

Todo list

Describir brevemente objetivos, utilidad y estado actual	3
Convenio	3
Decir cuerda cerrada y bosónica	3
Métrica, línea de universo	3
Dibujo	4
Simetría gauge, Weyl	5
Rematar	9
Acabar	10
Añadir dibujo	11
Conclusión	15
Dibujo	19
Comentar más allá de Hagedorn? No perturbativo, interacciones, transición de fase...	20
Pq usar paquetes? Se puede omitir de la demostración?	28
Es \amalg un producto tensorial/ suma directa?	29
Contradicción distribución MB vs BE?	29
Aislar taquión	36
Pq quitamos el dilatón	40
Poner misma notación	43
Refs	43

La entropía de los agujeros negros y el problema de Hagedorn

John Liu Anta
Universidad de Oviedo

30 de junio de 2016

Índice general

1	Introducción a la teoría de cuerdas	3
1.1.	Motivación	3
1.2.	La cuerda relativista	3
1.3.	Cuantización	5
2	Termodinámica de cuerdas	13
2.1.	Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada . .	13
2.2.	Modelo random walk	15
2.3.	Coalescencia multicuerda	16
2.4.	Termodinámica de cuerdas en espacio plano	18
3	QFT en sistemas acelerados y espacio curvo	23
3.1.	Efecto Unruh	23
3.2.	Radiación de Hawking	29
4	Cuerdas en espacios curvos	35
4.1.	Path integral en la worldsheet	35
4.2.	Campo efectivo	39
4.3.	Cuerdas cerca de agujeros negros	42
4.4.	Entropía de agujeros negros	44
5	Conclusión	45
	Bibliografía	47

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo entender cómo la temperatura de Hagedorn, característica de todas las teorías de cuerdas, se ve afectada por la presencia de agujeros negros.

La base de este trabajo es la tesis [1], en la cual se determina que la temperatura de Hagedorn En el capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales de teoría de cuerdas [2]. En el capítulo 2, se analiza la termodinámica de una gas de cuerdas en espacio de Minkowski, donde aparece la temperatura de Hagedorn. El capítulo 3 trata dos aspectos de considerar una teoría cuántica de campos en sistemas de referencia no inerciales: la temperatura de Unruh y la temperatura de Hawking [3]. El concepto de partícula es dependiente del observador. El estudio de cuerdas en espacios curvos se realiza en el capítulo 4 [1] artículos, entropía, $T_{\text{Haw}}=T_{\text{Hag}}$.

...

Capítulo 1

Introducción a la teoría de cuerdas

1.1. Motivación

Tomamos una métrica con signatura $(-+++)$, dimensión total d y dimensiones espaciales no compactas D . Determinante de un tensor

Describir brevemente objetivos, utilidad y estado actual

Convenio

1.2. La cuerda relativista

Decir cuerda cerrada y bosónica

La teoría de cuerdas parte de considerar que las entidades fundamentales son cuerdas en vez de partículas.

Métrica, línea de universo

La trayectoria $\mathbf{x}(t)$ de una partícula satisface que su acción S es un extremal. Coloquialmente, esto significa que la variación de la acción a primer orden es nula bajo variaciones pequeñas de la trayectoria, supuestas fijas las posiciones iniciales y finales. La acción de una partícula libre es

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}, \quad (1.1)$$

donde $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

Para que en la acción aparezca el tiempo y la posición en igualdad de condiciones, parametrizamos el tiempo y la posición por el tiempo propio τ . El tiempo propio es el tiempo que mediría un reloj que se moviese con la partícula. Con esta transformación, la acción es

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}} = -m \int d\tau. \quad (1.2)$$

Generalizaremos la acción de una partícula libre a una cuerda libre. Una cuerda está parametrizada por una variable temporal τ y una variable espacial σ , adimensional. De forma más compacta, $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$. La trayectoria de la cuerda en el espacio-tiempo genera una superficie llamada *worldsheet*. Las coordenadas en la *worldsheet* (τ, σ) determinan un punto del espacio-tiempo

Dibujo

X^μ , también llamado espacio *target* para evitar confusión.

En este trabajo, consideraremos solo cuerdas cerradas. Si la cuerda tiene periodicidad 2π , identificamos $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$.

Acción de Nambu-Goto

La acción de una partícula es proporcional a la longitud de su línea de universo. De forma análoga, la acción de una cuerda debería ser proporcional al área de la *worldsheet*. Para poder medir el área, es necesario definir una métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ en la *worldsheet*. La forma natural de definir una métrica en una superficie, a partir de la métrica del espacio que contiene a la superficie, es mediante el concepto de *pull-back*. En este caso, la métrica en la *worldsheet* es el pull-back de la métrica de Minkowski

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

La propiedad esencial de la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ es que la distancia entre dos puntos próximos coincide con la calcula con la métrica $\eta_{\mu\nu}$, ya que

$$g_{\mu\nu}(X(\sigma)) dX^\mu(\sigma) dX^\nu(\sigma) = \gamma_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta. \quad (1.4)$$

El área de la *worldsheet* es $\int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}$, por lo que la acción, llamada de Nambu-Goto, es

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}. \quad (1.5)$$

El parámetro T se corresponde con la tensión de la cuerda y se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (1.6)$$

donde α' es la pendiente de Regge. Como α' tiene dimensiones de longitud al cuadrado, define una longitud característica de la cuerda, $l_s = \sqrt{\alpha'}$.

Acción de Polyakov

A la hora de cuantizar la teoría, la raíz cuadrada es problemática, por lo que se introduce un campo tensorial h definido sobre la worldsheet en la llamada acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.7)$$

Este campo h se comporta como una métrica en dos dimensiones y queda fijada por las ecuaciones de movimiento

$$h_{\alpha\beta} = 2f(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.8)$$

donde $f(\sigma)$ es una función cualquiera. La libertad de poder escoger $f(\sigma)$ es una simetría gauge

La acción de Polyakov presenta tres tipos de simetrías, que son transformaciones que dejan invariante la acción. Estas son

- Simetría de Poincaré. $X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu$
- Invariancia reparametrización
- Simetría de Weyl

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

Simetría gauge, Weyl

1.3. Cuantización

Debido a la simetría gauge de la teoría, la cuantización no es directa. Hay grados de libertad que no son físicos y en algún momento hemos de deshacernos de ellos. Para obtener directamente una teoría unitaria, cuantizamos solo los grados de libertad físicos, buscando primero las soluciones clásicas. Como contrapartida, perdemos la invariancia de Lorentz explícita.

Definimos las coordenadas en el cono de luz

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (1.10)$$

y

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1}). \quad (1.11)$$

Gracias a la simetría gauge, imponemos $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, de forma que la acción de Polyakov es

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu, \quad (1.12)$$

que da lugar a la ecuaciones de movimiento de ondas libres

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (1.13)$$

La solución general de la ecuación de movimiento para X^+ se descompone en una onda moviéndose hacia la izquierda X_L^+ y otra hacia la derecha X_R^+ ,

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-). \quad (1.14)$$

Teniendo en cuenta la periodicidad en σ , la expansión de Fourier conduce a

$$\begin{aligned} X_L^+ &= \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^+ e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^+ &= \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^+ e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde x^+ y p^+ se corresponden con la posición y el momento del centro de masas, respectivamente.

Debido a la invariancia bajo reparametrizaciones, escogemos

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+, \quad (1.16)$$

y

$$X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^-. \quad (1.17)$$

Por tanto,

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau. \quad (1.18)$$

La constante x^+ puede eliminarse mediante una traslación en τ .

Con esta elección gauge, la solución X^- queda determinada casi por completo.

La ecuación de movimiento para la métrica h se obtiene variando la acción

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \delta h^{\alpha\beta} \left(\sqrt{-h} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu \right). \quad (1.19)$$

Como habíamos elegido $h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$, la ecuación de movimiento impone

$$\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0. \quad (1.20)$$

En las coordenadas del cono de luz, esto se traduce en

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \quad (1.21)$$

Haciendo la descomposición de la solución X^-

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-), \quad (1.22)$$

la ecuación 1.21 conduce a

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \quad (1.23)$$

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^-} \sum_{i=1}^{d-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \quad (1.24)$$

En el desarrollo de Fourier

$$\begin{aligned} X_L^-(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \\ X_R^-(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

las constantes p^- , $\bar{\alpha}_n^-$ y α_n^- quedan determinadas por las ecuaciones 1.23 y 1.24.

El momento p^- se puede expresar a través de α_n^i y de $\bar{\alpha}_n^i$ como

$$p^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \left(\frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right) = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{d-2} \left(\frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^i \bar{\alpha}_{-n}^i \right). \quad (1.26)$$

La masa de la cuerda es por tanto

$$m^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{d-2} p^i p^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_{-n}^i \bar{\alpha}_n^i. \quad (1.27)$$

Hemos obtenido la solución clásica mediante los $2(d-2)$ modos de oscilación transversos α_n^i y $\bar{\alpha}_n^i$ y las constantes x^i , p^i, p^+ y x^- , donde $i = 1, \dots, d-2$. La cuantización consiste en promover los grados de libertad a operadores (denotados por un acento circunflejo) que satisfacen una reglas de conmutación.¹ Estas reglas son

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= i\delta^{ij}, & [\hat{x}^-, \hat{p}^+] &= -i, \\ [\hat{\alpha}_n^i, \hat{\alpha}_m^j] &= [\hat{\bar{\alpha}}_n^i, \hat{\bar{\alpha}}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (1.28)$$

¹En realidad, debido a la simetría gauge, la cuantización se haría a partir de los corchetes de Poisson de la teoría clásica. No tendremos en cuenta esta sutileza porque el resultado es el mismo.

