

Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

21 lutego 2019

Rozdział 1

Wprowadzenie

Rozdział 2

Cel pracy

Rozdział 3

Zakres pracy

Rozdział 4

Model sieci dróg

4.1 Drogi i skrzyżowania

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka $G = (V, E)$, gdzie:

V to zbiór skrzyżowań,

E to zbiór dróg.

Droga $e \in E$ jest odcinkiem o długości L_e . Sieć dróg jest strukturą ograniczoną, zatem drogi mogą mieć swój początek lub koniec w punktach innych niż skrzyżowaniach (patrz rysunek 4.1).



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

Rysunek 4.1: Przykładowa sieć dróg

4.2 Sygnalizacja świetlna

Na końcu drogi kończącej się na skrzyżowaniu znajdują się sygnalizacje świetlne, które zezwalają na jazdę w danym kierunku(lub kierunkach).

Manewr zdefiniowany jest jako para - kierunku jazdy na skrzyżowaniu (np. w prawo) oraz drogi umożliwiającej wjazd na to skrzyżowanie.

Faza świateł to zbiór manewrów, które nie powodują ze sobą kolizji. Tylko jedna faza M_v może być aktywna w danej chwili t i będziemy ją oznaczać z indeksem jako $\overline{M_v}$. Aktywna faza określa zielone światła na sygnalizacjach przypisanych do odpowiadających manewrów fazy.

4.2.1 Przykład sygnalizacji

Niech dane będzie skrzyżowanie posiadające po 4 drogi wlotowe i wylotowe. Drogi wlotowe oznaczamy nieparzystymi indeksami jako $E_{in} = \{e^1, e^3, e^5, e^7\}$, a wlotowe parzystymi t.j. $E_{in} = \{e^2, e^4, e^6, e^8\}$. Położenie dróg przedstawia rysunek 4.2 Każda z dróg wlotowych posiada dwie sygnalizacje świetlne - pierwsza określa możliwość manewru skrętu w lewo, a druga - dwóch manewrów: jazdy prosto i w prawo. Proponowane fazy to:

$M^{(1)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^1, e^5

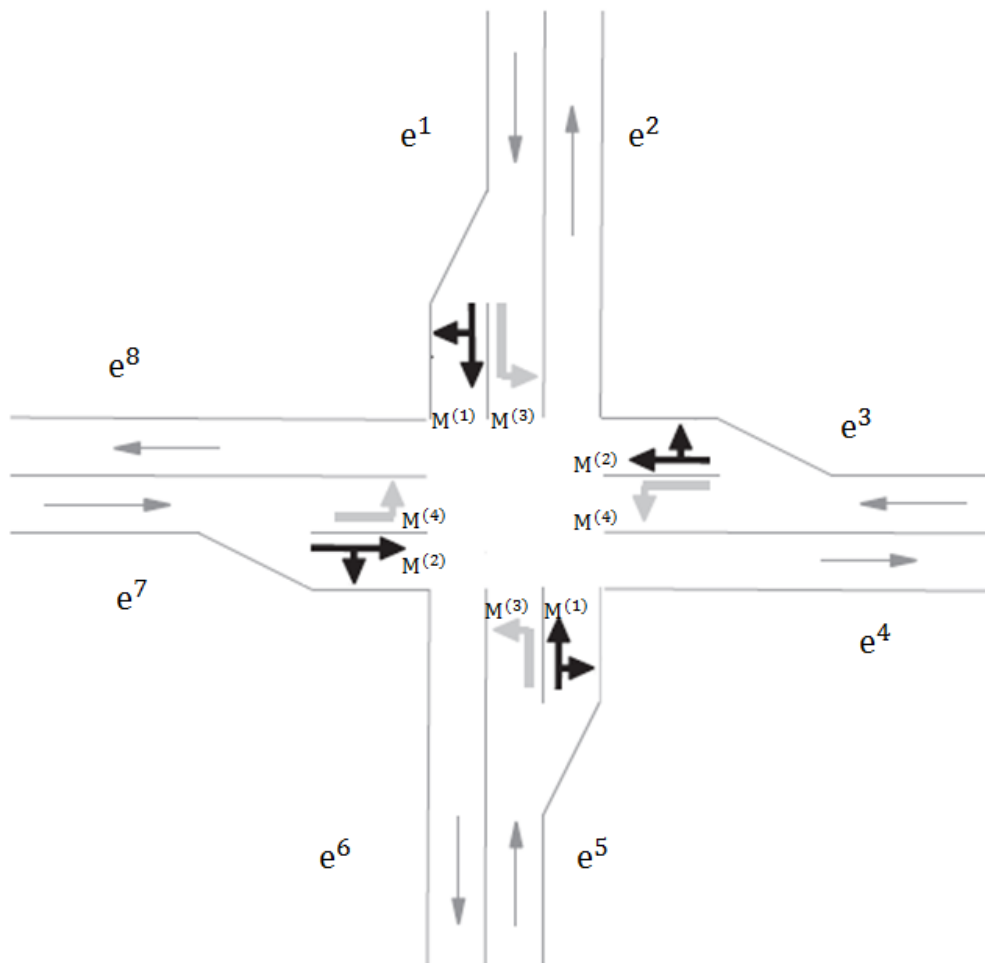
$M^{(2)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^3, e^7

