

# Todo list

Describir brevemente objetivos, utilidad y estado actual . . . . .	3
Convenio . . . . .	3
Métrica, linea de universo . . . . .	3
Explicar . . . . .	9
Demostracion particiones de N . . . . .	9
Revisar planteamiento . . . . .	10
No necesitamos conocer los detalles de la teoría . . . . .	10
Repaso física estadística . . . . .	11
Acabar deducción . . . . .	11
Estamos estudiando un gas de cuerdas . . . . .	12
Omitir path-integral? . . . . .	12
Incluir expresión de N . . . . .	13
De momento no comentamos la path integral . . . . .	13
Dibujo . . . . .	13
Comentar más allá de Hagedorn? No perturbativo, interacciones, transición de fase... . . . .	14
Se puede argumentar por qué se pueden extrapolar los resultados? . . .	15
Pq usar paquetes? Se puede omitir de la demostración? . . . . .	21
Es $\prod$ un producto tensorial/ suma directa? . . . . .	21
Contradicción distribución MB vs BE? . . . . .	21
Omitimos sutilezas de detectores Unruh-DeWitt, cálculo alternativo a la path integral... . . . .	21
Introducción . . . . .	21
Dudoso . . . . .	28
O no? . . . . .	29
Demostrar . . . . .	29
Turbio . . . . .	30

# La temperatura de Hagedorn y la entropía de agujeros negros

John Liu Anta  
Universidad de Oviedo

6 de junio de 2016

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción a la teoría de cuerdas</b>	<b>3</b>
1.1.	Motivación . . . . .	3
1.2.	La cuerda relativista . . . . .	3
1.3.	Cuantización . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Termodinámica de cuerdas</b>	<b>9</b>
2.1.	Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada . .	9
2.2.	Modelo random walk . . . . .	10
2.3.	Coalescencia multicuerda . . . . .	11
2.4.	Termodinámica de cuerdas en espacio plano . . . . .	12
2.5.	Discrepancia entre colectividad microcanónica y canónica . . .	14
<b>3</b>	<b>QFT en sistemas acelerados y espacio curvo</b>	<b>15</b>
3.1.	Efecto Unruh . . . . .	15
3.2.	Radiación de Hawking . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Cuerdas en espacios curvos</b>	<b>25</b>
4.1.	Path integral en la worldsheet . . . . .	25
4.2.	Campo efectivo . . . . .	28
4.3.	Cuerdas cerca de agujeros negros . . . . .	30
4.4.	Entropía de agujeros negros . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Conclusión</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>



# Resumen

Este trabajo tiene como objetivo entender cómo la temperatura de Hagedorn, característica de todas las teorías de cuerdas, se ve afectada por la presencia de agujeros negros.

La base de este trabajo es la tesis [1]. En el capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales de teoría de cuerdas. En el capítulo 2, se analiza la termodinámica de una gas de cuerdas en espacio de Minkowski, donde aparece la temperatura de Hagedorn. El capítulo 3 trata dos aspectos de considerar una teoría cuántica de campos en sistemas de referencia no inerciales: la temperatura de Unruh y la temperatura de Hawking. El concepto de partícula es dependiente del observador. El estudio de cuerdas en espacios curvos se realiza en el capítulo 4.

...



# Capítulo 1

## Introducción a la teoría de cuerdas

### 1.1. Motivación

Describir brevemente  
objetivos, utilidad y  
estado actual

### 1.2. La cuerda relativista

Convenio

Métrica, línea de univer-  
so

La teoría de cuerdas parte de considerar que las entidades fundamentales son cuerdas en vez de partículas.

La trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  de una partícula satisface que su acción  $S$  es un extremal. Coloquialmente, esto significa que la variación de la acción a primer orden es nula bajo variaciones pequeñas de la trayectoria, supuestas fijas las posiciones iniciales y finales. La acción de una partícula libre es

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}, \quad (1.1)$$

donde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

Para que en la acción aparezca el tiempo y la posición en igualdad de condiciones, parametrizamos el tiempo y la posición por el tiempo propio  $\tau$ . El tiempo propio es el tiempo que mediría un reloj que se moviese con la partícula. Con esta transformación, la acción es

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}} = -m \int d\tau. \quad (1.2)$$

Generalizaremos la acción de una partícula libre a una cuerda libre. Una cuerda está parametrizada por una variable temporal  $\tau$  y una variable espacial  $\sigma$ , adimensional. De forma más compacta,  $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$ . La trayectoria de la cuerda en el espacio-tiempo genera una superficie llamada *worldsheet*. Las coordenadas en la *worldsheet* determinan un punto del espacio-tiempo  $X^\mu$ , también llamado espacio *target* para evitar confusión.

Para una cuerda cerrada con periodicidad  $2\pi$ , identificamos  $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ .

La acción de una partícula es proporcional a la longitud de su línea de universo. De forma análoga, la acción de una cuerda debería ser proporcional al área de la *worldsheet*. Para poder medir el área, es necesario definir una métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$  en la *worldsheet*. La forma natural de definir una métrica en una superficie, a partir de la métrica del espacio que contiene a la superficie, es mediante el concepto de *pull-back*. En este caso, la métrica en la *worldsheet* es el pull-back de la métrica de Minkowski

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

La propiedad esencial de la métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$  es que la distancia entre dos puntos próximos coincide con la calcula con la métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , ya que

$$g_{\mu\nu}(X(\sigma)) dX^\mu(\sigma) dX^\nu(\sigma) = \gamma_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta. \quad (1.4)$$

La medida de integración invariante bajo cambios generales de coordenadas más sencilla es  $d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}$ , por lo que la acción, llamada de Nambu-Goto, es

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}. \quad (1.5)$$

El parámetro  $T$  se corresponde con la tensión de la cuerda y se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (1.6)$$

donde  $\alpha'$  es la pendiente de Regge.

