

# Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

27 marca 2019



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Cel i zakres pracy</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Siatka czasowa i przestrzenna</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Makroskopowy model ruchu</b>	<b>11</b>
4.1	Klasyfikacja modeli ruchu drogowego . . . . .	11
4.2	Wstęp . . . . .	11
4.3	Rozwój gęstości ruchu na drodze . . . . .	12
4.4	Dyskretyzacja makroskopowego modelu ruchu . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Model sieci dróg</b>	<b>15</b>
5.1	Wstęp . . . . .	15
5.2	Sieć dróg . . . . .	15
5.3	Wektor stanowy drogi . . . . .	17
5.3.1	Przykład . . . . .	17
5.4	Rozwój wektora stanowego jednej drogi . . . . .	17
5.4.1	Przykład . . . . .	18
5.5	Wektor stanowy sieci dróg . . . . .	18
5.5.1	Przykład . . . . .	19
5.6	Rozwój wektora stanowego sieci dróg . . . . .	20
5.6.1	Przykład . . . . .	20
5.7	Wprowadzenie sygnalizacji świetlnej . . . . .	21
5.7.1	Przykład . . . . .	22
5.8	Rozwój wektora stanowego . . . . .	24
5.8.1	Propozycja początkowego modelu przepływu . . . . .	24
5.8.2	Przykład . . . . .	25
5.9	Sygnalizacja świetlna . . . . .	26
5.9.1	Przykład . . . . .	26
5.10	Macierz stanu . . . . .	27
5.10.1	Przykład . . . . .	27
5.10.2	Ogólny wzór . . . . .	28
5.11	Macierz stanowa sieci dróg . . . . .	28
5.12	Model przepływu . . . . .	28

5.12.1	Przykład . . . . .	28
5.12.2	Ogólny wzór . . . . .	29
5.12.3	Zastosowanie wzoru . . . . .	30
5.13	Model przepływu z sygnalizacją świetlną . . . . .	31
5.13.1	Przykład . . . . .	31
5.13.2	Ogólny wzór . . . . .	33
5.13.3	Zastosowanie wzoru . . . . .	34
5.14	Wprowadzenie źródeł ruchu . . . . .	34
5.15	Schematy skrzyżowań symulacyjnych . . . . .	35
5.16	Przedstawienie problemu optymalizacyjnego . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Przegląd metod optymalizacyjnych</b>	<b>37</b>
6.1	Kategorie uczenia maszynowego . . . . .	37
6.2	Uczenie ze wzmocnieniem . . . . .	37
6.3	Programowanie dynamiczne . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Optymalizacja sygnalizacji świetlnej</b>	<b>43</b>

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Problem zatłoczonych ulic staje się coraz bardziej powszechny na całym świecie. W ogromnym tempie wzrasta ilość pojazdów na drogach. Według danych firmy gromadzącej dane statystyczne *Statista* liczba zarejestrowanych pojazdów na świecie w roku 2006 wynosiła 947 tysięcy [1]. W 2015 roku na świecie jeździło już 1282 tysięcy pojazdów. Wzrost przez te 9 lat był niemalże liniowy. Co roku rejestrowano około 39,4 tysięcy nowych samochodów rocznie, co wyznacza stopę wzrostu liczby pojazdów na poziomie 3,7%.



Rysunek 1.1: Liczba pojazdów na świecie

W Polsce wzrost ilości pojazdów w latach 2006 - 2015 był jeszcze większy [2]. W 2006 roku według GUS w Polsce było zarejestrowanych 13,4 miliona samochodów osobowych. W 2015 roku ich liczba wynosiła już 20,7 miliona, co oznacza 5 procentowy roczny wzrost. Najbardziej zatłoczonym polskim miastem jest Łódź. Według rankingu firmy *TomTom* Łódź zajmuje bardzo wysokie 5 miejsce na świecie i 1 w Europie pod względem zatłoczenia dróg [3]. Oprócz Łodzi w pierwszej setce najbardziej zatłoczonych miast świata są inne polskie miasta:

Lublin(34), Kraków(48), Warszawa(50), Wrocław(63), Poznań(69), Bydgoszcz(83). Problem całej Europy. Spośród 100 najbardziej zatłoczonych miast świata aż 45 znajduje się w Europie. W 2008 roku Unia Europejska oszacowała, iż koszty zatłoczenia dróg kształtują się na poziomie 0,9% – 1,5% PKB unijnego [4]. Następny raport z 2017 roku może napawać optymizmem, gdyż przedstawione w nim wyliczenia określiły jedynie 0,77% straty całkowitego PKB wspólnoty [5]. Ten sam raport ocenia koszty zatorów komunikacyjnych w Polsce na poziomie 1,2% polskiego PKB. Problemy zatorów komunikacyjnych w miastach są o tyle trudniejsze do rozwiązania niż poza miastem, ponieważ na terenach zurbanizowanych brakuje często miejsca na wybudowanie dróg o większej przepustowości. Rozwiązaniem może być wprowadzenie większej ilości sygnalizacji świetlnej. Istotną kwestią jest optymalizacja ustawień sygnalizacji świetlnej. Praca moja jest poświęcona temu problemowi.

# Rozdział 2

## Cel i zakres pracy

Celem pracy jest stworzenie programu, który zoptymalizuje fazy sygnalizacji świetlnej, co przyczyni się do zwiększenia przepustowości sieci dróg.

Jako środowisko zostanie stworzony symulator ruchu drogowego. Symulacje ruchu będą w pełni zgodne z makroskopowym modelem ruchu. Sam makroskopowy model ruchu zostanie przedstawiony w rozdziale X. Jest to model ciągły. Pożądanym jest dyskretny model ruchu drogowego ze względu na łatwość implementacji komputerowej. Zostanie zatem przedstawiona w sekcji X.Y dyskretyzacja makroskopowego modelu ruchu. W rozdziale X zostanie zdefiniowany model sieci dróg. Początkowy model zaplanowano jako podstawowy z pominięciem większości aspektów. W każdej kolejnej sekcji model będzie stopniowo rozwijany. Sieci dróg zdefiniowane według końcowego modelu będą środowiskiem treningowym dla algorytmów uczenia maszynowego. Rozdział X opisuje uczenie ze wzmocnieniem - algorytm treningowy procesu optymalizacji sygnalizacji świetlnej. Rozdział X przedstawia cztery modele sieci dróg, dla których został stworzony program symulacyjny. Rozdział X opisuje optymalizację sygnalizacji świetlnej dla wspomnianych sieci dróg.





## Rozdział 3

### Siatka czasowa i przestrzenna

Dyskretny charakter modelu przedstawianego w pracy obliguje do określenia siatki czasowej i przestrzennej. Dla par czasu i miejsc należących do tych dwóch siatek będą określane zmienne stanowe.

**Siatka czasowa** jest zdefiniowana jako skończony ciąg liczb naturalnych:

$$(0, 1, \dots, K). \quad (3.1)$$

Niech będzie ustalona droga  $e$ , która jest odcinkiem  $[0, L_e]$ . Droga zostaje podzielona na  $L + 1$  odcinków o równej długości  $\Delta x = \frac{L_e}{L+1}$ . **Siatka przestrzenna** drogi to ciąg odcinków:

$$(b_l)_{l=0}^L = [l\Delta x, (l+1)\Delta x]$$



Rysunek 3.1: Siatka przestrzenna



# Rozdział 4

## Makroskopowy model ruchu

### 4.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [6] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [7] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki (prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [8]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [9] mezoskopowe wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta [10]. Ideą modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [11] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszają się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

### 4.2 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych

artykułach gęstość ruchu [12] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieściśła z ideą modelu.

### 4.3 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (4.2) wraz z warunkiem początkowym (4.1). Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzece[ref]. Gęstość ruchu można utożsamiać z polem powierzchni przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece. Istotną uwagą w tym miejscu jest zaznaczenie, iż rzeka zazwyczaj posiada pewien spadek, który zapewnia ruch cieczy ze źródła do ujścia. Ruch makroskopowy zdefiniowany przez równanie (4.2) z kolei odnosi się do rzeki która jest na całym swoim odcinku pozioma. W takim przypadku de facto nie ma zdefiniowanego zwrotu ruchu.

