

La temperatura de Hagedorn y la entropía de agujeros
negros

John Liu Anta
Universidad de Oviedo

26 de abril de 2016

Índice general

1	Introducción a la teoría de cuerdas	3
1.1.	Motivación	3
1.2.	La partícula relativista	3
1.3.	La cuerda relativista	3
1.4.	Cuantización	5
2	Termodinámica de cuerdas	7
2.1.	Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada . .	7
2.2.	Modelo random walk	8
2.3.	Coalescencia multicuerda	9
2.4.	Termodinámica de cuerdas en espacio plano	10
2.5.	Discrepancia entre colectividad microcanónica y canónica . . .	12
3	QFT en sistemas acelerados y espacio curvo	13
3.1.	Efecto Unruh	13
3.2.	Radiación de Hawking	19
4	Cuerdas en espacios curvos	21
	Bibliografía	23

Resumen

...

Capítulo 1

Introducción a la teoría de cuerdas

1.1. Motivación

Describir brevemente
objetivos, utilidad y
estado actual

1.2. La partícula relativista

Fundamentos relati-
vidad especial: qué es una
métrica, etc.

1.3. La cuerda relativista

Explicar distintas accio-
nes,

La teoría de cuerdas parte de considerar que las entidades fundamentales son cuerdas en vez de partículas. Consideremos primero la descripción relativista de una cuerda. En el caso de una partícula la acción es

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} \quad (1.1)$$

donde la posición de la partícula X^μ está parametrizada por τ . Una cuerda estará parametrizada por una variable temporal τ y una variable espacial σ . Para una cuerda cerrada con periodicidad 2π , $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$. De forma más compacta, $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$.

La acción de una partícula es proporcional a la longitud de su línea de universo. De forma análoga, la acción de una cuerda debería ser proporcional al área de la *worldsheet*. La métrica inducida en la *worldsheet* es la *pull-back* de la

métrica de Minkowski en la *worldsheet*,

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

La medida de integración invariante bajo cambios generales de coordenadas más sencillas es $d^2\sigma\sqrt{-\det\gamma}$, por lo que la acción es

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det\gamma}. \quad (1.3)$$

El parámetro T se corresponde con la tensión de la cuerda y se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (1.4)$$

donde α' es la pendiente de Regge. Para cuantizar la teoría, la raíz cuadrada es problemática, por lo que se introduce el campo h definido sobre la *worldsheet* en la llamada acción de Polyakov

$$S_P = -T \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.5)$$

Este campo h se comporta como una métrica en dos dimensiones y queda fijada por las ecuaciones de movimiento

$$h_{\alpha\beta} = 2f(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.6)$$

donde $f(\sigma)$ es una función cualquiera.

Debido a la simetría gauge de la teoría, la cuantización no es directa. Para obtener directamente una teoría unitaria, se cuantizan solo los grados de libertad físicos. Como contrapartida, se pierde la invariancia de Lorentz explícita.

Escojamos las coordenadas en el cono de luz

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (1.7)$$

y

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1}). \quad (1.8)$$

Las ecuaciones de movimiento llevan a que

$$X^+ = x^+ \alpha p^+ \tau \quad (1.9)$$

y

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-) \quad (1.10)$$

donde

$$X_L^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \quad (1.11)$$

y

$$X_R^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-} \quad (1.12)$$

Definiendo

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m \quad (1.13)$$

y

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m. \quad (1.14)$$

Puesto que $M^2 = -p_\mu p^\mu$.

La cuantización conduce a la fórmula de masas

$$M^2 = \frac{4}{\alpha} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \left(\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{d-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha} \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n>0} \left(\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - \frac{d-2}{24} \right) \quad (1.15)$$

Es importante ver que hay una expresión en términos de modos moviéndose a la derecha y otra con modos moviéndose a la izquierda.