A la hora de cuantizar la teoría, la raíz cuadrada es problemática, por lo que se introduce un campo tensorial  $h$  definido sobre la *worldsheet* en la llamada acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.7)$$



Este campo  $h$  se comporta como una métrica en dos dimensiones y queda fijada por las ecuaciones de movimiento

$$h_{\alpha\beta} = 2f(\sigma)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu \quad (1.8)$$

donde  $f(\sigma)$  es una función cualquiera. La libertad de poder escoger  $f(\sigma)$  es una simetría gauge

### 1.3. Cuantización

Debido a la simetría gauge de la teoría, la cuantización no es directa. Hay grados de libertad que no son físicos y en algún momento hemos de deshacernos de ellos. Para obtener directamente una teoría unitaria, cuantizamos solo los grados de libertad físicos, buscando primero las soluciones clásicas. Como contrapartida, perdemos la invariancia de Lorentz explícita.

Definimos las coordenadas en el cono de luz

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (1.9)$$

y

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1}). \quad (1.10)$$

Gracias a la simetría gauge, imponemos  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , de forma que la acción de Polyakov es

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu, \quad (1.11)$$

que da lugar a la ecuaciones de movimiento de ondas libres

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (1.12)$$

La solución general de la ecuación de movimiento para  $X^+$  se descompone en una onda moviéndose hacia la izquierda  $X_L^+$  y otra hacia la derecha  $X_R^+$ ,

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-). \quad (1.13)$$

Teniendo en cuenta la periodicidad en  $\sigma$ , la expansión de Fourier conduce a

$$\begin{aligned} X_L^+ &= \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^+ e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^+ &= \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^+ e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donde  $x^+$  y  $p^+$  se corresponden con la posición y el momento del centro de masas, respectivamente.

Debido a la invariancia bajo reparametrizaciones, escogemos

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+, \quad (1.15)$$

y

$$X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+. \quad (1.16)$$

Por tanto,

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau. \quad (1.17)$$

Con esta elección gauge, la solución  $X^-$  queda determinada casi por completo. La ecuación de movimiento para la métrica  $h$  se obtiene variando la acción

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \delta h^{\alpha\beta} \left( \sqrt{-h} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu \right). \quad (1.18)$$

Como habíamos elegido  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$ , la ecuación de movimiento impone

$$\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0. \quad (1.19)$$

En las coordenadas del cono de luz, esto se traduce en

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \quad (1.20)$$

Haciendo la descomposición de la solución  $X^-$

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-), \quad (1.21)$$

la ecuación 1.20 conduce a

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \quad (1.22)$$

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^-} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \quad (1.23)$$

En el desarrollo de Fourier

$$\begin{aligned} X_L^-(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \\ X_R^-(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

las constantes  $p^-$ ,  $\tilde{\alpha}_n^-$  y  $\alpha_n^-$  quedan determinadas por las ecuaciones 1.22 y 1.23.

El momento  $p^-$  se puede expresar a través de  $\alpha_n^i$  y de  $\tilde{\alpha}_n^i$  como

$$p^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right) = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{-n}^i \right). \quad (1.25)$$

La masa de la cuerda es por tanto

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i. \quad (1.26)$$

Hemos obtenido la solución clásica mediante los  $2(D-2)$  modos de oscilación transversos  $\alpha_n^i$  y  $\tilde{\alpha}_n^i$  y las constantes  $x^i$ ,  $p^i$ ,  $p^+$  y  $x^-$ . La cuantización consiste en promover los grados de libertad a operadores que satisfacen una reglas de conmutación. Estas reglas son

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad [x^-, p^+] = -i, \quad [\alpha_n^i, \alpha_m^j] \quad (1.27)$$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a \right) = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - a \right) \quad (1.28)$$

La cuantización conduce a la fórmula de masas

$$M^2 = \frac{4}{\alpha} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \left( \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{d-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \left( \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - \frac{d-2}{24} \right) \quad (1.29)$$

### Espectro de una cuerda

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \frac{D-2}{6} \quad (1.30)$$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left( 1 - \frac{D-2}{24} \right) \quad (1.31)$$

Definiendo

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m \quad (1.32)$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m. \quad (1.33)$$

Es importante ver que hay una expresión en términos de modos moviéndose a la derecha y otra con modos moviéndose a la izquierda.

**Cuerdas supersimétricas****La integral de camino**

Función beta

Dualidad T

## Capítulo 2

# Termodinámica de cuerdas

### 2.1. Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada

La fórmula de masas para una cuerda abierta es

$$\alpha' m^2 = -1 + N \quad (2.1)$$

y para una cuerda cerrada

$$\alpha' m^2 = -4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.2)$$

Queremos calcular la densidad de estados de una cuerda en función del número de oscilador,

Explicar

$$N = \sum_{m=1}^N m n_m, \quad n_m \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Las particiones de  $N$

Demostracion particiones de N

$$p(N) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp \left( 2\pi \sqrt{\frac{N(d-2)}{6}} \right). \quad (2.4)$$

En el caso de cuerdas bosónicas cerradas, expresando la densidad de estados en función de la masa

$$p(M) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp \left( 2\pi \sqrt{\frac{N(d-2)}{6}} \right). \quad (2.5)$$

$$\omega(E) \approx V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.6)$$

La función de partición en la colectividad macrocanónica es

$$z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} dE \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{-\beta E} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} z &= (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par} \\ z &= (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.2. Modelo random walk

Revisar planteamiento

Intuitivamente, la masa (energía) de una cuerda es su densidad lineal  $\sigma$  por su longitud  $L$ . En unidades naturales, la masa tiene unidades inversas a la longitud, por lo que si pensamos que la cuerda está dividida en  $N$  segmentos de longitud  $l_s$ ,

$$E \sim \frac{N}{l_s} \sim \frac{L}{l_s^2}. \quad (2.9)$$

Cada segmento podrá tener una orientación arbitraria. Para simplificar los cálculos, supongamos que toma direcciones ortogonales. Entonces el número de orientaciones posibles de cada segmento es  $2n$ , donde  $n$  es el número de dimensiones espaciales accesibles. El número de segmentos es  $L/l_s$ . Por tanto, el número de microestados para una energía dada es

$$\omega(E) = (2n)^{(L/l_s)} \propto e^{l_s E \ln(n)}. \quad (2.10)$$

La entropía de la cuerda es  $S \propto El_s$ , con temperatura  $\beta_H \sim l_s$ .

