

# La entropía de los agujeros negros y el problema de Hagedorn

John Liu Anta  
Tutor: Miguel Ángel Ramos Osorio  
Universidad de Oviedo

6 de julio de 2016



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción a la teoría de cuerdas</b>	<b>3</b>
1.1.	La cuerda relativista . . . . .	4
1.2.	Cuantización . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Termodinámica de cuerdas</b>	<b>15</b>
2.1.	Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada . .	15
2.2.	Modelo del random walk . . . . .	17
2.3.	Coalescencia de cuerdas . . . . .	18
2.4.	Termodinámica de cuerdas en espacio plano . . . . .	20
<b>3</b>	<b>QFT en sistemas acelerados y espacio curvo</b>	<b>25</b>
3.1.	Efecto Unruh . . . . .	25
3.2.	Radiación de Hawking . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Cuerdas en espacios curvos</b>	<b>37</b>
4.1.	Integral de camino en la worldsheet . . . . .	37
4.2.	Campo efectivo . . . . .	41
4.3.	Cuerdas cerca de agujeros negros . . . . .	44
4.4.	Entropía de agujeros negros . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusión</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Resumen

Este trabajo tiene como objetivo entender cómo la temperatura de Hagedorn, característica de todas las teorías de cuerdas, se ve afectada por la presencia de agujeros negros. Se determinará, que bajo una serie de hipótesis, la temperatura de Hagedorn coincide con la temperatura de Hawking de un agujero negro. Además, dará una justificación de la entropía de los agujeros negros en términos de cuerdas.

La base de este trabajo es la tesis [1], en la cual se extienden los cálculos de la temperatura de Hagedorn a espacios curvos.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales de teoría de cuerdas, siguiendo [2] y [1]. En el capítulo 2, se analiza la termodinámica de cuerdas en espacio de Minkowski, deduciendo la temperatura de Hagedorn. El capítulo 3 trata dos consecuencias de considerar una teoría cuántica de campos en presencia de un horizonte de sucesos: el efecto Unruh y el efecto Hawking, siguiendo la tesis [3] y [4]. El estudio de termodinámica de cuerdas en espacios curvos se realiza en el capítulo 4. A partir de la energía libre, se determina que la temperatura de Hagedorn en las proximidades de un agujero negro coincide con la temperatura de Hawking. Este resultado parece indicar una explicación de la entropía de agujeros negros. Sigue habiendo muchos aspectos abiertos a la investigación, como se comenta en el capítulo 5.



# Capítulo 1

## Introducción a la teoría de cuerdas

En primer lugar, veremos como describir una cuerda clásicamente en relatividad especial. Tras esto, cuantizaremos la cuerda en la gauge del cono de luz, obteniendo una descripción de la cuerda bosónica. Como procedimiento alternativo, introduciremos la integral de camino. Por último, comentaremos la dualidad T, que aparece al haber dimensiones compactas.

En este trabajo, seguiremos los siguientes convenios:

- La componente temporal de la métrica de Minkowski tiene signo menos y las componentes espaciales signo más.
- El número de dimensiones espacio-temporales es  $d$  y el número de dimensiones espaciales no compactas  $D$ .
- Los índices latinos denotan las componentes espaciales de un tensor y toman valores de 1 a  $d - 1$ , mientras que los índices griegos incluyen también la componente temporal y toman valores de 0 a  $d - 1$ .
- Si hay índices repetidos arriba y abajo en una expresión tensorial, se aplica el convenio de la suma de Einstein.
- El determinante de un tensor con componentes  $G_{\mu\nu}$ , como puede ser la métrica, se denota por  $G$ .
- Emplearemos unidades en las cuales  $\hbar = 1$  y  $c = 1$ .

### 1.1. La cuerda relativista

La teoría de cuerdas parte de considerar que las entidades fundamentales son cuerdas en vez de partículas.

La trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  de una partícula satisface que su acción  $S$  es un extremal. Informalmente, esto significa que la variación de la acción a primer orden es nula bajo variaciones pequeñas de la trayectoria, supuestas fijas las posiciones iniciales y finales. La acción de una partícula libre relativista es

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}, \quad (1.1)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ .

Para que en la acción aparezca el tiempo y la posición en igualdad de condiciones, parametrizamos el tiempo y la posición por el tiempo propio  $\tau$ . El tiempo propio es el tiempo que mediría un reloj que se moviese con la partícula. Con esta transformación, la acción es

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}} = -m \int d\tau, \quad (1.2)$$

donde  $x^\mu(\tau) = (t(\tau), \mathbf{x}(\tau))$  es el cuadrivector posición y  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica de Minkowski.

Generalizaremos la acción de una partícula libre a una cuerda libre en  $d$  dimensiones espacio-temporales. Una cuerda está parametrizada por una variable temporal  $\tau$  y una variable espacial  $\sigma$ , adimensional. De forma más compacta,  $(\sigma^1, \sigma^2) = (\tau, \sigma)$ . La trayectoria de la cuerda en el espacio-tiempo genera una superficie llamada *worldsheet*. Las coordenadas en la worldsheet  $(\tau, \sigma)$  determinan un punto del espacio-tiempo  $X^\mu$ , también llamado espacio *target* para evitar confusión. En este trabajo, consideraremos solo cuerdas cerradas. Si la cuerda tiene periodicidad  $2\pi$ ,  $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ .

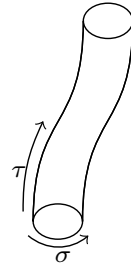


Figura 1.1: Trayectoria de una cuerda cerrada.



### Acción de Nambu-Goto

La acción de una partícula es proporcional a la longitud de su línea de universo. De forma análoga, la acción de una cuerda debería ser proporcional al área de la worldsheet. Para poder medir el área, es necesario definir una métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$  en la worldsheet (en este caso,  $\alpha$  y  $\beta$  toman solo los valores 1 y 2). La forma natural de definir una métrica en una superficie, a partir de la métrica del espacio que contiene a la superficie, es mediante el concepto de *pull-back*. En este caso, la métrica en la worldsheet es el pull-back de la métrica de Minkowski

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

La propiedad esencial de la métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$  es que la distancia entre dos puntos próximos coincide con la calculada con la métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , ya que

$$g_{\mu\nu}(X(\sigma)) dX^\mu(\sigma) dX^\nu(\sigma) = \gamma_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta. \quad (1.4)$$

El área de la worldsheet es  $\int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}$ , por lo que la acción, llamada de Nambu-Goto, es

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}. \quad (1.5)$$

El parámetro  $T$  se corresponde con la tensión de la cuerda y se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (1.6)$$

donde  $\alpha'$  es la pendiente de Regge. Como  $\alpha'$  tiene dimensiones de longitud al cuadrado, define una longitud característica de la cuerda,  $l_s = \sqrt{\alpha'}$ .

### Acción de Polyakov

A la hora de cuantizar la teoría, la raíz cuadrada es problemática, por lo que se introduce un campo tensorial  $h$  definido sobre la worldsheet en la llamada acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.7)$$

Este campo  $h$  se comporta como una métrica en dos dimensiones y queda fijado por las ecuaciones de movimiento

$$h_{\alpha\beta} = 2f(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.8)$$

donde  $f(\sigma)$  es una función cualquiera. La libertad de poder escoger  $f(\sigma)$  es una simetría gauge.

Una simetría es una transformación que deja invariante la acción. Si la transformación depende de las coordenadas, se dice que es una simetría gauge. Por ejemplo, el campo eléctrico se obtiene a partir de el potencial escalar  $\phi$  y el potencial vector  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$ . Si hacemos las transformaciones  $\phi \rightarrow \phi + \partial_t\xi(t, \mathbf{x})$  y  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\xi(t, \mathbf{x})$ , el campo eléctrico no cambia. Visto de otro modo, la simetría gauge expresa una redundancia en la descripción del sistema, puesto que varias configuraciones distintas corresponden al mismo estado físico. La acción de Polyakov presenta dos simetrías gauge en la worldsheet que nos interesan:

- La simetría bajo reparametrizaciones, dada por un cambio de coordenadas de la worldsheet  $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha$ .
- La simetría de Weyl, que se obtiene al transformar la métrica de la worldsheet de acuerdo a

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma)h_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (1.9)$$

Intuitivamente, una transformación Weyl corresponde a un cambio local de escala que mantiene invariante la medida de ángulos.

## 1.2. Cuantización

Debido a la simetría gauge de la teoría, la cuantización no es directa. Hay grados de libertad que no son físicos y en algún momento hemos de deshacernos de ellos. Para obtener directamente una teoría unitaria, cuantizamos solo los grados de libertad físicos, buscando primero las soluciones clásicas. Como contrapartida, perdemos la invariancia de Lorentz explícita.

Definimos las coordenadas en el cono de luz

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (1.10)$$

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1}). \quad (1.11)$$

Gracias a la simetría gauge, fijamos la métrica en la worldsheet  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , de forma que la acción de Polyakov es

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu, \quad (1.12)$$

que da lugar a la ecuaciones de movimiento de ondas libres

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (1.13)$$

La solución general de la ecuación de movimiento se descompone en una onda moviéndose hacia la izquierda  $X_L^\mu$  y otra hacia la derecha  $X_R^\mu$ ,

$$X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-). \quad (1.14)$$

Teniendo en cuenta la periodicidad en  $\sigma$ , la expansión de Fourier conduce a

$$\begin{aligned} X_L^\mu &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^\mu &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde  $x^\mu$  y  $p^\mu$  se corresponden con la posición y el momento del centro de masas de la cuerda, respectivamente. Los coeficientes del desarrollo de Fourier se denotan por  $\bar{\alpha}_n^\mu$  y  $\alpha_n^\mu$ . Los factores numéricos, las constante  $\alpha'$  y  $1/n$  se introducen por comodidad.

En términos de  $X^+$ , tendríamos

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-). \quad (1.16)$$

Debido a la invariancia bajo reparametrizaciones, escogemos unas coordenadas de forma que

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+, \quad (1.17)$$

y

$$X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^-. \quad (1.18)$$

Por tanto,

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau. \quad (1.19)$$

La constante  $x^+$  puede eliminarse mediante una traslación en  $\tau$ .