1.4. Cuantización

Cuantización en el cono de luz, espectro, fórmula de masas, path integral

Capítulo 2

Termodinámica de cuerdas

2.1. Cálculo de la densidad de estados para una cuerda excitada

La fórmula de masas para una cuerda abierta es

$$\alpha' m^2 = -1 + N \quad (2.1)$$

y para una cuerda cerrada

$$\alpha' m^2 = -4 + 2(N + \bar{N}). \quad (2.2)$$

Queremos calcular la densidad de estados de una cuerda en función del número de oscilador,

Explicar

$$N = \sum_{m=1}^N m n_m, \quad n_m \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Las particiones de N

$$p(N) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp \left(2\pi \sqrt{\frac{N(d-2)}{6}} \right). \quad (2.4)$$

Demostracion particio-
nes de N

En el caso de cuerdas bosónicas cerradas, expresando la densidad de estados en función de la masa

$$p(M) \approx \alpha N^{\frac{d-1}{2}} \exp \left(2\pi \sqrt{\frac{N(d-2)}{6}} \right). \quad (2.5)$$

$$\omega(E) \approx V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.6)$$

La función de partición en la colectividad macrocanónica es

$$z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} dE \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}} e^{-\beta E} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} z &= (\beta - \beta_H)^{D/2} \ln(\beta - \beta_H), & \text{si } D \text{ par} \\ z &= (\beta - \beta_H)^{D/2}, & \text{si } D \text{ impar.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2. Modelo random walk

Revisar planteamiento

Intuitivamente, la masa (energía) de una cuerda es su densidad lineal σ por su longitud L . En unidades naturales, la masa tiene unidades inversas a la longitud, por lo que si pensamos que la cuerda está dividida en N segmentos de longitud l_s ,

$$E \sim \frac{N}{l_s} \sim \frac{L}{l_s^2}. \quad (2.9)$$

Cada segmento podrá tener una orientación arbitraria. Para simplificar los cálculos, supongamos que toma direcciones ortogonales. Entonces el número de orientaciones posibles de cada segmento es $2n$, donde n es el número de dimensiones espaciales accesibles. El número de segmentos es L/l_s . Por tanto, el número de microestados para una energía dada es

$$\omega(E) = (2n)^{(L/l_s)} \propto e^{l_s E \ln(n)}. \quad (2.10)$$

La entropía de la cuerda es $S \propto El_s$, con temperatura $\beta_H \sim l_s$.

Se puede calcular que el radio del random walk es $R = \langle r \rangle \sim E^{1/2}$. Esto nos dice que cuerdas muy largas estarán contenidas en un volumen pequeño $V \sim E^{D/2}$.

Para una cuerda cerrada, habría que dividir el número de microestados por el volumen de walk, multiplicar por el volumen accesible y dividir por la longitud de la cuerda. Entonces,

$$\omega(E) \sim V \frac{e^{\beta_H E}}{E^{1+D/2}}. \quad (2.11)$$

No necesitamos conocer los detalles de la teoría

De esta forma, obtenemos la densidad de estados

El cálculo de la extensión de una cuerda altamente excitada con respecto a su centro de masas conduce a que R_i^2 es proporcional a la suma de las inversas de los números oscilatorios para la dirección i . Por ello, para un nivel energético

N fijo, $(\alpha_{-1}^i)^N |0\rangle$ tendría la mayor extensión en la dirección i , $\sim N$ y $\alpha_N^i |0\rangle$ tendría la menor extensión. Tomando el promedio sobre todas las direcciones espaciales, $R^2 \sim (d-1)\sqrt{N}$, siendo $d-1$ el número de direcciones espaciales. Volvemos a observar la importante peculiaridad $R \sim \sqrt{L}$, por lo que las cuerdas largas tiende a enmarañarse.