$M^{(3)}$ - jazda w lewo dla pasów e^1, e^5

$M^{(4)}$ - jazda w lewo dla pasów e^3, e^7

Należy zwrócić uwagę, że jest to tylko jedno z wielu możliwych rozwiązań. Jest ono poprawne, gdyż żadne z manewrów konkretnej fazy się nie wykluczają. Przykładem niepoprawnej fazy jest:

M - jazda prosto dla pasów e_{in}^1, e_{in}^2 . Łatwo zauważyć, że te dwa manewry powodują kolizję.



Rysunek 4.2: Skrzyżowanie

4.2.2 Rozkład prawdopodobieństwa manewrów

Ustalono jest, że wszyscy kierowcy jadący drogą e wjeżdżając na skrzyżowanie v posiadają taki sam rozkład prawdopodobieństwa wyboru kierunku drogi. Niech manewr będzie parą (e, k) , gdzie k jest kierunkiem obranym na skrzyżowaniu. Prawdopodobieństwo jazdy zgodnie z kierunkiem k oznaczone jest jako $P_{e,k}$. Aby każdy pojazd opuścił skrzyżowanie funkcja musi spełniać równanie dla dowolnej drogi wlotowej e :

$$\sum_{k \in K} P_{e,k} = 1 \quad (4.1)$$

gdzie K to wszystkie możliwe do wyboru kierunki jazdy na skrzyżowaniu z drogi e .

Rozdział 5

Model ruchu drogowego

5.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [1] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [2] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki (prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [3]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [4] mezoskopowe wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta [5]. Ideą modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [6] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszają się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

5.2 Makroskopowy model ruchu

5.2.1 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych artykułach gęstość ruchu [7] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu.

5.2.2 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (5.2) wraz z warunkiem początkowym (5.1). Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gęstość ruchu utożsamiać z polem powierzchni przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece.

Dla ustalonej drogi e zmianę gęstości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} p(x, 0) = p_0(x) \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(p(x, t))}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(5.2)$$

Gdzie $p(x, t)$ to gęstość ruchu w punkcie x i czasie t . Wartość funkcji gęstości należy do przedziału $[0, p^{max}]$.

Równanie (5.1) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej początkowej gęstości drogi $p_0(x)$. Równanie (5.2) określa wedle założeń modelu makroskopowego [6] rozwój gęstości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu f powinna być wklęsła. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } p \in [0, p^*] \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

Gdzie λ jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz $p^* = \frac{1}{2}p^{max}$.

5.3 Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj są łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonana zostanie dyskretyzacja osi czasu, modelu sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

5.4 Dyskretyzacja czasu

Proces dyskretyzacji przeprowadzony zostanie najpierw dla osi czasu. Czas nie będzie traktowany jako wartość ciągła, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako Δt . Przestrzeń czasowa określona jest jako ciąg:

$$(t_k)_{k=0}^m = k\Delta t \quad (5.5)$$

Gdzie m liczba naturalna określająca moment końca symulacji ruchu drogowego. Oznaczamy go jako $t_{max} = m \cdot \Delta t$.