Los estados físicos sobre los que actúan los operadores se construyen a partir de un estado de vacío $|0; p\rangle$, que describe una cuerda de momento p en el estado fundamental. El vacío verifica

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle \quad , \quad \hat{\alpha}_n^i |0; p\rangle = \hat{\alpha}_n^i = 0 \quad \text{con } n > 0. \quad (1.29)$$

Las distintas excitaciones de la cuerda se obtienen aplicando α_{-n}^i y $\hat{\alpha}_{-n}^i$ con $n > 0$ sobre el vacío. Cada excitación de la cuerda corresponde a una partícula, como veremos más adelante.

La fórmula de masas es análoga al caso clásico 1.27 salvo una diferencia importante. Clásicamente el producto de α_{-n}^i y α_n^i conmuta, por lo que hay una ambigüedad en el orden a asignar a los operadores $\hat{\alpha}_{-n}^i$ y $\hat{\alpha}_n^i$. La ambigüedad introduce una constante c desconocida en el operador de la masa al cuadrado,

$$\hat{m}^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - c \right) = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i - c \right). \quad (1.30)$$

Por conveniencia, definimos los operadores número

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i \quad , \quad \hat{\tilde{N}} = \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \hat{\tilde{\alpha}}_n^i \hat{\tilde{\alpha}}_n^i, \quad (1.31)$$

por lo que

$$\hat{m}^2 = \frac{4}{\alpha'} (\hat{N} - c) = \frac{4}{\alpha'} (\hat{\tilde{N}} - c). \quad (1.32)$$

La condición $\hat{N} = \hat{\tilde{N}}$ se conoce como *level-matching*.

La forma general de determinar c (la carga central) consiste en imponer la simetría Weyl. Nosotros no entraremos en los detalles, nos basta saber que para cuerdas bosónicas libres bosónicas, $c = \frac{d-2}{24}$.

Espectro de una cuerda

En el estado de vacío, $\hat{N} |0; p\rangle = \hat{\tilde{N}} |0; p\rangle = 0$, por lo que la masa es

$$m^2 = -\frac{1}{\alpha'} \frac{d-2}{6}. \quad (1.33)$$

Si $d > 2$ la masa al cuadrado de la cuerda es negativa (masa imaginaria) y la partícula a la que corresponde se denomina taquión. Los taquiones aparecen también en teoría cuántica de campos al estudiar un campo ϕ con un potencial $V(\phi)$. La masa de la partícula asociada al campo es

$$m^2 = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2}. \quad (1.34)$$

Por tanto, una masa al cuadrado negativa indica que estamos haciendo una expansión en torno a un máximo. Un ejemplo es el campo de Higgs cuando el valor del campo es cero. A pesar de los problemas que introduce un taquión, no lo tendremos más en cuenta. De todas formas, al considerar cuerdas fermiónicas en la teoría supersimétrica, el taquión desaparece.

El primer estado excitado se obtiene como

$$\hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle, \quad (1.35)$$

con masa

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(1 - \frac{d-2}{24} \right). \quad (1.36)$$

Teniendo en cuenta los valores posibles de i y j hay $(d-2)^2$ estados excitados.

Rematar

Para que estos estados puedan describirse mediante la clasificación de Wigner de las representaciones del grupo de Poincaré, los estados han de ser una representación $SO(d-2)$. Esto significa que las partículas tienen masa nula, en caso contrario, se rompería la simetría de Lorentz. Como $m^2 = 0$, obtenemos que la dimensión del espacio-tiempo es

$$d = 26. \quad (1.37)$$

Además, la representación de estos estados se descompone en una parte simétrica, una antisimétrica y una traza. Los campos asociados son el campo del gravitón $G_{\mu\nu}$, el campo Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ y el dilatón Φ , respectivamente.

Por tanto, la teoría bosónica predice métrica de la relatividad general $G_{\mu\nu}$ de forma natural, además de otro campo tensorial y un campo escalar.

Las siguientes excitaciones empiezan a tener masas del orden de la masa de Planck

$$M_p \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \approx 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \quad (1.38)$$

y están muy lejos de ser observadas. Sin embargo, el resto del trabajo se centrará en cuerdas a esta escala de energía.

Cuerdas supersimétricas

Las cuerdas supersimétricas describen tanto bosones como fermiones. La teoría es supersimétrica porque a cada bosón le corresponde un fermión y vice versa.

Existen dos formas de incorporar fermiones: en las cuerdas de tipo II, los fermiones se mueven en la worldsheet hacia la izquierda y a la derecha, mientras que las cuerdas heteróticas, solo se mueven hacia la izquierda. En ambos casos, la dimensión del espacio-tiempo es $d = 10$.

Acabar

La integral de camino

Una forma alternativa de cuantizar una teoría clásica consiste en la integral de camino, introducida por Feynman. Sin entrar en detalles, la amplitud de probabilidad de que una partícula que está localizada en (x_0, t_0) , se detecte en (x', t') se calcula teniendo en cuenta todas las trayectorias que podría tomar la partícula entre estos dos puntos. La amplitud de probabilidad asociada a cada trayectoria x depende de la acción de esa trayectoria como $e^{i/\hbar S[x]}$ y la amplitud total es simplemente la suma de las amplitudes de probabilidad de todas las trayectorias posibles. Las amplitudes de probabilidad difiere solo en la fase y no en la amplitud, por lo que habrá interferencia entre las distintas trayectorias. En el límite clásico, la única contribución viene dada por la trayectoria clásica. Formalmente, la amplitud de probabilidad se expresa mediante el propagador

$$K(x', t'; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}. \quad (1.39)$$

La integral no es integral el sentido habitual (Riemann o Lebesgue) y su definición matemática es muy elaborada, pero basta tomarla en el sentido de suma de caminos. Para evitar tratar con un integrando complejo, reemplazaremos el tiempo t en la acción por un tiempo imaginario de modo que

$$K(x', t'; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar}. \quad (1.40)$$

Este procedimiento se conoce como rotación de Wick y su justificación matemática también presenta complicaciones.

La integral de camino en teoría de cuerdas se define de manera análoga, pero integramos sobre todas las trayectorias de la cuerda y sobre todas la métricas de la worldsheet,

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}h e^{-S_p + \lambda \chi}. \quad (1.41)$$

En el exponente aparece un factor adicional $\lambda\chi$ que determina cómo contribuyen las trayectorias de cuerdas en una determinada topología de la worldsheet. La constante λ determina cómo interaccionan las cuerdas entre sí y χ es la característica de Euler de la worldsheet. La característica de Euler de una superficie de género g (número de agujeros) es

$$\chi = 2(1 - g). \quad (1.42)$$

Añadir dibujo

Para incorporar interacciones de cuerdas con campos de fondo, introducimos términos adicionales a la acción. Por ejemplo, el model sigma no lineal describe cuerdas propagándose en campos $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ y Φ .

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} [(h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + i\epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \alpha' R \Phi]. \quad (1.43)$$

Dualidad T

Una propiedad muy importante de las teorías de cuerdas es la dualidad T, que describe la equivalencia entre dos teorías distintas. Consideremos cuerdas bosónicas con una dimensión espacial formando un círculo de radio R , es decir, con una dimensión compactificada. El momento p en la dimensión compacta no puede tomar cualquier valor, sino que está cuantificado,

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.44)$$

Llamaremos a n momento discreto. Pero además las cuerdas pueden enrollarse sobre la dimensión compacta w veces, dando lugar a la contribución al momento total wR/α' .

La fórmula de masas con una dimensión compacta es

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \bar{N} - 2). \quad (1.45)$$

Si hacemos la transformación $R \leftrightarrow \alpha'/R$ y $n \leftrightarrow w$, la masa de la cuerda no varía. Este es un ejemplo de la dualidad T, cuerdas moviéndose en un círculo de radio R equivalen a cuerdas moviéndose en un círculo de radio α'/R . Por tanto, las cuerdas no distinguen entre círculos pequeños y grandes.

En presencia de campos adicionales, las reglas de transformación son

$$\begin{aligned}
 G_{00} &\rightarrow \frac{1}{G_{00}}, & G_{0i} &\rightarrow \frac{B_{0i}}{G_{00}}, & G_{ij} &\rightarrow G_{ij} - \frac{G_{0i}G_{0j}}{G_{00}} + \frac{B_{0i}B_{0j}}{G_{00}}, \\
 B_{0i} &\rightarrow \frac{G_{0i}}{G_{00}}, & B_{ij} &\rightarrow B_{ij} - \frac{G_{0i}B_{0j}}{G_{00}} + \frac{B_{0i}G_{0j}}{G_{00}}, \\
 \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{00}, & n &\leftrightarrow w
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

y se conocen como reglas de Buscher.