Se puede calcular que el radio del random walk es  $R = \langle r \rangle \sim E^{1/2}$ . Esto nos dice que cuerdas muy largas estarán contenidas en un volumen pequeño  $V \sim E^{D/2}$ .

Para una cuerda cerrada, habría que dividir el número de microestados por el volumen de walk, multiplicar por el volumen accesible y dividir por la longitud de la cuerda. Entonces,

$$\omega(E) \sim V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{1+D/2}}. \quad (2.11)$$

No necesitamos conocer los detalles de la teoría

De esta forma, obtenemos la densidad de estados

El cálculo de la extensión de una cuerda altamente excitada con respecto a su centro de masas conduce a que  $R_i^2$  es proporcional a la suma de las inversas de los números oscilatorios para la dirección  $i$ . Por ello, para un nivel energético

$N$  fijo,  $(\alpha_{-1}^i)^N |0\rangle$  tendría la mayor extensión en la dirección  $i$ ,  $\sim N$  y  $\alpha_N^i |0\rangle$  tendría la menor extensión. Tomando el promedio sobre todas las direcciones espaciales,  $R^2 \sim (d-1)\sqrt{N}$ , siendo  $d-1$  el número de direcciones espaciales. Volvemos a observar la importante peculiaridad  $R \sim \sqrt{L}$ , por lo que las cuerdas largas tiende a enmarañarse.

### 2.3. Coalescencia multicuerda

Repaso física estadística

#### Formulación microcanónica

La función de partición de una cuerda es

$$z(\beta) = \int_0^\infty \omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.12)$$

La función de partición de un sistema de cuerdas es

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.13)$$

Si el número de

$$\begin{aligned} Z = e^z &= 1 + \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) e^{-\beta E_1} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(E_1) \omega(E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)} \dots \\ &= \int_0^\infty dE \delta(E) + \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int dE_1 \omega(E_1) \delta(E - E_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 \omega(E_1) \omega(E_2) \delta(E - E_1 - E_2) \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Entonces

$$\Omega(E) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n dE_i \omega(E_i) \delta\left(E - \sum_{j=1}^n E_j\right). \quad (2.15)$$

$$\omega(E) \sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.16)$$

Acabar deducción

## Formulación canónica

### 2.4. Termodinámica de cuerdas en espacio plano

Estamos estudiando un gas de cuerdas

Buscamos la energía libre de una cuerda bosónica cerrada.

La función de partición bosónica en un espectro discreto es  $z = \prod_i 1/(1 - \exp(-\beta E_i))$ . La energía libre viene dada por  $F = -1/\beta \ln z = \beta \sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i))$ . En el caso continuo, donde  $E = E(k)$ , reemplazamos el sumatorio por  $V \int d^{d-1}k/(2\pi)^{d-1}$ . Por tanto,

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \ln(1 - \exp(-\beta E)). \quad (2.17)$$

Expandiendo el logaritmo por el desarrollo de Taylor  $\ln(1 - x) = -\sum_{r=1}^{\infty} x^r/r$ ,

$$F = -\frac{V}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp(-r\beta E). \quad (2.18)$$

Aplicando la identidad

$$\frac{1}{r} \exp(-\beta r E) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{E^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right), \quad (2.19)$$

y como  $E^2 = k^2 + m^2$ , se llega a

$$F = -\frac{V}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left(-\frac{k^2 s}{2}\right). \quad (2.20)$$

La integral en momentos tiene como resultado  $(2\pi s)^{\frac{d-1}{2}}$ , por lo que

$$F = -V \int_0^{\infty} \frac{ds}{s(2\pi s)^{d/2}} \sum_{r=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right). \quad (2.21)$$

Por otro lado, la función de partición de estado multicuerda es  $Z = e^z =$

Omitir path-integral?

$-\beta F$ . Entonces podemos hacer la asociación de la energía libre con integral de camino de una partícula tras aplicar una rotación de Wick en la dimensión temporal y compactificando el tiempo con periodo  $\beta$

$$Z = -\beta F = \int_0^{\infty} \frac{ds}{2s} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^s d\tau \left[\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial t}\right)^2 + m^2\right]\right) \quad (2.22)$$

Se llega al mismo resultado calculando la función de partición de una partícula si identificamos el parámetro  $s$  con el tiempo propio de la partícula y compactificamos la coordenada  $X^0$  con periodo  $\beta$ . El número de vueltas que da la partícula en la dimensión temporal es  $w$ . La función de partición se suma sobre todas las vueltas posibles y se integra en todos los tiempos propios.



En una teoría de cuerdas bosónica,  $d = 26$  y la energía libre se obtendría sumando las energías libres para todo el espectro posible, con la fórmula de masas

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2). \quad (2.23)$$

Incluir expresión de  $N$

Puesto que se tiene que cumplir la condición  $N = \bar{N}$ , hay que incluir en la integral la expresión de la delta de Kronecker

$$\delta_{N\bar{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \exp(2\pi i \tau_1 (N - \bar{N})). \quad (2.24)$$

La energía libre sería

$$F = \sum_i \delta_{N_i \bar{N}_i} F(N_i, \bar{N}_i), \quad (2.25)$$

donde  $i$  recorre todas las posibles combinaciones de  $N_i$  y  $\bar{N}_i$ . Haciendo el cambio de variable  $s = 2\pi\alpha'\tau_2$ ,

$$F = -V \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2 (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_i e^{-(N_i + \bar{N}_i - 2)2\pi\tau_2} e^{-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 e^{2\pi i \tau_1 (N_i - \bar{N}_i)} \quad (2.26)$$

El apóstrofe indica que se ha omitido el término con  $r = 0$  del sumatorio, pues es la contribución de vacío que no depende de la temperatura.