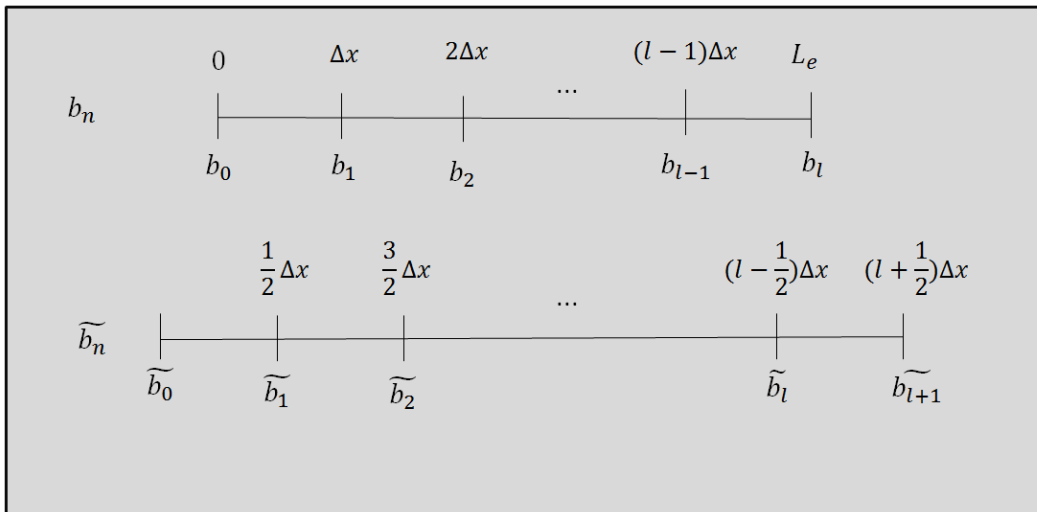
5.5 Dyskretyzacja drogi

Niech e będzie odcinkiem rozważanej drogi. Celem jest określenie ciągu b_n wybranych punktów drogi e . Niech dana będzie liczba naturalna l określająca ilość wybranych punktów z drogi. Wtedy odległość między sąsiednimi punktami to $\Delta x = \frac{L_e}{l}$. Ciąg b_n jest zdefiniowany następująco:

$$b_n = n \cdot \Delta x \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots, l \quad (5.6)$$

Powyższy ciąg (5.6) będzie nazywany siatką bazową. Do celów czysto obliczeniowych przedstawionych w rozdziale 5.6 zostaje utworzona również siatka pomocnicza:

$$\widetilde{b}_n = n \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots, l-1 \quad (5.7)$$



Rysunek 5.1: Siatka bazowa b_n i pomocnicza \widetilde{b}_n

5.6 Dyskretyzacja makroskopowego przepływu ruchu

Od tego momentu rozważamy jedynie punkty niebrzegowe zarówno ciągu pomocniczego jak i bazowego - czyli z wyjątkiem $b_0, b_l, \widetilde{b}_0, \widetilde{b}_{l+1}$. Dla każdego z punktów ciągu b_n gęstość będzie

wyliczona na podstawie jego otoczenia $(\widetilde{b_n}, \widetilde{b_{n+1}})$. Gęstość w punkcie b_n i czasie $t_k = k \cdot \Delta t$ definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} \frac{p(x, k \cdot \Delta t)}{\Delta x} dx. \quad (5.8)$$

Na podstawie (5.2) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t) dt = 0 \quad (5.9)$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t) dt = 0 \quad (5.10)$$

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach t_k . Wtedy wartości $q(\widetilde{b_n}, t)$ i $q(\widetilde{b_{n+1}}, t)$ są stałe na całym przedziale całkowania $[t_k, t_{k+1})$. Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) = 0 \quad (5.11)$$

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) \quad (5.12)$$

Powyższy wzór zawiera niezdefiniowane wartości q i p dla punktów ciągu $\widetilde{b_n}$ - będziemy je odpowiednio oznaczać $\widetilde{q_n^k}$ i $\widetilde{p_n^k}$. Dyskretyzacja wedle schematu staggered Lax-Friedrichs [8] prowadzi do następujących wartości dla dowolnej chwili t_k :

$$\widetilde{p_n^k} = \frac{p_{n-1}^k + p_n^k}{2} \quad (5.13)$$

$$\widetilde{q_n^k} = \frac{q_{n-1}^k + q_n^k}{2} \quad (5.14)$$

Powyższe wzory dotyczą $n = 1, 2, \dots, l-1$. Ustalona zatem będzie ewolucja gęstości dla pomocniczego ciągu $\widetilde{b_n}$. Jest ona opisana analogicznie do (5.12):

$$\widetilde{p_n^{k+1}} = \widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(\widetilde{p_n^k}) - q(\widetilde{p_{n-1}^k})) \quad (5.15)$$