Capítulo 2

Termodinámica de cuerdas

En este capítulo deduciremos la temperatura de Hagedorn mediante varios enfoques. Calculando la divergencia de la función de equipartición, coalescencia, energía libre

2.1. Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada

Queremos calcular cuántos estados distintos puede tomar una cuerda para una energía dada. La fórmula de masas 1.32 para una cuerda bosónica cerrada en $d = 26$ es

$$\alpha' m^2 = -4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.1)$$

La masa depende de los valores que tomen los números de oscilador N y \bar{N} , que además han de cumplir el level-matching $N = \bar{N}$. Las distintas excitaciones de una cuerda se obtienen aplicando los operadores de creación α_{-n}^i y $\bar{\alpha}_{-n}^i$ sucesivamente sobre el estado fundamental. Como para un mismo número de oscilador, la cuerda puede haber sido excitada en distintas direcciones i y hay aplicando distintas combinaciones de operadores de creación, hay degeneración energética.

Tomemos como ejemplo el primer estado excitado, $N = 1$, se forma mediante $\bar{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |p; 0\rangle$. Como i y j toman $d - 2$ valores independientes (al trabajar en la gauge del cono de luz hemos perdido dos grados de libertad) hay $(d - 2)^2$ estados posibles (576).

Para $N = 2$, los estados posibles son del tipo $\bar{\alpha}_{-2}^i \bar{\alpha}_{-2}^j |p; 0\rangle$, $\bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l |p; 0\rangle$, $\bar{\alpha}_{-2}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p; 0\rangle$ y $\bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-2}^k |p; 0\rangle$. En total, hay $(d-2)^2(d-1) + (d-2)^2 + (d-2)^4$ (346752).

El número de estados para un valor de N se denomina las particiones de N y se denota por $p(N)$. Para valores altos de N , se aproxima por la fórmula de Hardy-Ramanujan

$$p(N) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N(d-2)}{6}}\right), \quad (2.2)$$

donde α es una constante.

Si N es muy grande, se puede aproximar la masa por un espectro continuo y se define la densidad de estados $\rho(M)$ de forma que $\int dM \rho(M)$ proporciona el número total de estados

En el caso de cuerdas bosónicas cerradas, la densidad de estados en función de la masa

$$\rho(M) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N(d-2)}{6}}\right). \quad (2.3)$$

Ahora buscamos la densidad de estados en función de la energía, suponiendo que hay $d - D - 1$ dimensiones compactas de radio R_i . La energía de la cuerda es

$$\alpha E^2 = \alpha' \mathbf{p}^2 + \alpha' \frac{n_i^2}{R_i^2} + \frac{w_i^2 R_i^2}{\alpha'} - 4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.4)$$

Puesto que la densidad de estados en función de N crece exponencialmente, mientras que la densidad de estados en función de $|\mathbf{p}|$ crece como una potencia, hacemos la aproximación $|\mathbf{p}| \ll E$.

$$\omega(E) \approx V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.5)$$

Donde

$$\beta_H = 2\pi\sqrt{\alpha'}\sqrt{\frac{d-2}{6}}. \quad (2.6)$$

La temperatura $T_H = 1/(k_B \beta_H)$ se denomina temperatura de Hagedorn.

La función de partición es la transformada de Laplace de la densidad de estados,

$$z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} dE \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{-\beta E}, \quad (2.7)$$

donde se integra desde E_0 porque la expresión de la densidad de estados solo es válida a altas energías. La integral diverge si $\beta < \beta_H$, por lo que T_H aparece

como una temperatura límite a partir de la cual la función de partición deja de tener sentido.

La contribución no analítica dominante de la función de partición a alta temperatura se aproxima por

$$\begin{aligned} z &\propto (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par,} \\ z &\propto (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Conclusión

2.2. Modelo random walk

Una forma heurística sencilla pero heurística de obtener la densidad de estados de una cuerda es mediante el modelo *random walk*. Consideremos una cuerda abierta. La masa (energía) de una cuerda es su densidad lineal σ por su longitud L , que la cuerda está dividida en N segmentos de longitud l_s con masa asociada m_s ,

$$E = \sigma L = \frac{m_s}{l_s} L. \quad (2.9)$$

En unidades naturales, la masa tiene unidades inversas a la longitud, por lo que $m_s \sim l_s^{-1}$. Entonces,

$$E \sim \frac{L}{l_s^2}. \quad (2.10)$$

Cada segmento podrá tener una orientación arbitraria. Para simplificar los cálculos, supongamos que solo toman direcciones ortogonales. Entonces el número de orientaciones posibles de cada segmento es $2n$, donde n es el número de dimensiones espaciales accesibles. El número de segmentos es L/l_s . Por tanto, el número de microestados para una energía dada es

$$\omega(E) = (2n)^{(L/l_s)} \propto e^{l_s E \ln(n)}. \quad (2.11)$$

Para una cuerda cerrada, habría que dividir el número de microestados por el volumen que ocupa, multiplicar por el volumen accesible y dividir por la longitud de la cuerda. Recuperamos la densidad de estados vista en la sección anterior,

$$\omega(E) \sim V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{1+D/2}}. \quad (2.12)$$

Sin embargo, este procedimiento no permite obtener el valor concreto de β_H .

2.3. Coalescencia multicuerda

Tras haber estudiado una sola cuerda, pasamos a considerar un gas de cuerdas. Las cuerdas pueden interaccionar entre sí, uniéndose o dividiéndose, por lo que no tiene sentido fijar el número de cuerdas. Como no cuesta ninguna energía crear una cuerda, el potencial químico es nulo, $\mu = 0$. Veremos dos formas alternativas de concluir que al aumentar la temperatura, las cuerdas tienden a unirse en una sola cuerda. Comparando las densidades de estados y las funciones de partición para una sola cuerda un gas de cuerdas, veremos que las cuerdas tienden a unirse en una sola cuerda.

Densidad de estados

La función de partición de una cuerda se relaciona con la densidad de estados de una cuerda $\omega(E)$, mediante una transformada de Laplace

$$z(\beta) = \int_0^\infty \omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.13)$$

Del mismo modo, la función de partición de un sistema de cuerdas se obtiene a partir de la densidad de estados de un gas de cuerdas $\Omega(E)$, como

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.14)$$

Aplicando la aproximación de Maxwell-Boltzmann $Z = e^z$ y haciendo un desarrollo de Taylor,

$$\begin{aligned} Z = e^z &= 1 + \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) e^{-\beta E_1} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(E_1) \omega(E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)} \dots \\ &= \int_0^\infty dE \delta(E) + \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) \delta(E - E_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 \omega(E_1) \omega(E_2) \delta(E - E_1 - E_2) \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde hemos aplicado la propiedad de la delta de Dirac $\int_0^\infty dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$. Comparando las ecuaciones 2.14 y 2.15,

$$\Omega(E) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n dE_i \omega(E_i) \delta\left(E - \sum_{j=1}^n E_j\right). \quad (2.16)$$

Procedemos a sustituir la densidad de estados para una sola cuerda,

$$\omega(E) \sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.17)$$

Puesto que la densidad de estados 2.17 solo es válida para altas energías, acotamos inferiormente las integrales por E_0 . Suponiendo además que para la variable de integración E_1 se cumple $E = E_1$ e ignorando la contribución del vacío ($n = 0$), pues solo es relevante a $E = 0$, la densidad de estados es

$$\begin{aligned}\Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{2}{DE_0} \right)^{n-1}, \quad D > 0, \\ \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\ln \frac{E}{E_0} \right)^{n-1}, \quad D = 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

La suma da lugar a una exponencial,

$$\begin{aligned}\Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{\frac{2}{DE_0}}, \quad D > 0 \\ \Omega(E) &\sim \frac{e^{\beta_H E}}{E_0}, \quad D = 0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Comparando la densidad de estados de múltiples cuerdas con la densidad de estados de una sola cuerda, vemos que ambas coinciden si $D > 0$. Esto quiere decir que a altas energías, predomina una sola cuerda muy larga.

Función de partición

Otra forma de estudiar el comportamiento termodinámico es examinando la falta de analiticidad de la función de partición. La función de partición de una sola cuerda es (2.8),

$$\begin{aligned}z &= (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par} \\ z &= (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Aplicando la aproximación Maxwell-Boltzmann $Z = e^z$,

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= 1 - C(\beta - \beta_H)^{D/2} + \frac{C^2}{2}(\beta - \beta_H)^D - \frac{C^3}{6}(\beta - \beta_H)^{3D/2} + \dots, \quad \text{si } D \text{ impar} \\ Z(\beta) &= 1 - C(\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H) + \frac{C^2}{2}(\beta - \beta_H)^D \ln(\beta - \beta_H)^2 \\ &\quad - \frac{C^3}{6}(\beta - \beta_H)^{3D/2} \ln(\beta - \beta_H)^3 + \dots, \quad \text{si } D \text{ par.}\end{aligned}\tag{2.21}$$

Ignorando el término constante, la contribución principal a la no analiticidad de la función de partición coincide con la asociada a una sola cuerda, salvo si $D = 0$.

