Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

2 marca 2019

Rozdział 1

Wprowadzenie

Rozdział 2

Cel pracy

Rozdział 3

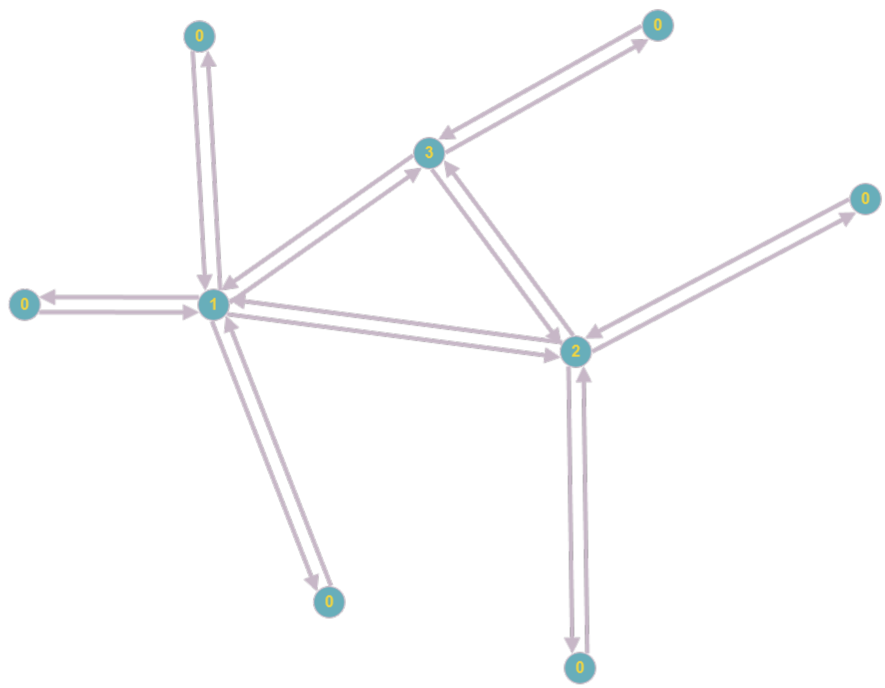
Zakres pracy

Rozdział 4

Model sieci dróg

4.1 Drogi i skrzyżowania

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka $G = (V, E)$, gdzie:
V to zbiór skrzyżowań,
E to zbiór dróg.
Droga $e \in E$ jest odcinkiem o długości L_e. Sieć dróg jest strukturą ograniczoną, zatem drogi mogą mieć swój początek lub koniec w punktach innych niż skrzyżowaniach (patrz rysunek 4.1).