Dla ustalonej drogi  $e$  zmianę gęstości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} p(x, 0) = p_0(x) \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(p(x, t))}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Gdzie  $p(x, t)$  to gęstość ruchu w punkcie  $x$  i czasie  $t$ . Wartość funkcji gęstości należy do przedziału  $[0, p^{max}]$ .

Równanie (4.1) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej początkowej gęstości drogi  $p_0(x)$ . Równanie (4.2) określa wedle założeń modelu makroskopowego [11] rozwój gęstości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu  $f$  powinna być wklęsła [ref]. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } p \in [0, p^*] \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

Gdzie  $\lambda$  jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz  $p^* = \frac{1}{2}p^{max}$ .

### 4.4 Dyskretyzacja makroskopowego modelu ruchu

Niech będzie ustalona droga  $e$  oraz jej siatka przestrzenna  $b_l$ . Celem jest przedstawienie wartości gęstości dla odcinków siatki przestrzennej w chwilach  $k = 0, 1, \dots, K$ . Gęstość w odcinku  $b_l$  i czasie  $k$  jest zdefiniowana jako:

$$p_l^k = \int_{b_l} \frac{p(x, k)}{\Delta x} dx. \quad (4.5)$$

Na podstawie (4.2) można wywnioskować, że:

$$\int_{b_l} p(x, k+1) - p(x, k) dx + \int_k^{k+1} f(b_{l+1}, k) - f(b_l, k) dk = 0 \quad (4.6)$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x(p_l^{k+1} - p_l^k) + \int_k^{k+1} (f(b_{l+1}, k) - f(b_l, k)) dk = 0 = 0 \quad (4.7)$$

Wartości gęstości zmieniają się w tylko w chwilach  $k$ . Wtedy wartości  $f(b_{l+1}, k)$  i  $f(b_l, k)$  są stałe na całym przedziale całkowania  $[k, k+1)$ . Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x(p_l^{k+1} - p_l^k) + (f(b_{l+1}, k) - f(b_l, k)) = 0 \quad (4.8)$$

Rezultatem jest końcowy rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_l^{k+1} = p_l^k - \frac{1}{\Delta x} (f(b_{l+1}, k) - f(b_l, k)) \quad (4.9)$$



# Rozdział 5

## Model sieci dróg

### 5.1 Wstęp

Ze względu na dużą złożoność końcowego modelu zostanie przedstawiony najpierw bardzo prosty, podstawowy model. W każdej kolejnej sekcji dodawane będą zmiany przybliżające do ostatecznej postaci. Jest to podejście pozwalające na proste przedstawienie modelu, który zawiera bardzo wiele aspektów m.in: ujęcie sygnalizacji świetlnej, brak kolizyjnych manewrów, makroskopowy przepływ ruchu, przepływ ruchu na skrzyżowaniu, struktura sieci dróg. Zestawienie w jednej sekcji wszystkich tych kwestii byłoby bardzo przytłaczające.

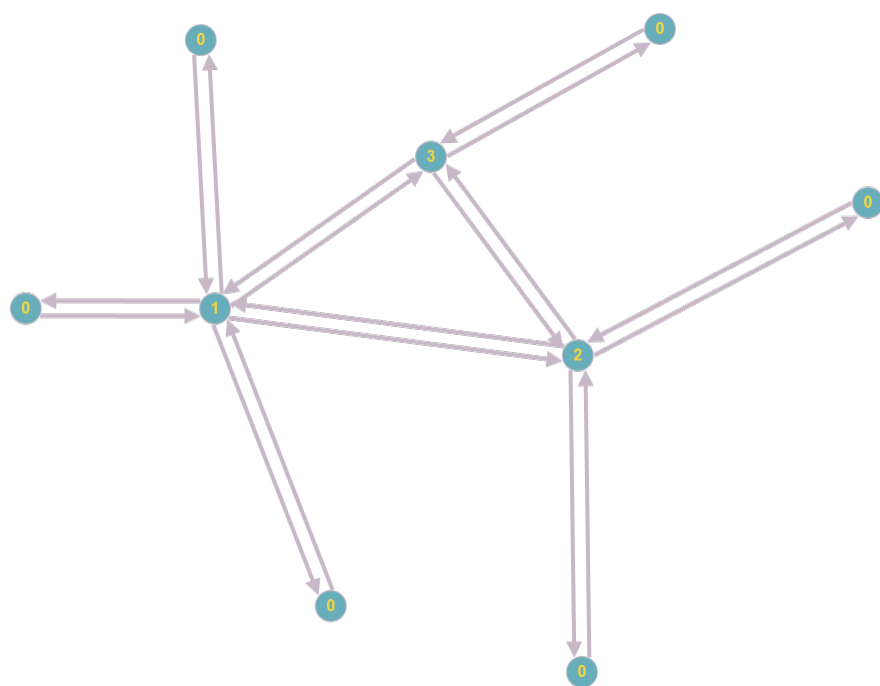
### 5.2 Sieć dróg

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka  $G = (V, E)$ , gdzie:

- $V$  to zbiór skrzyżowań
- $E$  to zbiór dróg

Każda droga  $e \in E$  posiada siatkę przestrzenną ( $b_l$ ).

Każde skrzyżowanie  $v$  posiada niepuste zbiory dróg wlotowych  $E_{in}$  oraz dróg wylotowych  $E_{out}$ .



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

Rysunek 5.1: Przykładowa sieć dróg



## 5.3 Wektor stanowy drogi

Wektor stanowy jest strukturą w pełni przedstawiającą aktualny stan drogi. Dla każdego odcinka drogi składa się on wartości zmiennych stanowych. Początkowo zmienna stanowa jest identyfikowana jako ilość pojazdów na danym odcinku drogi.

### 5.3.1 Przykład

Niech będzie dana droga  $e$  z której wydzielone są 4 odcinki  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . Przykładowy wektor stanowy

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Zawiera w sobie następujące informacje dla chwili  $t$ :

- Są 2 pojazdy na odcinku  $b_1$
- Są 4 pojazdy na odcinku  $b_2$
- Są 3 pojazdy na odcinku  $b_3$
- Nie ma żadnego pojazdu na odcinku  $b_4$



Rysunek 5.2: Droga z ilością pojazdów na poszczególnych odcinkach

## 5.4 Rozwój wektora stanowego jednej drogi

Początkowy model przepływu pojazdów zakłada, iż wszystkie pojazdy w chwili  $t+1$  są o jeden odcinek dalej w swojej podróży niż w momencie  $t$ . Założone jest, iż żadne nowe pojazdy nie pojawiają się w sieci dróg, a pojazdy będące w chwili  $t$  w ostatnim odcinku drogi kończącej swój bieg opuszczają układ. Formalnym wzorem definiującym rozwój wektora stanowego jest:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) \quad (5.2)$$

Gdzie  $A$  jest macierzą systemu. Definiuje ona sposób przepływu pojazdów.  $A$  jest rzadką, kwadratową macierzą o wartościach równych 1 jedynie bezpośrednio 1 wiersz pod główną przekątną macierzy. Takie wartości gwarantują przepływ pojazdów o jeden odcinek w jednym kroku czasowym.

### 5.4.1 Przykład

Dla przykładu przedstawionego w (5.3.1) zostanie przedstawiony rozwój wektora stanowego. Niech zatem

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Macierzą systemu jest:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Wedle wzoru (5.2) wyliczona zostają wyliczone kolejne wartości wektora stanowego.

$$x(1) = Ax(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$x(2) = Ax(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$x(3) = Ax(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$x(4) = Ax(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

## 5.5 Wektor stanowy sieci dróg

W rozdziale (5.3) przedstawiony został wektor stanowy dla pojedynczej drogi. W tym rozdziale zostanie sformułowany wektor stanowy dla bardziej ogólnego przypadku - sieci dróg. Sposób przedstawienia wartości stanowych jednak jest bardzo podobny. Każda z dróg  $e_1, \dots, e_n$  sieci  $E$  ma  $k$  wydzielonych odcinków oznaczanych jako  $b_1, \dots, b_{nk}$ . Dla każdego z odcinków definiowana jest wartość stanowa.