2.4. Termodinámica de cuerdas en espacio plano

En esta sección calcularemos la energía libre de un gas de cuerdas en el espacio de Minkowski, con el fin de generalizar la temperatura de Hagedorn en un espacio curvo.

La función de partición bosónica para un solo grado de libertad con un espectro discreto es $z = \prod_i 1/(1 - \exp(-\beta E_i))$. La energía libre viene dada por $F = -1/\beta \ln z = 1/\beta \sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i))$. Si el espectro es continuo, con $E = E(k)$, reemplazamos el sumatorio por $V \int d^{d-1}k/(2\pi)^{d-1}$. Por tanto,

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \ln(1 - \exp(-\beta E)). \quad (2.22)$$

Expandiendo el logaritmo por el desarrollo de Taylor $\ln(1 - x) = -\sum_{r=1}^{\infty} x^r/r$,

$$F = -\frac{V}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp(-r\beta E). \quad (2.23)$$

Aplicando la identidad

$$\frac{1}{r} \exp(-\beta r E) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{E^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right), \quad (2.24)$$

y como $E^2 = k^2 + m^2$, se llega a

$$F = -\frac{V}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left(-\frac{k^2 s}{2}\right). \quad (2.25)$$

La integral en momentos tiene como resultado $(2\pi s)^{\frac{d-1}{2}}$, por lo que

$$F = -V \int_0^{\infty} \frac{ds}{s(2\pi s)^{d/2}} \sum_{r=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right). \quad (2.26)$$

En una teoría de cuerdas bosónica, para la cual $d = 26$, la energía libre se obtendría sumando las energías libres para todo el espectro posible, con la fórmula de masas

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2). \quad (2.27)$$

La energía libre sería

$$F = \sum_i \delta_{N_i \bar{N}_i} F(N_i, \bar{N}_i), \quad (2.28)$$

donde i recorre todas las posibles combinaciones de N_i y \bar{N}_i . La delta the Kronecker impone la condición $N = \bar{N}$. Empleando la forma integral de la delta

de Kronecker

$$\delta_{N\bar{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \exp(2\pi i \tau_1 (N - \bar{N})), \quad (2.29)$$

y haciendo el cambio de variable $s = 2\pi\alpha'\tau_2$,

$$F = -V \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2 (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_i e^{-(N_i + \bar{N}_i - 2)2\pi\tau_2} e^{-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 e^{2\pi i \tau_1 (N_i - \bar{N}_i)}. \quad (2.30)$$

El apóstrofe indica que se ha omitido el término con $r = 0$ del sumatorio, pues es la contribución de vacío que no depende de la temperatura.

Definiendo $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ y $q = e^{2\pi i \tau_1}$, introducimos la η de Dedekind como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.31)$$

Sustituyendo, llegamos a

$$F = -V \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} |\eta(\tau)|^{-2d+4} \exp\left(-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right). \quad (2.32)$$

Para valores próximos a $\tau_2 = 0$, los términos con $r = \pm 1$ proporcionan la divergencia dominante. El comportamiento de la exponencial en 2.32 es

$$\exp\left(\frac{16\pi^2 \alpha' - \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right), \quad (2.33)$$

por lo que al integrar τ_2 desde cero, la energía libre diverge si $\beta \leq \beta_H = 4\pi\sqrt{\alpha'}$.

El mismo resultado se obtiene calculando la integral de camino en el toro

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\right), \quad (2.34)$$

considerando cuerdas que se enrollan r veces alrededor de una dimensión temporal de periodo β y aplicando $F = -Z/\beta$. La importancia de este resultado es permite hacer el cálculo de la energía libre en espacio curvo.

Formulación invariante modular

Se ha llegado a una expresión cuyo integrando no es invariante modular. Es

Dibujo

decir, las transformaciones modulares $\tau \rightarrow \tau + 1$ y $\tau \rightarrow -1/\tau$ en el integrando modifican el resultado de la integral. Cualquier punto del plano complejo puede ser llevado al dominio fundamental,

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1, \operatorname{Re} \tau \in [-1/2, 1/2]\} \quad (2.35)$$

mediante composición de transformaciones modulares.

Para conseguir la invariancia modular, se restringe el dominio de integración al dominio fundamental y se modifica el integrando, añadiendo el número cuántico w sobre el que se suma, de modo que para $d = 26$ se tiene

$$F = -V \sum_{r,w=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{13}} |\eta(\tau)|^{-48} \exp\left(-\frac{|r^2 - w\tau|^2 \beta^2}{4\pi \alpha' \tau_2}\right). \quad (2.36)$$

Esta expresión de la energía libre se puede calcular como $F = -Z/\beta$, siendo Z la integral de camino del toro en un espacio donde la dimensión temporal forma un círculo de radio $R = \beta/(2\pi)$ y con enrollamientos de las cuerdas.

Una forma equivalente de expresar la integral es tomando la traza sobre todos los estados posibles,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \text{Tr} \left(q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right), \quad (2.37)$$

donde

$$\begin{aligned} L_0 &= -\alpha' \frac{m^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{2\pi n}{\beta} + \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + N, \\ \bar{L}_0 &= -\alpha' \frac{m^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{2\pi n}{\beta} - \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \bar{N}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Al haber excluido la región próxima a $\tau_2 = 0$ en la integral, la divergencia de Hagedorn aparece para valores muy altos de τ_2 . La divergencia se manifiesta al tomar la traza sobre el estado con $w = \pm 1$, $n = 0$ y $N = \bar{N} = 0$. La masa de este estado es

$$\alpha' \frac{m^2}{4} = \frac{\beta^2}{16\pi^2 \alpha'} - 1. \quad (2.39)$$

A la temperatura de Hagedorn, el estado tiene masa nula y a temperaturas superiores, masa imaginaria.

En resumen, si compactificamos el tiempo e identificamos periodo temporal con el inverso de la temperatura, podemos calcular la energía libre mediante una integral de camino restringida al dominio fundamental. El estado que se enrolla una vez en el tiempo es el responsable de la divergencia de Hagedorn y a temperaturas por encima de la temperatura de Hagedorn se vuelve taquiónico. Es importante notar que es un estado efectivo, pues no aparece en el espectro de la cuerda en el espacio de Minkowski, sino que es consecuencia de compactificar el tiempo. Sin embargo, este enfoque es muy útil para poder hacer una generalización a espacios curvos.

Comentar más allá de Hagedorn? No perturbativo, interacciones, transición de fase...

Capítulo 3

QFT en sistemas acelerados y espacio curvo

3.1. Efecto Unruh

Una propiedad sorprendente de las teorías cuánticas de campos es que el estado de vacío puede depender del observador. Concretamente, el efecto Unruh establece que el vacío para un observador inercial, visto por un observador con aceleración constante corresponde con un estado térmico a temperatura

$$T_U = \frac{a}{2\pi k_B}. \quad (3.1)$$

En la deducción del efecto Unruh estudiaremos un campo escalar sin masa $\phi(t, z)$ en un espacio de Minkowski con una dimensión espacial t y una dimensión espacial z .¹ La ecuación que describe el campo es la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

La solución general de esta ecuación de ondas toma la forma

$$\phi(x, t) = f(t - x) + g(t + x). \quad (3.3)$$

Las funciones f y g representan dos ondas que se mueven a la velocidad de la luz en sentidos opuestos. Hacemos el cambio de variable a coordenadas nulas

$$U = t - z, \quad V = t + z. \quad (3.4)$$

¹Es posible derivar el efecto Unruh para teorías más generales empleando la integral de camino euclídea, véase [4]

2CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

De este modo, la solución general se expresa como

$$\phi(U, V) = \phi_U(U) + \phi_V(V). \quad (3.5)$$

Nos interesa expandir la solución en términos de ondas armónicas

$$\phi_\omega^U(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \quad (3.6)$$

$$\phi_\omega^V(V) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}. \quad (3.7)$$

Puesto que la solución ϕ_V está desacoplada de ϕ_U , basta considerar ϕ_U ya que el tratamiento de ϕ_V sería análogo.

La expansión del campo en modos es

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^U \phi_\omega^U(U) + a_\omega^{U*} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.8)$$

El proceso de cuantización canónica consiste en reemplazar en valor del campo en cada punto del espacio-tiempo $\phi(x, t)$, por un operador $\hat{\phi}(x, t)$ que satisfará unas relaciones de conmutación particulares. Esto significa que los coeficientes de la expansión de ϕ_U pasan a ser los operadores \hat{a}_ω^U y $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$ y por tanto

$$\hat{\phi}_U(U) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega^U \phi_\omega^U(U) + \hat{a}_\omega^{U\dagger} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.9)$$

El operador $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$ se denomina operador creación, pues veremos que crea partículas de frecuencia ω y \hat{a}_ω^U se conoce como operador destrucción porque aniquila partículas de frecuencia ω . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$[\hat{a}_\omega^{U\dagger}, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = [\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^U] = 0, \quad (3.10)$$

$$[\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.11)$$

Todavía no hemos especificado el espacio de Hilbert sobre el que actúa el operador del campo, el cual se denota por \mathcal{H}_ϕ . El estado del campo queda especificado descrito por un elemento de \mathcal{H}_ϕ . Como en este caso los modos U y V están desacoplados, podemos considerar independientemente el espacio de Hilbert asociado a cada uno, \mathcal{H}_U y \mathcal{H}_V . El espacio de Hilbert del campo es el producto tensorial de ambos $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$.