2.3. Coalescencia multicuerda

Repaso de las colectividades estadísticas, qué es una función de partición

Formulación microcanónica

La función de partición de una cuerda es

$$z(\beta) = \int_0^\infty \omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.12)$$

La función de partición de un sistema de cuerdas es

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-\beta E}. \quad (2.13)$$

Si el número de

$$\begin{aligned} Z = e^z &= 1 + \int_0^\infty dE_1 \omega(E_1) e^{-\beta E_1} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(E_1) \omega(E_2) e^{-\beta(E_1+E_2)} \dots \\ &= \int_0^\infty dE \delta(E) + \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int dE_1 \omega(E_1) \delta(E - E_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \int_0^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 \omega(E_1) \omega(E_2) \delta(E - E_1 - E_2) \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Entonces

$$\Omega(E) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n dE_i \omega(E_i) \delta\left(E - \sum_{j=1}^n E_j\right). \quad (2.15)$$

$$\omega(E) \sim \frac{e^{\beta_H E}}{E^{D/2+1}}. \quad (2.16)$$

Acabar deducción

Formulación canónica

2.4. Termodinámica de cuerdas en espacio plano

La función de partición bosónica en un espectro discreto es $z = \prod_i 1/(1 - \exp(-\beta E_i))$. La energía libre viene dada por $F = -1/\beta \ln z = \beta \sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i))$. En el caso continuo, donde $E = E(k)$, reemplazamos el sumatorio por $V \int d^{d-1}k/(2\pi)^{d-1}$. Por tanto,

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \ln(1 - \exp(-\beta E)) \quad (2.17)$$

Mediante el desarrollo de Taylor $\ln(1 - x) = -\sum_{r=1}^{\infty} x^r/r$

$$F = -\frac{V}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp(-r\beta E) \quad (2.18)$$

Aplicando la identidad

$$\frac{1}{r} \exp(-\beta r E) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{E^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \quad (2.19)$$

y como $E^2 = k^2 + m^2$

$$F = -\frac{V}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left(-\frac{k^2 s}{2}\right) \quad (2.20)$$

La última integral tiene como resultado $(2\pi s)^{\frac{d-1}{2}}$, por lo que

$$F = -V \int_0^{\infty} \frac{ds}{s(2\pi s)^{d/2}} \sum_{r=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 s}{2} - \frac{r^2 \beta^2}{2s}\right) \quad (2.21)$$

Por otro lado, la función de partición de estado multicuerda es $Z = e^z = -\beta F$. Entonces podemos hacer la asociación de la energía libre con integral de camino de una partícula tras aplicar una rotación de Wick en la dimensión temporal y compactificando el tiempo con periodo β

$$Z = -\beta F = \int_0^{\infty} \frac{ds}{2s} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^s d\tau \left[\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial t}\right)^2 + m^2\right]\right) \quad (2.22)$$

Se llega al mismo resultado calculando la función de partición de una partícula si identificamos el parámetro s con el tiempo propio de la partícula y compactificamos la coordenada X^0 con periodo β . El número de vueltas que da la partícula en la dimensión temporal es w . La función de partición se suma sobre todas las vueltas posibles y se integra en todos los tiempos propios.

En una teoría de cuerdas bosónica, $d = 26$ y la energía libre se obtendría sumando las energías libres para todo el espectro posible, con masas

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2) \quad (2.23)$$

Puesto que se tiene que cumplir el level-matching $N = \bar{N}$, habrá que incluir en la integral la expresión de la delta de Kronecker

$$\delta_{N\bar{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \exp(2\pi i \tau_1 (N - \bar{N})) \quad (2.24)$$

Entonces

$$F = \sum_i \delta_{N_i \bar{N}_i} F(N_i, \bar{N}_i) \quad (2.25)$$

donde i recorre todas las posibles combinaciones de N_i y \bar{N}_i . Haciendo el cambio de variable $s = 2\pi\alpha'\tau_2$

$$F = -V \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2 (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_i e^{-(N_i + \bar{N}_i - 2)2\pi\tau_2} e^{-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 e^{2\pi i \tau_1 (N_i - \bar{N}_i)} \quad (2.26)$$

