético $H(r)$. Considere $d < R$. {Fonte:[1]}

Sol:

Letra (a)

Use $V = V_0 \sin \omega t$ em $i = C \frac{dV}{dt}$, e temos que :

$$i = C \frac{dV}{dt} = C V_0 \cos \omega t \cdot \omega, \quad C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}, \quad i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$J \cdot A = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \cdot V_0 \cos \omega t \cdot \omega$$

$$J \cdot A = C \cdot V_0 \cos \omega t \cdot \omega = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \cdot V_0 \cos \omega t \cdot \omega$$

$$J = \frac{\epsilon \cdot \omega \cdot V_0}{d} \cos \omega t$$

Letra (b)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$H \cdot 2\pi \cdot r = J \pi \cdot r^2 \rightarrow H = J \frac{r}{2}$$

$$H = \frac{\epsilon \cdot \omega \cdot V_0}{d} \cos \omega t \cdot \frac{r}{2} \rightarrow H = r \cdot \frac{\epsilon \cdot \omega \cdot V_0}{2 \cdot d} \cos \omega t$$

9.8) Mostre que $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$

Fonte:[1]

Sol:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} ; \text{ pois } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \text{ aplicando o teorema de}$$

Stokes temos:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\text{periferia...de...S}} \vec{A} \cdot d\vec{l} , \text{ logo:}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\text{periferia...de...S}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\text{periferia...de...S}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

9.9) Demonstre que o potencial vetor magnético para dois fios compridos, retos e paralelos, que conduzem à mesma corrente, I , em sentidos opostos é dado por

$$A = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \hat{n}$$

{Fonte:[7]}

Sol:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\vec{J} \cdot d\vec{s}}{r} d\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} (2) \int_{r_1}^{r_2} I \frac{d\vec{r}}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\hat{n} dr}{r}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \hat{n}$$

9.10) Mostre que a expressão para a indutância em baixa frequência $L = \oint \frac{\vec{A}}{l} \cdot d\vec{l}$ reduz-se para um circuito condutor à fórmula de indutância em baixa frequência de Neuman

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}'}{l} \cdot d\vec{l} \quad \{\text{Fonte:[1]}\}$$

Sol:

$$L = \oint \frac{\vec{A}}{I} \cdot d\vec{l}, \text{ mas } A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}}{r} \cdot d\vec{v}, \text{ logo:}$$

$$L = \oint \frac{\mu_0/4\pi \int_v (\vec{J}/r) \cdot d\vec{v}}{I} \cdot d\vec{l} = \oint \left[\frac{\mu_0}{4\pi I} \left(\int_v \frac{\vec{J} \cdot d\vec{s}}{l} \cdot d\vec{l}' \right) \right] d\vec{l}$$

$$L = \oint \left[\frac{\mu_0}{4\pi I l} \left(\iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \right) d\vec{l}' \right] d\vec{l} = \oint \left[\frac{\mu_0}{4\pi I l} (I) d\vec{l}' \right] d\vec{l},$$

$$\text{mas } \vec{J} = \int_s I \cdot d\vec{s}, \text{ então } \Rightarrow L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}'}{l} \cdot d\vec{l}$$

9.11) Uma linha de transmissão de dois de comprimento l tem uma distância D entre os condutores (centro a centro) e raio do condutor a. Os condutores são tubos de paredes finas. Recorrendo à figura, aplique a fórmula de indutância

de baixa frequência de Neuman (Prob. 9.9) para mostrar

que a indutância da linha é $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{a}$ (H) {Fonte:[1]}

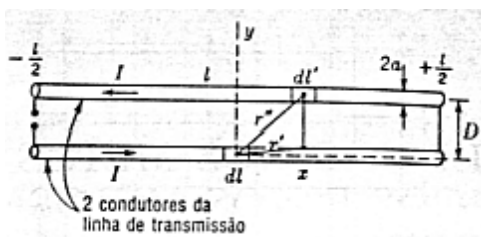


Fig. Prob. 9.11

{Fonte:[1]}

Sol:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}'}{l} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(2 \cdot \int_a^D \frac{dr'}{r} \right) \left(2 \cdot \int_0^l dl' \right) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[2 \cdot \ln \frac{D}{a} \cdot 2l \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{a} \text{ (H)}$$