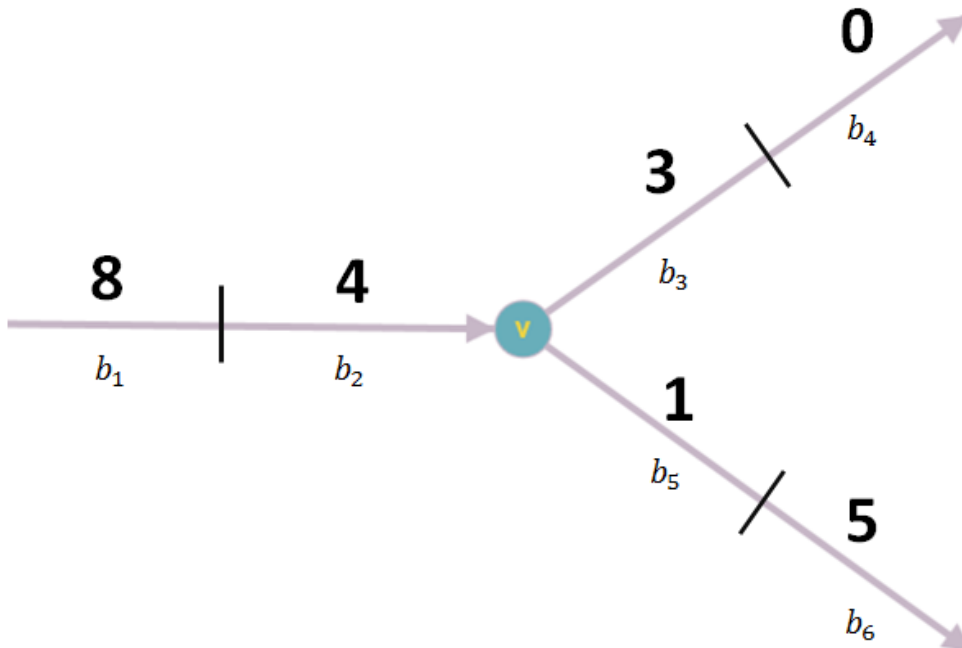
### 5.5.1 Przykład

Niech będzie dana sieć składająca się z trzech dróg  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Dla każdej drogi zostaną wydzielone 2 odcinki. Przykładowy wektor stanowy

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Zawiera w sobie następujące informacje dotyczące ilości pojazdów na poszczególnych odcinkach w chwili  $t$ :

- $b_1$  - Na pierwszym odcinku drogi  $e_1$  jest 8 pojazdów
- $b_2$  - Na drugim odcinku drogi  $e_1$  są 4 pojazdy
- $b_3$  - Na pierwszym odcinku drogi  $e_2$  są 3 pojazdy
- $b_4$  - Na drugim odcinku drogi  $e_2$  nie ma żadnych pojazdów
- $b_5$  - Na pierwszym odcinku drogi  $e_3$  jest 1 pojazd
- $b_6$  - Na drugim odcinku drogi  $e_3$  jest 5 pojazdów



Rysunek 5.3: Sieć dróg z ilościami pojazdów na poszczególnych odcinkach

## 5.6 Rozwój wektora stanowego sieci dróg

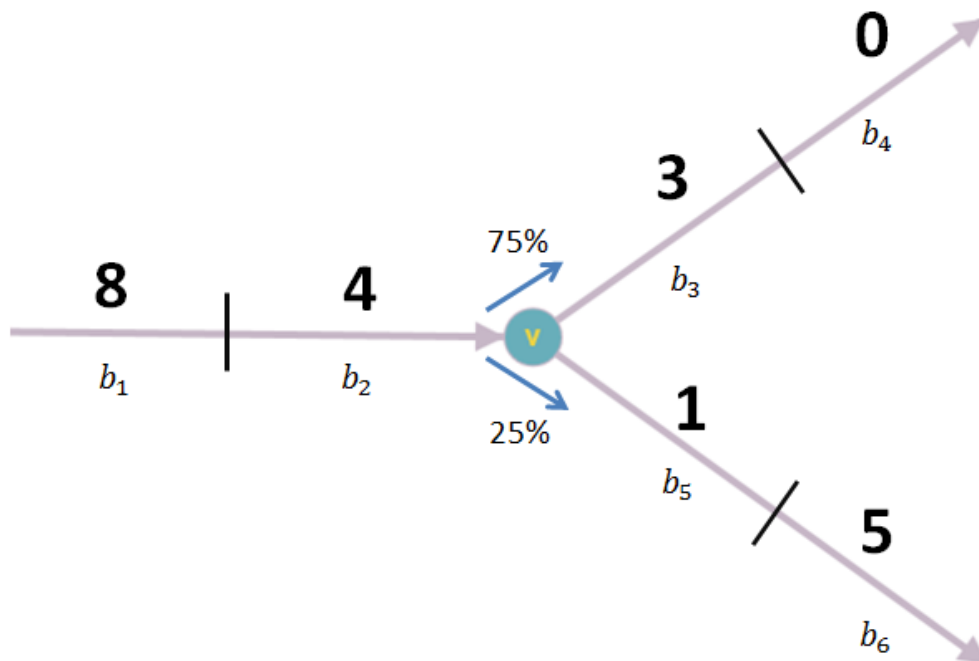
Przepływ pojazdów niezmiennie jest oparty o założenie, iż w trakcie trwania jednego interwału czasowego pojazdy pokonują 1 odcinek drogi. Równaniem systemu pozostaje  $\mathbf{x}(t+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ , gdyż do układu nie wpływają nowe pojazdy.

Macierz systemu  $\mathbf{A}$  powinna uwzględnić przepływy pojazdów na skrzyżowaniach. W tym momencie należy rozważyć następującą definicję macierzy  $\mathbf{A}$ :

Wartości macierzy  $\mathbf{A}$  określają jaką część pojazdów z odcinka zadanego przez indeks kolumny przejeżdża do odcinka zadanego przez indeks wiersza.

### 5.6.1 Przykład

Dla przykładu przedstawionego w (5.5.1) przedstawiony zostanie rozwój wektora stanowego. Założone zostaje, iż 75% pojazdów będących na odcinku  $b_2$  opuszcza skrzyżowanie na odcinku  $b_3$  a pozostałe 25% przejeżdża do  $b_5$ .



Rysunek 5.4:

Wtedy:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.10)$$

Niech zatem zgodnie z rysunkiem 5.4:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kolejne wartości wektora stanowego to:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{Ax}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{Ax}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{Ax}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## 5.7 Wprowadzenie sygnalizacji świetlnej

Kolejnym etapem rozwoju modelu jest wprowadzenie sygnalizacji świetlnej. Warto zauważyć, że do tej pory rozważane układy były pozbawione jakiegokolwiek sterowania, czego bezpośrednim skutkiem była niezmienność macierzy  $\mathbf{A}$  w czasie. W chwili pojawienia się sygnalizacji świetlnej

macierz systemu będzie oparta o aktualną fazę sygnalizacji świetlnej. Równanie systemu pozostaje takie samo jak w przypadku braku sygnalizacji świetlnej z jedną małą różnicą:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

Macierz systemu jest zmienna w czasie, zatem w miejsce  $\mathbf{A}$  pojawiło się  $\mathbf{A}(t)$ .

Dla rozważanej sieci dróg zostaje przedstawiona **macierz topologii** układu  $\mathbf{T}$ . Jej wartości podobnie jak macierzy  $\mathbf{A}$  odnoszą się do tego jaka część pojazdów z odcinka zadanego przez indeks kolumny przejeżdża do odcinka zadanego przez indeks wiersza. Macierz  $\mathbf{A}$  dotyczy jednak możliwych przejazdów w konkretnej fazie sygnalizacji świetlnej. Natomiast macierz topologii  $\mathbf{T}$  odnosi się do możliwych przejazdów uwzględniając wszystkie fazy sygnalizacji świetlnej i jest stała w czasie.

