

# Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

24 lutego 2019



# Rozdział 1

## Wprowadzenie



## Rozdział 2

### Cel pracy



## Rozdział 3

### Zakres pracy





# Rozdział 4

## Model sieci dróg

### 4.1 Drogi i skrzyżowania

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka  $G = (V, E)$ , gdzie:

$V$  to zbiór skrzyżowań,

$E$  to zbiór dróg.

Droga  $e \in E$  jest odcinkiem o długości  $L_e$ . Sieć dróg jest strukturą ograniczoną, zatem drogi mogą mieć swój początek lub koniec w punktach innych niż skrzyżowaniach (patrz rysunek 4.1).



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

Rysunek 4.1: Przykładowa sieć dróg

## 4.2 Sygnalizacja świetlna

Na końcu drogi kończącej się na skrzyżowaniu znajdują się sygnalizacje świetlne, które zezwalają na jazdę w danym kierunku(lub kierunkach).

Manewr zdefiniowany jest jako para - kierunku jazdy na skrzyżowaniu (np. w prawo) oraz drogi umożliwiającej wjazd na to skrzyżowanie.

Faza świateł to zbiór manewrów, które nie powodują ze sobą kolizji. Tylko jedna faza  $M_v$  może być aktywna w danej chwili  $t$  i będziemy ją oznaczać z indeksem jako  $\overline{M_v}$ . Aktywna faza określa zielone światła na sygnalizacjach przypisanych do odpowiadających manewrów fazy.

### 4.2.1 Przykład sygnalizacji

Niech dane będzie skrzyżowanie posiadające po 4 drogi wlotowe i wylotowe. Drogi wlotowe oznaczamy nieparzystymi indeksami jako  $E_{in} = \{e^1, e^3, e^5, e^7\}$ , a wlotowe parzystymi t.j.  $E_{in} = \{e^2, e^4, e^6, e^8\}$ . Położenie dróg przedstawia rysunek 4.2 Każda z dróg wlotowych posiada dwie sygnalizacje świetlne - pierwsza określa możliwość manewru skrętu w lewo, a druga - dwóch manewrów: jazdy prosto i w prawo. Proponowane fazy to:

$M^{(1)}$  - jazda prosto i w prawo dla pasów  $e^1, e^5$

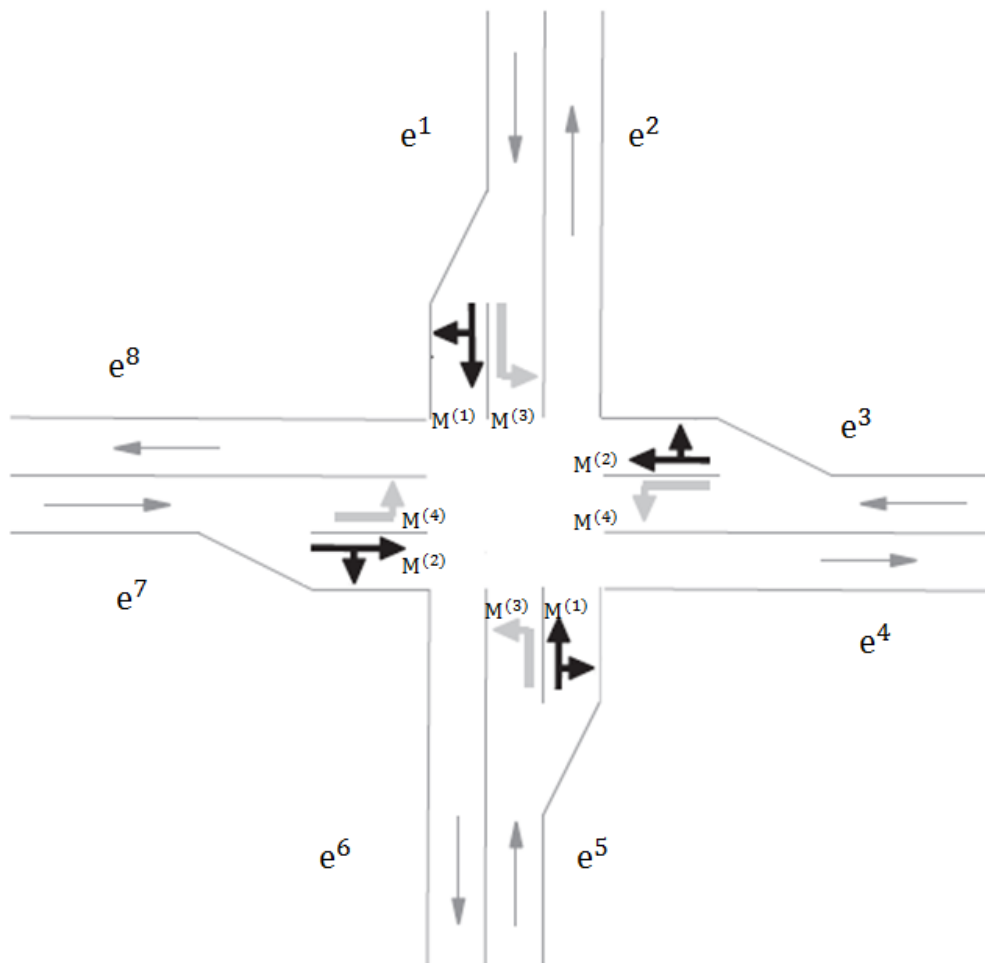
$M^{(2)}$  - jazda prosto i w prawo dla pasów  $e^3, e^7$