Definiendo  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  y  $q = e^{2\pi i \tau_1}$ , introducimos la  $\eta$  de Dedekind como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.27)$$

Sustituyendo, llegamos a

$$F = -V \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} |\eta(\tau)|^{-2d+4} \exp\left(-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right). \quad (2.28)$$

Se ha llegado a una expresión cuyo integrando no es invariante modular. Es decir, la transformación  $\tau \rightarrow \tau + 1$  y  $\tau \rightarrow 1/\tau$  en el integrando modifica el resultado de la integral. Para conseguir la invariancia modular, se restringe el dominio de integración al dominio fundamental y se modifica el integrando, añadiendo el número cuántico  $w$  sobre el que se suma, de modo que para  $d = 26$  se tiene

$$F = -V \sum_{r,w=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{13}} |\eta(\tau)|^{-48} \exp\left(-\frac{|r^2 - w\tau|^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right). \quad (2.29)$$

De momento no comentamos la path integral

Dibujo

Ahora que ya hemos hallado la energía libre, busquemos cuándo diverge. De acuerdo con 2.28, para valores próximos a  $\tau_2 = 0$ , los términos con  $r = \pm 1$  son dominantes. El comportamiento de la exponencial es

$$\exp\left(\frac{8\pi^2\alpha' - \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right), \quad (2.30)$$

por lo que al integrar  $\tau_2$  desde cero la energía libre diverge si  $\beta \leq \beta_H = 4\pi\sqrt{\alpha'}$ .

Si examinamos el integrando en la región fundamental 2.29,

## 2.5. Discrepancia entre colectividad microcanónica y canónica

Comentar más allá de Hagedorn? No perturbativo, interacciones, transición de fase...

## Capítulo 3

# QFT en sistemas acelerados y espacio curvo

### 3.1. Efecto Unruh

Una propiedad sorprendente de las teorías cuánticas de campos es que el estado de vacío puede depender del observador. Concretamente, el efecto Unruh establece que el vacío para un observador inercial, visto por un observador con aceleración constante corresponde con un estado térmico a temperatura

$$T_U = \frac{a}{2\pi k_B}. \quad (3.1)$$

En este apartado, seguiremos la derivación expuesta en [1].

En la deducción del efecto Unruh estudiaremos un campo escalar sin masa  $\phi(t, z)$  en un espacio de Minkowski con una dimensión espacial  $t$  y una dimensión espacial  $z$ . La ecuación que describe el campo es la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

La solución general de esta ecuación de ondas toma la forma

$$\phi(x, t) = f(t - x) + g(t + x). \quad (3.3)$$

Las funciones  $f$  y  $g$  representan dos ondas que se mueven a la velocidad de la luz en sentidos opuestos. Hacemos el cambio de variable a coordenadas nulas

$$U = t - z, \quad V = t + z. \quad (3.4)$$

Se puede argumentar por qué se pueden extrapolar los resultados?

De este modo, la solución general se expresa como

$$\phi(U, V) = \phi_U(U) + \phi_V(V). \quad (3.5)$$

Nos interesa expandir la solución en términos de ondas armónicas

$$\phi_\omega^U(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \quad (3.6)$$

$$\phi_\omega^V(V) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}. \quad (3.7)$$

Puesto que la solución  $\phi_V$  está desacoplada de  $\phi_U$ , basta considerar  $\phi_U$  ya que el tratamiento de  $\phi_V$  sería análogo.

La expansión del campo en modos es

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^U \phi_\omega^U(U) + a_\omega^{U*} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.8)$$

El proceso de cuantización canónica consiste en reemplazar en valor del campo en cada punto del espacio-tiempo  $\phi(x, t)$ , por un operador  $\hat{\phi}(x, t)$  que satisfará unas relaciones de conmutación particulares. Esto significa que los coeficientes de la expansión de  $\phi_U$  pasan a ser los operadores  $\hat{a}_\omega^U$  y  $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$  y por tanto

$$\hat{\phi}_U(U) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega^U \phi_\omega^U(U) + \hat{a}_\omega^{U\dagger} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.9)$$

El operador  $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$  se denomina operador creación, pues veremos que crea partículas de frecuencia  $\omega$  y  $\hat{a}_\omega^U$  se conoce como operador destrucción porque aniquila partículas de frecuencia  $\omega$ . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$[\hat{a}_\omega^{U\dagger}, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = [\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^U] = 0, \quad (3.10)$$

$$[\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.11)$$

Todavía no hemos especificado el espacio de Hilbert sobre el que actúa el operador del campo, el cual se denota por  $\mathcal{H}_\phi$ . El estado del campo queda especificado descrito por un elemento de  $\mathcal{H}_\phi$ . Como en este caso los modos  $U$  y  $V$  están desacoplados, podemos considerar independientemente el espacio de Hilbert asociado a cada uno,  $\mathcal{H}_U$  y  $\mathcal{H}_V$ . El espacio de Hilbert del campo es el producto tensorial de ambos  $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$ .

La base del espacio  $\mathcal{H}_U$  se puede construir mediante la representación de Fock. Para ello, se define el estado de vacío  $|0_U\rangle$ , como el estado que no contiene ningún tipo de partícula, por tanto

$$a_\omega^U |0_U\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Donde omitimos el acento circunflejo de los operadores por comodidad. Luego procedemos a crear estados con  $n_i$  partículas de frecuencia  $\omega_i$ , mediante aplicación repetida del operador creación  $a_{\omega_i}^{U\dagger}$ , con la normalización apropiada

$$|n_{1,\omega_1}, n_{2,\omega_2}, \dots, n_{N,\omega_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots n_N!}} (a_{\omega_1}^{U\dagger})^{n_1} (a_{\omega_2}^{U\dagger})^{n_2} \dots (a_{\omega_N}^{U\dagger})^{n_N} |0_U\rangle. \quad (3.13)$$

Los estados construidos son estados propios del operador número de partículas  $N_{\omega_i}^U = a_{\omega_i}^{U\dagger} a_{\omega_i}^U$  con valor propio  $n_i$ . La base de  $\mathcal{H}_U$  se obtiene juntando los estados con un número arbitrario de partículas de todas las frecuencias posibles.