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

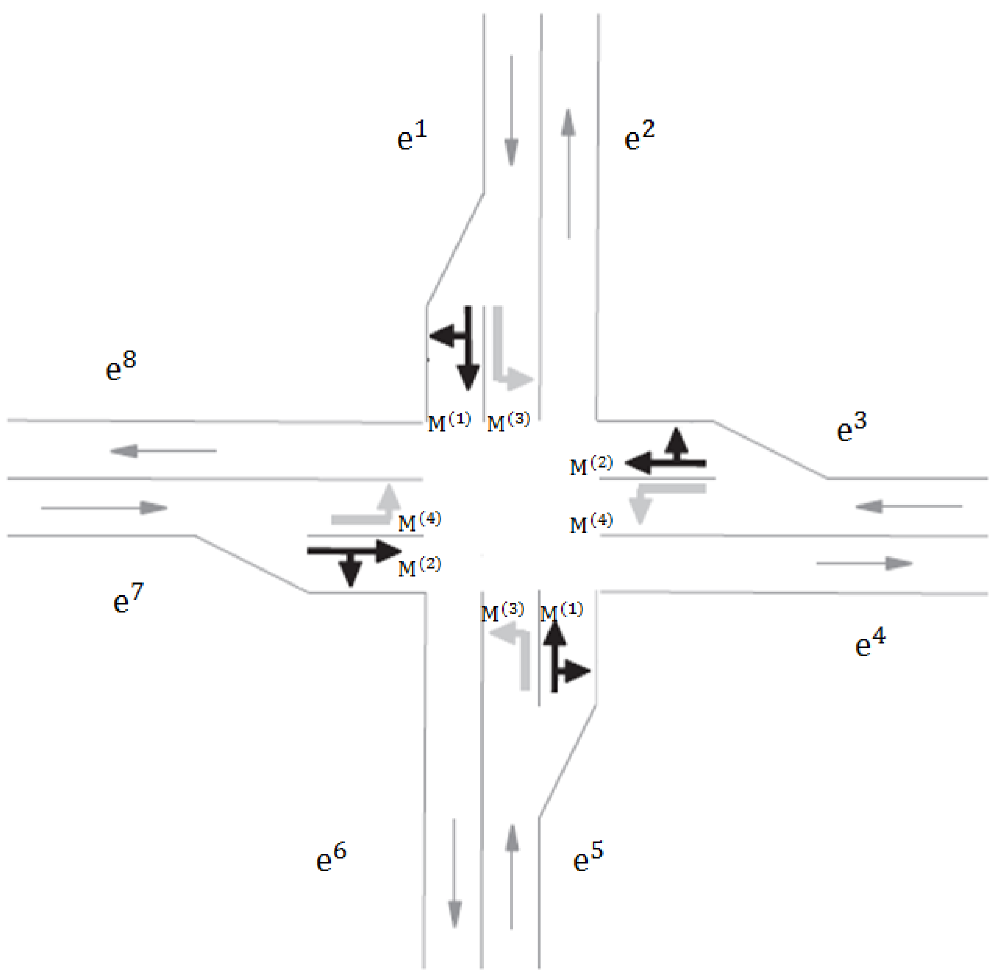
Rysunek 4.1: Przykładowa sieć dróg

4.2 Sygnalizacja świetlna

Na końcu drogi kończącej się na skrzyżowaniu znajdują się sygnalizacje świetlne, które zezwalają na jazdę w danym kierunku(lub kierunkach).
Manewr zdefiniowany jest jako para - kierunku jazdy na skrzyżowaniu (np. w prawo) oraz drogi umożliwiającej wjazd na to skrzyżowanie.
Faza świateł to zbiór manewrów, które nie powodują ze sobą kolizji. Tylko jedna faza M_v może być aktywna w danej chwili t i będziemy ją oznaczać z indeksem jako $\overline{M_v}$. Aktywna faza określa zielone światła na sygnalizacjach przypisanych do odpowiadających manewrów fazy.

4.2.1 Przykład sygnalizacji

Niech dane będzie skrzyżowanie posiadające po 4 drogi wlotowe i wylotowe. Drogi wlotowe oznaczamy nieparzystymi indeksami jako $E_{in} = \{e^1, e^3, e^5, e^7\}$, a wlotowe parzystymi t.j. $E_{in} = \{e^2, e^4, e^6, e^8\}$. Położenie dróg przedstawia rysunek 4.2 Każda z dróg wlotowych posiada dwie sygnalizacje świetlne - pierwsza określa możliwość manewru skrętu w lewo, a druga - dwóch manewrów: jazdy prosto i skrętu w prawo. Proponowane fazy to:
$M^{(1)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^1, e^5
$M^{(2)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^3, e^7
$M^{(3)}$ - jazda w lewo dla pasów e^1, e^5
$M^{(4)}$ - jazda w lewo dla pasów e^3, e^7
Należy zwrócić uwagę, że jest to tylko jedno z wielu możliwych rozwiązań. Jest ono poprawne, gdyż żadne z manewrów konkretnej fazy się nie wykluczają. Przykładem niepoprawnej fazy jest:
M - jazda prosto dla pasów e^1_{in},e^2_{in}.Łatwo zauważyć, że te dwa manewry powodują kolizję.



Rysunek 4.2: Skrzyżowanie

4.2.2 Rozkład prawdopodobieństwa manewrów

Ustalone jest, że wszyscy kierowcy jadący drogą e wjeżdżając na skrzyżowanie v posiadają taki sam rozkład prawdopodobieństwa wyboru kierunku drogi. Niech manewr będzie parą (e, k), gdzie k jest kierunkiem obranym na skrzyżowaniu. Prawdopodobieństwo jazdy zgodnie z kierunkiem k oznaczone jest jako $P_{e,k}$. Aby każdy pojazd opuścił skrzyżowanie funkcja musi spełniać równanie dla dowolnej drogi wlotowej e:

$$\sum_{k \in K} P_{e,k} = 1 \tag{4.1}$$

gdzie K to wszystkie możliwe do wyboru kierunki jazdy na skrzyżowaniu z drogi e.

Rozdział 5

Model ruchu drogowego

5.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [1] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [2] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki(prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [3]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [4] mezoskopowe wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta[5]. Ideą modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [6] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszają się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

5.2 Model Rozwojowy

Ze względu na dużą złożoność końcowego modelu zostanie przedstawiony najpierw bardzo prosty, podstawowy model. W każdej kolejnej sekcji dodawane będą zmiany przybliżające do ostatecznej postaci.