$M^{(3)}$  - jazda w lewo dla pasów  $e^1, e^5$

$M^{(4)}$  - jazda w lewo dla pasów  $e^3, e^7$

Należy zwrócić uwagę, że jest to tylko jedno z wielu możliwych rozwiązań. Jest ono poprawne, gdyż żadne z manewrów konkretnej fazy się nie wykluczają. Przykładem niepoprawnej fazy jest:

$M$  - jazda prosto dla pasów  $e_{in}^1, e_{in}^2$ . Łatwo zauważyć, że te dwa manewry powodują kolizję.



Rysunek 4.2: Skrzyżowanie

### 4.2.2 Rozkład prawdopodobieństwa manewrów

Ustalono jest, że wszyscy kierowcy jadący drogą  $e$  wjeżdżając na skrzyżowanie  $v$  posiadają taki sam rozkład prawdopodobieństwa wyboru kierunku drogi. Niech manewr będzie parą  $(e, k)$ , gdzie  $k$  jest kierunkiem obranym na skrzyżowaniu. Prawdopodobieństwo jazdy zgodnie z kierunkiem  $k$  oznaczone jest jako  $P_{e,k}$ . Aby każdy pojazd opuścił skrzyżowanie funkcja musi spełniać równanie dla dowolnej drogi wlotowej  $e$ :

$$\sum_{k \in K} P_{e,k} = 1 \quad (4.1)$$

gdzie  $K$  to wszystkie możliwe do wyboru kierunki jazdy na skrzyżowaniu z drogi  $e$ .

# Rozdział 5

## Model ruchu drogowego

### 5.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [1] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [2] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki (prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [3]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [4] mezoskopowe wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta [5]. Ideą modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [6] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszają się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

## 5.2 Makroskopowy model ruchu

### 5.2.1 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych artykułach gęstość ruchu [7] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu.

### 5.2.2 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (5.2) wraz z warunkiem początkowym (5.1). Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gęstość ruchu utożsamiać z polem powierzchni przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece.

Dla ustalonej drogi  $e$  zmianę gęstości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} p(x, 0) = p_0(x) \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(p(x, t))}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(5.2)$$

Gdzie  $p(x, t)$  to gęstość ruchu w punkcie  $x$  i czasie  $t$ . Wartość funkcji gęstości należy do przedziału  $[0, p^{max}]$ .

Równanie (5.1) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej początkowej gęstości drogi  $p_0(x)$ . Równanie (5.2) określa wedle założeń modelu makroskopowego [6] rozwój gęstości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu  $f$  powinna być wklęsła. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } p \in [0, p^*] \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] \end{cases} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

Gdzie  $\lambda$  jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz  $p^* = \frac{1}{2}p^{max}$ .

## 5.3 Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj są łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonana zostanie dyskretyzacja osi czasu, modelu sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

## 5.4 Dyskretyzacja czasu

Proces dyskretyzacji przeprowadzony zostanie najpierw dla osi czasu. Czas nie będzie traktowany jako wartość ciągła, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako  $\Delta t$ . Przestrzeń czasowa określona jest jako ciąg:

$$(t_k)_{k=0}^m = k\Delta t \quad (5.5)$$

Gdzie  $m$  liczba naturalna określająca moment końca symulacji ruchu drogowego. Oznaczamy go jako  $t_{max} = m \cdot \Delta t$ .