Con esta elección gauge, la solución  $X^-$  que determinada casi por completo. La ecuación de movimiento para la métrica  $h$  se obtiene imponiendo que la variación de la acción se anule para toda variación de la métrica  $\delta h$ ,

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \delta h^{\alpha\beta} \left( \sqrt{-h} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu \right). \quad (1.20)$$

Como habíamos elegido  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$ , la ecuación de movimiento es

$$\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0. \quad (1.21)$$

En las coordenadas del cono de luz, esto se traduce en

$$\partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0. \quad (1.22)$$

Haciendo la descomposición de la solución  $X^-$ ,

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-), \quad (1.23)$$

la ecuación 1.22 conduce a

$$-2\partial_+ X^+ \partial_+ X^- + \sum_{i=1}^{d-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i = 0. \quad (1.24)$$

Sustituyendo el la expresión de  $X^+$ ,

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \quad (1.25)$$

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \quad (1.26)$$

En el desarrollo de Fourier

$$\begin{aligned} X_L^-(\sigma^+) &= \frac{1}{2} x^- + \frac{1}{2} \alpha' p^- \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \\ X_R^-(\sigma^-) &= \frac{1}{2} x^- + \frac{1}{2} \alpha' p^- \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

las constantes  $p^-$ ,  $\bar{\alpha}_n^-$  y  $\alpha_n^-$  quedan determinadas por las ecuaciones 1.25 y 1.26.

El momento  $p^-$  se puede expresar a través de  $\alpha_n^i$  y de  $\bar{\alpha}_n^i$  como

$$p^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right) = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^i \alpha_{-n}^i \right). \quad (1.28)$$

La masa de la cuerda es por tanto

$$m^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{d-2} p^i p^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_{-n}^i \bar{\alpha}_n^i. \quad (1.29)$$

Hemos obtenido que la solución clásica queda determinada por los  $2(d-2)$  modos de oscilación transversos  $\alpha_n^i$  y  $\bar{\alpha}_n^i$  y las constantes  $x^i$ ,  $p^i$ ,  $p^+$  y  $x^-$ , donde  $i = 1, \dots, d-2$ . Esto quiere decir que  $X^0$  y  $X^{d-1}$  no son grados de libertad independientes, solo  $X^i$  con  $i = 1, \dots, d-2$ . La cuantización consiste en promover los auténticos grados de libertad a operadores (denotados por un acento circunflejo) que satisfacen una reglas de conmutación.<sup>1</sup> Estas reglas son

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= i\delta^{ij}, & [\hat{x}^-, \hat{p}^+] &= -i, \\ [\hat{\alpha}_n^i, \hat{\alpha}_m^j] &= [\hat{\bar{\alpha}}_n^i, \hat{\bar{\alpha}}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Los estados físicos sobre los que actúan los operadores se construyen a partir de un estado de vacío  $|0; p\rangle$ , que describe una cuerda de momento  $p$  en el estado fundamental. El vacío verifica

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle, \quad \hat{\alpha}_n^i |0; p\rangle = \hat{\bar{\alpha}}_n^i |0; p\rangle = 0 \quad \text{con } n > 0. \quad (1.31)$$

Las distintas excitaciones de la cuerda se obtienen aplicando  $\alpha_{-n}^i$  y  $\bar{\alpha}_{-n}^i$  con  $n > 0$  sobre el vacío. Cada excitación de la cuerda corresponde a una partícula, como veremos más adelante.

La fórmula de masas es análoga al caso clásico 1.29 salvo una diferencia importante. Clásicamente el producto de  $\alpha_{-n}^i$  y  $\alpha_n^i$  conmuta, pero no cuánticamente, por lo que hay una ambigüedad en el orden a asignar a los operadores  $\hat{\alpha}_{-n}^i$  y  $\hat{\alpha}_n^i$ . La ambigüedad introduce una constante  $c$  desconocida en el operador de la masa al cuadrado,

$$\hat{m}^2 = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i - c \right) = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\bar{\alpha}}_{-n}^i \hat{\bar{\alpha}}_n^i - c \right). \quad (1.32)$$

Por conveniencia, definimos los operadores número

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i, \quad \hat{\bar{N}} = \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\bar{\alpha}}_{-n}^i \hat{\bar{\alpha}}_n^i, \quad (1.33)$$

---

<sup>1</sup>En realidad, debido a la simetría gauge, la cuantización se haría a partir de los corchetes de Poisson de la teoría clásica. No tendremos en cuenta esta sutileza porque el resultado es el mismo.

por lo que

$$\hat{m}^2 = \frac{4}{\alpha'}(\hat{N} - c) = \frac{4}{\alpha'}(\hat{\tilde{N}} - c). \quad (1.34)$$

La condición  $\hat{N} = \hat{\tilde{N}}$  se conoce como *level-matching*.

La constante  $c$  cumple  $c = \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n$ , donde aparece el problema de una suma divergente. Esta divergencia corresponde con la energía de vacío de infinitos osciladores armónicos. Tratando la suma divergente de forma adecuada, por ejemplo mediante regularización zeta, se llega a

$$c = -\frac{d-2}{24}. \quad (1.35)$$

### Espectro de una cuerda

En el estado de vacío,  $\hat{N} |0; p\rangle = \hat{\tilde{N}} |0; p\rangle = 0$ , por lo que la masa es

$$m^2 = -\frac{1}{\alpha'} \frac{d-2}{6}. \quad (1.36)$$

Si  $d > 2$  la masa al cuadrado de la cuerda es negativa (masa imaginaria) y la partícula correspondiente se denomina taquión. Los taquiones aparecen también en teoría cuántica de campos al estudiar un campo  $\phi$  con un potencial  $V(\phi)$ . La masa de la partícula asociada al campo es

$$m^2 = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2}. \quad (1.37)$$

Por tanto, una masa al cuadrado negativa indica que estamos haciendo una expansión en torno a un máximo. Un ejemplo es el campo de Higgs cuando el valor del campo es cero. A pesar de los problemas que introduce un taquión, no lo tendremos más en cuenta. De todas formas, al considerar cuerdas supersimétricas para describir fermiones, el taquión desaparece.

El primer estado excitado se obtiene como

$$\hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle, \quad (1.38)$$

con masa

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(1 - \frac{d-2}{24}\right). \quad (1.39)$$

Teniendo en cuenta los valores posibles de  $i$  y  $j$ , hay  $(d-2)^2$  estados excitados. Para que estos estados puedan describirse mediante la clasificación de Wigner de las representaciones del grupo de Poincaré, los estados han de ser

una representación del grupo  $SO(d-2)$ . Esto significa que las partículas tienen masa nula, de lo contrario se rompería la simetría de Lorentz. Como  $m^2 = 0$ , obtenemos que la dimensión del espacio-tiempo ha de ser

$$d = 26. \quad (1.40)$$

Además, la representación de estos estados se descompone en una parte simétrica, una antisimétrica y una traza. Los campos asociados son el campo del gravitón  $G_{\mu\nu}$ , el campo Kalb-Ramond  $B_{\mu\nu}$  y el dilatón  $\Phi$ , respectivamente.

Por tanto, la teoría bosónica predice métrica de la relatividad general  $G_{\mu\nu}$  de forma natural, además de otro campo tensorial y un campo escalar.

Las siguientes excitaciones empiezan a tener masas del orden de la masa de Planck

$$M_p \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \approx 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \quad (1.41)$$

y están muy lejos de ser observadas. Sin embargo, el resto del trabajo se centrará en cuerdas a esta escala de energía.

## Cuerdas supersimétricas

La cuerdas supersimétricas describen tanto bosones como fermiones. La teoría es supersimétrica porque a cada bosón le corresponde un fermión y viceversa.

Existen dos formas de incorporar fermiones: en las cuerdas de tipo II, los fermiones se mueven en la worldsheet hacia la izquierda y a la derecha, mientras que en las cuerdas heteróticas, solo se mueven hacia la izquierda. En ambos casos, la dimensión del espacio-tiempo es  $d = 10$ .

## La integral de camino

Una forma alternativa de cuantizar una teoría clásica consiste en la integral de camino, introducida por Feynman. Sin entrar en detalles, la amplitud de probabilidad de que una partícula que está localizada en  $(x_0, t_0)$ , se detecte en  $(x', t')$ , se calcula teniendo en cuenta todas las trayectorias que podría tomar la partícula entre estos dos puntos. La amplitud de probabilidad asociada a cada trayectoria  $x$  depende de la acción de esa trayectoria como  $e^{i/\hbar S[x]}$  y la amplitud total es simplemente la suma de las amplitudes de probabilidad de todas las

trayectorias posibles. Las amplitudes de probabilidad difieren solo en la fase y no en la amplitud, por lo que habrá interferencia entre las distintas trayectorias. En el límite clásico, la única contribución viene dada por la trayectoria clásica.

Formalmente, la amplitud de probabilidad se expresa mediante el propagador

$$K(x', t'; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}. \quad (1.42)$$

La integral no es integral el sentido habitual (Riemann o Lebesgue) y su definición matemática es muy elaborada, pero basta tomarla en el sentido de suma sobre trayectorias. Para evitar tratar con un integrando complejo, reemplazaremos el tiempo  $t$  en la acción por un tiempo imaginario de modo que

$$K(x', t'; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar}. \quad (1.43)$$

Este procedimiento se conoce como rotación de Wick y su justificación matemática también presenta complicaciones, que no discutiremos. La integral de camino se suele denotar por  $Z$ , pues en tiempo imaginario aparece una correspondencia con la función de partición termodinámica.

La integral de camino en teoría de cuerdas se define de manera análoga, pero integramos sobre todas las configuraciones de la worldsheet y sobre todas la métricas de la worldsheet,

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}h e^{-S_p + \lambda \chi}. \quad (1.44)$$

En el exponente aparece un factor adicional  $\lambda \chi$  que determina la contribuciones de las distintas topologías de la worldsheet. La constante  $\lambda$  determina cómo interaccionan las cuerdas entre sí y  $\chi$  es la característica de Euler de la worldsheet. La característica de Euler de una superficie de género  $g$  (número de agujeros) es

$$\chi = 2(1 - g). \quad (1.45)$$

Por ejemplo, una esfera tiene  $g = 0$  y un toro  $g = 1$ .

Para incorporar interacciones de cuerdas con campos de fondo, introducimos términos adicionales a la acción. Por ejemplo, el model sigma no lineal describe cuerdas propagándose en campos  $G_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  y  $\Phi$ .

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} [(h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + i\epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \alpha' R\Phi]. \quad (1.46)$$



## Dualidad T

Una propiedad muy importante de las teorías de cuerdas es la dualidad T, que describe la equivalencia entre dos teorías distintas. Consideremos cuerdas bosónicas con una dimensión espacial formando un círculo de radio  $R$ , es decir, con una dimensión compactificada. El momento  $p$  en la dimensión compacta no puede tomar cualquier valor, sino que está cuantificado,

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.47)$$

Llamaremos a  $n$  momento discreto. Pero además las cuerdas pueden enrollarse sobre la dimensión compacta  $w$  veces, dando lugar a la contribución al momento total  $wR/\alpha'$ . Entonces, la fórmula de masas con una dimensión compacta es

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2). \quad (1.48)$$

Si hacemos la transformación  $R \leftrightarrow \alpha'/R$  y  $n \leftrightarrow w$ , la masa de la cuerda no varía. Este es un ejemplo de la dualidad T, cuerdas moviéndose en un círculo de radio  $R$  equivalen a cuerdas moviéndose en un círculo de radio  $\alpha'/R$ . Por tanto, las cuerdas no distinguen entre círculos pequeños y grandes.