Definiendo $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ y $q = e^{2\pi i \tau_1}$, se introduce la η de Dedekind como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (2.27)$$

Se llega a

$$F = -V \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{d/2}} |\eta(\tau)|^{-2d+4} \exp\left(-\frac{r^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right) \quad (2.28)$$

El mismo resultado se obtiene calculando la integral de camino en el toro

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{2\tau_2} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \Delta_{FP} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\right) \quad (2.29)$$

donde la región de

Se ha llegado a una expresión cuyo integrando no es modular invariante. Es decir, $\tau \rightarrow \tau + 1$ y $\tau \rightarrow 1/\tau$ no son invariancias. Para conseguir la invariancia modular se restringe el dominio de integración al dominio fundamental y se modifica el integrando, añadiendo el número cuántico w sobre el que se suma, de modo que para $d = 26$ se tiene

$$F = -V \sum_{r,w=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \frac{1}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{13}} |\eta(\tau)|^{-48} \exp\left(-\frac{|r^2 - w\tau|^2 \beta^2}{4\pi\alpha'\tau_2}\right) \quad (2.30)$$

Haciendo la suma, se llega a

$$Z = -\beta F = \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} \text{Tr} \left(q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right) \quad (2.31)$$

donde

$$L_0 = \alpha' \frac{p^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{2\pi n}{\beta} + \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + N \quad (2.32)$$

$$\bar{L}_0 = \alpha' \frac{p^2}{4} + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{2\pi n}{\beta} - \frac{w\beta}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \bar{N} \quad (2.33)$$

2.5. Discrepancia entre colectividad microcanónica y canónica

Comentar más allá de Hagedorn? No perturbativo, interacciones, transición de fase...

Capítulo 3

QFT en sistemas acelerados y espacio curvo

3.1. Efecto Unruh

Una propiedad sorprendente de las teorías cuánticas de campos es que el estado de vacío puede depender del observador. Concretamente, el efecto Unruh establece que el vacío para un observador inercial, visto por un observador con aceleración constante corresponde con un estado térmico a temperatura

$$T_U = \frac{a}{2\pi k_B}. \quad (3.1)$$

En este apartado, seguiremos la derivación expuesta en [1].

En la deducción del efecto Unruh estudiaremos un campo escalar sin masa $\phi(t, z)$ en un espacio de Minkowski con una dimensión espacial t y una dimensión espacial z . La ecuación que describe el campo es la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

Argumentar por qué se pueden extrapolar los resultados

La solución general de esta ecuación de ondas toma la forma

$$\phi(x, t) = f(t - x) + g(t + x). \quad (3.3)$$

Las funciones f y g representan dos ondas que se mueven a la velocidad de la luz en sentidos opuestos. Hacemos el cambio de variable a coordenadas nulas

$$U = t - z, \quad V = t + z. \quad (3.4)$$

De este modo, la solución general se expresa como

$$\phi(U, V) = \phi_U(U) + \phi_V(V). \quad (3.5)$$

Nos interesa expandir la solución en términos de ondas armónicas

$$\phi_\omega^U(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega U}, \quad (3.6)$$

$$\phi_\omega^V(V) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega V}. \quad (3.7)$$

Puesto que la solución ϕ_V está desacoplada de ϕ_U , basta considerar ϕ_U ya que el tratamiento de ϕ_V sería análogo.