## 5.5 Dyskretyzacja drogi

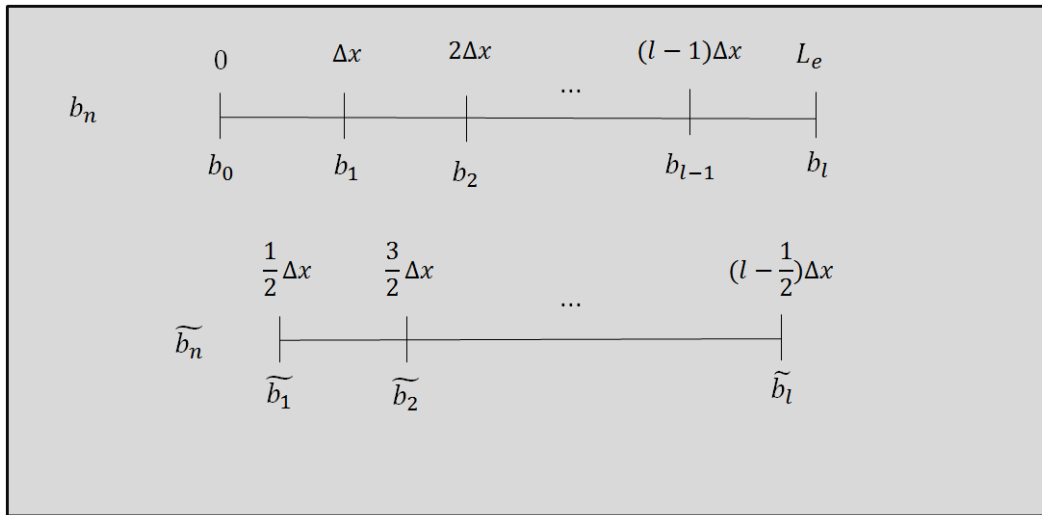
Zadaniem jest określenie ciągu  $b_n$  wybranych punktów drogi  $e$  dla których będą wyliczane gęstości. Niech dana będzie liczba naturalna  $l$  określająca ilość wybranych punktów z drogi. Wtedy odległość między sąsiednimi punktami to  $\Delta x = \frac{L_e}{l}$ . Ciąg  $b_n$  jest zdefiniowany następująco:

$$b_n = n \cdot \Delta x \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots, l \quad (5.6)$$

Powyższy ciąg (5.6) będzie nazywany siatką bazową. Punkty  $b_0, b_l$  będziemy dalej nazywać jako punkty brzegowe drogi, a  $b_1, \dots, b_{l-1}$  jako wewnętrzne.

Do celów czysto obliczeniowych przedstawionych w rozdziale 5.6 zostaje utworzona również siatka pomocnicza:

$$\widetilde{b}_n = n \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} \quad \text{dla } n = 1, \dots, l \quad (5.7)$$



Rysunek 5.1: Siatka bazowa  $b_n$  i pomocnicza  $\widetilde{b}_n$

## 5.6 Dyskretyzacja makroskopowego przepływu ruchu

Najpierw rozważone zostaną gęstości ruchu jedynie dla punktów wewnętrznych ciągu  $b_n$  czyli z pominięciem  $b_0$  i  $b_l$ . Dla każdego z tych punktów gęstość będzie wyliczona na podstawie

jego otoczenia  $(\widetilde{b}_n, \widetilde{b}_{n+1})$ . Gęstość w punkcie  $b_n$  i czasie  $t_k = k \cdot \Delta t$  definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{\widetilde{b}_n}^{\widetilde{b}_{n+1}} \frac{p(x, k \cdot \Delta t)}{\Delta x} dx. \quad (5.8)$$

Na podstawie (5.2) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{\widetilde{b}_n}^{\widetilde{b}_{n+1}} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{\widetilde{b}_n}^{\widetilde{b}_{n+1}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b}_{n+1}, t) - q(\widetilde{b}_n, t) dt = 0 \quad (5.9)$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x (p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b}_{n+1}, t) - q(\widetilde{b}_n, t) dt = 0 \quad (5.10)$$

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach  $t_k$ . Wtedy wartości  $q(\widetilde{b}_n, t)$  i  $q(\widetilde{b}_{n+1}, t)$  są stałe na całym przedziale całkowania  $[t_k, t_{k+1})$ . Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x (p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t (q(\widetilde{b}_{n+1}, t_k) - q(\widetilde{b}_n, t_k)) = 0 \quad (5.11)$$

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q(\widetilde{b}_{n+1}, t_k) - q(\widetilde{b}_n, t_k)) \quad (5.12)$$