9.12) Suponha que um capacitor de placas paralelas circulares tenha um raio R de 30mm e que a distância entre as placas seja 5,00mm. Uma f_{em} senoidal de 60Hz e valor máximo 150V é aplicada entre as placas. Calcule B_m^{\otimes} , o valor máximo do campo magnético induzido para $r=R$. {Fonte:[5]}

Sol:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{d\phi_E}{dt} \rightarrow B \cdot 2\pi \cdot R = \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{d(E \pi \cdot R^2)}{dt}$$

$$B \cdot 2\pi \cdot R = \mu \epsilon \pi \cdot R^2 \cdot \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu \cdot \epsilon \cdot R}{2} \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\text{mas } V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow E = V / x$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R}{2 \cdot x} \frac{dV}{dt}$$

$$V = V_M \cdot \text{sen } \omega t \rightarrow \frac{dV}{dt} = V_M \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$B = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R}{2 \cdot x} \frac{dV}{dt} = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R \cdot V_M \cdot \omega \cdot \cos \omega t}{2 \cdot x},$$

como $B \sim \cos \omega t$, para B máximo temos que ter $\cos \omega t$ máximo, ou seja:

$$B_M = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R \cdot V_M \cdot \omega \cdot |\cos \omega t|_M}{2 \cdot x}, \quad |\cos \omega t|_M = 1$$

$$B_M = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R \cdot V_M \cdot \omega}{2 \cdot x} = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R \cdot V_M \cdot 2\pi \cdot f}{2 \cdot x} = \frac{\mu \cdot \varepsilon \cdot R \cdot V_M \cdot \pi \cdot f}{x}$$

dados: $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m), $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \text{ pF}$, $R=30\text{mm}$, $x=5,00\text{mm}$, $V_M=150\text{V}$, $f=60\text{Hz}$; temos:

$$B_M = 1,89 \text{ pT}$$

9.13) Prove que a corrente de deslocamento num capacitor de placas paralelas pode ser escrita do seguinte modo:

$$i_d = C \frac{dV}{dt} \{\text{Fonte:[5]}\}$$

Sol:

$$i_d = \epsilon \cdot \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon \frac{d \left(\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} \right)}{dt} = \epsilon \cdot \iint ds \cdot \frac{dE}{dt} = \epsilon \cdot A \cdot \frac{dE}{dt},$$

$$\text{mas } V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow E = V / x$$

$$i_d = \frac{\epsilon \cdot A}{x} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}; \text{ pois } C = \frac{\epsilon \cdot A}{x}$$

9.14) No exemplo 1 (Livro do resnick, volume 3, página 296), mostre que a *densidade de corrente de deslocamento* J_d , para $r < R$, é dada por

$$J_d = \epsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt}$$

Fonte:[5]

Sol:

Continuando a partir do desenvolvido no problema 9.12, temos:

$$i_d = C \frac{dV}{dt} = \frac{\epsilon \cdot A}{x} \frac{dV}{dt} = \epsilon \cdot A \cdot \frac{d(V/x)}{dt} = \epsilon \cdot A \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{i_d}{A} = \epsilon \cdot \frac{dE}{dt} \Rightarrow J_d = \epsilon \cdot \frac{dE}{dt}$$

9.15) Um capacitor de placas paralelas quadradas, de 1,0m de lado, como mostra a figura, está sendo carregado por uma corrente de 2,0A que chega a uma das placas e sai da outra placa. (a) Calcule a corrente de deslocamento entre as placas do capacitor. (b) Determine dE/dt nesta região. (c) Calcule a corrente de deslocamento através do quadrado tracejado indicado na figura. (d) Determine $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ ao longo deste percurso quadrado. {Fonte:[5]}

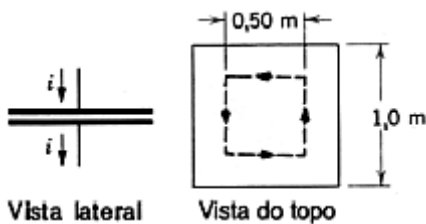


Fig. Prob. 9-15

{Fonte:[5]}

Sol:

(a) $i_c = 2A$

(b) $i_c = i_d = \epsilon_0 \cdot A \frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{i_c}{\epsilon_0 \cdot A}$

dados: $i_c = 2A$, $\epsilon_0 = 8,85 pF$ e $A = 1m^2$; temos:

$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 2,3 \cdot 10^{11} V / m$

(c) $i_d = \epsilon_0 \cdot A \frac{dE}{dt}$

dados: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \text{ pF}$, $A = 0,5 \text{ m}^2$ e da

letra (b) $\frac{dE}{dt} = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ V / m}$; logo, temos: $i_d = 0,5 \text{ A}$.

(d)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\left(\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}\right)}{dt} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot A \cdot \frac{dE}{dt} = \mu_0 \cdot i_d$$

dados: $i_d = 0,5 \text{ A}$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,63 \mu \text{Tm}$$

9.16) Em 1929, M.R. Van Cauweberghe conseguiu medir diretamente, pela primeira vez, a corrente de deslocamento i_d entre as placas de um capacitor de placas paralelas, como está sugerido na figura. Para isso, ele utilizou placas circulares, cujo raio efetivo era de 40cm e cuja capacitância era $1,0 \times 10^{-10} \text{ F}$. O valor máximo, V_m , da diferença de potencial aplicada era de 174KV, à frequência de 50Hz. (a) Qual foi a corrente de deslocamento máxima obtida entre as placas? (b) Qual a razão da escolha de uma diferença de potencial tão elevada? [A delicadeza destas medidas é tamanha que elas só foram aceitas diretamente mais de 60 anos depois de Maxwell Ter enunciado o conceito da corrente de deslocamento! A referência é o *Journal de Physique*, 8, 303 (1929)]. {Fonte:[5]}

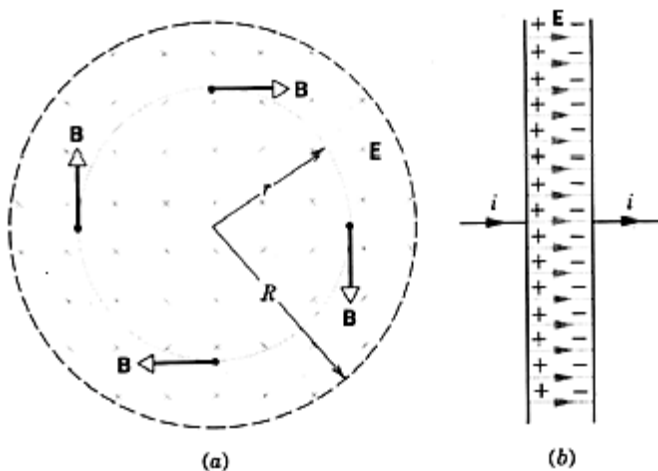


Fig. Prob. 9-16

Fonte:[5]

Sol:

(a) de 9.12, que já foi calculado temos:

$$i_d = C \frac{dV}{dt}, \text{ mas } V = V_M \cdot \sin wt$$

$$i_d = CV_M \cdot w \cdot \cos wt \rightarrow |i_d|_M = C \cdot V_M \cdot w \cdot |\cos wt|_M = C \cdot V_M \cdot w$$

$$|i_d|_M = C \cdot V_M \cdot 2\pi \cdot f$$

dados: $C = 1 \times 10^{-10} F$, $V_M = 174 KV$ e $f = 50 Hz$; logo, teremos:

$$|i_d|_M = 5,47 mA$$

(b) da equação obtida na letra (a), vemos que a corrente de deslocamento (i_d) é diretamente proporcional a tensão má-

xima aplicada (V_M), e a capacitância (C) também, sabendo que os valores de capacitância são geralmente pequenos da ordem de micros (μ), nanons (n) e picos (p) faraday, para produzir corrente mensurável precisaríamos de uma tensão elevada de modo a minimizar o valor da capacitância, conforme mostra a equação abaixo, obtida no item anterior analisando o valor de pico na corrente alternada.