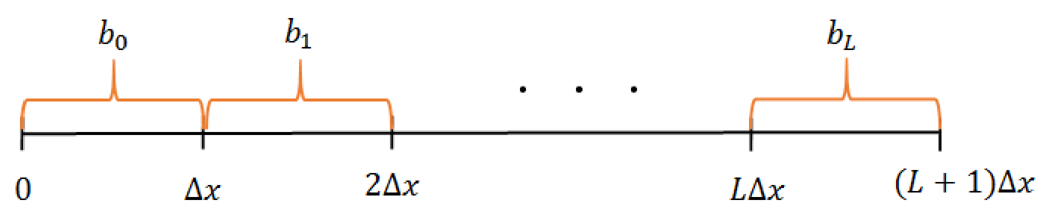
5.2.1 Siatka czasowa i przestrzenna

Ze względu na dyskretny charakter obliczeń należy określić siatkę czasową i przestrzenną. Dla par czasu i miejsc należących do tych dwóch siatek będą określane zmienne stanowe.
Siatka czasowa jest zdefiniowana jako skończony ciąg liczb naturalnych:

$$(0, 1, ..., K). \tag{5.1}$$

Niech będzie ustalona droga e, która jest odcinkiem $[0, L_e]$. Droga zostaje podzielona na $L+1$ odcinków o równej długości $\Delta x = \frac{L_e}{L+1}$. **Siatka przestrzenna** drogi to ciąg zbiorów:

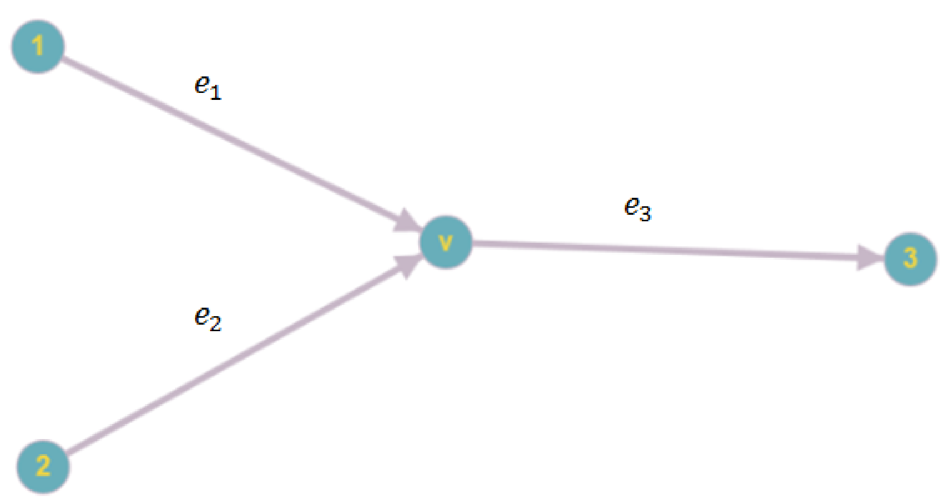
$$(b_l)_{l=0}^{L} = [l\Delta x, (l+1)\Delta x]$$



Rysunek 5.1: Siatka przestrzenna

5.2.2 Przykładowe skrzyżowanie

Niech dane będą będzie skrzyżowanie dwóch dróg wlotowych e_1, e_2 i jednej wylotowej e_3. Każda z dróg jest jednakowej długości. Struktura skrzyżowania jest przedstawiona na rysunku 5.6.



Rysunek 5.2: Skrzyzowanie 1

Macierz B jest **macierzą przejścia** skrzyżowania v. Wartości 1 oznaczają możliwy przejazd na skrzyżowaniu z drogi odpowiadającej indeksowi kolumny do drogi zadanej przez indeks wiersza.

$$B = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.2}$$

5.2.3 Macierz stanowa sieci dróg

Główną strukturą modelu jest **macierz stanowa**. Składuje ona zmienne stanowe w danym momencie. Każdy wiersz macierzy odpowiada jednej drodze e. Indeks kolumny określa konkretny odcinek tej drogi.

Początkowo dla ułatwienia wartość zmiennej stanowej równa lub większa niż 1 oznacza, że na danym odcinku znajduje się przynajmniej jeden pojazd, z kolei 0 oznacza ich brak. Jako przykład zostanie przedstawiona początkowa macierz stanowa skrzyżowania z rysunku 5.6. Niech siatki przestrzenne dróg mają $L = 4$ odcinki. Początkowa macierz stanu $P(0)$ może być przedstawiona jako:

$$P(0) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.3}$$

Powyższa macierz przekazuje informację iż w chwili 0 pojazdy są na następujących drogach:

- e_1 - na odcinkach b_1, b_3
- e_2 - na odcinku b_3
- e_3 - na odcinku b_0

5.2.4 Początkowy model przepływu

Początkowy model przepływu pojazdów zakłada, iż wszystkie pojazdy w chwili $t + 1$ są o jeden odcinek dalej w swojej podróży niż w momencie t. Założone jest iż żadne nowe pojazdy nie pojawiają się w sieci dróg, a pojazdy będące w chwili t w ostatnim odcinku drogi e_3 opuszczają układ. Wtedy kolejne macierze stanowe dla przykładu 5.3 są następujące:

$$P(1) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.4}$$

$$P(2) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.5}$$

$$P(3) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.6}$$

$$P(4) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.7}$$

5.2.5 Ogólny wzór rozwoju macierzy stanowej

W poprzedniej sekcji został przedstawiony przykład wyliczenia macierzy stanowej dla kolejnych momentów w czasie. Następnym krokiem jest przedstawienie rozwiązania dla ogólnego przypadku.

Ogólny wzór przedstawiający rozwój macierzy stanowej to:

$$P(k+1) = \overrightarrow{P(k)} + S(k) \tag{5.8}$$

Gdzie $\overrightarrow{P(k)}$ jest następującą operacją macierzową:

$$\overrightarrow{\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & ... & a_{1m-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n1} & ... & a_{nm-1} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Macierz $S(k)$ nazywana będzie **macierzą źródła**. Dotyczy ona ruchu wpływającego do poszczególnych dróg w momencie $k+1$. Jest to macierz rzadka, istotna obliczeniowo jest jedynie pierwsza kolumna, a pozostałe wartości są zerowe by osiągnąć wymiar macierzy pozwalający na dodawanie z $\overrightarrow{P(k)}$. Pierwsza kolumna jest zdefiniowana w oparciu o ostatnią kolumnę macierzy $P(k)$ i jest równa:

$$S(k,0) = B \cdot P(k,l) \tag{5.10}$$

Dla przykładu z poprzedniej sekcji $k = 1$:

$$P(1) = \overrightarrow{P(0)} + S(0) \tag{5.11}$$

Należy wyliczyć macierz źródła, jej pierwsza kolumna to:

$$S(0,0) = B \cdot P(0,l) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$S(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście

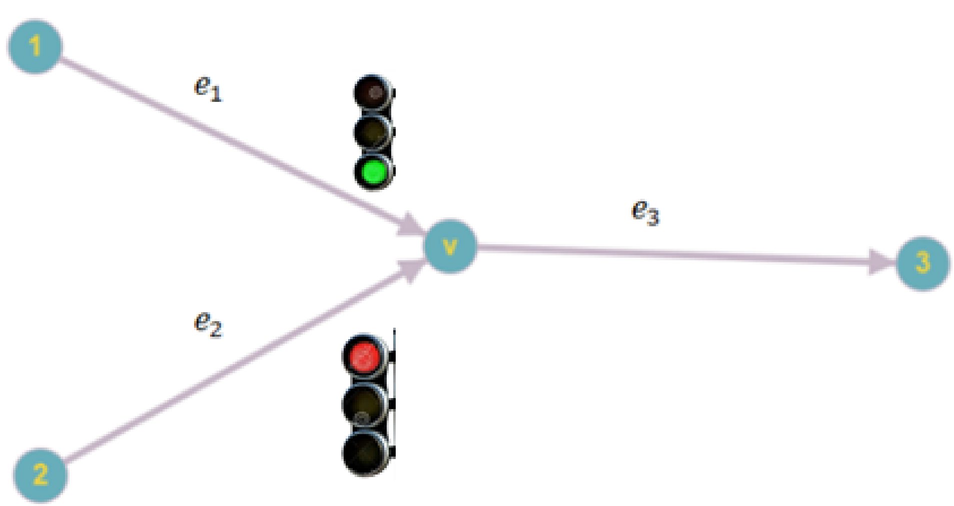
$$\overrightarrow{P(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie ze wzoru (5.11) wynika, że

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Warto zauważyć, że w chwili 0 na obydwu drogach wlotowych e_1, e_2 pojazdy znajdowały się na końcowym odcinku. Problemem okazuje się kolizyjność manewrów wjazdu na drogę e_3 z dróg odpowiednio e_1 i e_2. Początkowo ta kwestia została ona pominięta. Następna sekcja przedstawia rozwiązanie tego problemu.