La expansión del campo en modos es

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^U \phi_\omega^U(U) + a_\omega^{U*} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.8)$$

El proceso de cuantización canónica consiste en reemplazar en valor del campo en cada punto del espacio-tiempo $\phi(x, t)$, por un operador $\hat{\phi}(x, t)$ que satisfará unas relaciones de conmutación particulares. Esto significa que los coeficientes de la expansión de ϕ_U pasan a ser los operadores \hat{a}_ω^U y $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$ y por tanto

$$\hat{\phi}_U(U) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega^U \phi_\omega^U(U) + \hat{a}_\omega^{U\dagger} \phi_\omega^U(U)^*]. \quad (3.9)$$

El operador $\hat{a}_\omega^{U\dagger}$ se denomina operador creación, pues veremos que crea partículas de frecuencia ω y \hat{a}_ω^U se conoce como operador destrucción porque aniquila partículas de frecuencia ω . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$[\hat{a}_\omega^{U\dagger}, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = [\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^U] = 0, \quad (3.10)$$

$$[\hat{a}_\omega^U, \hat{a}_{\omega'}^{U\dagger}] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.11)$$

Todavía no hemos especificado el espacio de Hilbert sobre el que actúa el operador del campo, el cual se denota por \mathcal{H}_ϕ . El estado del campo queda especificado descrito por un elemento de \mathcal{H}_ϕ . Como en este caso los modos U y V están desacoplados, podemos considerar independientemente el espacio de Hilbert asociado a cada uno, \mathcal{H}_U y \mathcal{H}_V . El espacio de Hilbert del campo es el producto tensorial de ambos $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$.

La base del espacio \mathcal{H}_U se puede construir mediante la representación de Fock. Para ello, se define el estado de vacío $|0_U\rangle$, como el estado que no contiene ningún tipo de partícula, por tanto

$$a_\omega^U |0_U\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Donde omitimos el acento circunflejo de los operadores por comodidad. Luego procedemos a crear estados con n_i partículas de frecuencia ω_i , mediante aplicación repetida del operador creación $a_{\omega_i}^{U\dagger}$, con la normalización apropiada

$$|n_{1,\omega_1}, n_{2,\omega_2}, \dots, n_{N,\omega_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots n_N!}} (a_{\omega_1}^{U\dagger})^{n_1} (a_{\omega_2}^{U\dagger})^{n_2} \dots (a_{\omega_N}^{U\dagger})^{n_N} |0_U\rangle. \quad (3.13)$$

Los estados construidos son estados propios del operador número de partículas $N_{\omega_i}^U = a_{\omega_i}^{U\dagger} a_{\omega_i}^U$ con valor propio n_i . La base de \mathcal{H}_U se obtiene juntando los estados con un número arbitrario de partículas de todas las frecuencias posibles. Formalmente, \mathcal{H}_U es la completitud de la suma directa

$$\mathcal{H}_U = \oplus. \quad (3.14)$$

Supongamos que queremos expandir el campo en otra base de modos u

$$\phi_\omega^u(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u(U)}, \quad (3.15)$$

entonces

$$\phi_U(U) = \int_0^\infty d\omega [a_\omega^u \phi_\omega^u(U) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(U)^*]. \quad (3.16)$$

Expandiendo la nueva base en términos de la anterior

$$\phi_\omega^u(U) = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U) + \beta_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^U(U)^*]. \quad (3.17)$$

Los coeficientes $\alpha_{\omega\omega'}$ y $\beta_{\omega\omega'}$ se denominan coeficientes de Bogoliubov y vienen dados por

$$\alpha_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) - \omega' U)}, \quad (3.18)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dU e^{-i(\omega u(U) + \omega' U)}. \quad (3.19)$$

Cuantizando la teoría y formando el espacio de Fock, comprobamos que el vacío obtenido mediante los modos $\phi_\omega^U(U)$, puede contener partículas asociadas a los modos u si el coeficiente $\beta_{\omega\omega'}$ no es nulo

$$\langle N_\omega^u | 0_U | N_\omega^u \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (3.20)$$

La suma directa es no numerable, al tener que considerar todas las frecuencias?

Rigor

Esto quiere decir que en una teoría cuántica de campos, el vacío depende de la base de modos que se haya escogido antes de la cuantización. La ambigüedad se puede resolver escogiendo el vacío que tenga la mínima energía. En el espacio de Minkowski la energía está bien definida y coincide para todos los observadores inerciales, al ser invariante de Lorentz. Sin embargo, en un espacio-tiempo curvo el concepto de energía puede no estar bien definido y por tanto no hay un estado de vacío privilegiado.