Powyższy wzór zawiera niezdefiniowane wartości  $q$  i  $p$  dla punktów ciągu  $\widetilde{b}_n$  - będziemy je odpowiednio oznaczać  $\widetilde{q}_n^k$  i  $\widetilde{p}_n^k$ . Dyskretyzacja wedle schematu staggered Lax-Friedrichs [8] prowadzi do następujących wartości dla dowolnej chwili  $t_k$ :

$$\widetilde{p}_n^k = \frac{p_{n-1}^k + p_n^k}{2} \quad (5.13)$$

$$\widetilde{q}_n^k = \frac{q_{n-1}^k + q_n^k}{2} \quad (5.14)$$

Ustalona teraz będzie ewolucja gęstości dla pomocniczego ciągu  $\widetilde{b}_n$ . Jest ona opisana analogicznie do (5.12):

$$\widetilde{p}_n^{k+1} = \widetilde{p}_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q(\widetilde{b}_n, t_k) - q(\widetilde{b}_{n-1}, t_k)) \quad (5.15)$$

Z równania (5.13) można wykazać, że dla dowolnego  $n$ :

$$p_n^{k+1} = \frac{\widetilde{p}_n^{k+1} + \widetilde{p}_{n+1}^{k+1}}{2} \quad (5.16)$$



Na podstawie wzorów (5.15) i (5.16) otrzymujemy:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}\widetilde{p}_n^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) + \frac{1}{2}\widetilde{p}_{n+1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \quad (5.17)$$

Co prowadzi do końcowej zależności:

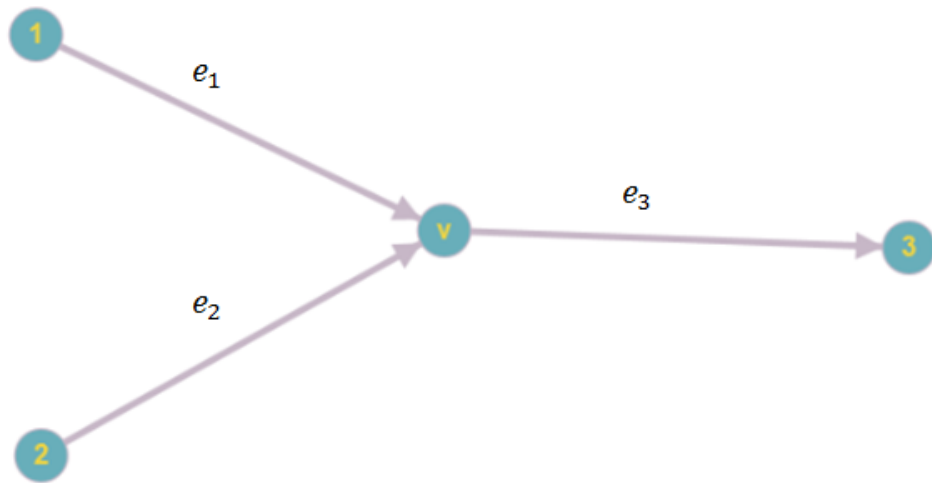
$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \quad (5.18)$$

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n-1}^k - q_{n+1}^k). \quad (5.19)$$

Powyższy wzór kończy rozważania odnośnie punktów wewnętrznych drogi. Przypadek punktów brzegowych  $b_0, b_l$  różni się diametralnie od punktów wewnętrznych ze względu na to iż trzeba w nich ująć aspekty wprowadzenia nowych pojazdów do ruchu oraz opuszczenia drogi. Podstawowe równanie modelu makroskopowego (5.2) nie uwzględnia ani źródła, ani też ujścia ruchu, co pozwala na zastosowanie własnego rozwiązania w tym zakresie. W przypadku gdy rozważana jest jedynie jedna droga gęstość źródła ruchu  $p_0^k$  może być dowolna. Jeśli pojazdy mogą bezproblemowo opuścić drogę wtedy  $p_l^k = 0$ . Przypadek gdy droga kończy lub zaczyna się na skrzyżowaniu zostaje przedstawiony w następnym rozdziale.

## 5.7 Przepływ ruchu na skrzyżowaniu 1

Udało się przedstawić przepływ ruchu dla pojedynczej drogi. W tym momencie należy skonstruować logiczny model przepływu ruchu przez skrzyżowanie. Początkowo wykorzystany będzie bardzo prosty przykład, aby ustalić przepływ ruchu na skrzyżowaniu. Skrzyżowanie jest przedstawione na rysunku 5.3.