5.2.6 Sygnalizacja świetlna



Rysunek 5.3: Skrzyzowanie 1 z sygnalizacją świetlną

Wprowadzona zostaje sygnalizacja świetlna dla dwóch dróg wlotowych e_1,e_2. Sygnalizacja świetlna będzie oparta o ciąg **macierzy sygnalizacji**. Określają one z której drogi pojazdy będą mogły wjechać na drogę e_3. Dla chwili 0 przyjęte jest, że zgodnie z rysunkiem 5.3 pojazdy na ostatnim odcinku drogi e_2 będą musiały poczekać. Przykładowa początkowa macierz to:

$$M(0) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.12}$$

Przekazuje ona informację, że:

- Jest zielone światło na drodze e_1 w chwili 0
- Jest czerwone światło na drodze e_2 w chwili 0

Poniższy przykład obrazuje rozwój macierzy stanowej dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną.

$$P(0) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.13}$$

Czerwone światło na drodze e_2 powoduje, że pojazdy nie opuszczają ostatniego odcinka tej drogi. Z kolei pojazdy ostatniego odcinka drogi e_1 wjeżdżają na drogę e_3. Zatem:

$$P(1) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.14}$$

Sygnalizacja świetlna nie zmienia się w chwili 1. Dochodzi do sytuacji gdy ruch kumuluje się na ostatnim odcinku drogi e_2.

$$P(2) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.15}$$

Niech w chwili 2 będzie zielone światło dla drogi e_2, czyli

$$M(2) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.16}$$

Początkowo założone jest, że wszystkie pojazdy na ostatnim odcinku drogi przejeżdżają przez skrzyżowanie. Wtedy:

$$P(3) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \tag{5.17}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie ogólnego wzoru macierzy stanowej z uwzględnieniem sygnalizacji świetlnej.

Macierz źródła z uwzględnieniem sygnalizacji świetlnej jest przedstawiona wzorem:

$$S(k, 0) = M(k) \cdot P(k, l) \tag{5.18}$$

Oprócz pierwszej kolumny macierz S dalej posiada wartości zerowe.
Wprowadzony zostanie ciąg $W(k)$ pomocniczych **macierzy oczekujących pojazdów**. Będą to macierze rzadkie z wartościami innymi niż 0 tylko w ostatniej kolumnie. Macierze te będą składowały informację o pojazdach oczekujących na zielone światło w swojej ostatniej kolumnie. Jest ona zdefiniowana jako:

$$W(k, l) = P(k, l) - S(k, 0)$$

Wzór określający rozwój macierzy stanowej jest następujący:

$$P(k+1) = \overrightarrow{P(k)} + S(k) + W(k) \tag{5.19}$$

Dla wcześniej przedstawionego przykładu w tabeli są wypisane obliczenia wedle wzoru (5.19).

Tablica 5.1: Rozwój macierzy stanowej na skrzyżowaniu 1 z sygnalizacją świetlną

k	M(k)	P(k)	$\overrightarrow{P(k)}$	S(k,0)	W(k,l)
0	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0&\mathbf{1}\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1&\mathbf{0}\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&\mathbf{2}\\0&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$			

5.3 Makroskopowy model ruchu

5.3.1 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych artykułach gęstość ruchu [7] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu.

5.3.2 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (5.21) wraz z warunkiem początkowym (5.20) . Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gęstość ruchu utożsamiać z polem powierzchni przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece.
Dla ustalonej drogi e zmianę gęstości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} p(x,0) = p_0(x) & (5.20) \\ \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial f(p(x,t))}{\partial x} = 0 & (5.21) \end{cases}$$

Gdzie $p(x,t)$ to gęstość ruchu w punkcie x i czasie t. Wartość funkcji gęstości należy do przedziału $[0, p^{max}]$.
Równanie (5.20) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej początkowej gęstości drogi $p_0(x)$.
Równianie (5.21) określa wedle założeń modelu makroskopowego [6] rozwój gęstości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu f powinna być wklęsła. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } p \in [0, p^*] & (5.22) \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] & (5.23) \end{cases}$$

Gdzie λ jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz $p^* = \frac{1}{2}p^{max}$.

5.4 Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj są łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonana zostanie dyskretyzacja osi czasu, modelu sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

5.5 Dyskretyzacja czasu

Proces dyskretyzacji przeprowadzony zostanie najpierw dla osi czasu. Czas nie będzie traktowany jako wartość ciągła, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako Δt. Przestrzeń czasowa określona jest jako ciąg:

$$(t_k)_{k=0}^{m} = k\Delta t \tag{5.24}$$

Gdzie m liczba naturalna określająca moment końca symulacji ruchu drogowego. Oznaczamy go jako $t_{max} = m \cdot \Delta t$.