Tiene algún sentido el concepto de partícula en un espacio que no sea asintóticamente plano o no estacionario?

Con el fin de estudiar cuál es el vacío dado por un observador acelerado en un espacio de Minkowski, introducimos las coordenadas de Rindler (η, ξ) definidas por

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad (3.21)$$

$$z = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (3.22)$$

donde $|t| < z$ y $a > 0$.

Las coordenadas de Rindler solo cubren la región $|t| < z$, denominada cuña derecha de Rindler. De forma análoga, se puede cubrir la cuña izquierda de Rindler ($|t| < -z$) mediante las coordenadas $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ dadas por

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \sinh a\tilde{\eta} \quad (3.23)$$

$$z = -\frac{1}{a} e^{a\tilde{\xi}} \cosh a\tilde{\eta}. \quad (3.24)$$

Las trayectorias con $\eta = \eta_0$ constante corresponden con observadores que se mueven con aceleración propia $ae^{-a\xi_0}$. El tiempo propio que miden estos observadores es $\tau = e^{a\xi_0}\eta$. Escogiendo apropiadamente el origen de coordenadas, un observador con aceleración constante es tiene viene dado por $\eta = \tau$ y $\xi = 0$.

Pq $\xi_0 = 0$

Fijándonos en el diagrama de Rindler (figura 3.1), un observador con aceleración constante moviéndose a la derecha no puede percibir los efectos producidos en III ni influir en II. Además, la información que le llegue de II será percibida como proveniente de un tiempo infinitamente anterior, por lo que la recta $t = z$ define un horizonte de sucesos futuro y la recta $t = -z$ un horizonte de sucesos pasado.

Como el observador acelerado hacia la derecha desconoce el estado del campo en la cuña izquierda de Rindler, el estado que percibe no es puro, si no mixto. La descripción de estados mixtos se realiza mediante una matriz de densidad,

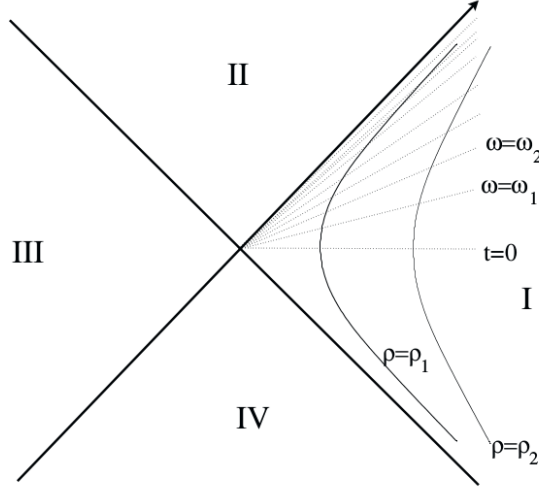


Figura 3.1: Espacio de Minkowski en coordenadas de Rindler (usar imagen libre)

que al trazar sobre los estados desconocidos conduce a que el vacío sea un estado térmico. Con el fin de hacer la deducción explícita, partimos de la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Rindler para la cuña derecha

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.25)$$

Definiendo las coordenadas nulas de Rindler

$$\begin{aligned} u &= \eta - \xi, \\ v &= \eta + \xi, \end{aligned} \quad (3.26)$$

la solución general de 3.25 es $\phi(u, v) = \phi_u(u) + \phi_v(v)$, que se expande en los modos normales

$$\begin{aligned} \phi_\omega^u(u) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \\ \phi_\omega^v(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicaríamos un tratamiento análogo a la cuña izquierda.