La base del espacio \mathcal{H}_U se puede construir mediante la representación de Fock. Para ello, se define el estado de vacío $|0_U\rangle$, como el estado que no contiene ningún tipo de partícula, por tanto

$$a_\omega^U |0_U\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Donde omitimos el acento circunflejo de los operadores por comodidad. Luego procedemos a crear estados con n_i partículas de frecuencia ω_i , mediante aplicación repetida del operador creación $a_{\omega_i}^{U\dagger}$, con la normalización apropiada

$$|n_{1,\omega_1}, n_{2,\omega_2}, \dots, n_{N,\omega_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots n_N!}} (a_{\omega_1}^{U\dagger})^{n_1} (a_{\omega_2}^{U\dagger})^{n_2} \dots (a_{\omega_N}^{U\dagger})^{n_N} |0_U\rangle. \quad (3.13)$$

Los estados construidos son estados propios del operador número de partículas $N_{\omega_i}^U = a_{\omega_i}^{U\dagger} a_{\omega_i}^U$ con valor propio n_i . La base de \mathcal{H}_U se obtiene juntando los estados con un número arbitrario de partículas de todas las frecuencias posibles. Supongamos que queremos expandir el campo en otra base de modos u

$$\phi_\omega^u(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u(U)}, \quad (3.14)$$

entonces

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^u \phi_\omega^u(U) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(U)^*]. \quad (3.15)$$

Expandiendo la nueva base en términos de la anterior

$$\phi_\omega^u(U) = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U) + \beta_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U)^*]. \quad (3.16)$$

Los coeficientes $\alpha_{\omega\omega'}$ y $\beta_{\omega\omega'}$ se denominan coeficientes de Bogoliubov y vienen dados por

$$\alpha_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) - \omega' U)}, \quad (3.17)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) + \omega' U)}. \quad (3.18)$$

Cuantizando la teoría y formando el espacio de Fock, comprobamos que el vacío obtenido mediante los modos $\phi_\omega^U(U)$, puede contener partículas asociadas a los modos u si el coeficiente $\beta_{\omega\omega'}$ no es nulo

$$\langle N_\omega^u | 0_U | N_\omega^u \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que en una teoría cuántica de campos, el vacío depende de la base de modos que se haya escogido antes de la cuantización. La ambigüedad se puede resolver escogiendo el vacío que tenga la mínima energía. En el espacio de Minkowski la energía está bien definida y coincide para todos los observadores inerciales, al ser invariante de Lorentz. Sin embargo, en un espacio-tiempo curvo

el concepto de energía puede no estar bien definido y por tanto no hay un estado de vacío privilegiado.

Con el fin de estudiar cuál es el vacío dado por un observador acelerado en un espacio de Minkowski, introducimos las coordenadas de Rindler (η, ξ) definidas por

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad (3.20)$$

$$z = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (3.21)$$

donde $|t| < z$ y $a > 0$.

Las coordenadas de Rindler solo cubren la región $|t| < z$, denominada cuña derecha de Rindler. De forma análoga, se puede cubrir la cuña izquierda de Rindler ($|t| < -z$) mediante las coordenadas $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ dadas por

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \sinh a\tilde{\eta} \quad (3.22)$$

$$z = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \cosh a\tilde{\eta}. \quad (3.23)$$

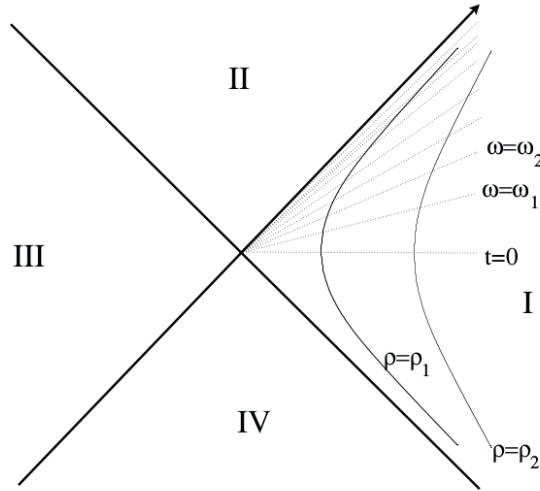


Figura 3.1: Espacio de Minkowski en coordenadas de Rindler (usar imagen libre)

Las trayectorias con $\eta = \eta_0$ constante corresponden con observadores que se mueven con aceleración propia $ae^{-a\xi_0}$. El tiempo propio que miden estos observadores es $\tau = e^{a\xi_0}\eta$. Escogiendo apropiadamente el origen de coordenadas, un observador con aceleración constante viene dado por $\eta = \tau$ y $\xi = 0$.

Fijándonos en el diagrama de Rindler (figura 3.1), un observador con aceleración constante moviéndose a la derecha no puede percibir los efectos producidos en III ni influir en II. Además, la información que le llegue de II será percibida como proveniente de un tiempo infinitamente anterior, por lo que la recta $t = z$ define un horizonte de sucesos futuro y la recta $t = -z$ un horizonte de sucesos pasado.

Como el observador acelerado hacia la derecha desconoce el estado del campo en la cuña izquierda de Rindler, el estado que percibe no es puro, si no mixto. La descripción de estados mixtos se realiza mediante una matriz de densidad, que al trazar sobre los estados desconocidos conduce a que el vacío sea un estado térmico. Con el fin de hacer la deducción explícita, partimos de la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Rindler para la cuña derecha

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.24)$$

Definiendo las coordenadas nulas de Rindler

$$u = \eta - \xi = -\frac{1}{a} \ln(-aU), \quad (3.25)$$

$$v = \eta + \xi = \frac{1}{a} \ln(aV), \quad (3.26)$$

la solución general de 3.24 es $\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v)$, que se expande en los modos normales

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \\ \phi_\omega^u(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicaríamos un tratamiento análogo a la cuña izquierda.

El campo propagándose hacia la derecha en coordenadas de Minkowski se expande como

$$\begin{aligned} \phi_U(U) &= \int_0^\infty \Theta(-U) [a_\omega^u \phi_\omega^u(u(U)) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(u(U))^*] \\ &\quad + \Theta(U) [a_\omega^{\tilde{u}} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + a_\omega^{\tilde{u}*} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde $\Theta(U)$ es la función de Heaviside

$$\Theta(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } U < 0 \\ 1 & \text{si } U > 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

28CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

El cálculo de los coeficientes de Bogoliubov conduce a

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega,\omega'}^u &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a), & \beta_{\omega,\omega'}^u &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a) \\ \alpha_{\omega,\omega'}^{\tilde{u}} &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a), & \beta_{\omega,\omega'}^{\tilde{u}} &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a)\end{aligned}\quad (3.30)$$

Por conveniencia, los modos de Unruh se definen como

$$\begin{aligned}\phi_\omega^I(U) &= \Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*, \\ \phi_\omega^{II}(U) &= \Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U))^*,\end{aligned}\quad (3.31)$$

los cuales están definidos en todo el espacio de Minkowski.

La cuantización de los modos de Unruh conduce a los operadores de destrucción

$$\begin{aligned}a_\omega^I &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} a_{\omega'}^U, \\ a_\omega^{II} &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^u a_{\omega'}^U.\end{aligned}\quad (3.32)$$

El vacío de estos modos es el vacío de Minkowski, es decir

$$a_\omega^I |0_H\rangle = a_\omega^{II} |0_H\rangle = 0. \quad (3.33)$$

Para buscar el valor esperado de partículas que observa un observador acelerado en el vacío de Minkowski, primero calculamos

$$\langle 0_H | a_\omega^{u\dagger} a_\omega^u | 0_H \rangle = \int_0^\infty d\omega'' \beta_{\omega\omega''}^u \beta_{\omega'\omega''}^{u*} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.34)$$

En el límite $\omega' \rightarrow \omega$, esta cantidad es el valor esperado de partículas que se detectarían, pero debido a la delta, se obtiene una divergencia. El motivo es que calcular el número de partículas en toda la cuña derecha de Rindler, implica que hay que considerar un observador acelerado eternamente, lo que requiere infinita energía. En una situación real, la delta se transformaría en un valor finito. Por tanto,

$$\langle 0_H | N_\omega^u | 0_H \rangle \sim \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1}. \quad (3.35)$$

Este valor esperado se corresponde con un sistema de bosones a temperatura $T = a/(2\pi k_B)$. Sin embargo, todavía no conocemos la forma exacta del vacío de Minkowski.

Pq usar paquetes? Se puede omitir de la demostración?