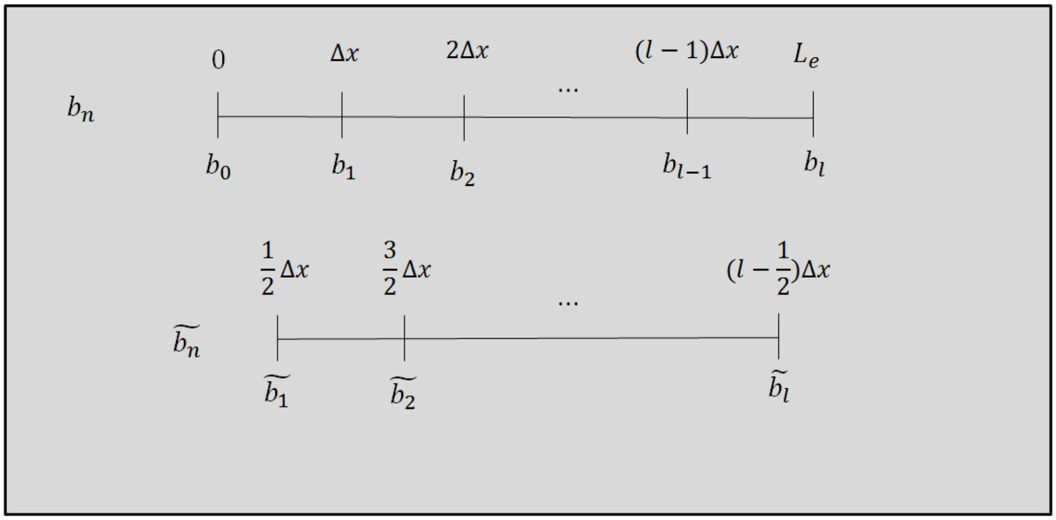
5.6 Dyskretyzacja drogi

Zadaniem jest określenie ciągu b_n wybranych punktów drogi e dla których będą wyliczane gęstości. Niech dana będzie liczba naturalna l określająca ilość wybranych punktów z drogi. Wtedy odległość między sąsiednimi punktami to $\Delta x = \frac{L_e}{l}$. Ciąg b_n jest zdefiniowany następująco:

$$b_n = n \cdot \Delta x \quad \text{dla } n = 0, 1, ..., l \tag{5.25}$$

Powyższy ciąg (5.25) będzie nazywany siatką bazową. Punkty b_0,b_l będziemy dalej nazywać jako punkty brzegowe drogi, a $b_1, ..., b_{l-1}$ jako wewnętrzne.
Do celów czysto obliczeniowych przedstawionych w rozdziale 5.7 zostaje utworzona również siatka pomocnicza:

$$\widetilde{b_n} = n \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} \quad \text{dla } n = 1, ..., l \tag{5.26}$$



Rysunek 5.4: Siatka bazowa b_n i pomocnicza $\widetilde{b_n}$

5.7 Dyskretyzacja makroskopowego przepływu ruchu

Najpierw rozważone zostaną gęstości ruchu jedynie dla punktów wewnętrznych ciągu b_n czyli z pominięciem b_0 i b_l. Dla każdego z tych punktów gęstość będzie wyliczona na podstawie jego otoczenia $(\widetilde{b_n}, \widetilde{b_{n+1}})$. Gęstość w punkcie b_n i czasie $t_k = k \cdot \Delta t$ definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} \frac{p(x, k \cdot \Delta t)}{\Delta x} dx. \tag{5.27}$$

Na podstawie (5.21) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t)) dt = 0 \tag{5.28}$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t)) dt = 0 \tag{5.29}$$

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach t_k. Wtedy wartości $q(\widetilde{b_n}, t)$ i $q(\widetilde{b_{n+1}}, t)$ są stałe na całym przedziale całkowania $[t_k, t_{k+1})$. Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) = 0 \tag{5.30}$$

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) \tag{5.31}$$

Powyższy wzór zawiera niezdefiniowane wartości q i p dla punktów ciągu $\widetilde{b_n}$ - będziemy je odpowiednio oznaczać $\widetilde{q_n^k}$ i $\widetilde{p_n^k}$. Dyskretyzacja wedle schematu stagerred Lax-Friedrichs [8] prowadzi do następujących wartości dla dowolnej chwili t_k:

$$\widetilde{p_n^k} = \frac{p_{n-1}^k + p_n^k}{2} \tag{5.32}$$

$$\widetilde{q_n^k} = \frac{q_{n-1}^k + q_n^k}{2} \tag{5.33}$$

Ustalona teraz będzie ewolucja gęstości dla pomocniczego ciągu $\widetilde{b_n}$. Jest ona opisana analogicznie do (5.31):

$$\widetilde{p_n^{k+1}} = \widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(p_n^k) - q(p_{n-1}^k)) \tag{5.34}$$