El campo propagándose hacia la derecha en coordenadas de Minkowski se expande como

$$\begin{aligned} \phi_U(U) &= \int_0^\infty \Theta(-U) [a_\omega^u \phi_\omega^u(u(U)) + a_\omega^{u*} \phi_\omega^u(u(U))^*] \\ &\quad + \Theta(U) [a_\omega^{\tilde{u}} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + a_\omega^{\tilde{u}*} \phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde $\Theta(U)$ es la función de Heaviside

$$\Theta(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } U < 0 \\ 1 & \text{si } U > 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

El cálculo de los coeficientes de Bogoliubov conduce a

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega, \omega'}^u &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a), & \beta_{\omega, \omega'}^u &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{-i\omega/a} \Gamma(i\omega/a) \\ \alpha_{\omega, \omega'}^{\tilde{u}} &= -\frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a), & \beta_{\omega, \omega'}^{\tilde{u}} &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left(\frac{\omega'}{a}\right)^{i\omega/a} \Gamma(-i\omega/a) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por conveniencia, los modos de Unruh se definen como

$$\begin{aligned} \phi_\omega^I(U) &= \Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U))^*, \\ \phi_\omega^{II}(U) &= \Theta(U)\phi_\omega^{\tilde{u}}(\tilde{u}(U)) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\Theta(-U)\phi_\omega^u(u(U))^*, \end{aligned} \quad (3.31)$$

los cuales están definidos en todo el espacio de Minkowski.

La cuantización de los modos de Unruh conduce a los operadores de destrucción

$$\begin{aligned} a_\omega^I &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^{\tilde{u}} a_{\omega'}^U, \\ a_\omega^{II} &= -2 \sinh \frac{\pi\omega}{a} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega'}^u a_{\omega'}^U. \end{aligned} \quad (3.32)$$

El vacío de estos modos es el vacío de Minkowski, es decir

$$a_\omega^I |0_H\rangle = a_\omega^{II} |0_H\rangle = 0. \quad (3.33)$$

Para buscar el valor esperado de partículas que observa un observador acelerado en el vacío de Minkowski, primero calculamos

$$\langle 0_H | a_\omega^{u\dagger} a_\omega^u | 0_H \rangle = \int_0^\infty d\omega'' \beta_{\omega\omega''}^u \beta_{\omega'\omega''}^{u*} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.34)$$

En el límite $\omega' \rightarrow \omega$, esta cantidad es el valor esperado de partículas que se detectarían, pero debido a la delta, se obtiene una divergencia. El motivo es calcular el número de partículas en toda la cuña derecha de Rindler, implica que hay que considerar un observador acelerado eternamente, lo que requiere infinita energía. En una situación real, la delta se transformaría en un valor finito. Por tanto,

$$\langle 0_H | N_\omega^u | 0_H \rangle \sim \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1}. \quad (3.35)$$

Este valor esperado se corresponde con un sistema de bosones a temperatura $T = a/(2\pi k_B)$. Sin embargo, todavía no conocemos la forma exacta del vacío de Minkowski.

En vez de considerar ondas armónicas con frecuencia bien definida, trabajamos con paquetes de onda con resolución $\Delta\omega$ centrados en $(n + 1/2)\Delta\omega$,

Pq usar paquetes? Se puede omitir de la demostración?

$$\phi_{n,\bar{n}}^u(u) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{n\Delta\omega}^{(n+1)\Delta\omega} d\omega e^{i\frac{2\pi\bar{n}n}{\Delta\omega}\omega} \phi_{\omega}^u(u). \quad (3.36)$$

Al cuantizar estos paquetes se introduce para la cuña derecha el operador destrucción $a_{n,\bar{n}}^u$ y en la cuña izquierda $a_{n,\bar{n}}^{\bar{u}}$. Construyendo los modos de Unruh asociados a paquetes de ondas, se obtiene que los operadores $a_{n,\bar{n}}^I$ y $a_{n,\bar{n}}^{II}$ cumplen

Describir un poco más

$$a_{n\bar{n}}^I |0_U\rangle = a_{n\bar{n}}^{II} |0_U\rangle = 0. \quad (3.37)$$

Entonces,

$$a_{n,\bar{n}}^{u\dagger} a_{n,\bar{n}}^u |0_U\rangle = a_{n,\bar{n}}^{\bar{u}\dagger} a_{n,\bar{n}}^{\bar{u}} |0_U\rangle, \quad (3.38)$$

y por tanto hay el mismo número de partículas asociadas a paquetes de ondas de Rindler en ambas cuñas.