**Macierz sterowania** (sygnalizacją świetlną) oznaczana będzie jako  $\mathbf{S}(t)$ . Ustala ona macierz systemu na podstawie następującej równości:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{T} \quad (5.11)$$

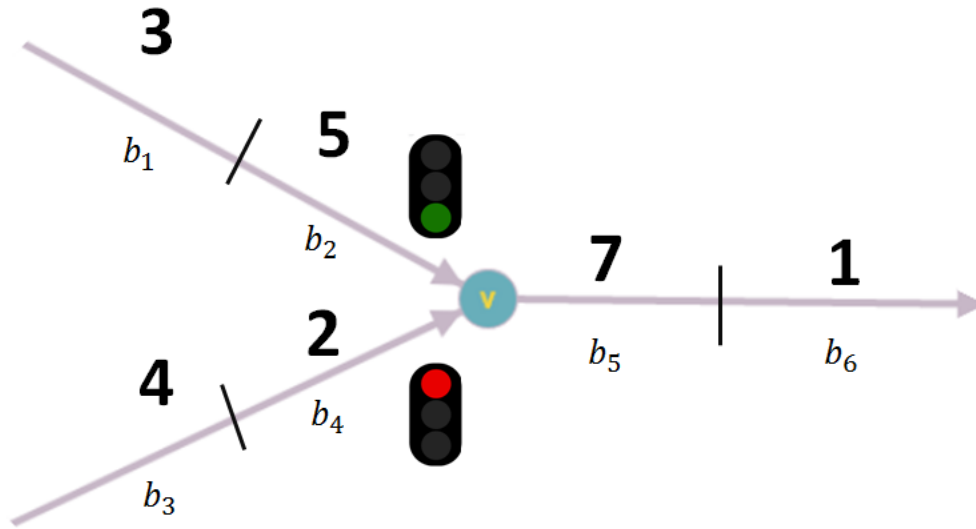
Jeśli  $S(t)$  określa przejazdy, które są rzeczywiście możliwe w układzie, to:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}(t) \quad (5.12)$$

Zatem celem wprowadzenia macierzy topologii oprócz przedstawienia wszystkich możliwych przejazdów jest także walidacja przejazdów zadanych przez macierz sterowania  $\mathbf{S}(t)$ .

### 5.7.1 Przykład

Rozważony zostanie przykład sieci trzech dróg  $e_1, e_2, e_3$ . Każda z nich jest podzielona na dwa odcinki. Drogi  $e_1$  i  $e_2$  zbiegają się na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną. Założone jest, że sygnalizacja zmienia się w każdym kroku czasowym, jednak w międzyczasie przez jeden interwał czasowy jest żółte światło dla obydwu dróg. Matematycznie ujmując żółte światło jest równoważne czerwonemu - pojazdy czekają na skrzyżowaniu. Początkowy stan sieci przedstawia rysunek:

Rysunek 5.5: Sieć dróg z sygnalizacją świetlną w chwili  $t=0$ 

Należy zastanowić się nad macierzą topologii układu  $\mathbf{T}$ . Jest ona następująca:

$$T = \begin{array}{cccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{matrix} \end{array} \quad (5.13)$$

- Wartości w kolumnach  $b_1, b_3, b_5$  są równe 1 tylko w wierszach odpowiadającym odcinkom  $b_2, b_4, b_6$ , co wynika z tego, że pojazdy będące na odcinkach  $b_1, b_3, b_5$  mają tylko możliwość przejazdu do odpowiednio  $b_2, b_4, b_6$ .
- Wartości w kolumnie  $b_6$  są zerowe, gdyż pojazdy z odcinku  $b_6$  opuszczają układ.
- Najbardziej interesujące są kolumny  $b_2$  i  $b_4$ . Odpowiadają one odcinkom leżącym bezpośrednio przed skrzyżowaniem. Obydwie kolumny posiadają dwie wartości 1, gdyż pojazdy będące na odcinkach  $b_2, b_4$  mają dwie możliwości przejazdu. Pojazdy będące na odcinku  $b_2$  mogą przejechać przez skrzyżowanie i wjechać na  $b_5$ , albo pozostać dalej na  $b_2$  w przypadku czerwonego światła. Analogiczna sytuacja dotyczy pojazdów na odcinku  $b_4$ . **Zielone** i **czerwone** tło określa przy jakiej sygnalizacji świetlnej wartość jest równa 1.

Początkowy wektor stanowy (zgodny z rysunkiem 5.5) to:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz stanu w momentach  $t = 0, 4, 8$  uwzględniająca zielone światło dla odcinka  $b_2$  oraz czerwone dla  $b_4$  są przedstawione następująco:

$$A_{b_2} = S(0)T = S(0) = \begin{bmatrix} b_1 & \textcolor{green}{b_2} & b_3 & \textcolor{red}{b_4} & b_5 & b_6 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{1} & 0 & \textcolor{green}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Macierz stanu w momentach  $t = 2, 6, 10$  uwzględniająca zielone światło dla drogi  $e_2$  oraz czerwone dla  $e_1$  są przedstawione następująco:

$$A_{b_4} = S(1)T = S(1) = \begin{bmatrix} b_1 & \textcolor{red}{b_2} & b_3 & \textcolor{green}{b_4} & b_5 & b_6 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{0} & 0 & \textcolor{green}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

t	$\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}(t)$	Rysunek stanu układu
0	$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{1} & 0 & \textcolor{green}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{1} & 0 & \textcolor{green}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	



## 5.8 Rozwój wektora stanowego

Wektor stanowy zmienia się wraz z upływem czasu wedle następującego wzoru:

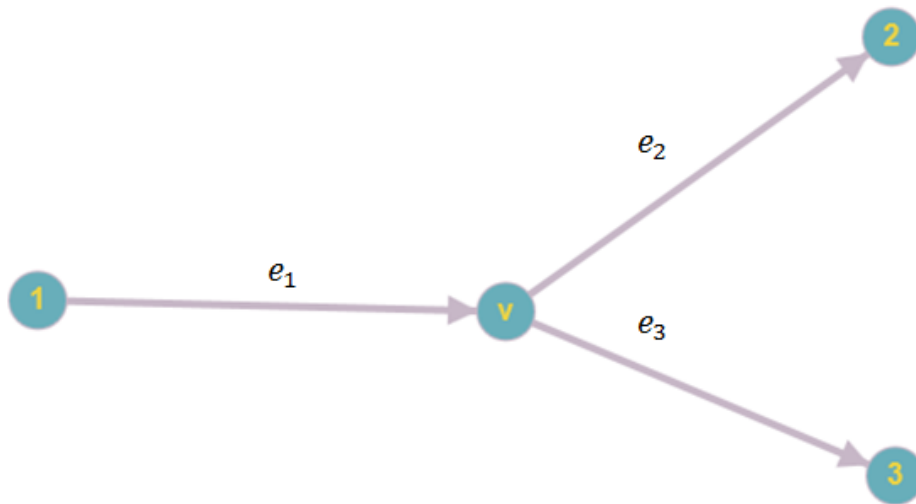
$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (5.16)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą systemu. Określa ona przepływ pojazdów po rozważanej sieci dróg.

### 5.8.1 Propozycja początkowego modelu przepływu

Początkowy model przepływu pojazdów zakłada, iż wszystkie pojazdy w chwili  $t+1$  są o jeden odcinek dalej w swojej podróży niż w momencie  $t$ . Założone jest, iż żadne nowe pojazdy nie pojawiają się w sieci dróg, a pojazdy będące w chwili  $t$  w ostatnim odcinku drogi kończącej swój bieg opuszczają układ.

### 5.8.2 Przykład



Rysunek 5.6: Skrzyżowanie 1

Niech dane będzie skrzyżowanie będące rozwidleniem drogi  $e_1$  na dwie drogi  $e_2, e_3$ . Siatka każdej drogi posiada jeden odcinek - czyli całą drogę. Początkowy wektor stanu jest następujący:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (5.17)$$

Dodatkowo założone jest, że 60% pojazdów na skrzyżowaniu  $v$  skręca w lewo, czyli wjeżdża na drogę  $e_2$ . Pozostałe 40% wybiera wjazd na drogę  $e_3$ . Wtedy macierz przejścia jest następująca:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 60\% & 0 & 0 \\ 40\% & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.18)$$

Warto zauważyć, że wartości macierzy  $A$  to liczby pojazdów przejeżdżających z odcinka zadanego przez indeks kolumny do odcinka zadanego przez indeks wiersza. Na mocy wzoru 5.16 wektor stanowy w chwili  $t=1$  jest następujący:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Interpretacja przekształcenia jest następująca: zarówno dwa pojazdy będące na drodze  $e_2$  jak i siedem pojazdów będące na drodze  $e_3$  opuściły układ. Z kolei z dziesięciu pojazdów będących na drodze  $e_1$  - sześć wjechało na drogę  $e_2$ , a cztery na drogę  $e_3$ .