$$|i_d|_M = C.V_M.2\pi.f$$

9.17) O capacitor da figura consiste de duas placas circulares de raio $R=18\text{cm}$. A fonte de tensão possui fem $V=V_m \sin \omega t$, onde $V_m=220\text{V}$ e $\omega=130\text{rad/s}$. O valor máximo da corrente de deslocamento é dado por $i_d=7,6\mu\text{A}$. Despreze a distorção do campo elétrico nas bordas das placas. (a) Calcule o valor máximo da corrente i . (b) Determine o valor máximo de $d\phi_E/dt$, onde ϕ_E é o fluxo do campo elétrico através da região entre as placas. (c) Qual a distância d entre as placas? (d) Calcule o valor máximo do módulo de B entre as placas a uma distância $r=11\text{cm}$ do centro. {Fonte:[5]}

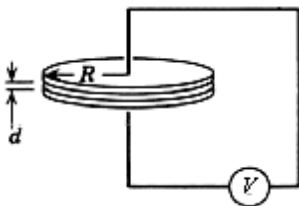


Fig. Prob. 9-17

Fonte:[5]

Sol:

(a) como $i_c = i_d \rightarrow |i_c|_M = |i_d|_M = 7,6\mu\text{A}$

(b) $i_d = \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt} \Rightarrow \left| \frac{d\phi_E}{dt} \right|_M = \frac{|i_d|_M}{\epsilon_0}$

dados: $|i_d|_M = 7,6\mu.A$ e $\varepsilon_0 = 8,85 pF$; logo, teremos:

$$\Rightarrow \left| \frac{d\phi_E}{dt} \right|_M = 858,76 KVm/s$$

(c)

$$i_d = C \frac{dV}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{x} \frac{d(V_M \cdot \sin wt)}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{x} \cdot V_M \cdot w \cdot \cos wt$$

$$\rightarrow x = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot V_M \cdot w}{i_d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot V_M \cdot w}{i_d}$$

dados: $\varepsilon_0 = 8,85 pF$, $R = 18cm$, $V_M = 220V$, $w = 130 rad/s$

e $i_d = 7,6\mu.A$

$$\rightarrow x = 3,39mm$$

(d) de 9.15, temos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot i_d \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \quad (r \leq R)$$

dados: $\mu_0 = 8,85 pF$, $i_d = 7,6\mu.A$, $r = 11cm$ e $R = 18cm$;

logo, teremos: $B(r) = 5,17 pT$

9.18) Uma longa barra cilíndrica condutora, de raio R, está centrada ao longo do eixo x, conforme indicado na figura. A barra possui um corte muito fino em $x=b$. Uma corrente de condução i, aumentando no tempo e dada por $i = \alpha.t$, percorre a barra para a direita; α é uma constante de

proporcionalidade (positiva). No instante $t=0$ não existe carga nas faces do corte próximas de $x=b$. (a) Determine o módulo da carga nessas faces em função do tempo. (b) Use a eq.I na tabela 2, página298, volume 3 do resncik, para determinar E no intervalo entre as faces , em função do tempo. (c) Use a eq.IV na tabela 2, página298, volume 3 do resncik, para obter $B(r)$ no intervalo entre as faces para $r < R$. {Fonte:[5]}

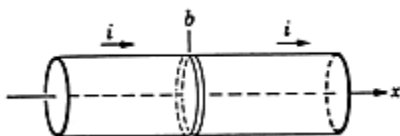


Fig. Prob. 9-18

Fonte:[5]

Sol:

$$(a) \quad q = \int_0^t \alpha \cdot t' dt' = \frac{\alpha \cdot t^2}{2} \quad (C)$$

$$(b) \quad \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{\pi \cdot R^2 \cdot \epsilon_0}, \text{ mas } q = \frac{\alpha \cdot t^2}{2}; \text{ logo:}$$

$$\rightarrow E = \frac{\alpha \cdot t^2}{2 \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \quad (V / m) \text{ ou } (N / C)$$

$$(c) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt}; \text{ mas } \phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \pi \cdot r^2 \text{ e}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2 \pi \cdot r, \text{ logo:}$$

$$B \cdot 2 \pi \cdot r = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2 \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot r}{2} \cdot \frac{dE}{dt},$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot r}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \frac{d(t^2)}{dt}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot \alpha \cdot t}{2 \cdot \pi} \frac{r}{R^2}$$

⁹ Referências para estudo da teoria

⁹ **Referência para estudo da teoria:**

KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**

Editora Guanabara Dois, 1978.