Z równania (5.32) można wykazać, że dla dowolnego n:

$$p_n^{k+1} = \frac{\widetilde{p_n^{k+1}} + \widetilde{p_{n+1}^{k+1}}}{2} \tag{5.35}$$

Na podstawie wzorów (5.34) i (5.35) otrzymujemy:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}\widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) + \frac{1}{2}\widetilde{p_{n+1}^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.36}$$

Co prowadzi do końcowej zależności:

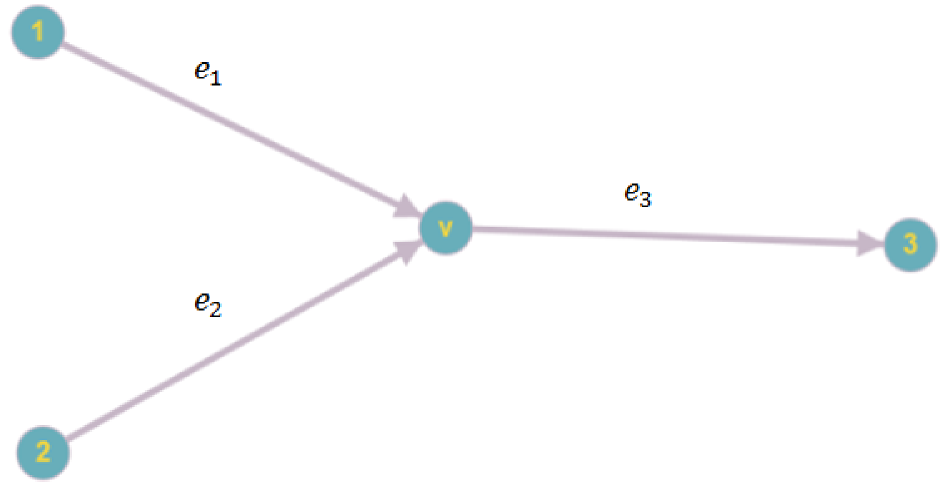
$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.37}$$

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n-1}^k - q_{n+1}^k). \tag{5.38}$$

Powyższy wzór kończy rozważania odnośnie punktów wewnętrznych drogi. Przypadek punktów brzegowych b_0, b_l różni się diametralnie od punktów wewnętrznych ze względu na to iż trzeba w nich ująć aspekty wprowadzenia nowych pojazdów do ruchu oraz opuszczenia drogi. Podstawowe równanie modelu makroskopowego (5.21) nie uwzględnia ani źródła, ani też ujścia ruchu, co pozwala na zastosowanie własnego rozwiązania w tym zakresie. W przypadku gdy rozważana jest jedynie jedna droga gęstość źródła ruchu p_0^k może być dowolna. Jeśli pojazdy mogą bezproblemowo opuścić drogę wtedy $p_l^k = 0$. Przypadek gdy droga kończy lub zaczyna się na skrzyżowaniu zostaje przedstawiony w następnym rozdziale.

5.8 Przepływ ruchu na skrzyżowaniu 1

Udało się przedstawić przepływ ruchu dla pojedynczej drogi. W tym momencie należy skonstruować logiczny model przepływu ruchu przez skrzyżowanie. Początkowo wykorzystany będzie bardzo prosty przykład, aby ustalić przepływ ruchu na skrzyżowaniu. Skrzyżowanie jest przedstawione na rysunku 5.6.



Rysunek 5.5: Skrzyzowanie 1

Skrzyżowanie v posiada dwie drogi wlotowe e_1, e_2 oraz jedną wylotową e_3. Źródła ruchu dla tej sieci dróg znajdują się na początku dróg e_1, e_2 (punkty 1 i 2 na Rysunku 5.6). Należy podkreślić, że ujścia dróg e_1, e_2 i źródło drogi e_3 są fizycznie w tym samym punkcie oznaczonym jako v. Gęstość w tym punkcie w chwili t_k będziemy oznaczać jako p_v^k.
Skrzyżowanie posiada dwie fazy świateł:
$M^{(1)}$ - umożliwiające jazdę w lewo z drogi e_1
$M^{(2)}$ - umożliwiające jazdę w prawo z drogi e_2

Rozwój gęstości zostanie przedstawiony jako ciąg macierzy x(k).

$$x(k) = \begin{bmatrix} {}_1p_0^k & \cdots & {}_1p_l^k \\ {}_2p_0^k & \cdots & {}_2p_l^k \\ {}_3p_0^k & \cdots & {}_3p_l^k \end{bmatrix}$$

Macierz A przedstawia możliwe przepływy na skrzyżowaniu (tzn. z dróg e_1, e_2 do e_3).