## 5.9 Sygnalizacja świetlna

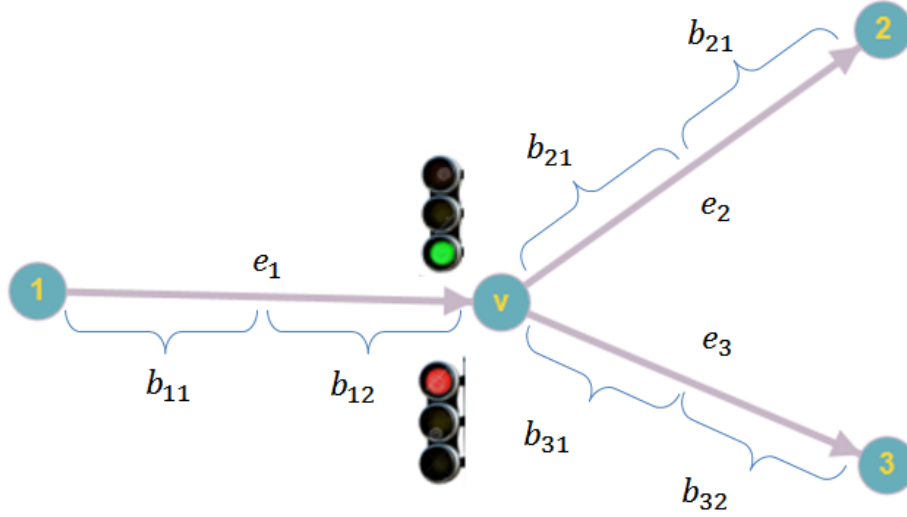
Kolejnym krokiem, który należał rozważyć jest wprowadzenie sygnalizacji świetlnej. Zostanie ona przedstawiona w macierzy sygnalizacji świetlnej  $\mathbf{B}(t)$ . Macierz posiada następujące wartości określające możliwość przejazdu z odcinka zadanego przez kolumnę macierzy do odcinka wyznaczonego przez indeks wiersza:

- 1 - Jest zielone światło, umożliwiające przejazd
- 0 - Jest czerwone światło, uniemożliwiające przejazd
- $\theta$  - pomiędzy dwiema drogami nie ma bezpośredniego połączenia na skrzyżowaniu. We wszelkich obliczeniach przyjęte jest, że  $\theta = 0$

Wzór przedstawiający rozwój wektora stanowego po uwzględnieniu sygnalizacji świetlnej jest następujący:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t)$$

## 5.9.1 Przykład



Rysunek 5.7: Skrzyżowanie 1 z uwzględnieniem sygnalizacji świetlnej

Niech dana będzie sieć dróg przedstawiona na rysunku 5.7. Przedstawia ono skrzyżowanie z drogą wlotową  $e_1$  oraz dwiema drogami wylotowymi  $e_2, e_3$ . Każda z dróg zostaje podzielona na dwa odcinki. Początkowy wektor stanu przedstawia ilości pojazdów na danych odcinkach drogi.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 7 \\ 30 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{31} \\ b_{32} \end{matrix} \quad (5.19)$$

Podobnie jak we wcześniejszym przykładzie założone jest, że 60% pojazdów skręca w lewo, a 40% w prawo. Dodatkowo w chwili  $t = 0$  jest zielone światło tylko dla skręcających w lewo.

$$\mathbf{B}(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} & b_{31} & b_{32} \\ \theta & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ \theta & 1 & \theta & \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{31} \\ b_{32} \end{matrix} \quad (5.20)$$

## 5.10 Macierz stanu

### 5.10.1 Przykład

Niech rozważaną siecią dróg będzie skrzyżowanie jednej drogi wlotowej  $e_1$  oraz dwóch wylotowych  $e_2, e_3$ . Struktura skrzyżowania jest przedstawiona na rysunku 5.6. Macierz  $A$  jest **macierzą przejścia** skrzyżowania  $v$ . Wartości 1 oznaczają możliwy przejazd na skrzyżowaniu z drogi odpowiadającej indeksowi kolumny do drogi zadanej przez indeks wiersza.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.21)$$

tu był rysunek

### 5.10.2 Ogólny wzór

Niech dana będzie sieć dróg  $G=(V, E)$ . Macierzą przejścia sieci dróg  $G$  nazywana będzie macierz  $M$  z następującymi wartościami:

- 0 - w przypadku braku manewru umożliwiającego bezpośredni przejazd z drogi zadanej przez indeks kolumny do drogi zadanej przez indeks wiersza
- 1 - w przypadku istnienia manewru umożliwiającego bezpośredni przejazd z drogi zadanej przez indeks kolumny do drogi zadanej przez indeks wiersza

## 5.11 Macierz stanowa sieci dróg

Strukturą przedstawiającą stan sieci dróg jest **macierz stanowa**  $P(k)$ . Składa się ona z zmiennych stanowych w danym momencie  $k$ . Każdy wiersz macierzy odpowiada jednej drodze  $e$ . Indeks kolumny określa konkretny odcinek tej drogi. Oznaczenie  $P(k, l)$  będzie odnosiło się do  $l$ -tej kolumny macierzy  $P(k)$ .

Wartość zmiennej stanowej początkowo jest ilością pojazdów na danym odcinku. Jako przykład zostanie przedstawiona początkowa macierz stanowa skrzyżowania z rysunku 5.6. Niech siatki przestrzenne dróg składają się z 4 odcinków. Początkowa macierz stanu  $P(0)$  może być przedstawiona jako:

$$P(0) = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.22)$$

Powyższa macierz przekazuje informację iż w chwili 0 pojazdy są na następujących drogach:

- $e_1$  - na odcinkach  $b_1, b_3$
- $e_2$  - na odcinku  $b_3$
- $e_3$  - na odcinku  $b_0$

## 5.12 Model przepływu

### 5.12.1 Przykład

Początkowy model przepływu pojazdów zakłada, iż wszystkie pojazdy w chwili  $k + 1$  są o jeden odcinek dalej w swojej podróży niż w momencie  $k$ . Założone jest iż żadne nowe pojazdy nie pojawiają się w sieci dróg, a pojazdy będące w chwili  $k$  w ostatnim odcinku drogi  $e_3$  opuszczają układ. Wtedy kolejne macierze stanowe dla przykładu (5.22) są następujące:

$$P(1) = \begin{array}{cccc} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & e_1 \\ & e_2 \\ & e_3 \end{array} \quad (5.23)$$

$$P(2) = \begin{array}{cccc} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & e_1 \\ & e_2 \\ & e_3 \end{array} \quad (5.24)$$

$$P(3) = \begin{array}{cccc} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & e_1 \\ & e_2 \\ & e_3 \end{array} \quad (5.25)$$

$$P(4) = \begin{array}{cccc} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} & e_1 \\ & e_2 \\ & e_3 \end{array} \quad (5.26)$$

### 5.12.2 Ogólny wzór

W poprzedniej sekcji został przedstawiony przykład wyliczenia macierzy stanowej dla kolejnych momentów w czasie. Następnym krokiem jest przedstawienie rozwiązania dla ogólnego przypadku.

Wektor  $S(k)$  nazywany będzie **wektorem źródła skrzyżowań**. Dotyczy on ruchu wpływającego do poszczególnych dróg w momencie  $k + 1$  ze wszystkich skrzyżowań układu. Jest on zdefiniowany w oparciu o ostatnią kolumnę macierzy  $P(k)$ :

$$S(k) = B \cdot P(k, m) \quad (5.27)$$

Ogólny wzór przedstawiający rozwój macierzy stanowej to:

$$P(k + 1) = \overrightarrow{P(k)} + S(k)^\theta \quad (5.28)$$

Gdzie macierz  $S(k)^\theta$  to macierz początkową wektora  $S(k)$  wyliczona wedle definicji (??).