En presencia de campos adicionales, las reglas de transformación son

$$\begin{aligned} G_{00} &\rightarrow \frac{1}{G_{00}}, & G_{0i} &\rightarrow \frac{B_{0i}}{G_{00}}, & G_{ij} &\rightarrow G_{ij} - \frac{G_{0i}G_{0j}}{G_{00}} + \frac{B_{0i}B_{0j}}{G_{00}}, \\ B_{0i} &\rightarrow \frac{G_{0i}}{G_{00}}, & B_{ij} &\rightarrow B_{ij} - \frac{G_{0i}B_{0j}}{G_{00}} + \frac{B_{0i}G_{0j}}{G_{00}}, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{00}, & n &\leftrightarrow w \end{aligned} \quad (1.49)$$

y se conocen como reglas de Buscher.



## Capítulo 2

# Termodinámica de cuerdas

En este capítulo estudiaremos la termodinámica de cuerdas a altas energías. Deduiremos que la densidad de estados de una cuerda muy energética tiene un comportamiento exponencial, lo que conduce a la divergencia de la función de partición a la temperatura de Hagedorn. Para entender mejor el comportamiento cerca de la temperatura de Hagedorn, razonaremos que las cuerdas tienden a formar una sola cuerda muy larga. La energía libre de un gas de cuerdas relacionarlo con la integral de camino una cuerda en un tiempo compacto. Esta interpretación será la que nos permita hacer una generalización a espacios curvos.

### 2.1. Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada

Queremos calcular cuántos estados distintos puede tomar una cuerda para una energía dada. La fórmula de masas 1.34 para una cuerda bosónica cerrada en  $d = 26$  es

$$\alpha' m^2 = -4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.1)$$

La masa de un estado depende de los valores que tomen los números de oscilador  $N$  y  $\bar{N}$ , que además han de cumplir el level-matching  $N = \bar{N}$ . Las distintas excitaciones de una cuerda se obtienen aplicando los operadores de creación  $\alpha_{-n}^i$  y  $\bar{\alpha}_{-n}^i$  sucesivamente sobre el estado fundamental (en este capítulo el acento circunflejo de los operadores queda implícito). Como para un mismo

número de oscilador, la cuerda puede haber sido excitada en distintas direcciones  $i$  y  $j$  aplicando distintas combinaciones de operadores de creación, hay degeneración energética.

Tomemos como ejemplo el primer estado excitado,  $N = 1$ , que se forma mediante  $\bar{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; p\rangle$ . Como  $i$  y  $j$  toman  $d - 2$  valores independientes (al trabajar en la gauge del cono de luz desaparecen dos grados de libertad) hay  $(d - 2)^2 = 576$  estados posibles.

Para  $N = 2$ , los estados posibles son

$$\bar{\alpha}_{-2}^i \alpha_{-2}^j |p; 0\rangle, \quad \bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l |p; 0\rangle, \quad \bar{\alpha}_{-2}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p; 0\rangle \text{ y } \bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-2}^k |p; 0\rangle.$$

En total, hay  $(d - 2)^2 + (d - 2)^2(d - 1) + \frac{1}{4}(d - 2)^2(d - 1)^2 = 104976$  estados, muchos más que para  $N = 1$ . Para simplificar los cálculos, podemos obtener el número de estados asociados  $\alpha_n^i$ , sin preocuparnos de  $\bar{\alpha}_n^i$  y luego tomar el cuadrado.

El número de estados para un valor de  $N$  (sin tener en cuenta las combinaciones de  $\bar{\alpha}_n^i$ ) se denomina la particiones de  $N$  y se denota por  $p(N)$ . El cálculo preciso de  $p(N)$  es muy complicado, pero podemos obtener una aproximación para valores grandes de  $N$  mediante la fórmula de Hardy-Ramanujan

$$p(N) \propto \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N(d-2)}{6}}\right). \quad (2.2)$$

Como se intuía, el crecimiento de el número de estados es muy rápido.

Si  $N$  es muy grande, se puede aproximar la masa de la cuerda por un espectro continuo y entonces se define la densidad de estados  $\rho(M)$  de forma que  $\int_0^M dm \rho(m)$  proporcione el número total de estados con masa  $M$ .

En el caso de cuerdas bosónicas cerradas, la densidad de estados en función de la masa es

$$\rho(M) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N(d-2)}{6}}\right). \quad (2.3)$$

Ahora buscamos la densidad de estados en función de la energía, generalizando el problema a  $d - D - 1$  dimensiones compactas de radio  $R$ . La energía de la cuerda es

$$\alpha E^2 = \alpha' \mathbf{p}^2 + \alpha' \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'} - 4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.4)$$

Puesto que la densidad de estados en función de  $N$  crece exponencialmente, mientras que la densidad de estados en función de  $|\mathbf{p}|$  crece como una potencia,

a altas energías  $|\mathbf{p}| \ll E$ . También podemos despreciar la contribución de las dimensiones compactas a la energía. Bajo estas aproximaciones, la densidad de estados es

$$\omega(E) \approx V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}, \quad (2.5)$$

donde

$$\beta_H = 2\pi\sqrt{\alpha'} \sqrt{\frac{d-2}{6}}. \quad (2.6)$$

La temperatura  $T_H = 1/(k_B \beta_H)$  se denomina temperatura de Hagedorn.

Si la cuerda está en contacto con una fuente de calor a la temperatura inversa  $\beta$ , la función de partición asociada es la transformada de Laplace de la densidad de estados,

$$z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} dE \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{-\beta E}, \quad (2.7)$$

donde se integra desde  $E_0$  porque la expresión de la densidad de estados solo es válida a altas energías. La integral diverge si  $\beta < \beta_H$ , por lo que  $T_H$  aparece como una temperatura límite a partir de la cual la función de partición deja de tener sentido.

La contribución no analítica dominante de la función de partición a alta temperatura se aproxima por

$$\begin{aligned} z &\propto (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par,} \\ z &\propto (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.2. Modelo del random walk

Una forma sencilla pero heurística de obtener la densidad de estados de una cuerda es mediante el modelo del *random walk*. Consideremos de momento una cuerda abierta, cuya energía viene dada por su densidad lineal  $\sigma$  multiplicada por su longitud  $L$ . Si la cuerda está dividida en  $N$  segmentos de longitud  $l_s$  con masa asociada  $m_s$ ,

$$E = \sigma L = \frac{m_s}{l_s} L. \quad (2.9)$$

En unidades naturales, la masa tiene unidades inversas a la longitud, por lo que identificamos  $m_s \sim l_s^{-1}$ . Entonces,

$$E \sim \frac{L}{l_s^2}. \quad (2.10)$$

Cada segmento podrá tener una orientación arbitraria. Para simplificar los cálculos, supongamos que solo toman direcciones ortogonales entre sí. Entonces el número de orientaciones posibles de cada segmento es  $2n$ , donde  $n$  es el número de dimensiones espaciales accesibles. El número de segmentos es  $L/l_s$ . Por tanto, el número de configuraciones (microestados) de una cuerda a energía fija es

$$\omega(E) = (2n)^{(L/l_s)} \sim e^{l_s E \ln(2n)}. \quad (2.11)$$

Para una cuerda cerrada, habría que dividir el número de microestados entre el volumen que ocupa, multiplicar por el volumen accesible y dividir entre su energía. De esta forma, recuperamos la densidad de estados vista en la sección anterior,

$$\omega(E) \sim V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{1+D/2}}. \quad (2.12)$$

### 2.3. Coalescencia de cuerdas

Tras haber estudiado una sola cuerda, pasamos a considerar un gas de cuerdas. Las cuerdas pueden interaccionar entre sí, uniéndose o dividiéndose, por lo que no tiene sentido fijar el número de cuerdas. Como no cuesta ninguna energía crear una cuerda, el potencial químico es nulo,  $\mu = 0$ . Veremos dos formas alternativas de concluir que al aumentar la temperatura, las cuerdas tienden a unirse en una sola cuerda: comparando las densidades de estados y las funciones de partición para una sola cuerda y para un gas de cuerdas,

#### Densidad de estados

La función de partición de una cuerda se relaciona con la densidad de estados de una cuerda  $\omega(E)$ , mediante una transformada de Laplace

$$z(\beta) = \int_0^\infty \omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.13)$$

Del mismo modo, la función de partición de un sistema de cuerdas se obtiene a partir de la densidad de estados de un gas de cuerdas  $\Omega(E)$ , como

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.14)$$

Aplicando la aproximación de Maxwell-Boltzmann  $Z = e^z$  y haciendo un desarrollo de Taylor,

$$\begin{aligned} Z = e^z &= 1 + \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) e^{-\beta E_1} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(E_1) \omega(E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)} \dots \\ &= \int_0^\infty dE \delta(E) + \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) \delta(E - E_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 \omega(E_1) \omega(E_2) \delta(E - E_1 - E_2) \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde hemos aplicado la propiedad de la delta de Dirac  $\int_0^\infty dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$ . Comparando las ecuaciones 2.14 y 2.15,

$$\Omega(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n dE_i \omega(E_i) \delta\left(E - \sum_{j=1}^n E_j\right). \quad (2.16)$$

Procedemos a sustituir la densidad de estados para una sola cuerda,

$$\omega(E) \sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.17)$$

Puesto que la densidad de estados 2.17 solo es válida para altas energías, acotamos inferiormente las integrales por  $E_0$ . Suponiendo además que para la variable de integración  $E_1$  se cumple  $E = E_1$  e ignorando la contribución del vacío ( $n = 0$ ), pues solo es relevante a  $E = 0$ , la densidad de estados es

$$\begin{aligned} \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{2}{DE_0}\right)^{n-1}, \quad D > 0, \\ \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\ln \frac{E}{E_0}\right)^{n-1}, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La suma da lugar a una exponencial,

$$\begin{aligned} \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{\frac{2}{DE_0}}, \quad D > 0 \\ \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E}, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Comparando la densidad de estados de un gas de cuerdas con la densidad de estados de una sola cuerda, vemos que ambas coinciden si  $D > 0$ . Esto quiere decir que a altas energías, predomina una sola cuerda muy larga.

## Función de partición

Otra forma de estudiar el comportamiento termodinámico es examinando la falta de analiticidad de la función de partición. La función de partición de una

sola cuerda es (2.8),

$$\begin{aligned} z &= (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par} \\ z &= (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aplicando la aproximación Maxwell-Boltzmann  $Z = e^z$ ,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= 1 - C(\beta - \beta_H)^{D/2} + \frac{C^2}{2}(\beta - \beta_H)^D - \frac{C^3}{6}(\beta - \beta_H)^{3D/2} + \dots, & \text{si } D \text{ impar} \\ Z(\beta) &= 1 - C(\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H) + \frac{C^2}{2}(\beta - \beta_H)^D \ln(\beta - \beta_H)^2 \\ &\quad - \frac{C^3}{6}(\beta - \beta_H)^{3D/2} \ln(\beta - \beta_H)^3 + \dots, & \text{si } D \neq 0 \text{ par,} \\ Z(\beta) &= \frac{1}{\beta - \beta_H}, & \text{si } D = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ignorando el término constante, la contribución principal a la no analiticidad de la función de partición coincide con la asociada a una sola cuerda, salvo si  $D = 0$ .