En vez de considerar ondas armónicas con frecuencia bien definida, trabajamos

con paquetes de onda con resolución $\Delta\omega$ centrados en $(n + 1/2)\Delta\omega$,

$$\phi_{n\bar{n}}^u(u) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{n\Delta\omega}^{(n+1)\Delta\omega} d\omega e^{i\frac{2\pi\bar{n}n}{\Delta\omega}\omega} \phi_{\omega}^u(u). \quad (3.36)$$

Al cuantizar estos paquetes se introduce para la cuña derecha el operador destrucción $a_{n\bar{n}}^u$ y en la cuña izquierda $a_{n\bar{n}}^{\tilde{u}}$. Construyendo los modos de Unruh asociados a paquetes de ondas, se obtiene que los operadores $a_{n\bar{n}}^I$ y $a_{n\bar{n}}^{II}$ cumplen

$$a_{n\bar{n}}^I |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{II} |0_U\rangle = 0. \quad (3.37)$$

De la expresión de $a_{n\bar{n}}^I$ y $a_{n\bar{n}}^{II}$ en términos de $a_{n\bar{n}}^u$ y $a_{n\bar{n}}^{\tilde{u}}$, se llega a

$$a_{n\bar{n}}^{u\dagger} a_{n\bar{n}}^u |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{\tilde{u}\dagger} a_{n\bar{n}}^{\tilde{u}} |0_U\rangle, \quad (3.38)$$

y por tanto hay el mismo número de partículas asociadas a paquetes de ondas de Rindler en ambas cuñas.

Teniendo en cuenta que el estado de vacío ha de contener el mismo número de partículas en cada cuña,

$$|0_H\rangle = \prod_{n,\bar{n}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \otimes |m_{n\bar{n}}\rangle_{\bar{u}} \right). \quad (3.39)$$

Tras calcular los coeficientes $K_{n\bar{n}}$ y hacer la traza parcial sobre los estados de la cuña izquierda, obtenemos que la matriz densidad

$$\rho \propto \prod_{n,\bar{n}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\pi mn\Delta\omega/a} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \langle m_{n\bar{n}}|_u \right), \quad (3.40)$$

que describe una distribución de Maxwell-Boltzmann a temperatura $T_U = a/(2\pi k_B)$.

Es \prod un producto tensorial/ suma directa?

Contradicción distribución MB vs BE?

3.2. Radiación de Hawking

La radiación de Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero negro. Esta radiación sigue una distribución de cuerpo negro a la temperatura de Hawking

$$T_{haw} = \frac{1}{8\pi k_B GM}. \quad (3.41)$$

3CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

Trabajaremos con el caso más sencillo de agujero negro, el agujero negro de Schwarzschild, que describe una distribución de masa con simetría esférica y estática. La métrica asociada es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.42)$$

Observamos que en el radio de Schwarzschild $r_s = 2MG$, la componente temporal de la métrica se anula mientras que la componente radial va a infinito, pero esta singularidad se debe a la elección particular de coordenadas. Se denomina horizonte de sucesos a la esfera de radio r_s centrada en $r = 0$. Desde el punto de vista de la relatividad general, la relevancia del horizonte de sucesos es que la materia que lo atravesase no podrá salir, sino que se caerá inevitablemente en la singularidad en $r = 0$. Por otro lado, la dilatación temporal de la gravedad hace que un observador fuera del agujero negro nunca vea materia atravesar el horizonte, solo la verá moverse arbitrariamente cerca del horizonte.

Es conveniente introducir la coordenada tortuga

$$r^* = r + 2MG \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right), \quad (3.43)$$

que toma el valor $r^* = -\infty$ en el horizonte. La métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)[-dt^2 + dr^{*2}] + r^2d\Omega^2. \quad (3.44)$$

Si estudiamos un campo escalar no masivo con simetría esférica $\psi(t, r)$, la ecuación de Klein-Gordon en un espacio de Schwarzschild es

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r^*} = 0. \quad (3.45)$$

Para ver cómo difiere esta ecuación de la ecuación de ondas unidimensional en espacio de Minkowski, hacemos el cambio $\psi = \phi/r$,

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^{*2}} - \frac{r_s}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \phi = 0. \quad (3.46)$$

Esta ecuación se corresponde con la ecuación de Klein-Gordon que vimos en 3.2, salvo por el término de potencial efectivo

$$V(r) = \frac{r_s}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (3.47)$$

En una primera aproximación podemos ignorar este potencial, pues su único efecto es distorsionar la radiación de Hawking emitida (*backscattering*).

Definiendo las coordenadas nulas Eddington-Finkelstein

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, \\ v &= t + r^*, \end{aligned} \quad (3.48)$$

la solución general es

$$\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v). \quad (3.49)$$

El campo se descompone en los modos de Boulware

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

El vacío asociado a la cuantización con estos modos se denomina vacío de Boulware y corresponde con el vacío que describe un observador en caída libre muy alejado de la fuente gravitacional.

Formación de un agujero negro

La energía radiada por el agujero negro proviene de la materia que colapsa para formar el agujero negro. Por tanto, tenemos que describir la formación de un agujero negro y ver cómo varía el estado de vacío para un observador asintótico. Suponemos que antes de formarse el agujero negro, la materia ocupa un volumen arbitrariamente grande, de forma que la métrica fuera del objeto es aproximadamente la métrica de Minkowski y el vacío es el correspondiente a cuantizar los modos

$$\begin{aligned} \phi_\omega^U(U) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \\ \phi_\omega^V(V) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde $U = t - r$ y $V = t + r$.

Una vez formado el agujero negro, todo el espacio viene descrito por la métrica de Schwarzschild y el estado de vacío para observadores inerciales alejados del agujero negro es el vacío de Boulware. Las partículas que emite el agujero negro y son detectadas por estos observadores se corresponden a los modos salientes

$$\phi_\omega^u(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}. \quad (3.52)$$

Tenemos que estudiar cómo se comportan los modos salientes al propagarlos al pasado, cuando todo el espacio es de Minkowski. Consideremos los modos que

3CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

escapan la materia en colapso poco antes de formarse el horizonte. Cerca del horizonte, si definimos la coordenadas de Kruskal-Szeckeres

$$\begin{aligned} u' &= -4MG e^{-\frac{u}{4MG}}, \\ v' &= 4MG e^{-\frac{v}{4MG}}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

los modos salientes son

$$\phi_{\omega}^u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega 4MG \ln \left| \frac{u'}{4MG} \right|}. \quad (3.54)$$

Vemos que al aproximarse al horizonte, $u' \rightarrow 0$, la frecuencia de estos modos tiende a infinito. Por tanto, podemos despreciar la interacción con la materia en colapso. La aparición de frecuencias arbitrariamente altas, las cuales deberían ser tratadas mediante una teoría de gravedad cuántica, se denomina problema transplanckiano.

Como cerca del horizonte la frecuencias son muy altas, los modos se pueden aproximar por rayos (aproximación de la óptica geométrica). Si definimos V_H de forma que $V = V_H$ es la trayectoria del último rayo que pasa por $r = 0$ y logra escapar justo antes de formarse el horizonte, podemos relacionar la coordenada u' con V . El modo a la distancia nula u' del horizonte se mantendrá en el pasado a la misma distancia de la trayectoria $V = V_H$. Por tanto,

$$\phi_{\omega}^u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega 4MG \ln |A(V_H - V)|}. \quad (3.55)$$

La constante A aparece por la evolución del campo gravitatorio durante el colapso. Entonces llegamos a la relación entre coordenadas de nulas de Eddington-Finkelstein futuras y de Minkowski pasadas, que describen la propagación de un rayo que atraviesa el objeto en colapso,

$$u' = -4MG \ln(A(V_H - V)). \quad (3.56)$$

Esta ecuación es equivalente a la relación entre coordenadas nulas de Rindler y de Minkowski (3.25) si identificamos $a = \frac{1}{4MG}$, salvo por las constantes A y V_H . Escogiendo los orígenes de coordenadas de u y V apropiados, la equivalencia se cumple exactamente. Haciendo un tratamiento análogo al del efecto Unruh, deduciríamos que para tiempo suficientemente tardíos, los observadores situados en $r \rightarrow \infty$ medirían un espectro de radiación correspondiente a un cuerpo negro

a la temperatura de Hawking,

$$T_{haw} = \frac{1}{8\pi k_B GM}. \quad (3.57)$$

En el siguiente capítulo, veremos cómo aparece esta misma temperatura al tratar el problema de Hagedorn cerca de agujeros negros.

Deducción alternativa

La métrica de Schwarzschild, en coordenadas de Rindler, cerca del horizonte se aproxima por

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{(4GM)^2} dt^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.58)$$

Si pasamos a un tiempo imaginario, $t \rightarrow \tau = it$, la métrica se convierte en

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{(4GM)^2} d\tau^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.59)$$

Esta métrica se corresponde al espacio euclídeo descrito en coordenadas polares. Para que la métrica no sea singular, el tiempo euclídeo debe tener periodo $\beta = 8\pi GM$.

Capítulo 4

Cuerdas en espacios curvos

Queremos ver cómo se modifica la temperatura de Hagedorn cerca de un agujero negro.

La temperatura de Hagedorn se extrae del comportamiento divergente de la energía libre.

Por tanto, necesitamos ver cómo calcular la energía libre en un espacio-tiempo curvo. Veremos dos métodos distintos: mediante la integral de camino en el toro de una cuerda que se enrolla en el tiempo de la variedad termal (tiempo euclídeo con periodo β) y la integral de camino a un loop de un campo taquiónico.