### 5.12.3 Zastosowanie wzoru

Dla przykładu z poprzedniej sekcji (5.22), gdzie

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Dla kolejnego momentu  $k = 1$  korzystając ze wzoru (5.28):

$$P(1) = \overrightarrow{P(0)} + S(0)^\theta \quad (5.30)$$

Należy wyliczyć wektor źródła skrzyżowań:

$$S(0) = B \cdot P(0, m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Zatem

$$S(0)^\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Oczywiście

$$\overrightarrow{P(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

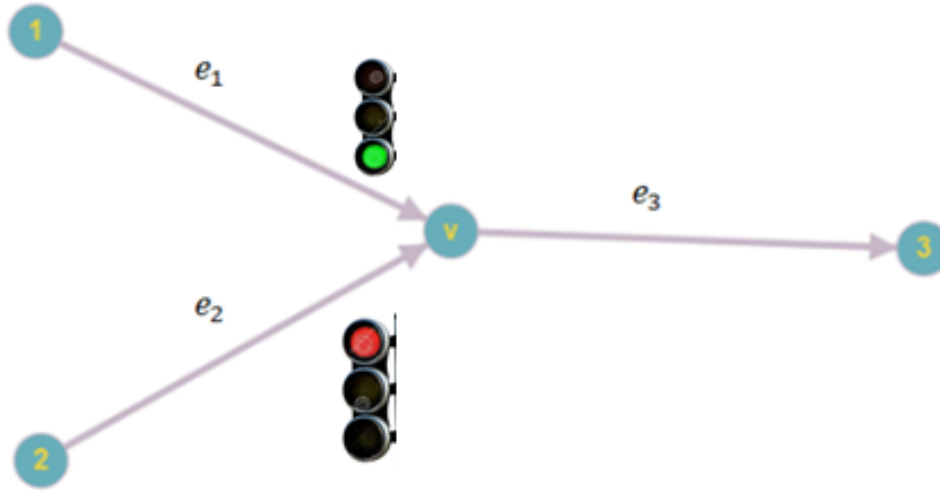
Ostatecznie ze wzoru (5.30) wynika, że

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Warto zauważyć, że w chwili 0 na obydwu drogach wlotowych  $e_1, e_2$  pojazdy znajdowały się na końcowym odcinku. Problemem okazuje się kolizyjność manewrów wjazdu na drogę  $e_3$  z dróg odpowiednio  $e_1$  i  $e_2$ . Początkowo ta kwestia została pominięta. Następna sekcja przedstawia rozwiązanie tego problemu.

## 5.13 Model przepływu z sygnalizacją świetlną

### 5.13.1 Przykład



Rysunek 5.8: Skrzyżowanie 1 z sygnalizacją świetlną w chwili 0

Wprowadzona zostaje sygnalizacja świetlna dla dwóch dróg wlotowych  $e_1, e_2$ . Sygnalizacja świetlna będzie oparta o ciąg **macierzy sygnalizacji**. Określają one z której drogi pojazdy będą mogły wjechać na drogę  $e_3$ . Dla chwili 0 przyjęte jest, że zgodnie z rysunkiem 5.8 pojazdy na ostatnim odcinku drogi  $e_2$  będą musiały poczekać. Przykładowa początkowa macierz to:

$$M(0) = \begin{bmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (5.35)$$

Przekazuje ona informację, że:

- Jest zielone światło na drodze  $e_1$  w chwili 0
- Jest czerwone światło na drodze  $e_2$  w chwili 0
- Wartości  $\theta$  są przypisane do dróg pomiędzy którymi nie ma bezpośredniego połączenia na skrzyżowaniu

Poniższy przykład obrazuje rozwój macierzy stanowej dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną.

$$P(0) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (5.36)$$

Zgodnie z rysunkiem 5.8 czerwone światło na drodze  $e_2$  powoduje, że pojazdy nie opuszczają ostatniego odcinka tej drogi. Z kolei pojazdy ostatniego odcinka drogi  $e_1$  wjeżdżają na drogę  $e_3$ . Zatem:

$$P(1) = \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \quad (5.37)$$

Sygnalizacja świetlna nie zmienia się w chwili 1. Dochodzi do sytuacji gdy ruch kumuluje się na ostatnim odcinku drogi  $e_2$ .

$$P(2) = \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \quad (5.38)$$

Niech w chwili 2 będzie zielone światło dla drogi  $e_2$ , czyli

$$M(2) = \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \quad (5.39)$$

Początkowo założone jest, że wszystkie pojazdy na ostatnim odcinku drogi przejeżdżają przez skrzyżowanie. Wtedy:

$$P(3) = \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \quad (5.40)$$



### 5.13.2 Ogólny wzór

Macierz  $M(k)$  jest ciągiem **macierzy sygnalizacji świetlnej**. Określają one możliwości przejazdu z drogi zadanej przez indeks kolumny do drogi wyznaczonej przez indeks wiersza. Macierz posiada następujące wartości w chwili  $k$ :

- 1 - dla sygnalizacji świetlnych świecących się na zielono w chwili  $k$
- 0 - dla sygnalizacji świetlnych świecących się na czerwono w chwili  $k$
- $\theta$  - w przypadku gdy nie ma bezpośredniego połączenia na żadnym skrzyżowaniu pomiędzy dwiema drogami. We wszelkich obliczeniach przyjęte jest, że  $\theta = 0$ .

**Wektor źródła skrzyżowań** z uwzględnieniem sygnalizacji świetlnej jest przedstawiony wzorem:

$$S(k) = M(k) \cdot P(k, m) \quad (5.41)$$

Wprowadzone zostaną dwa ciągi wektorów. Pierwszym z nich jest ciąg pojazdów opuszczających skrzyżowanie  $L(k)$ .

$$L(k) = M(k)^T * P(k, m) \quad (5.42)$$

Ciąg pojazdów oczekujących na skrzyżowaniu to:

$$W(k) = P(k, m) - L(k)$$

Finalny wzór rozwoju macierzy stanowej to:

$$P(k+1) = \overrightarrow{P(k)} + S(k)^\theta + {}^\theta W(k) \quad (5.43)$$

### 5.13.3 Zastosowanie wzoru

Dla wcześniej przedstawionego przykładu w tabeli są wypisane obliczenia wedle wzoru (5.43).

Tablica 5.1: Rozwój macierzy stanowej na skrzyżowaniu 1 z sygnalizacją świetlną

k	M(k)	P(k)	$\overrightarrow{P(k)}$	S(k)	L(k)	W(k)
0	$\begin{bmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$				

Wartości zaznaczone na zielono odpowiadają pojazdom, które mają zielone światło i przejeżdżają przez skrzyżowanie (jest to uwzględnione w macierzy  $L(k)$ ).

Wartości zaznaczone na czerwono odpowiadają pojazdom, które mają czerwone światło i czekają na swoją kolej przejazdu (jest to uwzględnione w macierzy  $W(k)$ ).

## 5.14 Wprowadzenie źródeł ruchu

Dotychczasowe rozważania zakładały, że do sieci dróg nie napływają nowe pojazdy. Oczywiście konsekwencją tego założenia jest, że w pewnym momencie nie będzie w ogóle pojazdów na drogach. Sieć dróg jest układem zamkniętym, zatem dla dróg początkowych należy ustalić pewne źródła ruchu. Wprowadzony zostanie ciąg **wektor źródeł zewnętrznych**  $O(k)$ , odpowiadających indeksowi wierszy. Dla rozważanego skrzyżowania przykładowy wektor źródła  $O(k)$  jest następujący:

$$O(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (5.44)$$

Powyższa macierz przekazuje informację, iż w chwili 0:

- Na drogę  $e_1$  wjeżdżają 2 pojazdy
- Na drogę  $e_2$  wjeżdża 1 pojazd

Kolejnym krokiem jest aktualizacja wzoru rozwoju macierzy stanowej 5.43 wraz z ogólną definicją macierzy  $O$ .

Wzór określający rozwój macierzy stanowej jest następujący:

$$P(k+1) = \overrightarrow{P(k)} + S(k)^\theta + O(k)^\theta + {}^\theta W(k)$$

Tablica 5.2: Rozwój macierzy stanowej na skrzyżowaniu 1 z sygnalizacją świetlną i uwzględnieniem zewnętrznych źródeł ruchu

k	M(k)	P(k)	$\overrightarrow{P(k)}$	S(k)	L(k)	W(k)	O(k)
0	$\begin{bmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ 0 & 1 & \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$					

Wartości zaznaczone na zielono odpowiadają pojazdom, które mają zielone światło i przejeżdżają przez skrzyżowanie (jest to uwzględnione w macierzy  $L(k)$ ).