## 2.4. Termodinámica de cuerdas en espacio plano

En esta sección calcularemos la energía libre de un gas de cuerdas en el espacio de Minkowski, con el fin de generalizar la temperatura de Hagedorn a espacios curvos.

La función de partición bosónica para un solo grado de libertad con un espectro discreto es  $z = \prod_i 1/(1 - \exp(-\beta E_i))$ . La energía libre se obtiene a partir de la función de partición como  $F = -1/\beta \ln z = 1/\beta \sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i))$ . Si el espectro es continuo, con  $E = E(k)$ , reemplazamos el sumatorio por la integral  $V \int d^{d-1}k/(2\pi)^{d-1}$ . Por tanto,

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \ln(1 - \exp(-\beta E)). \quad (2.22)$$

Expandiendo el logaritmo por el desarrollo de Taylor  $\ln(1 - x) = -\sum_{r=1}^{\infty} x^r/r$ ,

$$F = -\frac{V}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp(-r\beta E). \quad (2.23)$$

Aplicando la identidad

$$\frac{1}{r} \exp(-\beta r E) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{E^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right), \quad (2.24)$$



y como  $E^2 = k^2 + m^2$ , se llega a

$$F = -\frac{V}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left(-\frac{k^2 s}{2}\right). \quad (2.25)$$

La integral en momentos tiene como resultado  $(2\pi s)^{\frac{d-1}{2}}$ , por lo que

$$F = -V \int_0^{\infty} \frac{ds}{s(2\pi s)^{d/2}} \sum_{r=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right). \quad (2.26)$$

En una teoría de cuerdas bosónica, para la cual  $d = 26$ , la energía libre se obtendría sumando las energías libres para todo el espectro posible, con la fórmula de masas

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2). \quad (2.27)$$

La energía libre sería

$$F = \sum_i \delta_{N_i \bar{N}_i} F(N_i, \bar{N}_i), \quad (2.28)$$

donde la suma recorre todos los estados posibles de la cuerda, incluyendo aquellos con  $N_i \neq \bar{N}_i$ . La delta de Kronecker impone la condición  $N_i = \bar{N}_i$ . Empleando la forma integral de la delta de Kronecker

$$\delta_{N\bar{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \exp(2\pi i \tau_1 (N - \bar{N})), \quad (2.29)$$

y haciendo el cambio de variable  $s = 2\pi\alpha'\tau_2$ ,

$$F = -V \int_0^{\infty} \frac{d\tau_2}{\tau_2 (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_i e^{-(N_i + \bar{N}_i - 2)2\pi\tau_2} e^{-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 e^{2\pi i \tau_1 (N_i - \bar{N}_i)}. \quad (2.30)$$

La prima indica que se ha omitido el término con  $r = 0$  del sumatorio, pues es la contribución de vacío, que no depende de la temperatura.

Definiendo  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  y  $q = e^{2\pi i \tau_1}$ , introducimos la  $\eta$  de Dedekind como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.31)$$

Sustituyendo, llegamos a

$$F = -V \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} |\eta(\tau)|^{-2d+4} \exp\left(-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right). \quad (2.32)$$

Para valores próximos a  $\tau_2 = 0$ , los términos con  $r = \pm 1$  proporcionan la divergencia dominante. El comportamiento de la exponencial en 2.32 es

$$\exp\left(\frac{16\pi^2\alpha' - \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right), \quad (2.33)$$

por lo que al integrar  $\tau_2$  desde cero, la energía libre diverge si  $\beta \leq \beta_H = 4\pi\sqrt{\alpha'}$ . Hay otra divergencia al integrar hasta infinito en  $\tau_2$ , pero esta se debe a la presencia del taquión en el estado fundamental, que desaparece al considerar cuerdas supersimétricas.

El mismo resultado se obtiene calculando la integral de camino para una worldsheet toroidal,

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\right), \quad (2.34)$$

considerando cuerdas que se enrollan  $r$  veces alrededor de una dimensión temporal de periodo  $\beta$  y aplicando  $F = -Z/\beta$ . La importancia de este resultado es que permite calcular la energía libre en espacio curvo.

### Formulación invariante modular

Se ha llegado a una expresión cuyo integrando no es invariante modular. Es decir, las transformaciones modulares  $\tau \rightarrow \tau + 1$  y  $\tau \rightarrow -1/\tau$  en el integrando modifican el resultado de la integral. Cualquier punto del plano complejo puede ser llevado al dominio fundamental,

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1, \text{Re } \tau \in [-1/2, 1/2]\} \quad (2.35)$$

mediante composición de transformaciones modulares.

Para conseguir la invariancia modular, se restringe el dominio de integración al dominio fundamental (figura 2.1) y se modifica el integrando, añadiendo el número cuántico  $w$  sobre el que se suma, de modo que para  $d = 26$  se tiene

$$F = -V \sum_{r,w=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \frac{1}{(4\pi^2\alpha'\tau_2)^{13}} |\eta(\tau)|^{-48} \exp\left(-\frac{|r^2 - w\tau|^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right). \quad (2.36)$$

Esta expresión de la energía libre se puede calcular como  $F = -Z/\beta$ , siendo  $Z$  la integral de camino del toro en un espacio donde la dimensión temporal

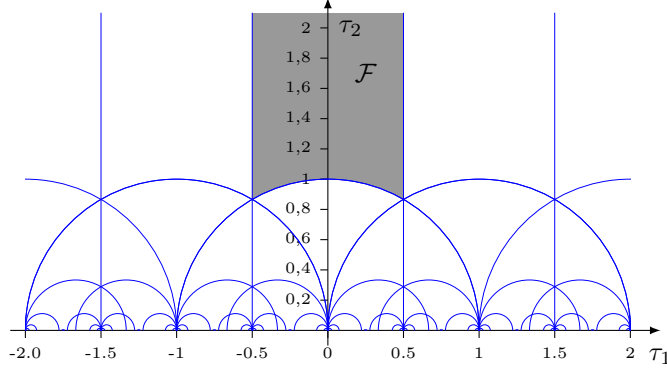


Figura 2.1: Todas las regiones encerradas por curvas azules son equivalentes al dominio fundamental (región sombreada).

forma un círculo de radio  $R = \beta/(2\pi)$  y con enrollamientos de las cuerdas e integrando solo sobre el dominio fundamental.

Una forma equivalente de expresar la integral es tomando la traza sobre todos los estados posibles,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \text{Tr} \left( q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right), \quad (2.37)$$

donde

$$\begin{aligned} L_0 &= -\alpha' \frac{m^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left( \frac{2\pi n}{\beta} + \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + N, \\ \bar{L}_0 &= -\alpha' \frac{m^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left( \frac{2\pi n}{\beta} - \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \bar{N}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Al haber excluido la región próxima a  $\tau_2 = 0$  en la integral, la divergencia de Hagedorn aparece para valores muy altos de  $\tau_2$ . La divergencia se manifiesta al tomar la traza sobre el estado con  $w = \pm 1$ ,  $n = 0$  y  $N = \bar{N} = 0$ . La masa de este estado es

$$\alpha' \frac{m^2}{4} = \frac{\beta^2}{16\pi^2\alpha'} - 1. \quad (2.39)$$

A la temperatura de Hagedorn, el estado tiene masa nula y a temperaturas superiores, masa imaginaria.

En resumen, si compactificamos el tiempo e identificamos el periodo temporal con el inverso de la temperatura, podemos calcular la energía libre mediante una integral de camino restringida al dominio fundamental. El estado que se enrolla una vez en el tiempo es el responsable de la divergencia de Hagedorn y a temperaturas por encima de la temperatura de Hagedorn se vuelve taquiónico.

Es importante notar que este es un estado efectivo, pues no aparece en el espectro de la cuerda en el espacio de Minkowski, sino que es consecuencia de compactificar el tiempo. Sin embargo, este enfoque es muy útil para poder hacer una generalización a espacios curvos.

## Capítulo 3

# QFT en sistemas acelerados y espacio curvo

El objetivo de este capítulo es encontrar que un agujero emite radiación que sigue el espectro de un cuerpo negro. La deducción se enmarca dentro de la teoría cuántica de campos (QFT) en espacios curvos. Pero antes es conveniente estudiar el efecto Unruh, según el cual un observador acelerado en espacio Minkowski percibiría radiación por el hecho de estar acelerado. Ambos fenómenos están estrechamente relacionados, pues requieren un horizonte de sucesos y emplean herramientas similares.

### 3.1. Efecto Unruh

Una propiedad sorprendente de las teorías cuánticas de campos es que el estado de vacío puede depender del observador. Concretamente, el efecto Unruh establece que el vacío para un observador inercial, visto por un observador con aceleración constante corresponde con un estado térmico a temperatura

$$T_U = \frac{a}{2\pi k_B}. \quad (3.1)$$

Esta temperatura es muy pequeña, necesitaríamos que la aceleración fuese  $a = 10^{21} \text{ m/s}^2$  para alcanzar  $T_U = 4 \text{ K}$ . Por lo que una comprobación experimental presenta importantes dificultades.

En la deducción del efecto Unruh estudiaremos un campo escalar sin masa  $\phi(t, z)$  en un espacio de Minkowski con una dimensión espacial  $t$  y una dimensión

espacial  $z$ .<sup>1</sup> La ecuación que describe el campo es la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

La solución general de esta ecuación de ondas toma la forma

$$\phi(x, t) = f(t - x) + g(t + x). \quad (3.3)$$

Las funciones  $f$  y  $g$  representan dos ondas que se mueven a la velocidad de la luz en sentidos opuestos. Hacemos el cambio de variable a coordenadas nulas

$$U = t - z, \quad V = t + z. \quad (3.4)$$

De este modo, la solución general se expresa como

$$\phi(U, V) = \phi_U(U) + \phi_V(V). \quad (3.5)$$

La onda  $\phi_U(U)$  se mueve hacia la derecha, mientras que  $\phi_V(V)$  se propaga hacia la izquierda. Nos interesa expandir la solución en términos de ondas armónicas

$$\phi_U^U(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \quad (3.6)$$

$$\phi_U^V(V) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}, \quad (3.7)$$

con  $\omega > 0$ . Puesto que la solución  $\phi_V$  está desacoplada de  $\phi_U$ , basta considerar  $\phi_U$  ya que el tratamiento de  $\phi_V$  sería análogo.