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \tag{5.39}$$

Macierz B przedstawia sygnalizację świetlną. Wartość 1 oznacza możliwość wjechania na skrzyżowanie podczas obecnej fazy z danej drogi, a 0 - brak możliwości.

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} M^{(1)} & M^{(2)} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \tag{5.40}$$

Macierz $u(k)$ przedstawia gęstość napływających pojazdów na skrzyzowanie.

$$u(k) = \begin{bmatrix} {}_1p_l \\ {}_2p_l \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \tag{5.41}$$

Wzór przedstawiający rozwój gęstości przedstawia się następująco:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

W przypadku fazy światła $M^{(1)}$ w chwili t_k rozwój gęstości wygląda następująco:

$${}_3p_0^{k+1} = {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_1p_l^k$$

$${}_1p_l^{k+1} = \frac{1}{2}{}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1})$$

$${}_2p_l^{k+1} = {}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1})$$

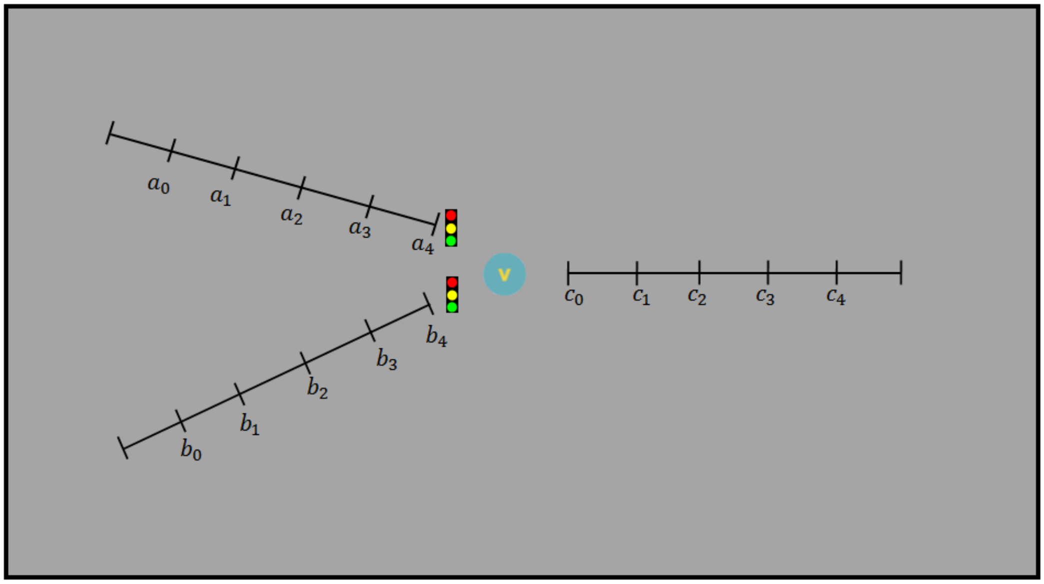
$${}_3p_0^{k+1} = \begin{cases} {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_1p_l^k & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.42) \\ {}_3p_0^k - ({}_3p_1^{k+1} - {}_3p_1^k) + \frac{1}{2}{}_2p_l^k & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.43) \end{cases}$$

$${}_1p_l^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}{}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.44) \\ {}_1p_l^k + ({}_1p_{l-1}^k - {}_1p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.45) \end{cases}$$

$${}_2p_l^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}{}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.46) \\ {}_2p_l^k + ({}_2p_{l-1}^k - {}_2p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.47) \end{cases}$$

Szczegółowa dane pozwalające na przeprowadzenie symulacji są następujące:
${}_1p_0^k = 0.2$
${}_2p_0^k = 0.1$
$p_{max} = 0.25$ (dla wszystkich dróg)
$\Delta x = 50$

$\Delta t = 1$
$\lambda = 2$
$L_{e_1}, L_{e_2}, L_{e_3} = 200$



Rysunek 5.6: Skrzyzowanie 1

Bibliografia

[1] S. Boubaker, F. Rehimi, and A. Kalboussi, "Comparative analysis of microscopic models of road traffic data," in *Logistics (LOGISTIQUA), 2011 4th International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 474–478.

[2] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, "Multilevel modeling of the traffic dynamic," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.

[3] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, "A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation," in *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC'06. IEEE*. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.

[4] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, "Network state estimation and prediction for real-time traffic management," *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.

[5] V. A. Vu and G. Tan, "High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks," in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.

[6] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, "On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads," *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.

[7] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, "Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model," *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.

[8] S. Göttlich, M. Herty, and U. Ziegler, "Modeling and optimizing traffic light settings in road networks," *Computers & operations research*, vol. 55, pp. 36–51, 2015.