Supongamos que queremos expandir el campo en otra base de modos  $u$

$$\phi_\omega^u(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u(U)}, \quad (3.14)$$

entonces

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^u \phi_\omega^u(U) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(U)^*]. \quad (3.15)$$

Expandiendo la nueva base en términos de la anterior

$$\phi_\omega^u(U) = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U) + \beta_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U)^*]. \quad (3.16)$$

Los coeficientes  $\alpha_{\omega\omega'}$  y  $\beta_{\omega\omega'}$  se denominan coeficientes de Bogoliubov y vienen dados por

$$\alpha_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) - \omega' U)}, \quad (3.17)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) + \omega' U)}. \quad (3.18)$$

Cuantizando la teoría y formando el espacio de Fock, comprobamos que el vacío obtenido mediante los modos  $\phi_\omega^U(U)$ , puede contener partículas asociadas a los modos  $u$  si el coeficiente  $\beta_{\omega\omega'}$  no es nulo

$$\langle N_\omega^u | 0_U | N_\omega^u \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que en una teoría cuántica de campos, el vacío depende de la base de modos que se haya escogido antes de la cuantización. La ambigüedad se puede resolver escogiendo el vacío que tenga la mínima energía. En el espacio de Minkowski la energía está bien definida y coincide para todos los observadores inerciales, al ser invariante de Lorentz. Sin embargo, en un espacio-tiempo curvo el concepto de energía puede no estar bien definido y por tanto no hay un estado de vacío privilegiado.

Con el fin de estudiar cuál es el vacío dado por un observador acelerado en un espacio de Minkowski, introducimos las coordenadas de Rindler  $(\eta, \xi)$  definidas por

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad (3.20)$$

$$z = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (3.21)$$

donde  $|t| < z$  y  $a > 0$ .

Las coordenadas de Rindler solo cubren la región  $|t| < z$ , denominada cuña derecha de Rindler. De forma análoga, se puede cubrir la cuña izquierda de Rindler ( $|t| < -z$ ) mediante las coordenadas  $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$  dadas por

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \sinh a\tilde{\eta} \quad (3.22)$$

$$z = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \cosh a\tilde{\eta}. \quad (3.23)$$

Las trayectorias con  $\eta = \eta_0$  constante corresponden con observadores que se mueven con aceleración propia  $ae^{-a\xi_0}$ . El tiempo propio que miden estos observadores es  $\tau = e^{a\xi_0}\eta$ . Escogiendo apropiadamente el origen de coordenadas, un observador con aceleración constante viene dado por  $\eta = \tau$  y  $\xi = 0$ .

Fijándonos en el diagrama de Rindler (figura 3.1), un observador con aceleración constante moviéndose a la derecha no puede percibir los efectos producidos en III ni influir en II. Además, la información que le llegue de II será percibida como proveniente de un tiempo infinitamente anterior, por lo que la recta  $t = z$  define un horizonte de sucesos futuro y la recta  $t = -z$  un horizonte de sucesos pasado.

Como el observador acelerado hacia la derecha desconoce el estado del campo en la cuña izquierda de Rindler, el estado que percibe no es puro, si no mixto. La descripción de estados mixtos se realiza mediante una matriz de densidad,

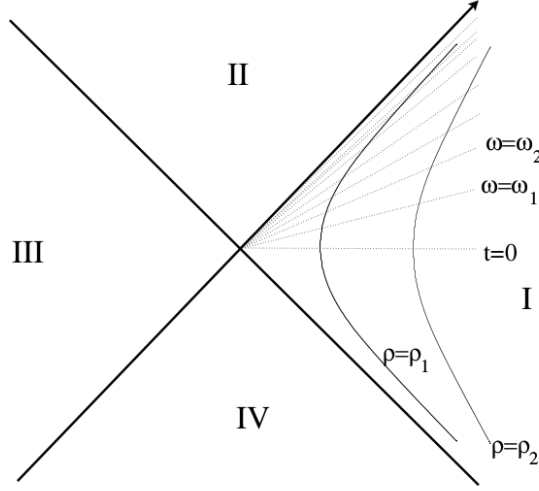


Figura 3.1: Espacio de Minkowski en coordenadas de Rindler (usar imagen libre)

que al trazar sobre los estados desconocidos conduce a que el vacío sea un estado térmico. Con el fin de hacer la deducción explícita, partimos de la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Rindler para la cuña derecha

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.24)$$

Definiendo la coordenadas nulas de Rindler

$$\begin{aligned} u &= \eta - \xi, \\ v &= \eta + \xi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

la solución general de 3.24 es  $\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v)$ , que se expande en los modos normales

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aplicaríamos un tratamiento análogo a la cuña izquierda.

El campo propagándose hacia la derecha en coordenadas de Minkowski se expande como

$$\begin{aligned} \phi_U(U) &= \int_0^\infty \Theta(-U) [a_\omega^u \phi_\omega^u(u(U)) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(u(U))^*] \\ &\quad + \Theta(U) [a_\omega^{\tilde{u}} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + a_\omega^{\tilde{u}*} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde  $\Theta(U)$  es la función de Heaviside

$$\Theta(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } U < 0 \\ 1 & \text{si } U > 0 \end{cases}. \quad (3.28)$$

El cálculo de los coeficientes de Bogoliubov conduce a

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega, \omega'}^u &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a), & \beta_{\omega, \omega'}^u &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a) \\ \alpha_{\omega, \omega'}^{\tilde{u}} &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a), & \beta_{\omega, \omega'}^{\tilde{u}} &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por conveniencia, los modos de Unruh se definen como

$$\begin{aligned} \phi_\omega^I(U) &= \Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*, \\ \phi_\omega^{II}(U) &= \Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U))^*, \end{aligned} \quad (3.30)$$

los cuales están definidos en todo el espacio de Minkowski.

La cuantización de los modos de Unruh conduce a los operadores de destrucción

$$\begin{aligned} a_\omega^I &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} a_{\omega'}^U, \\ a_\omega^{II} &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^u a_{\omega'}^U. \end{aligned} \quad (3.31)$$

El vacío de estos modos es el vacío de Minkowski, es decir

$$a_\omega^I |0_H\rangle = a_\omega^{II} |0_H\rangle = 0. \quad (3.32)$$

Para buscar el valor esperado de partículas que observa un observador acelerado en el vacío de Minkowski, primero calculamos

$$\langle 0_H | a_\omega^{u\dagger} a_\omega^u | 0_H \rangle = \int_0^\infty d\omega'' \beta_{\omega\omega''}^u \beta_{\omega'\omega''}^{u*} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.33)$$

En el límite  $\omega' \rightarrow \omega$ , esta cantidad es el valor esperado de partículas que se detectarían, pero debido a la delta, se obtiene una divergencia. El motivo es que calcular el número de partículas en toda la cuña derecha de Rindler, implica que hay que considerar un observador acelerado eternamente, lo que requiere infinita energía. En una situación real, la delta se transformaría en un valor finito. Por tanto,

$$\langle 0_H | N_\omega^u | 0_H \rangle \sim \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1}. \quad (3.34)$$



Este valor esperado se corresponde con un sistema de bosones a temperatura  $T = a/(2\pi k_B)$ . Sin embargo, todavía no conocemos la forma exacta del vacío de Minkowski.