La expansión del campo en modos es

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^U \phi_\omega^U(U) + a_\omega^{U*} \phi_\omega^U(U)^*], \quad (3.8)$$

donde  $a_\omega^U$  y  $a_\omega^{U*}$  son los coeficientes del desarrollo.

## Cuantización

El proceso de cuantización canónica consiste en reemplazar en valor del campo en cada punto del espacio-tiempo  $\phi(x, t)$ , por un operador  $\hat{\phi}(x, t)$  que satisfará unas relaciones de conmutación particulares. Esto significa que los

---

<sup>1</sup>Es posible derivar el efecto Unruh para teorías más generales empleando la integral de camino euclídea, véase [4]

coeficientes de la expansión de  $\phi_U$  pasan a ser los operadores  $\hat{a}_\omega^U$  y  $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$  y por tanto

$$\hat{\phi}_U(U) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega^U \phi_\omega^\phi(U) + \hat{a}_\omega^{U\dagger} \phi_\omega^\phi(U)^*]. \quad (3.9)$$

El operador  $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$  se denomina operador creación, pues veremos que crea partículas de frecuencia  $\omega$  y  $\hat{a}_\omega^U$  se conoce como operador destrucción porque aniquila partículas de frecuencia  $\omega$ . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$[\hat{a}_\omega^{U\dagger}, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = [\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^U] = 0, \quad (3.10)$$

$$[\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.11)$$

Todavía no hemos especificado el espacio de Hilbert sobre el que actúa el operador del campo, el cual se denota por  $\mathcal{H}_\phi$ . El estado del campo queda descrito por un elemento de  $\mathcal{H}_\phi$ . Como en este caso los modos  $U$  y  $V$  están desacoplados, podemos definir independientemente el espacio de Hilbert asociado a cada uno,  $\mathcal{H}_U$  y  $\mathcal{H}_V$ . El espacio de Hilbert del campo es el producto tensorial de ambos,  $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$ .

La base del espacio  $\mathcal{H}_U$  se puede construir mediante la representación de Fock. Para ello, se define el estado de vacío  $|0_U\rangle$  como el estado que no contiene ningún tipo de partícula, por tanto

$$a_\omega^U |0_U\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Omitiremos el acento circunflejo de los operadores por comodidad. Procedemos a crear estados con  $n_i$  partículas de frecuencia  $\omega_i$ , mediante aplicación repetida del operador creación  $a_{\omega_i}^{U\dagger}$ , con la normalización apropiada

$$|n_{1,\omega_1}, n_{2,\omega_2}, \dots, n_{N,\omega_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_N!}} (a_{\omega_1}^{U\dagger})^{n_1} (a_{\omega_2}^{U\dagger})^{n_2} \dots (a_{\omega_N}^{U\dagger})^{n_N} |0_U\rangle. \quad (3.13)$$

Los estados construidos son estados propios del operador número de partículas  $N_{\omega_i}^U = a_{\omega_i}^{U\dagger} a_{\omega_i}^U$  con valor propio  $n_i$ . La base de  $\mathcal{H}_U$  se obtiene juntando los estados con un número arbitrario de partículas de todas las frecuencias posibles.

### Transformaciones de Bogoliubov

Supongamos que queremos expandir el campo en otra base de modos, que depende de  $U$  a través de  $u(U)$ ,

$$\phi_\omega^u(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u(U)}, \quad (3.14)$$

Entonces el campo se descompone como

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^u \phi_\omega^u(U) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(U)^*]. \quad (3.15)$$

Expandiendo la nueva base en términos de la anterior

$$\phi_\omega^u(U) = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U) + \beta_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U)^*], \quad (3.16)$$

Los coeficientes  $\alpha_{\omega\omega'}$  y  $\beta_{\omega\omega'}$  se denominan coeficientes de Bogoliubov y vienen dados por

$$\alpha_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) - \omega' U)}, \quad (3.17)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) + \omega' U)}. \quad (3.18)$$

Cuantizando la teoría y formando el espacio de Fock, comprobamos que el vacío obtenido mediante los modos  $\phi_\omega^U(U)$ , puede contener partículas asociadas a los modos  $u$  si el coeficiente  $\beta_{\omega\omega'}$  no es nulo,

$$\langle 0_U | N_\omega^u | 0_U \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que en una teoría cuántica de campos, el vacío depende de la base de modos que se haya escogido antes de la cuantización. La ambigüedad se puede resolver escogiendo el vacío que tenga la mínima energía. En el espacio de Minkowski la energía está bien definida y coincide para todos los observadores inerciales, al ser invariante de Lorentz. Sin embargo, en un espacio-tiempo curvo el concepto de energía puede no estar bien definido y por tanto no hay un estado de vacío privilegiado.

### Campo escalar para observadores acelerados

Con el fin de estudiar cuál es el vacío dado por un observador acelerado en un espacio de Minkowski, introducimos las coordenadas de Rindler  $(\eta, \xi)$



definidas por

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad (3.20)$$

$$z = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (3.21)$$

donde  $|t| < z$  y  $a > 0$ .

Las coordenadas de Rindler solo cubren la región  $|t| < z$ , denominada cuña derecha de Rindler. De forma análoga, se puede cubrir la cuña izquierda de Rindler ( $|t| < -z$ ) mediante las coordenadas  $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$  dadas por

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \sinh a\tilde{\eta}, \quad (3.22)$$

$$z = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \cosh a\tilde{\eta}. \quad (3.23)$$

Las trayectorias con  $\xi = \xi_0$  constante describen observadores que se mueven con aceleración propia  $ae^{-a\xi_0}$ . El tiempo propio que miden estos observadores es  $\tau = e^{a\xi_0}\eta$ . Escogiendo el origen de tiempos en  $\tau = 0$ , un observador con aceleración constante viene dado por  $\eta = \tau$  y  $\xi = 0$ .

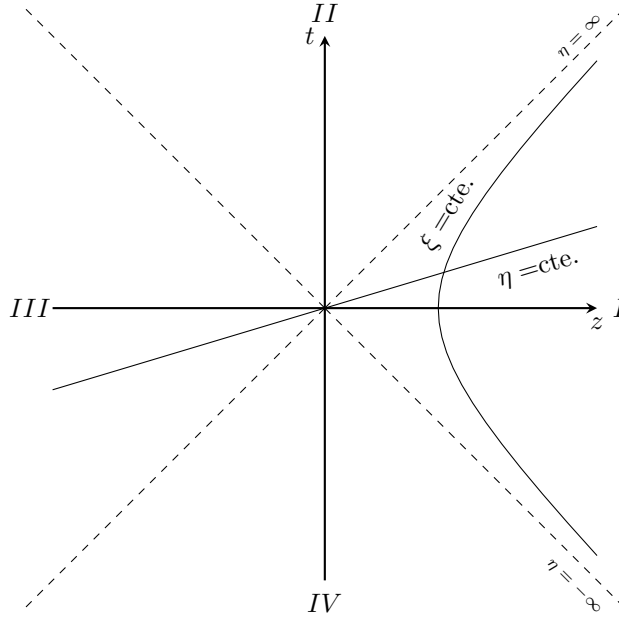


Figura 3.1: Espacio de Minkowski en coordenadas de Rindler.

Fijándonos en el diagrama de Rindler (figura 3.1), un observador con aceleración constante moviéndose a la derecha, al estar en la zona I, no puede

percibir los efectos producidos en III ni influir en II. Además, la información que le llegue de IV será percibida como proveniente de un tiempo infinitamente anterior, por lo que la recta  $t = z$  define un horizonte de sucesos futuro y la recta  $t = -z$  un horizonte de sucesos pasado.

Como el observador acelerado hacia la derecha desconoce el estado del campo en la cuña izquierda de Rindler, el estado que percibe no es puro, si no mixto. La descripción de estados mixtos se realiza mediante una matriz de densidad, que al trazar sobre los estados desconocidos conduce a que el vacío sea un estado térmico. Con el fin de hacer la deducción explícita, partimos de la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Rindler para la cuña derecha

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.24)$$

Definiendo las coordenadas nulas de Rindler

$$u = \eta - \xi = -\frac{1}{a} \ln(-aU), \quad (3.25)$$

$$v = \eta + \xi = \frac{1}{a} \ln(aV), \quad (3.26)$$

la solución general de 3.24 es  $\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v)$ , que se expande en los modos normales

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando un tratamiento análogo a la cuña izquierda, obtendríamos los modos  $\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u})$  y  $\phi_\omega^{\tilde{v}}(\tilde{v})$ .

El campo propagándose hacia la derecha en coordenadas de Minkowski se expande como

$$\begin{aligned} \phi_U(U) &= \int_0^\infty d\omega \{ \Theta(-U) [a_\omega^u \phi_\omega^u(u(U)) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(u(U))^*] \\ &\quad + \Theta(U) [a_\omega^{\tilde{u}} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + a_\omega^{\tilde{u}*} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*] \}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $\Theta(U)$  es la función de Heaviside

$$\Theta(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } U < 0 \\ 1 & \text{si } U > 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

El cálculo de los coeficientes de Bogoliubov conduce a

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'}^u &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a), & \beta_{\omega\omega'}^u &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a), \\ \alpha_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a), & \beta_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a).\end{aligned}\quad (3.30)$$

Por conveniencia, los modos de Unruh se definen como

$$\begin{aligned}\phi_\omega^I(U) &= \Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*, \\ \phi_\omega^{II}(U) &= \Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U))^*,\end{aligned}\quad (3.31)$$

los cuales están definidos en todo el espacio de Minkowski.

La cuantización de los modos de Unruh conduce a los operadores de destrucción

$$\begin{aligned}a_\omega^I &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} a_{\omega'}^U, \\ a_\omega^{II} &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^u a_{\omega'}^U.\end{aligned}\quad (3.32)$$

El vacío de estos modos es el vacío de Minkowski, es decir,

$$a_\omega^I |0_U\rangle = a_\omega^{II} |0_U\rangle = 0. \quad (3.33)$$

Para buscar el valor esperado de partículas que detecta un observador acelerado en el vacío de Minkowski, primero calculamos

$$\langle 0_U | a_\omega^{u\dagger} a_{\omega'}^u | 0_U \rangle = \int_0^\infty d\omega'' \beta_{\omega\omega''}^u \beta_{\omega'\omega''}^{u*} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.34)$$

En el límite  $\omega' \rightarrow \omega$ , esta cantidad es el valor esperado de partículas de frecuencia  $\omega$  que se detectarían, pero vemos que diverge. El motivo es que calcular el número de partículas en toda la cuña derecha de Rindler, se está considerando un observador eternamente acelerado, lo que se traduce en que aparezca infinita energía. En una situación real, la delta se transformaría en un valor finito. Por tanto,

$$\langle 0_U | N_\omega^u | 0_U \rangle \sim \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1}. \quad (3.35)$$

Este valor esperado se corresponde con una distribución de Planck a temperatura  $T = a/(2\pi k_B)$ . Sin embargo, todavía no conocemos la forma exacta del vacío de Minkowski.

