Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

26 lutego 2019

Rozdział 1 Wprowadzenie

Rozdział 2 Cel pracy Rozdział 3

Zakres pracy

Rozdział 4

Model sieci dróg

4.1 Drogi i skrzyżowania

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka G=(V,E), gdzie:

V to zbiór skrzyżowań,

E to zbiór dróg.

Droga $e \in E$ jest odcinkiem o długości L_e . Sieć dróg jest strukturą ograniczoną, zatem drogi mogą mieć swój początek lub koniec w punktach innych niż skrzyżowaniach (patrz rysunek 4.1).



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

Rysunek 4.1: Przykładowa sieć dróg

4.2 Sygnalizacja świetlna

Na końcu drogi kończącej się na skrzyżowaniu znajdują się sygnalizacje świetlne, które zezwalają na jazdę w danym kierunku(lub kierunkach).

Manewr zdefiniowany jest jako para - kierunku jazdy na skrzyżowaniu (np. w prawo) oraz drogi umożliwiającej wjazd na to skrzyżowanie.

Faza świateł to zbiór manewrów, które nie powodują ze sobą kolizji. Tylko jedna faza M_v może być aktywna w danej chwili t i będziemy ją oznaczać z indeksem jako $\overline{M_v}$. Aktywna faza określa zielone światła na sygnalizacjach przypisanych do odpowiadających manewrów fazy.

4.2.1 Przykład sygnalizacji

Niech dane będzie skrzyżowanie posiadające po 4 drogi włotowe i wylotowe. Drogi włotowe oznaczamy nieparzystymi indeksami jako $E_{in} = \{e^1, e^3, e^5, e^7\}$, a włotowe parzystymi t.j. $E_{in} = \{e^2, e^4, e^6, e^8\}$. Położenie dróg przedstawia rysunek 4.2 Każda z dróg włotowych posiada dwie sygnalizacje świetlne - pierwsza określa możliwość manewru skrętu w lewo, a druga - dwóch manewrów: jazdy prosto i skrętu w prawo. Proponowane fazy to:

 $M^{(1)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^1 , e^5

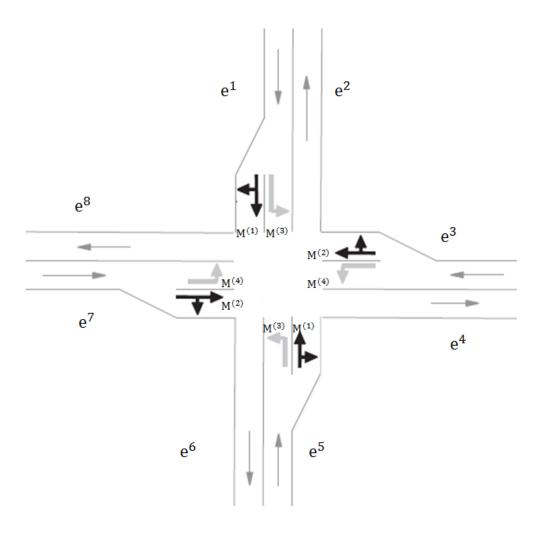
 $M^{(2)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^3 , e^7

 $M^{(3)}$ - jazda w lewo dla pasów e^1 , e^5

 $M^{(4)}$ - jazda w lewo dla pasów e^3 , e^7

Należy zwrócić uwagę, że jest to tylko jedno z wielu możliwych rozwiązań. Jest ono poprawne, gdyż żadne z manewrów konkretnej fazy się nie wykluczają. Przykładem niepoprawnej fazy jest:

M- jazda prosto dla pasów $e_{in}^1, e_{in}^2.$ Łatwo zauważyć, że te dwa manewry powodują kolizję.



Rysunek 4.2: Skrzyżowanie

4.2.2 Rozkład prawdopodobieństwa manewrów

Ustalone jest, że wszyscy kierowcy jadący drogą e wjeżdżając na skrzyżowanie v posiadają taki sam rozkład prawdopodobieństwa wyboru kierunku drogi. Niech manewr będzie parą (e,k), gdzie k jest kierunkiem obranym na skrzyżowaniu. Prawdopodobieństwo jazdy zgodnie z kierunkiem k oznaczone jest jako $P_{e,k}$. Aby każdy pojazd opuścił skrzyżowanie funkcja musi spełniać równanie dla dowolnej drogi włotowej e:

$$\sum_{k \in K} P_{e,k} = 1 \tag{4.1}$$

gdzie K to wszystkie możliwe do wyboru kierunki jazdy na skrzyżowaniu z drogi e.