En vez de considerar ondas armónicas con frecuencia bien definida, trabajamos con paquetes de onda con resolución  $\Delta\omega$  centrados en  $(n + 1/2)\Delta\omega$ ,

Pq usar paquetes? Se puede omitir de la demostración?

$$\phi_{n\bar{n}}^u(u) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{n\Delta\omega}^{(n+1)\Delta\omega} d\omega e^{i\frac{2\pi n}{\Delta\omega}\omega} \phi_{\omega}^u(u). \quad (3.35)$$

Al cuantizar estos paquetes se introduce para la cuña derecha el operador destrucción  $a_{n\bar{n}}^u$  y en la cuña izquierda  $a_{n\bar{n}}^{\bar{u}}$ . Construyendo los modos de Unruh asociados a paquetes de ondas, se obtiene que los operadores  $a_{n\bar{n}}^I$  y  $a_{n\bar{n}}^{II}$  cumplen

$$a_{n\bar{n}}^I |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{II} |0_U\rangle = 0. \quad (3.36)$$

De la expresión de  $a_{n\bar{n}}^I$  y  $a_{n\bar{n}}^{II}$  en términos de  $a_{n\bar{n}}^u$  y  $a_{n\bar{n}}^{\bar{u}}$ , se llega a

$$a_{n\bar{n}}^{u\dagger} a_{n\bar{n}}^u |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{\bar{u}\dagger} a_{n\bar{n}}^{\bar{u}} |0_U\rangle, \quad (3.37)$$

y por tanto hay el mismo número de partículas asociadas a paquetes de ondas de Rindler en ambas cuñas.

Teniendo en cuenta que el estado de vacío ha de contener el mismo número de partículas en cada cuña,

$$|0_H\rangle = \prod_{n,\bar{n}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \otimes |m_{n\bar{n}}\rangle_{\bar{u}} \right). \quad (3.38)$$

Tras calcular los coeficientes  $K_{n\bar{n}}$  y hacer la traza parcial sobre los estados de la cuña izquierda, obtenemos que la matriz densidad

Es  $\prod$  un producto tensorial/ suma directa?

$$\rho \propto \prod_{n,\bar{n}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\pi m n \Delta\omega/a} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \langle m_{n\bar{n}}|_u \right), \quad (3.39)$$

que describe una distribución de Maxwell-Boltzmann a temperatura  $T_U = a/(2\pi k_B)$ .

Contradicción distribución MB vs BE?

### 3.2. Radiación de Hawking

La radiación de Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero

Omitimos sutilezas de detectores Unruh-DeWitt, cálculo alternativo a la path integral...

Introducción

### 2CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

negro. Esta radiación sigue una distribución de cuerpo negro a la temperatura de Hawking

$$T_{haw} = \frac{1}{8\pi k_B M}. \quad (3.40)$$

Consireraremos el caso más sencillo de agujero negro, el agujero negro de Schwarzschild, que describe una distribución de masa con simetría esférica y estática. La métrica asociada es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.41)$$

Observamos que en el radio de Schwarzschild  $r_s = 2MG$ , la componente temporal de la métrica se anula mientras que la componente radial va a infinito. Se denomina horizonte de sucesos a la esfera con radio  $r_s$  centrada en  $r = 0$ .

Es conveniente introducir la coordenada tortuga

$$r^* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right), \quad (3.42)$$

que toma el valor  $r^* = -\infty$  en el horizonte. La métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) [-dt^2 + dr^{*2}] + r^2 d\Omega^2. \quad (3.43)$$

Si estudiamos un campo escalar no masivo con simetría esférica  $\psi(t, r)$ , la ecuación de Klein-Gordon en un espacio de Schwarzschild es

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r^*} = 0. \quad (3.44)$$

Las soluciones a esta ecuación ya no son ondas planas como en la métrica de Minkowski. Haciendo el cambio de variable  $\psi = \phi/r$ , obtenemos

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^{*2}} - \frac{r_s}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \phi = 0. \quad (3.45)$$

La cual se corresponde con la ecuación de Klein-Gordon que vimos en 3.2, salvo por un término de potencial efectivo

$$V(r) = \frac{r_s}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (3.46)$$

En una primera aproximación podemos ignorar este potencial, pues su único efecto es distorsionar la radiación de Hawking emitida (*backscattering*).

Definiendo las coordenadas Eddington-Finkelstein

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, \\ v &= t + r^*, \end{aligned} \quad (3.47)$$

la solución general es

$$\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v). \quad (3.48)$$

El campo se descompone en los modos de Boulware

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

El vacío asociado a la cuantización con estos modos se denomina vacío de Boulware y corresponde con el vacío para un observador en caída libre muy alejado de la fuente gravitacional.

Tenemos que describir la formación de un agujero negro y la variación de estado de vacío para un observador asintótico. Los modos salientes que escapan la materia en colapso poco antes de formarse el horizonte

Cerca del horizonte, si definimos la coordenadas de Kruskal-Szeckeres

$$\phi_\omega^{\bar{u}} \propto e^{i\omega 4M \ln \left| \frac{u'}{4M} \right|}. \quad (3.50)$$



## Capítulo 4

# Cuerdas en espacios curvos

Queremos ver cómo se modifica la temperatura de Hagedorn cerca de un agujero negro.

La temperatura de Hagedorn se extrae del comportamiento divergente de la energía libre.

Por tanto, necesitamos ver cómo calcular la energía libre en un espacio-tiempo curvo. Veremos dos métodos distintos: mediante la integral de camino en el toro de una cuerda que se enrolla en el tiempo de la variedad termal (tiempo euclídeo con periodo  $\beta$ ) y la integral de camino a un loop de un campo taquiónico.