En vez de considerar ondas armónicas con frecuencia bien definida, trabajamos con paquetes de onda con resolución  $\Delta\omega$  centrados en  $(n + 1/2)\Delta\omega$ ,

$$\phi_{n\bar{n}}^u(u) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{n\Delta\omega}^{(n+1)\Delta\omega} d\omega e^{i\frac{2\pi\bar{n}}{\Delta\omega}\omega} \phi_\omega^u(u). \quad (3.36)$$

Al cuantizar estos paquetes se introduce para la cuña derecha el operador destrucción  $a_{n\bar{n}}^u$  y en la cuña izquierda  $\tilde{a}_{n\bar{n}}^u$ . Construyendo los modos de Unruh asociados a paquetes de ondas, se obtiene que los operadores  $a_{n\bar{n}}^I$  y  $a_{n\bar{n}}^{II}$  cumplen

$$a_{n\bar{n}}^I |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{II} |0_U\rangle = 0. \quad (3.37)$$

De la expresión de  $a_{n\bar{n}}^I$  y  $a_{n\bar{n}}^{II}$  en términos de  $a_{n\bar{n}}^u$  y  $\tilde{a}_{n\bar{n}}^u$ , se llega a

$$a_{n\bar{n}}^{u\dagger} a_{n\bar{n}}^u |0_U\rangle = \tilde{a}_{n\bar{n}}^{u\dagger} \tilde{a}_{n\bar{n}}^u |0_U\rangle, \quad (3.38)$$

y por tanto hay el mismo número de partículas asociadas a paquetes de ondas de Rindler en ambas cuñas.

Teniendo en cuenta que el estado de vacío ha contener el mismo número de partículas en cada cuña,

$$|0_U\rangle = \prod_{n,\bar{n}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \otimes |m_{n\bar{n}}\rangle_{\bar{u}} \right). \quad (3.39)$$

Tras calcular los coeficientes  $K_{n\bar{n}}$  y tomar la traza parcial sobre los estados de la cuña izquierda, obtenemos que la matriz densidad para un observador con aceleración  $a$  es

$$\rho \propto \prod_{n,\bar{n}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\pi m n \Delta\omega/a} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \langle m_{n\bar{n}}|_u \right), \quad (3.40)$$

que describe un estado térmico a temperatura  $T_U = a/(2\pi k_B)$ .

### 3.2. Radiación de Hawking

La radiación de Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero negro. Esta radiación sigue una distribución de cuerpo negro a la temperatura de Hawking

$$T_{haw} = \frac{1}{8\pi k_B G M}. \quad (3.41)$$

Esta temperatura es muy pequeña, para un agujero negro con la masa del sol,  $T_{haw} = 60 \text{ nK}$ . Como comparación, la radiación de fondo de microondas corresponde a un cuerpo negro a  $2.7 \text{ K}$ .

Trabajaremos con el caso más sencillo de agujero negro, el agujero negro de Schwarzschild, que describe una distribución de masa con simetría esférica y estática. La métrica asociada es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.42)$$

Observamos que en el radio de Schwarzschild  $r_s = 2MG$ , la componente temporal de la métrica se anula mientras que la componente radial va a infinito, pero esta singularidad se debe a la elección particular de coordenadas. Se denomina horizonte de sucesos a la esfera de radio  $r_s$  centrada en  $r = 0$ . Desde el punto de vista de la relatividad general, la relevancia del horizonte de sucesos es que la materia que lo atraviese no podrá salir, sino que se caerá inevitablemente en la singularidad en  $r = 0$ . Por otro lado, la dilatación temporal de la gravedad hace que un observador fuera del agujero negro nunca vea materia atravesar el horizonte, solo la verá moverse arbitrariamente cerca del horizonte.

Es conveniente introducir la coordenada tortuga

$$r^* = r + 2MG \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right), \quad (3.43)$$

que toma el valor  $r^* = -\infty$  en el horizonte. La métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)[-dt^2 + dr^{*2}] + r^2d\Omega^2. \quad (3.44)$$

Si estudiamos un campo escalar no masivo con simetría esférica  $\psi(t, r)$ , la ecuación de Klein-Gordon en un espacio de Schwarzschild es

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} + \frac{2}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r^*} = 0. \quad (3.45)$$

Para ver cómo difiere esta ecuación de la ecuación de ondas unidimensional en espacio de Minkowski, hacemos el cambio  $\psi = \phi/r$ ,

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^{*2}} - \frac{r_s}{r^3}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\phi = 0. \quad (3.46)$$

Esta ecuación se corresponde con la ecuación de Klein-Gordon que vimos en 3.2, salvo por el término de potencial efectivo

$$V(r) = \frac{r_s}{r^3}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (3.47)$$

En una primera aproximación podemos ignorar este potencial. Su efecto es distorsionar la radiación emitida y hacer que la radiación saliente vuelva a entrar al agujero negro (*backscattering*).

Definiendo las coordenadas nulas Eddington-Finkelstein

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, \\ v &= t + r^*, \end{aligned} \tag{3.48}$$

la solución general es

$$\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v). \tag{3.49}$$

El campo se descompone en los modos de Boulware

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

El vacío asociado a la cuantización con estos modos se denomina vacío de Boulware y corresponde con el vacío que describe un observador inercial muy alejado de la fuente gravitacional.

### Formación de un agujero negro

La energía radiada por el agujero negro proviene de la materia que colapsa para formar el agujero negro. Por tanto, tenemos que describir la formación de un agujero negro y ver cómo varía el estado de vacío para un observador asintótico. Suponemos que antes de formarse el agujero negro, la materia ocupa un volumen arbitrariamente grande, de forma que la métrica fuera del objeto es aproximadamente la métrica de Minkowski y el vacío es el correspondiente a cuantizar los modos

$$\begin{aligned} \phi_\omega^U(U) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \\ \phi_\omega^V(V) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde  $U = t - r$  y  $V = t + r$ .

Una vez formado el agujero negro, todo el espacio viene descrito por la métrica de Schwarzschild y el estado de vacío para observadores inerciales alejados del agujero negro es el vacío de Boulware. Las partículas que emite el

agujero negro y son detectadas por estos observadores se corresponden a los modos salientes

$$\phi_\omega^u(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}. \quad (3.52)$$

Tenemos que estudiar cómo se comportan los modos salientes al propagarlos al pasado, cuando todo el espacio es de Minkowski. Consideremos los modos que escapan la materia en colapso poco antes de formarse el horizonte. Cerca del horizonte, si definimos la coordenadas de Kruskal-Szeckeres

$$\begin{aligned} u' &= -4MG e^{-\frac{u}{4MG}}, \\ v' &= 4MG e^{-\frac{v}{4MG}}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

los modos salientes son

$$\phi_\omega^u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega 4MG \ln \left| \frac{u'}{4MG} \right|}. \quad (3.54)$$

Vemos que al aproximarse al horizonte ( $u' \rightarrow 0$ ), la frecuencia de estos modos tiende a infinito. Por tanto, podemos despreciar la interacción con la materia en colapso. La aparición de frecuencias arbitrariamente altas, las cuales deberían ser tratadas mediante una teoría de gravedad cuántica, se denomina problema transplanckiano.

Como cerca del horizonte la frecuencias son muy altas, los modos se pueden aproximar por rayos (aproximación de la óptica geométrica). Si definimos  $V_H$  de forma que  $V = V_H$  es la trayectoria del último rayo que pasa por  $r = 0$  y logra escapar justo antes de formarse el horizonte, podemos relacionar la coordenada  $u'$  con  $V$ . El modo a la distancia nula  $u'$  del horizonte se mantendrá en el pasado a la misma distancia de la trayectoria  $V = V_H$ . Por tanto,

$$\phi_\omega^u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega 4MG \ln |A(V_H - V)|}. \quad (3.55)$$

La constante  $A$  aparece por la evolución del campo gravitatorio durante el colapso. Entonces llegamos a la relación entre coordenadas de nulas de Eddington-Finkelstein futuras y de Minkowski pasadas, que describen la propagación de un rayo que atraviesa el objeto en colapso,

$$u' = -4MG \ln(A(V_H - V)). \quad (3.56)$$

Esta ecuación es equivalente a la relación entre coordenadas nulas de Rindler y de Minkowski (3.25) si identificamos  $a = \frac{1}{4MG}$ , salvo por las constantes  $A$  y  $V_H$ .

Escogiendo los orígenes de coordenadas de  $u$  y  $V$  apropiados, la equivalencia se cumple exactamente. Haciendo un tratamiento análogo al del efecto Unruh, deduciríamos que para tiempo suficientemente tardíos, los observadores situados en  $r \rightarrow \infty$  medirían un espectro de radiación correspondiente a un cuerpo negro a la temperatura de Hawking,

$$T_{haw} = \frac{1}{8\pi k_B GM}. \quad (3.57)$$

En el siguiente capítulo, veremos cómo aparece esta misma temperatura al tratar el problema de Hagedorn cerca de agujeros negros.

### Deducción alternativa

Una forma rápida de deducir la temperatura de un agujero negro es estudiando el problema en tiempo imaginario.

La métrica de Schwarzschild, en coordenadas de Rindler, cerca del horizonte se aproxima por

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{(4GM)^2} dt^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.58)$$

donde  $\rho = \sqrt{8GM(r - 2GM)}$ .

Si pasamos a un tiempo imaginario,  $t \rightarrow \tau = it$ , la métrica se convierte en

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{(4GM)^2} d\tau^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.59)$$

Fijándonos en el subespacio  $(\tau, \rho)$ , esta métrica es similar al plano en coordenadas polares,  $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ . Como la coordenada angular  $\theta$  tiene periodo  $2\pi$ , identificando  $\theta = \tau/(4GM)$ , el tiempo euclídeo debe tener periodo  $\beta = 8\pi GM$ . Asociando el periodo temporal con la temperatura del agujero negro, se obtiene la temperatura de Hawking.



## Capítulo 4

# Cuerdas en espacios curvos

Este capítulo se centra en el estudio de las cuerdas en la proximidad de un agujero negro. Como la temperatura de Hagedorn se extrae del comportamiento divergente de la energía libre, necesitamos encontrar una forma de calcular la energía libre en un espacio-tiempo curvo. Veremos dos métodos distintos: mediante la integral de camino toroidal de una cuerda que se enrolla un tiempo periódico y la integral de camino de un campo taquiónico. Aplicando este último método a cuerdas de tipo II cerca de un agujero negro, encontraremos que la divergencia de Hagedorn aparece a la temperatura de Hawking. Concluiremos con la justificación de la entropía de un agujero negro a partir de los resultados anteriores.