4.1. Path integral en la worldsheet

Partimos de la suposición que la integral de camino del toro de una cuerda cerrada, con un tiempo compactificado de periodo β , se relaciona con la energía libre de un gas de cuerdas mediante

$$Z = -\beta F. \quad (4.1)$$

Esta relación se ha demostrado exacta para ciertos casos.

La integral de camino del toro en una campo $G_{\mu\nu}$, el cual representa la curvatura del espacio-tiempo, en d dimensiones es

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}X \sqrt{G} e^{-S}, \quad (4.2)$$

donde el determinante de Faddeev-Popov se introduce debido a la libertad gauge bajo difeomorfismos y transformaciones de Weyl. La acción es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{[0,1]^2} d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Escogemos la métrica de la worldsheet como

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

La divergencia de Hagedorn aparece calcular la integral de camino de una que se enrolla en el tiempo a lo largo de la coordenada σ_2 , pues diverge en el límite $\tau_2 \rightarrow 0$. Las condiciones de periodicidad son

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^\mu(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^i(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^i(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^0(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^0(\sigma_1, \sigma_2) \pm \beta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aislar taquión

Haciendo la transformación modular $\tau \rightarrow -1/\tau$ e intercambiando σ_1 y σ_2 , las condiciones de periodicidad son

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma_1, \sigma_2 + 1) &= X^\mu(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^i(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^i(\sigma_1, \sigma_2), \\ X^0(\sigma_1 + 1, \sigma_2) &= X^0(\sigma_1, \sigma_2) \pm \beta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Definimos las nuevas coordenadas $\sigma = \sigma_1/\tau_2$ y $\tau = \sigma_2$, de modo que la acción se convierte en

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{1/\tau_2} d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \right) \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu G_{\mu\nu} + 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} \partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu G_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Haciendo un desarrollo de Fourier de $X^\mu(\sigma, \tau)$ en la coordenada σ , obtenemos

$$\begin{aligned} X^i(\sigma, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^i(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma}, \\ X^0(\sigma, \tau) &= \pm \beta\tau_2\sigma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^0(\tau) e^{in2\pi\tau_2\sigma}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definimos $X^i(\tau) = X_0^i(\tau)$ y $X^0(\tau) = X_0^0(\tau)$. En la sección 2.4, vimos que la divergencia de Hagedorn se produce al integrar en la región $\tau_2 \rightarrow \infty$. Por

tanto, nos quedamos con la contribución dominante, $n = 0$. Al integrar en τ_2 , obtenemos la acción de una partícula

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'\tau_2} \int_0^1 d\tau [\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)G_{00} \pm 2\beta\tau_1 G_{0\mu} \partial_\tau X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu]. \quad (4.9)$$

Despreciar el resto de modos en la serie de Fourier hace que a la acción resultante le falten términos adicionales. En una métrica plana, la corrección a la acción es

$$\Delta S = -\frac{\tau_2^2 \beta_{H0}^2}{4\pi\alpha'\tau_2}, \quad (4.10)$$

siendo β_{H0} la temperatura de Hagedorn en espacio plano. Incluyendo esta corrección y definiendo un nuevo parámetro $t = \tau_2\tau$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[-\beta_{H0}^2 \tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{0\mu} \partial_t X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_t X^\mu \partial_t X^\nu \right\} \right]. \quad (4.11)$$

En una métrica estacionaria y que cumpla $G_{0i} = 0$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[-\beta_{H0}^2 \tau_2 + \int_0^{\tau_2} dt \left\{ \beta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_2^2} G_{00} \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 + G_{00} (\partial_t X^0)^2 + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j \right\} \right]. \quad (4.12)$$

Si descomponemos la coordenada temporal en una parte clásica y una corrección adicional, $X^0 = X^c + \tilde{X}^0$, podemos hacer la integral de camino sólo sobre \tilde{X}^0 . Primero hemos de buscar la acción clásica. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\partial_t \left[G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \right] = 0. \quad (4.13)$$

Por lo que

$$G_{00} \partial_t X^c \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} = C. \quad (4.14)$$

Como la coordenada X^0 es periódica,

$$0 = X^0(\tau_2) - X^0(0) = X^0(t) \Big|_0^{\tau_2} = \int_0^{\tau_2} \partial_t X^0(t) dt = \langle \partial_t X^0 \rangle \quad (4.15)$$

Promediando,

$$\langle \partial_t X^c \rangle \pm \left\langle \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} \right\rangle = \left\langle \frac{C}{G_{00}} \right\rangle. \quad (4.16)$$

Obtenemos la constante

$$C = \pm \beta \frac{\tau_1}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} \quad (4.17)$$

La acción clásica es

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left\langle G_{00}(\partial_t X^0)^2 \pm 2\beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle. \quad (4.18)$$

Aplicando

$$\left\langle G_{00}(\partial_t X^0)^2 \pm \beta \frac{\tau_1}{\tau_2} G_{00} \partial_t X^0 \right\rangle = C \langle \partial_t X^0 \rangle = 0, \quad (4.19)$$

y

$$\langle G_{00} \rangle \partial_t X^0 = \tau_2 C \mp \frac{\tau_1}{\tau_2} \beta \langle G_{00} \rangle, \quad (4.20)$$

la acción clásica puede escribirse como

$$S^{cl} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\frac{\tau_1^2 \beta^2}{\langle G_{00}^{-1} \rangle} - \beta^2 \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \langle G_{00} \rangle \right]. \quad (4.21)$$

Como la trayectoria clásica hace estacionaria la acción, los términos lineales en \tilde{X}^0 se anulan y la integral de camino en \tilde{X}^0 , tras varios cálculos, es

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \alpha' \langle G_{00}^{-1} \rangle}} \beta. \quad (4.22)$$

La integral en τ_1 en la ecuación 4.2, da lugar al término

$$\frac{2\pi\sqrt{\alpha'}\sqrt{\langle G_{00}^{-1} \rangle}}{\beta}. \quad (4.23)$$

La integral de camino se reduce a

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2} \int \mathcal{D}\vec{X} \sqrt{\prod_t \det G_{ij}} e^{-S_p} \quad (4.24)$$

donde la acción es

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\int_0^{\tau_2} dt (-\beta_{H0}^2 + \beta^2 G_{00} + G_{ij} \partial_t X^i \partial_t X^j) \right]. \quad (4.25)$$

Hemos reducido la función de partición de una cuerda a la integral de camino de una partícula no relativista moviéndose en un espacio curvo.

No emplearemos este método, sino que haremos los cálculos con un campo efectivo.

4.2. Campo efectivo

En la sección 2.4 vimos que en un espacio plano, la divergencia de Hagedorn se manifiesta como un campo que se vuelve taquiónico a temperaturas por encima de la temperatura de Hagedorn. Por tanto, intentaremos hallar la energía libre a partir de la acción de un campo taquiónico en espacio curvo.

La acción de un campo taquiónico a orden más bajo en α' es

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{G} e^{-2\Phi} (G^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T + m^2 T^2), \quad (4.26)$$

donde T es un campo escalar real y Φ el campo del dilatón.

Si el tiempo tiene periodo $2\pi R = \beta$, el desarrollo de Fourier de T es

$$T(x^0, x^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x^i) e^{\frac{in x^0}{R}}. \quad (4.27)$$

Hay que tener en cuenta que $T_n(x^i)$ es un campo escalar complejo y n es el momento discretizado en la dimensión compacta. Suponemos una métrica estacionaria y $G_{i0} = 0$. Sustituyendo,

$$S = \sum_{n,m} \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left(-\frac{nm}{R^2} G^{00} \partial_0 T_n \partial_0 T_m + G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_m + m^2 T_n T_m \right) \int_{-\pi R}^{\pi R} \frac{dx^0}{2} e^{i \frac{n+m}{R} x^0}. \quad (4.28)$$

La integral en x^0 es $\pi R \delta_{-n,m}$, por lo que

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left(G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_{-n} + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_{-n} + m^2 T_n T_{-n} \right). \quad (4.29)$$

Como T es un campo real, $T_n = T_{-n}^*$ y por tanto

$$S = \sum_n \pi R \int d^{d-1} \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left(G^{ij} \partial_i T_n \partial_j T_n^* + \frac{n^2 G^{00}}{R^2} T_n T_n^* + m^2 T_n T_n^* \right). \quad (4.30)$$

Aunque en la acción solo aparece el momento n y no los enrollamientos w , la acción completa debería satisfacer la dualidad T, la cual apareció en la sección 1.3. Aprovechando la dualidad T, las transformaciones necesarias para

intercambiar el momento discreto por enrollamientos son

$$\begin{aligned} G_{00} &\rightarrow \frac{1}{G_{00}}, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{00}, \\ T_n &\rightarrow T_w, \\ R &\rightarrow \frac{\alpha'}{R}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

La acción en términos de enrollamientos del campo taquiónico es

$$S \sim \sum_w \int d^{d-1}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left(G^{ij} \partial_i T_w \partial_j T_w^* + \left(\frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2} + m^2 \right) T_w T_w^* \right). \quad (4.32)$$

Vemos que multiplicando a $|T_w|^2$, aparece un término de masa efectiva $m_{loc}^2 = m^2 + \frac{w^2 R^2 G_{00}}{\alpha'^2}$ que depende de la posición espacio-temporal.¹

Pq quitamos el dilatón

La contribución dominante vendrá dada por $w = \pm 1$, por lo que definimos $T = T_1$. Ignorando el campo del dilatón,

$$S = \int d^{d-1}x \sqrt{G_{00}} \sqrt{G_{ij}} (G^{ij} \partial_i T \partial_j T^* + m_{local}^2 T T^*). \quad (4.33)$$

Intentaremos interpretar esta acción como la de una partícula que se mueve en un espacio-tiempo con curvatura solo en la parte espacial y no en la temporal, para poder compararla con la acción obtenida en la sección anterior. Con este fin, hemos de eliminar el factor $\sqrt{G_{00}}$ del término cinético $G^{ij} \partial_i T \partial_j T^*$.