### 4.1. Path integral en la worldsheet

La integral de camino del toro en una campo  $G_{\mu\nu}$ , el cual representa la curvatura del espacio-tiempo, en  $d$  dimensiones es

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}X \sqrt{G} e^{-S}, \quad (4.1)$$

donde el determinante de Faddeev-Popov se introduce debido a la libertad gauge bajo difeomorfismos y transformaciones Weyl. La acción es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^1 d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

La métrica de la worldsheet es

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Definimos las nuevas coordenadas  $\sigma = \sigma_1/\tau_2$  y  $\tau = \sigma_2$ , de modo que la acción se convierte en

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{1/\tau_2} d\sigma \int_0^1 d\tau \left[ \left(1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}\right) \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu G_{\mu\nu} + 2\frac{\tau_1}{\tau_2} \partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} \right]. \quad (4.4)$$

Haciendo el desarrollo de Fourier de  $X^\mu(\sigma, \tau)$  en la coordenada  $\sigma$ , obtenemos

$$X^i(\sigma, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^i(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma} \quad (4.5)$$

$$X^0(\sigma, \tau) = \pm \beta\tau_2\sigma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^0(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma}.$$

Como la divergencia de Hagedorn se produce en  $\tau_2 \rightarrow \infty$ , nos quedamos con el modo  $n = 0$ . Al integrar en  $\tau_2$ , obtenemos la acción de una partícula

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'\tau_2} \int_0^1 d\tau [\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)G_{00} \pm 2\beta\tau_1 G_{0\mu} \partial_\tau X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu]. \quad (4.6)$$

Depreciar el resto de modos en la serie de Fourier hace que a la acción resultante le falten términos adicionales. En una métrica plana, la corrección a la acción es

$$\Delta S = -\frac{\tau_2^2 \beta_{H0}^2}{4\pi\alpha'\tau_2}. \quad (4.7)$$

Definiendo un nuevo parámetro  $t = \tau_2\tau$  e incluyendo la corrección a la acción

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\beta^2\tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{0\mu} \partial_t X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_t X^\mu \partial_t X^\nu \right\} \right]. \quad (4.8)$$

En una métrica estacionaria y que cumpla  $G_{0i} = 0$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\beta^2\tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 + G_{00} (\partial_t X^0)^2 + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j \right\} \right]. \quad (4.9)$$

Si descomponemos la coordenada temporal en una parte clásica y una corrección adicional,  $X^0 = X^c + \tilde{X}^0$ , podemos hacer la integral de camino sólo sobre  $\tilde{X}^0$ . Primero hemos de buscar la acción clásica. La ecuación de

Euler-Lagrange es

$$\partial_t \left[ G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \right] = 0. \quad (4.10)$$

Por lo que

$$G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} = C. \quad (4.11)$$

Como la coordenada  $X^0$  es periódica,

$$0 = X^0(\tau_2) - X^0(0) = X^0(t) \Big|_0^{\tau_2} = \int_0^{\tau_2} \partial_t X^0(t) dt = \langle \partial_t X^0 \rangle \quad (4.12)$$

Promediando,

$$\langle \partial_t X^c \rangle \pm \left\langle \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} \right\rangle = \left\langle \frac{C}{G_{00}} \right\rangle. \quad (4.13)$$

Obtenemos

$$C = \pm \beta \frac{\tau_1}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} \quad (4.14)$$

La acción clásica es

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left\langle G_{00} (\partial_t X^0)^2 \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle. \quad (4.15)$$

Aplicando

$$\left\langle G_{00} (\partial_t X^0)^2 \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle = C \langle \partial_t X^0 \rangle = 0, \quad (4.16)$$

y

$$\langle G_{00} \rangle \partial_t X^0 = \tau_2 C \mp \frac{\tau_1}{\tau_2} \beta \langle G_{00} \rangle, \quad (4.17)$$

la acción clásica puede escribirse como

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ \frac{\tau_1^2 \beta^2}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} - \beta^2 \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \langle G_{00} \rangle \right]. \quad (4.18)$$

Como la trayectoria clásica hace estacionaria la acción, los términos lineales en  $\tilde{X}^0$  se anulan y la integral de camino en  $\tilde{X}^0$  es

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2\alpha' \langle G_{00}^{-1} \rangle}} \beta. \quad (4.19)$$

La integral en  $\tau_1$  en la ecuación 4.1, da lugar al término

$$\frac{2\pi\sqrt{\alpha'} \sqrt{\langle G_{00}^{-1} \rangle}}{\beta}. \quad (4.20)$$

La integral de camino se reduce a

$$Z = 2 \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int \mathcal{D}\vec{X} \sqrt{\prod_t \det G_{ij}} e^{-Sp} \quad (4.21)$$

donde la acción

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\beta_{H0}^2 \tau_2 + \beta^2 \int_0^{\tau_2} dt (G_{00} + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j) \right] \quad (4.22)$$

## 4.2. Campo efectivo

La acción de un campo taquiónico a orden más bajo en  $\alpha'$  es

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{G} e^{-2\Phi} (G^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T + m^2 T^2), \quad (4.23)$$

donde  $T$  es un campo escalar real y  $\Phi$  el campo del dilatón.

Si el tiempo tiene periodo  $2\pi R$ , el desarrollo de Fourier de  $T$  es

$$T(x^0, x^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x^i) e^{\frac{in x^0}{R}}. \quad (4.24)$$

Hay que tener en cuenta que  $T_n(x^i)$  es un campo escalar complejo y  $n$  es el momento discretizado en la dimensión compacta. En la variedad termal,  $R = \beta/2\pi$ . Suponemos una métrica estacionaria y  $G_{i0} = 0$ . Sustituyendo,

$$S = \sum_{n,m} \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( -\frac{nm}{R^2} G^{00} \partial_0 T_n \partial_0 T_m + G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_m + m^2 T_n T_m \right) \int_{-\pi R}^{\pi R} \frac{dx^0}{2} e^{i \frac{n+m}{R} x^0}. \quad (4.25)$$

La integral en  $x^0$  es  $\pi R \delta_{-n,m}$ , por lo que

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_{-n} + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_{-n} + m^2 T_n T_{-n} \right). \quad (4.26)$$