### 4.1. Integral de camino en la worldsheet

Partimos de la suposición que la integral de camino toroidal de una cuerda cerrada, con un tiempo compactificado de periodo  $\beta$ , se relaciona con la energía libre de un gas de cuerdas mediante

$$Z = -\beta F. \tag{4.1}$$

Esta relación se ha demostrado exacta para ciertos casos concretos, pero no hay una demostración general.

La integral de camino toroidal en un campo  $G_{\mu\nu}$ , el cual representa la

curvatura del espacio-tiempo, en  $d$  dimensiones es

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}X \sqrt{G} e^{-S}, \quad (4.2)$$

donde el determinante de Faddeev-Popov se introduce debido a la libertad gauge bajo difeomorfismos y transformaciones de Weyl. La acción es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{[0,1]^2} d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Escogemos la métrica de la worldsheet como

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

La divergencia de Hagedorn aparece calcular la integral de camino de una que se enrolla en el tiempo a lo largo de la coordenada  $\sigma_2$ , pues diverge en el límite  $\tau_2 \rightarrow 0$ . Las condiciones de periodicidad son

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^\mu(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^i(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^i(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^0(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^0(\sigma_1, \sigma_2) \pm \beta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Haciendo la transformación modular  $\tau \rightarrow -1/\tau$  e intercambiando  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , las condiciones de periodicidad son

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^\mu(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^i(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^i(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^0(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^0(\sigma_1, \sigma_2) \pm \beta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Definimos las nuevas coordenadas  $\sigma = \sigma_1/\tau_2$  y  $\tau = \sigma_2$ , de modo que la acción se convierte en

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{1/\tau_2} d\sigma \int_0^1 d\tau \left[ \left( 1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \right) \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu G_{\mu\nu} + 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} \partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Haciendo un desarrollo de Fourier de  $X^\mu(\sigma, \tau)$  en la coordenada  $\sigma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} X^i(\sigma, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^i(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma}, \\ X^0(\sigma, \tau) &= \pm \beta\tau_2\sigma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^0(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definimos  $X^i(\tau) = X_0^i(\tau)$  y  $X^0(\tau) = X_0^0(\tau)$ . En la sección 2.4, vimos que la divergencia de Hagedorn se produce al integrar en la región  $\tau_2 \rightarrow \infty$ . Por tanto, nos quedamos con la contribución dominante,  $n = 0$ . Al integrar en  $\tau_2$ , obtenemos la acción de una partícula

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'\tau_2} \int_0^1 d\tau [\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)G_{00} \pm 2\beta\tau_1 G_{0\mu} \partial_\tau X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu]. \quad (4.9)$$

Despreciar el resto de modos en la serie de Fourier hace que a la acción resultante le falten términos adicionales. En una métrica plana, la corrección a la acción es

$$\Delta S = -\frac{\tau_2^2 \beta_{H0}^2}{4\pi\alpha'\tau_2}, \quad (4.10)$$

siendo  $\beta_{H0}$  la temperatura de Hagedorn en espacio plano. Incluyendo esta corrección y definiendo un nuevo parámetro  $t = \tau_2\tau$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\beta_{H0}^2 \tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{0\mu} \partial_t X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_t X^\mu \partial_t X^\nu \right\} \right]. \quad (4.11)$$

En una métrica estacionaria y que cumpla  $G_{0i} = 0$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\beta_{H0}^2 \tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 + G_{00} (\partial_t X^0)^2 + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j \right\} \right]. \quad (4.12)$$

Si descomponemos la coordenada temporal en una parte clásica y una corrección adicional,  $X^0 = X^c + \tilde{X}^0$ , podemos hacer la integral de camino sólo sobre  $\tilde{X}^0$ . Primero hemos de buscar la acción clásica. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\partial_t \left[ G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \right] = 0. \quad (4.13)$$

Por lo que

$$G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} = C. \quad (4.14)$$

Como la coordenada  $X^0$  es periódica,

$$0 = X^0(\tau_2) - X^0(0) = X^0(t) \Big|_0^{\tau_2} = \int_0^{\tau_2} \partial_t X^0(t) = \langle \partial_t X^0 \rangle \quad (4.15)$$

Promediando,

$$\langle \partial_t X^c \rangle \pm \left\langle \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} \right\rangle = \left\langle \frac{C}{G_{00}} \right\rangle. \quad (4.16)$$

Obtenemos la constante

$$C = \pm \beta \frac{\tau_1}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} \quad (4.17)$$

La acción clásica es

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left\langle G_{00}(\partial_t X^0)^2 \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle. \quad (4.18)$$

Aplicando

$$\left\langle G_{00}(\partial_t X^0)^2 \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle = C \langle \partial_t X^0 \rangle = 0, \quad (4.19)$$

y

$$\langle G_{00} \rangle \partial_t X^0 = \tau_2 C \mp \frac{\tau_1}{\tau_2} \beta \langle G_{00} \rangle, \quad (4.20)$$

la acción clásica puede escribirse como

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ \frac{\tau_1^2 \beta^2}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} - \beta^2 \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \langle G_{00} \rangle \right]. \quad (4.21)$$

Como la trayectoria clásica hace estacionaria la acción, los términos lineales en  $\tilde{X}^0$  se anulan y la integral de camino en  $\tilde{X}^0$ , tras varios cálculos, es

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \alpha' \langle G_{00}^{-1} \rangle}} \beta. \quad (4.22)$$

La integral en  $\tau_1$  en la ecuación 4.2, da lugar al término

$$\frac{2\pi\sqrt{\alpha'}\sqrt{\langle G_{00}^{-1} \rangle}}{\beta}. \quad (4.23)$$

La integral de camino se reduce a

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2} \int \mathcal{D}\vec{X} \sqrt{\prod_t \det G_{ij}} e^{-S_p} \quad (4.24)$$

donde la acción es

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ \int_0^{\tau_2} dt (-\beta_{H0}^2 + \beta^2 G_{00} + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j) \right]. \quad (4.25)$$

Hemos reducido la función de partición de una cuerda a la integral de camino de una partícula no relativista moviéndose en un espacio curvo.

Aunque este método parece una opción viable, haremos los cálculos con un campo efectivo, razonando que ambos procedimientos deberían conducir a los mismos resultados.

## 4.2. Campo efectivo

En la sección 2.4 vimos que en un espacio plano, la divergencia de Hagedorn se manifiesta como una campo que se vuelve taquiónico a temperaturas por encima de la temperatura de Hagedorn. Por tanto, intentaremos hallar la energía libre a partir de la acción de un campo taquiónico en espacio curvo.

La acción de un campo taquiónico a orden más bajo en  $\alpha'$  es

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{G} e^{-2\Phi} (G^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T + m^2 T^2), \quad (4.26)$$

donde  $T$  es un campo escalar real y  $\Phi$  el campo del dilatón.

Si el tiempo tiene periodo  $2\pi R = \beta$ , el desarrollo de Fourier de  $T$  es

$$T(x^0, x^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x^i) e^{\frac{in x^0}{R}}. \quad (4.27)$$

Hay que tener en cuenta que  $T_n(x^i)$  es un campo escalar complejo y  $n$  es el momento discretizado en la dimensión compacta. Suponemos una métrica estacionaria y  $G_{i0} = 0$ . Sustituyendo,

$$S = \sum_{n,m} \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( -\frac{nm}{R^2} G^{00} \partial_0 T_n \partial_0 T_m + G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_m + m^2 T_n T_m \right) \int_{-\pi R}^{\pi R} \frac{dx^0}{2} e^{i \frac{n+m}{R} x^0}. \quad (4.28)$$

La integral en  $x^0$  es  $\pi R \delta_{-n,m}$ , por lo que

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_{-n} + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_{-n} + m^2 T_n T_{-n} \right). \quad (4.29)$$

Como  $T$  es un campo real,  $T_n = T_{-n}^*$  y por tanto

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_n^* + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_n^* + m^2 T_n T_n^* \right). \quad (4.30)$$

Aunque en la acción solo aparece el momento  $n$  y no los enrollamientos  $w$ , la acción completa debería satisfacer la dualidad T, la cual apareció en la sección 1.2. Aprovechando la dualidad T, las transformaciones necesarias para

intercambiar el momento discreto por enrollamientos son

$$\begin{aligned} G_{00} &\rightarrow \frac{1}{G_{00}}, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{00}, \\ T_n &\rightarrow T_w, \\ R &\rightarrow \frac{\alpha'}{R}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

La acción en términos de enrollamientos del campo taquiónico es

$$S \sim \sum_w \int d^{d-1}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( G^{ij} \partial_i T_w \partial_j T_w^* + \left( \frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2} + m^2 \right) T_w T_w^* \right). \tag{4.32}$$

Vemos que multiplicando a  $|T_w|^2$ , aparece un término de masa efectiva  $m_{loc}^2 = m^2 + \frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2}$  que depende de la posición espacio-temporal.<sup>1</sup>

La contribución dominante vendrá dada por  $w = \pm 1$ , por lo que definimos  $T = T_1$ . Ignorando el campo del dilatón,

$$S = \int d^{d-1}x \sqrt{G_{00}} \sqrt{G_{ij}} (G^{ij} \partial_i T \partial_j T^* + m_{local}^2 T T^*). \tag{4.33}$$

Aquí  $\sqrt{G_{ij}}$  indica la raíz cuadrada del determinante de la parte espacial de la métrica. Intentaremos interpretar esta acción como la de una partícula que se mueve en un espacio-tiempo con curvatura solo en la parte espacial y no en la temporal, para poder compararla con la acción obtenida en la sección anterior. Con este fin, hemos de eliminar el factor  $\sqrt{G_{00}}$  del término cinético  $G^{ij} \partial_i T \partial_j T^*$ .

Integrando por partes la acción,

$$S = \int d^{d-1}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} T^* \left[ -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right] T, \tag{4.34}$$

donde  $\nabla^2 = G^{ij} \nabla_i \partial_j$ . La integral de camino asociada a esta acción se calcula buscando los propios del operador

$$\hat{O} = -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2. \tag{4.35}$$

Definiendo el producto escalar

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G} \psi_1(x)^* \psi_2(x), \tag{4.36}$$

---

<sup>1</sup>Haciendo el cálculo para cuerdas heteróticas, hay una corrección a esta fórmula.

el operador  $\hat{O}$  es hermítico y por tanto posee un conjunto ortonormal de funciones propias  $\psi_n$  con valores propios reales,  $\lambda_n$ .