Integrando por partes la acción,

$$S = \int d^{d-1}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} T^* \left[-\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right] T, \quad (4.34)$$

donde $\nabla^2 = G^{ij} \nabla_i \partial_j$. La integral de camino asociada a esta acción se calcula buscando los propios del operador

$$\hat{O} = -\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2. \quad (4.35)$$

Definiendo el producto escalar

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G} \psi_1(x)^* \psi_2(x), \quad (4.36)$$

el operador \hat{O} es hermítico y por tanto posee un conjunto ortonormal de funciones propias ψ_n con valores propios reales, λ_n .

¹Haciendo el cálculo para cuerdas heteróticas, hay una corrección a esta fórmula.

La integral de camino da como resultado

$$Z = \int \mathcal{D}T e^{-S} = \prod_n \frac{1}{\lambda_n} = \det(\hat{O})^{-1}. \quad (4.37)$$

La contribución taquiónica a la energía libre de un gas de cuerdas es

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \quad (4.38)$$

Teniendo en cuenta que $\text{Tr} \ln X = \ln \det X$, la energía libre es

$$F = \frac{1}{\beta} \text{Tr} \ln \hat{O}. \quad (4.39)$$

Aplicando la fórmula de Schwinger del logaritmo,

$$\ln a = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-aT} - e^{-T}), \quad (4.40)$$

y despreciando el término e^{-T} , la energía libre es

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T\hat{O}}. \quad (4.41)$$

Sigue habiendo una contribución de $\sqrt{G_{00}}$ al término cinético, que aparece al tomar la traza. Para solucionarlo, hacemos el cambio de base

$$|\phi_n\rangle = G_{00}^{1/4} |\psi_n\rangle. \quad (4.42)$$

El producto escalar asociado es

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int d^{d-1}x \sqrt{G_{ij}} \phi_1(x)^* \phi_2(x). \quad (4.43)$$

Tras el cambio de base,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T\hat{D}}, \quad (4.44)$$

donde aparece el operador hermítico

$$\hat{D} = -\nabla^2 + m_{loc}^2 - \frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.45)$$

Al tomar la traza, ya no aparece $\sqrt{G_{00}}$. Los últimos dos términos se corresponden con un potencial efectivo

$$K(x) = -\frac{3}{16} \frac{G^{ij} \partial_i G_{00} \partial_j G_{00}}{G_{00}^2} + \frac{\nabla^2 G_{00}}{4G_{00}}. \quad (4.46)$$

Ahora se puede interpretar el término $\text{Tr } e^{-T\hat{D}}$ como una integral de camino de una partícula

$$Z = \int_{S_1} \mathcal{D}x \sqrt{G_{ij}} e^{-\int_0^T dt \left(\frac{1}{4} G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + m_{loc}^2 + K(x) \right)}. \quad (4.47)$$

En resumen, haciendo el cambio de variable en la integral $t \rightarrow \pi\alpha' t$, la energía libre es

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{S^1} \mathcal{D}x \sqrt{G_{ij}} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^T dt \left(G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + 4\pi^2 \alpha'^2 (m_{loc}^2 + K(x)) \right)}, \quad (4.48)$$

donde

$$\begin{aligned} m_{loc}^2 &= -\frac{4}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} && \text{para cuerdas bosónicas,} \\ m_{loc}^2 &= -\frac{2}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} && \text{para cuerdas de tipo II,} \\ m_{loc}^2 &= -\frac{3}{\alpha'} + \frac{\pi^2}{\beta^2 G_{00}} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2} && \text{para cuerdas heteróticas.} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Si comparamos con la energía libre que obtendríamos a partir de la acción de la cuerda obtenida mediante 4.24,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2} \int_{S^1} \mathcal{D}X \sqrt{G_{ij}} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{\tau_2} dt \left(G_{ij} \dot{X}^i \dot{X}^j + \beta^2 G_{00} - \beta_{H0}^2 \right)}, \quad (4.50)$$

ambas energías libres coinciden al sustituir el valor apropiado de la temperatura de Hagedorn en espacio plano, β_{H0} salvo por el término $K(x)$.

Además, podrían estudiarse posibles correcciones a la acción del campo taquiónico a orden superior en α' .

4.3. Cuerdas cerca de agujeros negros

Aplicaremos ahora el cálculo de la energía libre a un gas de cuerdas en las proximidades de un agujero negro de Schwarzschild. Tomaremos como ejemplo la teoría supersimétrica de tipo II. Partimos de la expresión de la energía libre deducida a partir del campo taquiónico 4.41,

$$F = -\frac{1}{\beta} \int \frac{dT}{T} \text{Tr } e^{-T \left(-\nabla^2 - G^{ij} \frac{\partial_j \sqrt{G_{00}}}{\sqrt{G_{00}}} \partial_i + m_{loc}^2 \right)}. \quad (4.51)$$

Cerca del agujero negro, es conveniente emplear las coordenadas de Rindler, introducidas en 3.21. El laplaciano en coordenadas de Rindler es

$$\nabla^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho. \quad (4.52)$$

er misma notación

La masa efectiva para cuerdas de tipo II es

$$m_{loc}^2 = -\frac{2}{\alpha'} + \frac{\beta^2 G_{00}}{4\pi^2 \alpha'^2}. \quad (4.53)$$

Para calcular la traza buscamos los valores propios del operador en el exponente, pues la traza de un operador es la suma de sus valores propios. Las funciones propias regulares (descartamos las que divergen) son del tipo

$$\psi_n(\rho) \propto e^{-\frac{\beta \rho^2}{4\pi \alpha'^{3/2}}} L_n\left(\frac{\beta \rho^2}{2\pi \alpha'^{3/2}}\right), \quad (4.54)$$

donde L_n es un polinomio de Laguerre de grado $n \geq 0$. Sus correspondientes valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'} + 2\beta n}{\pi \alpha'^{3/2}}. \quad (4.55)$$

La contribución dominante a la energía libre viene dada por el modo más bajo, $n = 0$. Esto no basta para calcular la traza pues tenemos que tener en cuenta las dimensiones adicionales al espacio de Rindler. En una teoría supersimétrica, tenemos ocho dimensiones descritas por una variedad que tenemos que especificar. Suponiendo dimensiones planas, la energía libre es

$$F = -\frac{V_T}{\beta} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \left(\frac{1}{4\pi T}\right)^4 e^{\frac{\beta - 2\pi\sqrt{\alpha'}}{\pi \alpha'^{3/2}} T}. \quad (4.56)$$

En el límite superior de T , la energía libre diverge si

$$\beta \leq 2\pi\sqrt{\alpha'} = \beta_R. \quad (4.57)$$

Concluimos que la temperatura de Hagedorn en un espacio de Rindler coincide con la temperatura de Hawking. Hemos supuesto cuerdas de tipo II y que las dimensiones adicionales son planas. De haber escogido otras condiciones, la temperatura de Hagedorn podría recibir correcciones.

Identificando las funciones propias como funciones de onda de una cuerda, el estado fundamental

$$\psi_0(\rho) \propto e^{-\frac{\beta \rho^2}{4\pi \alpha'^{3/2}}}, \quad (4.58)$$

representa una cuerda localizada a la distancia l_s del horizonte de sucesos. Este resultado refuerza la idea de la existencia de una *membrana* formada por cuerdas que rodea al agujero negro.

Refs

4.4. Entropía de agujeros negros

$$\delta S = \beta \delta E \tag{4.59}$$

$$\delta S = \beta 8\pi G M \delta M \tag{4.60}$$

$$S = \frac{A}{4G} \tag{4.61}$$

Capítulo 5

Conclusión

Es interesante notar que los problemas de agujeros negros en gravedad cuántica suelen ser no perturbativos, sin embargo los cálculos que hemos hecho se basan completamente en teoría de cuerdas perturbativa. Es de esperar que los branas muchas más dificultades

Bibliografía

- [1] Mertens, Thomas G.: *Hagedorn String Thermodynamics in Curved Space-times and near Black Hole Horizons*. 2015. <http://arxiv.org/abs/1506.07798>.
- [2] Tong, David: *String Theory*. 2009. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>.
- [3] Barbado, Luis C.: *Percepción de las radiaciones Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*. Tesis de Doctorado, Granada U., 2014. <https://inspirehep.net/record/1338344/files/arXiv:1501.02636.pdf>.
- [4] Susskind, Leonard y James Lindesay: *Black holes, information and the string theory revolution*. 2005, ISBN 9812560831.