Wartości zaznaczone na czerwono odpowiadają pojazdom, które mają czerwone światło i czekają na swoją kolej przejazdu (jest to uwzględnione w macierzy  $W(k)$ ). Wartości zaznaczone na niebiesko odpowiadają pojazdom, które pojawiają się w sieci dróg.

## 5.15 Schematy skrzyżowań symulacyjnych

## 5.16 Przedstawienie problemu optymalizacyjnego



# Rozdział 6

## Przegląd metod optymalizacyjnych

### 6.1 Kategorie uczenia maszynowego

Uczenie maszynowe to dziedzina wchodząca w skład nauk zajmujących się sztuczną inteligencją. Samo uczenie w najprostszym kształcie może być rozumiane jako dobór parametrów na podstawie dostępnych danych. Uczenie maszynowe jest powszechnie dzielone na 3 kategorie nauki [13].

#### 1. Nadzorowane

Dane używane do uczenia nazywane są zbiorem treningowym. Każdy pojedynczy element zbioru treningowego ma informacje wejściowe oraz pewną pożądaną wartość wyjściową. W trakcie uczenia algorytm dopasowuje swoje parametry tak aby na podstawie danych wejściowych mógł przewidzieć wartość wyjściową. Przykładami uczenia nadzorowanego jest np. rozpoznawanie tekstu pisanego, detekcja obiektów na zdjęciach.

#### 2. Nienadzorowane

Uczenie nienadzorowane różni się od nadzorowanego tym, że nie są znane pożądane wartości wyjściowe. Celem nauki jest na podstawie podobieństw poszczególnych elementów zgrupowanie ich do odpowiednich klas. Przykładem uczenia nienadzorowanego może być np. klasyfikacja gatunków drzew na podstawie wiedzy o ich wysokościach i szerokości korony drzew.

#### 3. Wzmocnione

W środowisku uczenia ze wzmocnieniem istnieje agent, który jest odpowiedzialny za podejmowanie pewnych decyzji. Każda decyzja ma wpływ na stan środowiska, które zwraca agentowi nagrodę. Celem uczenia ze wzmocnieniem jest ustalenie strategii maksymalizującej skumulowaną wartość nagród.

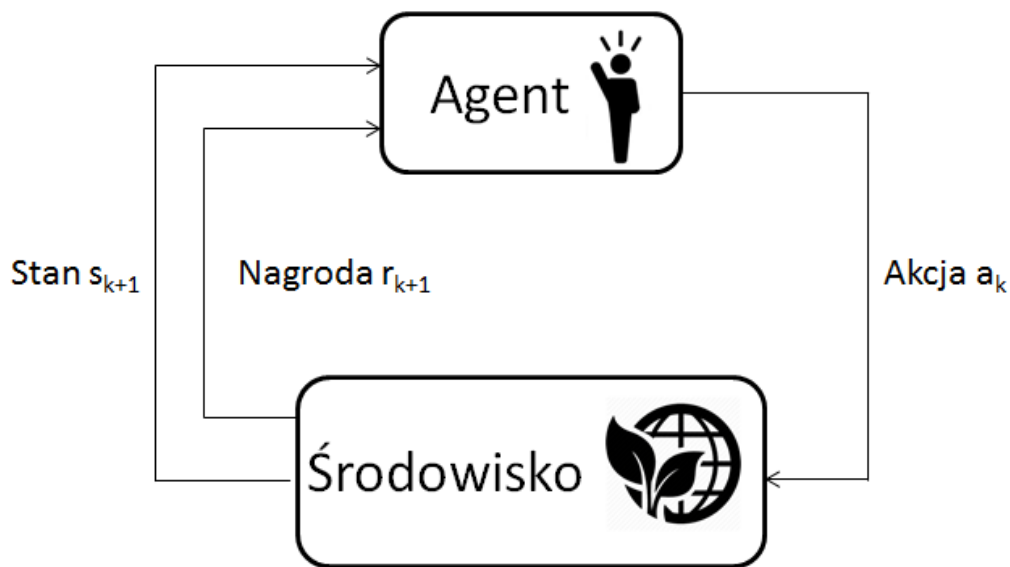
Ze wszystkich trzech kategorii uczenie ze wzmocnieniem odpowiada problemowi rozważanym w rozdziale Y. Szczegółowy opis uczenia ze wzmocnieniem zostanie przedstawiony w następnej sekcji.

### 6.2 Uczenie ze wzmocnieniem

Schemat uczenia ze wzmocnieniem składa się z następujących elementów:

1. **Agent** jest odpowiedzialny za podejmowanie pewnych decyzji. Ma on wiedzę na temat obecnego stanu środowiska i otrzymuje w każdym kroku czasowym sygnał nagrody. Jego decyzje wpływają na stan środowiska.

2. **Środowisko** jest przestrzenią posiadającą dynamiczny stan widoczny dla agenta. Chociaż to agent podejmuje akcje, to środowisko ma zdefiniowany model zmiany stanu. Model zmiany stanu może być stochastyczny oraz niewidoczny dla agenta. Oznacza to, że dwie te same akcje podjęte w tym samym stanie nie zawsze przyniosą identyczny następny stan. Innymi słowy agent nie może być stuprocentowo pewny rezultatów swoich akcji. Środowisko jest także nadawcą sygnału nagrody.
3. **Strategia** definiuje sposób doboru akcji przez agenta w danej chwili. Jest to funkcja, która przyjmuje stan środowiska i zwraca akcję, która ma być przeprowadzona.
4. **Sygnał nagrody** definiuje cel problemu uczenia ze wzmocnieniem. W każdym kroku czasowym środowisko wysyła agentowi liczbę rzeczywistą, która jest nazywana nagrodą (reward). Wartości nagród są czynnikiem wpływającym na zmianę strategii, gdyż zadaniem agenta jest maksymalizacja nagród. Wartość nagród zatem definiuje, które zdarzenia są dobre, a które złe dla agenta. Biologicznym odpowiednikiem dodatniej nagrody jest przyjemność, a ujemnej - ból.
5. **Funkcja wartości** zwraca wartość stanu czyli oczekiwaną sumę nagród jakie agent osiągnie w przyszłości będąc aktualnie w tym stanie.



Rysunek 6.1: Interakcje pomiędzy agentem a środowiskiem.

Algorytmy uczenia ze wzmocnieniem zazwyczaj stosuje się do rozwiązywania problemu procesu decyzyjnego Markowa. Sam **proces decyzyjny Markowa** jest zdefiniowany jako uporządkowana czwórka  $(S, A, P_a, R_a)$ , gdzie:

1.  $S$  to zbiór stanów
2.  $A$  to zbiór akcji. Notacją  $A_s$  oznaczane są możliwe akcje dla stanu  $s$ .
3.  $P_a(s, s') = Pr(s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a)$  to prawdopodobieństwo, że akcja  $a$  wykonana w stanie  $s$  w chwili  $t$  doprowadzi do stanu  $s'$  w chwili  $t + 1$ .
4.  $R_a(s, s')$  to oczekiwana nagroda otrzymana w wyniku akcji podjętej w stanie  $s$  prowadzącej do stanu  $s'$ .

Problemem procesu decyzyjnego Markowa jest odnalezienie optymalnej strategii. Strategia określona jest jako funkcja  $\pi(s)$  przyjmująca jako argument stan, a zwracająca podejmowaną akcję. Celem optymalizacji jest odnalezienie strategii maksymalizującej wartość:

$$G = \sum_{k=0}^K \gamma^k R_k \quad (6.1)$$

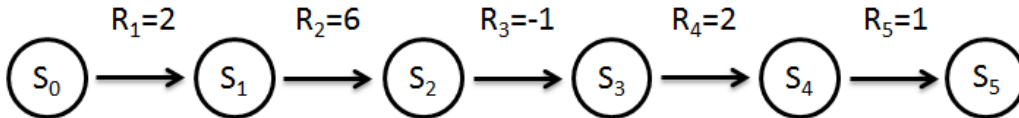
Chociaż strategii  $\pi(s)$  nie ma we wzorze 6.1, to strategia wpływa na otrzymywane nagrody  $R_k$  w każdej chwili  $k$ .