La integral de camino da como resultado

$$Z = \int \mathcal{D}T e^{-S} = \prod_n \frac{1}{\lambda_n} = \det(\hat{O})^{-1}. \quad (4.37)$$

La contribución taquiónica a la energía libre de un gas de cuerdas es

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \quad (4.38)$$

Teniendo en cuenta que  $\text{Tr} \ln X = \ln \det X$ , la energía libre es

$$F = \frac{1}{\beta} \text{Tr} \ln \hat{O}. \quad (4.39)$$

Aplicando la fórmula de Schwinger del logaritmo,

$$\ln a = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-aT} - e^{-T}), \quad (4.40)$$

y despreciando el término  $e^{-T}$ , la energía libre es

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T\hat{O}}. \quad (4.41)$$

Sigue habiendo una contribución de  $\sqrt{G_{00}}$  al término cinético, que aparece al tomar la traza. Para solucionarlo, hacemos el cambio de base

$$|\phi_n\rangle = G_{00}^{1/4} |\psi_n\rangle. \quad (4.42)$$

El producto escalar asociado es

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G_{ij}} \phi_1(x)^* \phi_2(x). \quad (4.43)$$

Tras el cambio de base,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T\hat{D}}, \quad (4.44)$$

donde aparece el operador hermítico

$$\hat{D} = -\nabla^2 + m_{loc}^2 - \frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.45)$$

Al tomar la traza, ya no aparece  $\sqrt{G_{00}}$ . Los últimos dos términos se corresponden con un potencial efectivo

$$K(x) = -\frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.46)$$

Ahora se puede interpretar el término  $\text{Tr } e^{-T\hat{D}}$  como una integral de camino de una partícula

$$Z = \int_{S_1} \mathcal{D}x \sqrt{G_{ij}} e^{-\int_0^T dt \left( \frac{1}{4} G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + m_{loc}^2 + K(x) \right)}. \quad (4.47)$$

En resumen, haciendo el cambio de variable en la integral  $t \rightarrow \pi\alpha' t$ , la energía libre es

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{S^1} \mathcal{D}x \sqrt{G_{ij}} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^T dt \left( G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + 4\pi^2 \alpha'^2 (m_{loc}^2 + K(x)) \right)}, \quad (4.48)$$

donde

$$\begin{aligned} m_{loc}^2 &= -\frac{4}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} \quad \text{para cuerdas bosónicas,} \\ m_{loc}^2 &= -\frac{2}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} \quad \text{para cuerdas de tipo II,} \\ m_{loc}^2 &= -\frac{3}{\alpha'} + \frac{\pi^2}{\beta^2 G_{00}} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} \quad \text{para cuerdas heteróticas.} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Si comparamos con la energía libre que obtendríamos a partir de la acción de la cuerda obtenida mediante 4.24,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2} \int_{S^1} \mathcal{D}X \sqrt{G_{ij}} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{\tau_2} dt \left( G_{ij} \dot{X}^i \dot{X}^j + \beta^2 G_{00} - \beta_{H0}^2 \right)}, \quad (4.50)$$

ambas energías libres coinciden al sustituir el valor apropiado de la temperatura de Hagedorn en espacio plano,  $\beta_{H0}$  salvo por el término  $K(x)$ . Cabe esperar que este término apareciese al tener en cuenta todos los términos del desarrollo de Fourier 4.8.

Además, podrían estudiarse posibles correcciones a la acción del campo taquiónico a orden superior en  $\alpha'$ .

### 4.3. Cuerdas cerca de agujeros negros

Aplicaremos ahora el cálculo de la energía libre a un gas de cuerdas en las proximidades de un agujero negro de Schwarzschild. Tomaremos como ejemplo la teoría supersimétrica de tipo II, se puede seguir un procedimiento similar para cuerdas heteróticas y bosónicas, pero presentan más sutilezas. Partimos de la expresión de la energía libre deducida a partir del campo taquiónico 4.41,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int \frac{dT}{T} \text{Tr } e^{-T \left( -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right)}. \quad (4.51)$$



Cerca del agujero negro, es conveniente emplear las coordenadas de Rindler, introducidas en 3.58. El laplaciano en coordenadas de Rindler es

$$\nabla^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho. \quad (4.52)$$

La masa efectiva para cuerdas de tipo II es

$$m_{loc}^2 = -\frac{2}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2}. \quad (4.53)$$

Para calcular la traza buscamos los valores propios del operador en el exponente, pues la traza de un operador es la suma de sus valores propios. Las funciones propias regulares (descartamos las que divergen) son del tipo

$$\psi_n(\rho) \propto e^{-\frac{\beta \rho^2}{4\pi \alpha'^{3/2}}} L_n\left(\frac{\beta \rho^2}{2\pi \alpha'^{3/2}}\right), \quad (4.54)$$

donde  $L_n$  es un polinomio de Laguerre de grado  $n \geq 0$ . Sus correspondientes valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'} + 2\beta n}{\pi \alpha'^{3/2}}. \quad (4.55)$$

La contribución dominante a la energía libre viene dada por el modo más bajo,  $n = 0$ . Esto no basta para calcular la traza pues tenemos que tener en cuenta las dimensiones adicionales al espacio de Rindler. En una teoría supersimétrica, tenemos ocho dimensiones descritas por una variedad que tenemos que especificar. Suponiendo dimensiones planas, la energía libre es

$$F = -\frac{V_T}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \left(\frac{1}{4\pi T}\right)^4 e^{\frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'}}{\pi \alpha'^{3/2}} T}. \quad (4.56)$$

En el límite superior de  $T$ , la energía libre diverge si

$$\beta \leq 2\pi\sqrt{\alpha'} = \beta_R. \quad (4.57)$$

Concluimos que la temperatura de Hagedorn en un espacio de Rindler coincide con la temperatura de Hawking. Hemos supuesto cuerdas de tipo II y que las dimensiones adicionales son planas. De haber escogido otras condiciones, la temperatura de Hagedorn podría recibir correcciones.

Identificando las funciones propias como funciones de onda de una cuerda, el estado fundamental

$$\psi_0(\rho) \propto e^{-\frac{\beta \rho^2}{4\pi \alpha'^{3/2}}}, \quad (4.58)$$

representa una cuerda localizada a la distancia  $l_s$  del horizonte de sucesos. Intuitivamente, las cuerdas sufren una presión radial que compensa la atracción gravitatoria del agujero negro. Este resultado refuerza la idea de la existencia de un horizonte *estirado*, comentada en [5].

#### 4.4. Entropía de agujeros negros

La igualdad entre la temperatura de Hagedorn y la temperatura Hawking permite justificar la entropía Bekenstein-Hawking de un agujero negro,

$$S = \frac{A}{4G}, \quad (4.59)$$

donde  $A$  es el área del agujero negro. Pero antes, debemos entender si tiene sentido la existencia del equilibrio termodinámico alrededor de un agujero negro. En teoría cuántica de campos, si colocamos un agujero en una fuente de calor y partículas, la materia que cae al agujero negro entra en equilibrio con la radiación de Hawking. En cambio, si mantenemos aislado un sistema formado por materia en caída y un agujero negro, nunca se alcanzará el equilibrio. La materia se iría aproximando arbitrariamente cerca del horizonte, ocupando un volumen muy pequeño, de modo que cerca del horizonte se puede almacenar una cantidad infinita de información. Esta es la causa de la divergencia de la entropía de un agujero negro en teoría cuántica de campos.

En teoría de cuerdas, el problema se soluciona al considerar que las cuerdas se mantienen a una cierta distancia del horizonte, como refleja 4.58. De esta forma, las cuerdas alcanzan el equilibrio y al ocupar un volumen extenso, la entropía permanece finita.

Para deducir la entropía de un agujero negro, calculamos el incremento de entropía asociado a lanzar cuerdas a un agujero negro, suponiendo que la interacción de la materia añadida con la ya presente es pequeña. La densidad de estados de una cuerda es  $\omega(E) = E^\alpha e^{\beta_H E}$ .

La entropía, en función del número de microestados  $\Omega(E)$  es

$$S(E) = k_B \ln \Omega(E). \quad (4.60)$$

Como el número de microestados en el intervalo  $(E, E + dE)$  es  $\Omega(E) = \omega(E)\delta E$ ,

$$S(E) = k_B \ln \omega(E) + k_B \ln \delta E. \quad (4.61)$$

El segundo término de la suma es una constante arbitraria que podemos ignorar, luego la entropía en función de la densidad de estados es

$$S(E) = k_B \ln \omega(E). \quad (4.62)$$

A altas energías ( $E \gg k_B T_H$ ) solo es relevante la contribución exponencial y por tanto el incremento de entropía del agujero negro es

$$\delta S = k_B \frac{\delta \omega}{\omega} = k_B \beta_H \delta E \quad (4.63)$$

Teniendo en cuenta que  $\beta_H = \beta_{haw}$ , en términos de la masa,

$$\delta S = 8\pi G M \delta M \quad (4.64)$$

El radio de un agujero negro de Schwarzschild es  $R = 2GM$ , lo que conduce a la entropía de Bekenstein-Hawking,

$$S = \frac{A}{4G}. \quad (4.65)$$

Una interpretación alternativa de este resultado es que para que las cuerdas proporcionen la entropía de un agujero negro, se ha de cumplir la igualdad  $\beta_H = \beta_{haw}$ .



## Capítulo 5

# Conclusión

La divergencia a la temperatura Hagedorn de la energía libre de cuerdas en espacio plano, se puede extraer a partir de cuerdas en un estado taquiónico que se enrollan alrededor de un tiempo periódico. Asumiendo que esta correspondencia se mantiene en espacio curvo, haciendo la integral de camino de un campo taquiónico en espacio de Rindler se obtuvo que la temperatura de Hagedorn coincide con la temperatura de Hawking. Por otro lado, este resultado es consistente con la entropía predicha para agujeros negros.

Es interesante notar que los problemas de agujeros negros en gravedad cuántica suelen ser no perturbativos, sin embargo los cálculos que hemos hecho se basan completamente en teoría de cuerdas perturbativa. Sería conveniente aplicar un enfoque no perturbativo para tratar un gas de cuerdas en presencia de agujeros negros.

Por otra parte, se podría estudiar cómo se vincula la entropía de agujeros negros debida a cuerdas cercanas al horizonte con la deducción de Strominger y Vafa, basada en branas.

Algunos caminos de investigación posibles son las relaciones con el problema de la información, la hipótesis de firewalls y otras propuestas como los fuzzballs.

De forma recíproca, entender la termodinámica de agujeros negros tal vez arroje luz sobre el comportamiento de las cuerdas altas temperaturas.



# Bibliografía

- [1] Mertens, Thomas G.: *Hagedorn String Thermodynamics in Curved Spacetimes and near Black Hole Horizons*. Tesis de Doctorado, Gent U., 2015. <https://inspirehep.net/record/1377988/files/arXiv:1506.07798.pdf>.
- [2] Tong, David: *String Theory*. 2009. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>.
- [3] Barbado, Luis C.: *Percepción de las radiaciones Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*. Tesis de Doctorado, Granada U., 2014. <https://inspirehep.net/record/1338344/files/arXiv:1501.02636.pdf>.
- [4] Susskind, Leonard y James Lindesay: *Black holes, information and the string theory revolution*. 2005, ISBN 9812560831.
- [5] Susskind, Leonard: *Some speculations about black hole entropy in string theory*. 1993.