El estado de vacío

$$|0_H\rangle = \prod_{n,\bar{n}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \otimes |m_{n\bar{n}}\rangle_{\bar{u}} \right). \quad (3.39)$$

Es \prod un producto tensorial?

Tras calcular los coeficientes $K_{n\bar{n}}$ y hacer la traza parcial sobre los estados de la cuña izquierda, obtenemos que la matriz

$$\rho \propto \prod_{n,\bar{n}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\pi mn\Delta\omega/a} |m_{n\bar{n}}\rangle_u \langle m_{n\bar{n}}|_u \right), \quad (3.40)$$

que describe una distribución de Maxwell-Boltzmann a temperatura $T_U = a/(2\pi k_B)$.

Contradicción distribución MB vs BE?

3.2. Radiación de Hawking

Omitimos sutilezas de detectores Unruh-DeWitt, cálculo alternativo a la path integral...

El caso más sencillo de agujero negro es el agujero negro de Schwarzschild,

Obtenemos el resultado para observadores asintóticos

Cálculo Unruh en un BH por path integral

20CAPÍTULO 3. QFT EN SISTEMAS ACELERADOS Y ESPACIO CURVO

que describe una distribución de masa con simetría esférica y estática. La métrica asociada es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.41)$$

Observamos que en el radio de Schwarzschild $r_S = 2MG$ la componente temporal de la métrica se anula mientras que la componente radial va a infinito. Se denomina horizonte de sucesos a la esfera con radio r_S centrada en $r = 0$.

Para estudiar la física cerca del horizonte es más conveniente emplear las coordenadas de Rindler. Para ello sustituimos la coordenada radial por la distancia propia hasta el horizonte

$$\rho(r) = \int_0^r dr' \sqrt{g_{rr}(r')}. \quad (3.42)$$

La métrica se transforma en

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r(\rho)}\right) dt^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2. \quad (3.43)$$

A distancias próximas al horizonte $r \approx r_S$, $\rho \approx 2\sqrt{2MG(r - 2MG)}$

$$ds^2 \approx \rho^2 \left(\frac{dt}{4MG}\right)^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2. \quad (3.44)$$

Cerca de la coordenada azimutal $\theta = 0$, podemos reemplazar las coordenadas angulares θ, ϕ por las coordenadas cartesianas x, y . Definiendo también un tiempo adimensional $\omega = t/(4MG)$ obtenemos la métrica de Rindler

$$ds^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2. \quad (3.45)$$

Esta métrica describe en realidad un espacio de Minkowski en coordenadas hiperbólicas. Si escogemos la transformación

$$T = \rho \sinh \omega, \quad (3.46)$$

$$Z = \rho \cosh \omega. \quad (3.47)$$

la métrica es

$$ds^2 = dT^2 - dZ^2 - dx^2 - dy^2. \quad (3.48)$$

Capítulo 4

Cuerdas en espacios curvos

Bibliografía

- [1] Barbado, Luis C.: *Percepción de las radiaciones Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*. Tesis de Doctorado, Granada U., 2014. <https://inspirehep.net/record/1338344/files/arXiv:1501.02636.pdf>.
- [2] Mertens, Thomas G.: *Hagedorn String Thermodynamics in Curved Space-times and near Black Hole Horizons*. 2015. <http://arxiv.org/abs/1506.07798>.
- [3] Susskind, Leonard y James Lindesay: *Black holes, information and the string theory revolution*. 2005, ISBN 9812560831.
- [4] Tong, David: *String Theory*. 2009. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>.