Z równania (5.13) można wykazać, że:

$$p_n^{k+1} = \frac{\widetilde{p_n^{k+1}} + \widetilde{p_{n+1}^{k+1}}}{2} \quad (5.16)$$

Na podstawie wzorów (5.15) i (5.16) otrzymujemy:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}\widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) + \frac{1}{2}\widetilde{p_{n+1}^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \quad (5.17)$$

Co prowadzi do końcowej zależności:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \quad (5.18)$$

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n-1}^k - q_{n+1}^k). \quad (5.19)$$

Powyższy wzór kończy rozważania odnośnie punktów wewnętrznych drogi. Przypadek punktów brzegowych różni się diametralnie od punktów wewnętrznych ze względu na to iż trzeba w nich ująć aspekty wprowadzenia nowych pojazdów do ruchu oraz opuszczenia drogi. Podstawowe równanie modelu makroskopowego (5.2) nie uwzględnia ani źródła, ani też ujścia ruchu, co pozwala na zastosowanie własnego rozwiązania w tym zakresie. Wartość $\widetilde{p_0^k}$ jest źródłem ruchu. Początkowo ustalmy, że jest ona z góry dana i stała na przedziale (b_0, b_0) . Wtedy na podstawie wzoru 5.9 otrzymujemy:

$$\widetilde{p_0^{k+1}} \frac{\Delta x}{2} + \int_{b_0}^{\widetilde{b_1}} p(x, t_{k+1}) dx - \widetilde{p_0^k} \frac{\Delta x}{2} - \int_{b_0}^{\widetilde{b_1}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q(\widetilde{b_1}, t) - q(\widetilde{b_0}, t)) dt = 0 \quad (5.20)$$

Przedstawiony zostanie teraz proces wyliczania gęstości na zewnętrznych punktach drogi czyli b_0 i b_l . Źródło ruchu jest pewną funkcją rzeczywistą oznaczoną jako γ_{out}^k . Ujście γ_{out}^k w przypadku gdy pojazdy mogą bezproblemowo opuścić drogę ma wartość:

$$\gamma_{out}^k = \begin{cases} q(\widetilde{p_{l+1}^k}) & \text{dla } \widetilde{p_{l+1}^k} \in [0, p^*] \\ q(p^*) & \text{dla } \widetilde{p_{l+1}^k} \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\gamma_{out}^k = \begin{cases} q(\widetilde{p_{l+1}^k}) & \text{dla } \widetilde{p_{l+1}^k} \in [0, p^*] \\ q(p^*) & \text{dla } \widetilde{p_{l+1}^k} \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (5.22)$$

Rozwój gęstości ruchu w skrajnych punktach ciągu $\widetilde{b_n}$ przedstawia się następująco:

$$\widetilde{p_0^{t+1}} = \widetilde{p_0^t} - \frac{\Delta t}{\frac{1}{2}\Delta x}(f(p_0^t) - \gamma_{in}^t) \quad (5.23)$$

$$\widetilde{p_{l+1}^{t+1}} = \widetilde{p_{l+1}^t} - \frac{\Delta t}{\frac{1}{2}\Delta x}(f(p_0^t) - \gamma_{out}^t) \quad (5.24)$$

Biorąc pod uwagę 2 powyższe wzory oraz (5.16) rozwój ruchu w punktach krańcowych ciągu b_n jest opisany następująco:

$$p_0^{k+1} = \frac{\widetilde{p_0^k}}{2} + \frac{\widetilde{p_1^k}}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(p_0^k) - \gamma_{in}^t) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(p_1^k) - f(p_0^k))$$

$$p_l^{k+1} = \frac{\widetilde{p_l^k}}{2} + \frac{\widetilde{p_{l+1}^k}}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\gamma_{out}^t - f(p_l^k)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(p_l^k) - f(p_{l-1}^k))$$

TODO - napisać czym jest gamma out przede wszystkim i gammma in potem. —————

Drogę e traktujemy na razie jako układ izolowany posiadający źródło ruchu w punkcie b_0 . Jedyne ograniczenia co do źródła gęstości w tym punkcie to:

$$p_0^k < p^{max}.$$

$$p_0^{k+1} = p_0^k - \frac{2\Delta t}{\Delta x}(f(p_0^k) - \gamma^{in}) \quad (5.25)$$