Como  $T$  es un campo real,  $T_n = T_{-n}^*$  y por tanto

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_n^* + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_n^* + m^2 T_n T_n^* \right). \quad (4.27)$$

Aunque en la acción solo aparece el momento  $n$  y no los enrollamientos  $w$ , esto se debe al desarrollo de Fourier, pues la acción completa cumpliría la

**Dudoso** dualidad T. Haciendo las transformaciones

$$\begin{aligned} G_{00} &\rightarrow \frac{1}{G_{00}}, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{00}, \\ T_n &\rightarrow T_w. \end{aligned} \quad (4.28)$$

y  $R \rightarrow \alpha'/R$ , los momentos se convierten en enrollamientos

$$S \sim \sum_w \int d^{d-1} x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_w \partial_j T_w^* + \frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2} T_w T_w^* + m^2 T_w T_w^* \right). \quad (4.29)$$



Vemos cómo aparece un término de masa efectiva  $m_{loc}^2 = m^2 + \frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2}$ , que depende de la posición espacio-temporal. Dependiendo del tipo de teoría que se considere (bosonica, tipo II supersimétrica o heterótica), esta masa efectiva será distinta.

O no?

La contribución dominante de la acción vendrá dada por  $w = \pm 1$ , por lo que definimos  $T = T_1$ . Integrando por partes la acción

Demostrar

$$S = \int d^{d-1}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} T^* \left[ -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right] T, \quad (4.30)$$

donde  $\nabla^2 = G^{ij} \nabla_i \partial_j$ . Para calcular la integral de camino asociada a esta acción tenemos que buscar los valores propios del operador

$$\hat{O} = -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2. \quad (4.31)$$

Definiendo el producto escalar

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G} \psi_1(x)^* \psi_2(x), \quad (4.32)$$

el operador  $\hat{O}$  es hermítico y por tanto posee un conjunto ortonormal de funciones propias  $\psi_n$  con valores propios reales,  $\lambda_n$ .

La integral de camino da como resultado

$$Z = \int \mathcal{D}T e^{-S} = \pi_n \frac{1}{\lambda_n} = \det(\hat{O})^{-1}. \quad (4.33)$$

La energía libre de un gas de cuerdas es

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{\beta} \text{Tr} \ln \hat{O}. \quad (4.34)$$

Aplicando la fórmula de Schwinger del logaritmo,

$$\ln a = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-aT} - e^{-T}), \quad (4.35)$$

y despreciando el término  $e^{-T}$ , la energía libre es

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{T\hat{O}}. \quad (4.36)$$

Para poder interpretar la energía libre en términos de una partícula moviéndose en un espacio sin tiempo, tenemos que aislar la componente  $G_{00}$  de la métrica, que aparece al tomar la traza. Haciendo el cambio de base

$$|\phi_n\rangle = G_{00}^{1/4} |\psi_n\rangle. \quad (4.37)$$

El producto escalar asociado es

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G_{ij}} \phi_1(x)^* \phi_2(x). \quad (4.38)$$

Tras el cambio de base

$$F = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{T\hat{D}}. \quad (4.39)$$

$$\hat{D} = -\nabla^2 + m_{loc}^2 - \frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.40)$$

Los últimos dos términos corresponden con un potencial efectivo

$$K(x) = \frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.41)$$

$$F = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{S^1} \mathcal{D}x \sqrt{G_{ij}} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^T dt \left( \frac{1}{4} G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + m_{loc}^2 + K(x) \right)}. \quad (4.42)$$

Turbio

### 4.3. Cuerdas cerca de agujeros negros

Al aplicar los cálculos anteriores a un espacio de Rindler, hemos de tener en cuenta si la correcciones a orden superior en  $\alpha'$  modifican la divergencia de la energía libre.

$$F = -\frac{1}{\beta} \int \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{T \left( -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right)}. \quad (4.43)$$

Tomemos como ejemplo la teoría supersimétrica de tipo II.

El laplaciano en coordenadas de Rindler es

$$\nabla^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho. \quad (4.44)$$

La masa efectiva es

$$m_{loc}^2 = -\frac{2}{\alpha'} + \frac{R^2 G_{00}}{\alpha'^2}. \quad (4.45)$$

Para calcular la traza buscamos los valores propios del operador en el exponente. Las funciones propias regulares son del tipo

$$\psi_n(\rho) \propto e^{-\frac{\beta \rho^2}{4\pi\alpha'^{3/2}}} L_n \left( \frac{\beta \rho^2}{2\pi\alpha'^{3/2}} \right), \quad (4.46)$$

con valores propios

$$\lambda_n = \frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'} + 2\beta n}{\pi\alpha'^{3/2}}. \quad (4.47)$$

La contribución dominante a la energía libre viene dada por  $\lambda_0$ . La traza depende las dimensiones adicionales al espacio de Rindler. En una teoría supersimétrica, tenemos ocho dimensiones cuya variedad tenemos que especificar. Suponiendo dimensiones planas, la energía libre es

$$F = -\frac{V_T}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \left( \frac{1}{4\pi T} \right)^4 e^{\frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'}}{\pi\alpha'^{3/2}} T}. \quad (4.48)$$

En el límite superior de  $T$ , la energía libre diverge si

$$\beta \leq 2\pi\sqrt{\alpha'} = \beta_R. \quad (4.49)$$

Concluimos que la temperatura de Hagedorn en un espacio de Rindler coincide con la temperatura de Hawking. Hemos supuesto cuerdas de tipo II y que las dimensiones adicionales son planas. De haber escogido otras condiciones, la temperatura de Hagedorn recibiría nuevas correcciones, como veremos más adelante.

Identificando las funciones propias como funciones de onda de una cuerda, el estado fundamental

$$\psi_0(\rho) \propto e^{-\frac{\beta\rho^2}{4\pi\alpha'^{3/2}}} \quad (4.50)$$

representa una cuerda localizada a la distancia  $l_s$

#### 4.4. Entropía de agujeros negros



## Capítulo 5

## Conclusión



# Bibliografía

- [1] Barbado, Luis C.: *Percepción de las radiaciones Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*. Tesis de Doctorado, Granada U., 2014. <https://inspirehep.net/record/1338344/files/arXiv:1501.02636.pdf>.