\Rightarrow capítulo 9 (nove)

KRAUS, John D. **Eletromagnetics**

McGraw-Hill International Editions , 1991

\Rightarrow capítulo 11 (onze)

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; MERRIL, John.. **Fundamentos de Física 3 – Eletromagnetismo**

LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1994.

\Rightarrow capítulo 37 (trinta e sete)

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- [1] KRAUS, John D ; CARVER, Keith R. **Eletromagnetismo**, Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.
- [2] KRAUS, John D. **Eletromagnetics**. McGraw-Hill International Editions , 1991.
- [3] HAYT, William H. **Eletromagnetismo**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos LTDA, 1995.
- [4] EDMINISTER, Joseph A. **Eletromagnetismo**, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1980.
- [5] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de Física 3 Eletromagnetismo**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos LTDA, 1994.
- [6] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jear. **Fundamentos de Física 4 Ótica e Física Moderna**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos LTDA, 1994.
- [7] REITZ, John R; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**, Rio de Janeiro: Campus LTDA. , 1980.
- [8] GRANVILLE, W.A.; SMITH P.F.; LONGLEY W. R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**. Âmbito Cultural Edições LTDA., 1992.
- [9] ABUNAHMAN, Sérgio A. **Equações Diferenciais**. Érica Editora e Gráfica LTDA, 1989.
- [10] SPIEGEL, Murray R. **Transformadas de Laplace**. Editora McGraw-Hill LTDA, 1971.

- [11] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo volume 1**. Editora Guanabara S.A. , 1978.
- [12] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo volume 2**. Editora Guanabara S.A. , 1978.
- [13] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo volume 3**. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1994.
- [14] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo volume 4**. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1994.
- [15] Giovanni, José Ruy ; Bonjorno, José Roberto. **Matemática 3**. Editora FTD S.A.
- [16] Luiz, Aldir M. **Manual de Problemas Resolvidos Elementos de Física 3** Halliady, Resnick. LTC.

Apêndice

Biografia resumida dos autores

Marcelo Lyra Brandão nasceu em vitória, Espírito Santo, em 1958. Formou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo, em 1982, recebeu o título de Mestre em Engenharia Elétrica pela PUC-RJ, em 1985 e o de Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP, em 1998. Atualmente é professor adjunto 3 (três) do Departamento de Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão(DEE-UFMA), ministrando as seguintes disciplinas no curso de graduação em Engenharia Elétrica: Eletromagnetismo, Laboratório de Eletromagnetismo, Eletromagnetismo Aplicado e no curso de graduação em Ciência da Computação ministra a disciplina Processos Estocásticos. É também professor do Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu*(mestrado e doutorado) do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, ministrando a disciplina Processos Estocásticos. Já foi professor também das disciplinas: Circuitos Elétricos, Telefonia, Antenas, Princípios de Microondas e Ondas Eletromagnéticas. Tem 2(dois) artigos publicados, um no IEEEPTL em 1997, e outro no LEOS-IEEE Conference Procceding em 1996.

Rogério Moreira Lima Silva nasceu em São Luís, Maranhão, em 1976. Atualmente cursa Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Maranhão, e também estagia na TELEMAR-MA na Engenharia(provisionamento), na área de comunicação de dados.

Para encomendar este livro, entre em contato com:

Papel Virtual Editora

Rua Marquês de São Vicente, 225
Prédio Genesis - sala 21-A - PUC-Rio
Gávea - Rio de Janeiro - RJ CEP: 22453-900

Tel: (021) 239-0170 Ramais: 2057 / 2026 (fax)

E-mail: editor@papelvirtual.com.br

Endereço Eletrônico: www.papelvirtual.com.br