Z kolei punkt b_l jest ujściem ruchu. Zakładamy, że pojazdy nie mają problemu z opuszczeniem drogi oraz, że gęstość w tym punkcie jest równa

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\gamma^{out}(p(\widetilde{b}_n, t_k)) - q(\widetilde{b}_{n-1}, t_k)), \quad (5.26)$$

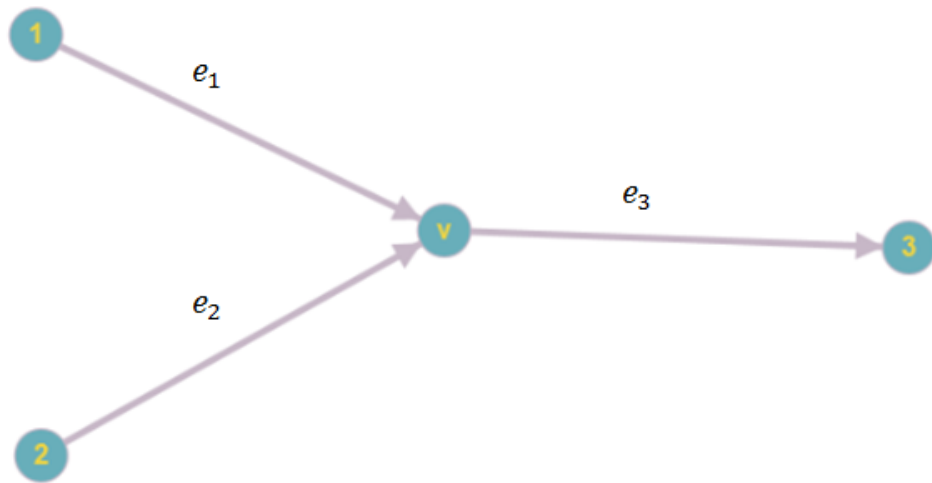
gdzie odpływ drogi definiujemy jako:

$$\gamma^{out}(p) = \begin{cases} q(p) & \text{dla } p \in [0, p^*] \\ q(p^*) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (5.27)$$

$$(5.28)$$

5.7 Przepływ ruchu na skrzyżowaniu 1

Udało się przedstawić przepływ ruchu dla pojedynczej drogi. W tym momencie należy skonstruować logiczny model przepływu ruchu przez skrzyżowanie. Początkowo wykorzystany będzie bardzo prosty przykład, by ustalić przepływ ruchu na skrzyżowaniu. Skrzyżowanie jest przedstawione na rysunku 5.2.



Rysunek 5.2: Skrzyżowanie 1

Skrzyżowanie v posiada dwie drogi wlotowe e_1, e_2 oraz jedną wylotową e_3 . Źródła ruchu dla tej sieci dróg znajdują się na początku dróg e_1, e_2 (punkty 1 i 2). Oznaczmy γ_1, γ_2 jako odpływy dróg e_1 i e_2 do skrzyżowania v . Początkowo założone będzie, że nie ma jeszcze żadnych pojazdów na drodze e_3 . Skrzyżowanie posiada dwie fazy świateł:

$M^{(1)}$ - jazda w lewo z drogi e_1

$M^{(2)}$ - jazda w prawo z drogi e_2

Przy uwzględnieniu sygnalizacji możemy opisać gęstość w punkcie początkowym drogi e_3 jako:

$$p_0 = \begin{cases} \text{Min}(\gamma_1) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\begin{cases} \text{Min}(\gamma_2) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.30)$$

Bibliografia

- [1] S. Boubaker, F. Rehim, and A. Kalboussi, “Comparative analysis of microscopic models of road traffic data,” in *Logistics (LOGISTIQUA), 2011 4th International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 474–478.
- [2] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, “Multilevel modeling of the traffic dynamic,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.
- [3] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, “A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation,” in *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC’06. IEEE*. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.
- [4] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, “Network state estimation and prediction for real-time traffic management,” *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.
- [5] V. A. Vu and G. Tan, “High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks,” in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.
- [6] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, “On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.
- [7] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, “Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.
- [8] S. Göttlich, M. Herty, and U. Ziegler, “Modeling and optimizing traffic light settings in road networks,” *Computers & operations research*, vol. 55, pp. 36–51, 2015.