Rysunek 5.2: Skrzyżowanie 1

Skrzyżowanie  $v$  posiada dwie drogi wlotowe  $e_1, e_2$  oraz jedną wylotową  $e_3$ . Źródła ruchu dla tej sieci dróg znajdują się na początku dróg  $e_1, e_2$  (punkty 1 i 2 na Rysunku 5.3). Należy podkreślić, że ujścia dróg  $e_1, e_2$  i źródło drogi  $e_3$  są fizycznie w tym samym punkcie oznaczonym jako  $v$ . Gęstość w tym punkcie w chwili  $t_k$  będziemy oznaczać jako  $p_v^k$ .

Skrzyżowanie posiada dwie fazy świateł:

$M^{(1)}$  - umożliwiające jazdę w lewo z drogi  $e_1$

$M^{(2)}$  - umożliwiające jazdę w prawo z drogi  $e_2$

Bazując na wzorach opisujących rozwój gęstości w dyskretnym modelu przedstawiony zostanie wzór opisujący rozwój gęstości w punkcie  $v$ .

$${}_3p_0^{k+1} = {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_1p_l^k$$

$${}_1p_l^{k+1} = \frac{1}{2}{}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1})$$

$${}_2p_l^{k+1} = {}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1})$$

$${}_3p_0^{k+1} = \begin{cases} {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_1p_l^k & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_2p_l^k & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.20)$$

$${}_1p_l^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}{}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.22)$$

$${}_2p_l^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}{}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.24)$$

$${}_2p_l^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}{}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases} \quad (5.25)$$

Szczegółowa dane pozwalające na przeprowadzenie symulacji są następujące:

$${}_1p_0^k = 0.2$$

$${}_2p_0^k = 0.1$$

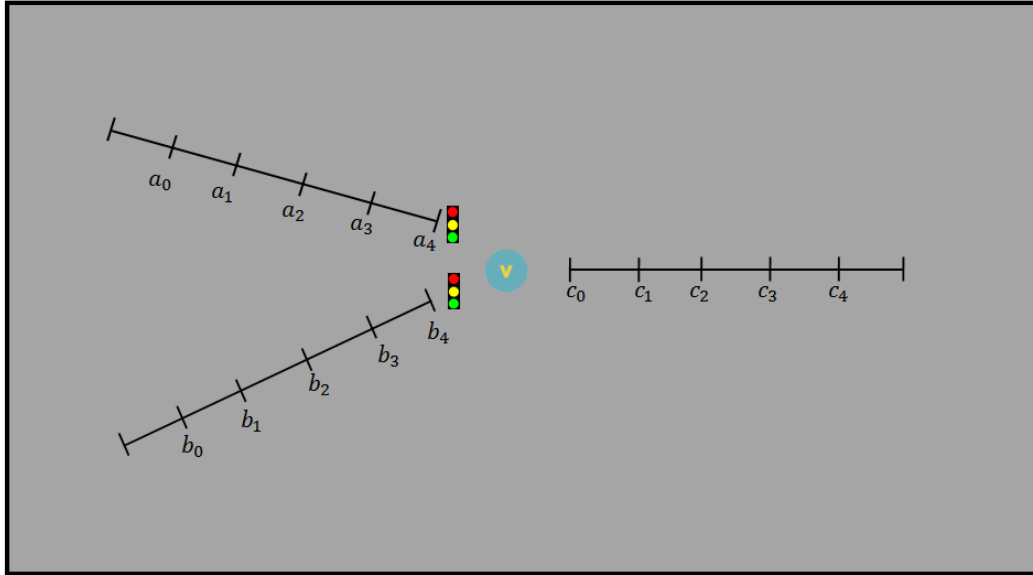
$$p_{max} = 0.25 \text{ (dla wszystkich dróg)}$$

$$\Delta x = 50$$

$$\Delta t = 1$$

$$\lambda = 2$$

$$L_{e_1}, L_{e_2}, L_{e_3} = 200$$



Rysunek 5.3: Skrzyżowanie 1



# Bibliografia

- [1] S. Boubaker, F. Rehim, and A. Kalboussi, “Comparative analysis of microscopic models of road traffic data,” in *Logistics (LOGISTIQUA), 2011 4th International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 474–478.
- [2] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, “Multilevel modeling of the traffic dynamic,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.
- [3] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, “A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation,” in *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC’06. IEEE*. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.
- [4] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, “Network state estimation and prediction for real-time traffic management,” *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.
- [5] V. A. Vu and G. Tan, “High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks,” in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.
- [6] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, “On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.
- [7] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, “Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.
- [8] S. Göttlich, M. Herty, and U. Ziegler, “Modeling and optimizing traffic light settings in road networks,” *Computers & operations research*, vol. 55, pp. 36–51, 2015.