$\gamma \in (0, 1]$  jest czynnikiem dyskontującym. Idea dyskontowania nagród zaczerpnięta jest z rachunku finansowego. Przykładowo wpływ 1000 złotych po upływie roku czasu jest z pewnością bardziej wartościowy niż za 20 lat. Innymi słowy - pieniądze są liczone w czasie i tak samo należy postępować z nagrodami. Im wartość  $\gamma$  jest bliższa 0 tym bardziej istotne są początkowe nagrody. Dla  $\gamma = 1$  wszystkie nagrody są równie istotne - bez względu na czas ich otrzymania.

Analogicznie do (6.1) jest ustalona funkcja wartości stanu. Jako wartość stanu  $s$  określone jest:

$$G_t = \sum_{k=t}^K \gamma^k R_k = R_t + \gamma R_{t+1} + \gamma^2 R_{t+2} + \dots + \gamma^K R_K \quad (6.2)$$

Zostanie przedstawiony teraz przykład obliczeniowy. Agent podejmuje decyzje na których podstawie otrzymuje ciąg nagród  $R_0 = 0, R_1 = 2, R_2 = 6, R_3 = -1, R_4 = 2, R_5 = 1$ . Czynniki dyskontujący  $\gamma$  jest równy 0,9. Jaka jest wartość  $G$  oraz  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ ?



Rysunek 6.2: Ciąg nagród i stanów.

Najłatwiej obliczenia rozpocząć od  $G_5$ , ponieważ  $G_t = R_t + \gamma G_{t+1}$ .  
 $G_5 = R_5 = 1$ .

$$\begin{aligned}
G_4 &= R_4 + \gamma G_5 = 2 + 0,9 \cdot 1 = 2,9 \\
G_3 &= R_3 + \gamma G_4 = -1 + 0,9 \cdot 2,9 = 1,61 \\
G_2 &= R_2 + \gamma G_3 = 6 + 0,9 \cdot 1,61 \approx 7,45 \\
G_1 &= R_1 + \gamma G_2 = 2 + 0,9 \cdot 7,45 \approx 8,70 \\
G &= R_0 + \gamma G_1 = 0 + 0,9 \cdot 8,70 \approx 7,83
\end{aligned}$$

### 6.3 Programowanie dynamiczne

Termin programowania dynamicznego odnosi się do algorytmów wyliczających optymalne strategie procesu decyzyjnego Markowa w przypadku posiadanej całkowitej wiedzy na temat modelu środowiska [14]. Środowisko nie musi być w pełni deterministyczne tzn. nie za każdym razem akcja przeprowadzana ze stanu  $s_k$  musi w efekcie doprowadzić do tego samego stanu  $s_{k+1}$ . Jednak w takim przypadku musi być znany rozkład prawdopodobieństwa przydzielania nowego stanu na podstawie poprzedniego i właśnie podjętej przez agenta akcji. Dodatkowo wymagana jest możliwość ustalenia dowolnego stanu w trakcie uczenia.

Początkowa strategia  $\pi(s)$  jest dowolna, najczęściej losowa. Przedstawiony algorytm jest podzielony na 2 części. Część predykcji(prediction) oraz kontroli(control).

**Proces predykcji** ma za zadanie ustalenie wartości stanów na podstawie ustalonej strategii. Jej algorytm jest następujący:

1. Przyjmij daną z góry  $\pi$  jako strategię podejmowania akcji
2. Zainicjuj tablicę wartości stanów  $V(s)$ . Dla wszystkich możliwych stanów  $s \in S$  przyjmij wartość 0.
3.  $\Delta = 0$
4. Dla każdego  $s \in S$ :
  - (a)  $v = V(s)$
  - (b)  $V(s) = \sum_{s'} Pr(s'|s, \pi(s))[r + \gamma V(s')]$
  - (c)  $\Delta = \max(\Delta, |v - V(s)|)$
5. Jeśli  $\Delta < \theta$  to wróć do 3
6. Zwróć  $V(s)$  jako tablicę wartości stanów  $V_\pi(s)$  dla strategii  $\pi$ .

Parametr  $\theta \geq 0$  definiuje w kroku 5. moment stopu.

Wartość  $Pr(s', s, \pi(s))$  to prawdopodobieństwo, że akcja  $\pi(s)$  podjęta w stanie  $s$  doprowadzi do stanu  $s'$ . Z kolei  $r$  jest właśnie otrzymaną nagrodą.

Algorytm **kontroli** ma za zadanie odnaleźć bardziej optymalną strategię niż dotychczas. Jako argument przyjmuje on wyliczoną właśnie tablicę wartości stanów  $V_\pi(s)$ . Wprowadzona zostaje macierz  $Q_\pi(s, a)$ . Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned}
Q_\pi(s, a) &= E[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) | S_t = s, A_t = a] \\
&= \sum_{s'} Pr(s'|s, a)[r + \gamma V_{\pi}(s')]
\end{aligned} \tag{6.3}$$



Macierz przedstawia wartość akcji  $a$  podjętej w stanie  $s$ . Algorytm kontroli jest następujący:

1. Przyjmij wyliczoną przez algorytm predykcji macierz wartości stanów  $V_\pi(s)$
2. Zainicjuj tablicę wartości stanów  $V(s)$ . Dla wszystkich możliwych stanów  $s \in S$  przyjmij wartość 0.
3.  $policy\_stable = false$
4. Dla każdego  $s \in S$ :
  - (a)  $old\_action = \pi(s)$
  - (b)  $\pi(s) = \operatorname{argmax}_{a \in A_s} \sum_{s'} Pr(s'|s, a)[r + \gamma V(s')]$
  - (c) Jeśli  $old\_action \neq \pi(s)$  to  $policy\_stable = true$
5. Jeśli  $policy\_stable = true$  to zwróć strategię  $\pi(s)$ .



## Rozdział 7

# Optymalizacja sygnalizacji świetlnej



# Bibliografia

- [1] Statista, “Number of passenger cars and commercial vehicles in use worldwide from 2006 to 2015 in (1,000 units),” <https://www.statista.com/statistics/281134/number-of-vehicles-in-use-worldwide/>, 2019 (accessed March 3, 2019).
- [2] polskawliczbach.pl, “Samochody osobowe w polsce w latach 2003-2016 (źródło: Gus),” <http://www.polskawliczbach.pl/#transport-i-komunikacja>, 2019 (accessed March 3, 2019).
- [3] TomTom, “Tomtom traffic index measuring congestion worldwide),” [https://www.tomtom.com/en\\_gb/trafficindex/list?citySize=ALL&continent=ALL&country=ALL](https://www.tomtom.com/en_gb/trafficindex/list?citySize=ALL&continent=ALL&country=ALL), 2019 (accessed March 3, 2019).
- [4] “Plan działania na rzecz wdrażania inteligentnych systemów transportowych w europie,” *Komisja Wspólnot Europejskich, KOM*, vol. 886, 2008.
- [5] “Study on urban mobility – assessing and improving the accessibility of urban areas,” *Komisja Wspólnot Europejskich, KOM*, vol. 886, 2017.
- [6] S. Boubaker, F. Rehim, and A. Kalboussi, “Comparative analysis of microscopic models of road traffic data,” in *Logistics (LOGISTIQUA), 2011 4th International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 474–478.
- [7] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, “Multilevel modeling of the traffic dynamic,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.
- [8] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, “A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation,” in *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC’06. IEEE*. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.
- [9] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, “Network state estimation and prediction for real-time traffic management,” *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.
- [10] V. A. Vu and G. Tan, “High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks,” in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.
- [11] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, “On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.

- [12] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, “Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.
- [13] Z. Guan, L. Bian, T. Shang, and J. Liu, “When machine learning meets security issues: A survey,” in *2018 IEEE International Conference on Intelligence and Safety for Robotics (ISR)*. IEEE, 2018, pp. 158–165.
- [14] R. S. Sutton, A. G. Barto, and R. J. Williams, “Reinforcement learning is direct adaptive optimal control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 12, no. 2, pp. 19–22, 1992.