Rozdział 5

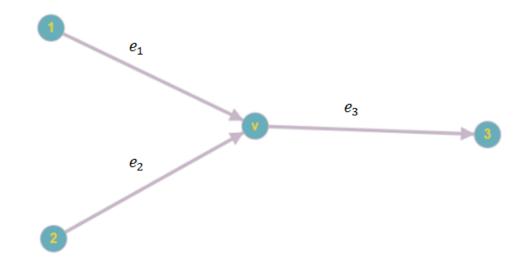
Model ruchu drogowego

5.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego maja na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [1] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [2] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki (prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [3]. Przykładowo pojazdy sa zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [4] mezoskopowe wyliczają dynamike ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta [5]. Idea modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [6] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gestość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszaja się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gestości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

5.2 Model Rozwojowy

Niech dane będą będzie skrzyżowanie dwóch dróg wlotowych e_1, e_2 .



Rysunek 5.1: Skrzyzowanie 1

5.2.1 Model początkowy zero-jedynkowy

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$
 (5.1)

5.3 Makroskopowy model ruchu

5.3.1 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych artykułach gęstość ruchu [7] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu.

5.3.2 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (5.2) wraz z warunkiem początkowym (5.1). Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gestość ruchu utożsamiać z polem powierzchni

przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece.

Dla ustalonej drogi e zmiane gestości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\int p(x,0) = p_0(x) \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} p(x,0) = p_0(x) \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(p(x,t))}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
 (5.2)

Gdzie p(x,t) to gęstość ruchu w punkcie x i czasie t. Wartość funkcji gęstości należy do przedziału $[0, p^{max}].$

Równanie (5.1) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej poczatkowej gestości drogi $p_0(x)$. Równianie (5.2) określa wedle założeń modelu makroskopowego [6] rozwój gestości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu f powinna być wklęsła. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } p \in [0, p^*] \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } p \in (p^*, p^{max}] \end{cases}$$
 (5.4)

Gdzie λ jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz $p^* = \frac{1}{2} p^{max}$.

5.4 Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj sa łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonana zostanie dyskretyzacja osi czasu, modelu sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

Dyskretyzacja czasu 5.5

Proces dyskretyzacji przeprowadzony zostanie najpierw dla osi czasu. Czas nie będzie traktowany jako wartość ciągła, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako Δt . Przestrzeń czasowa określona jest jako ciąg:

$$(t_k)_{k=0}^m = k\Delta t \tag{5.6}$$

Gdzie m liczba naturalna określająca moment końca symulacji ruchu drogowego. Oznaczamy go jako $t_{max} = m \cdot \Delta t$.

Dyskretyzacja drogi 5.6

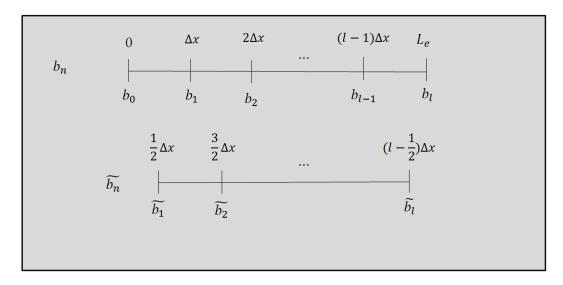
Zadaniem jest określenie ciągu b_n wybranych punktów drogi e dla których będą wyliczane gęstości. Niech dana będzie liczba naturalna l określająca ilość wybranych punktów z drogi. Wtedy odległość między sąsiednimi punktami to $\Delta x = \frac{L_e}{l}$. Ciąg b_n jest zdefiniowany następujaco:

$$b_n = n \cdot \Delta x \quad \text{dla } n = 0, 1, ..., l \tag{5.7}$$

Powyższy ciąg (5.6) będzie nazywany siatką bazową. Punkty b_0, b_l będziemy dalej nazywać jako punkty brzegowe drogi, a $b_1, ..., b_{l-1}$ jako wewnętrzne.

Do celów czysto obliczeniowych przedstawionych w rozdziale 5.7 zostaje utworzona również siatka pomocnicza:

$$\widetilde{b_n} = n \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2}$$
 dla $n = 1, ..., l$ (5.8)



Rysunek 5.2: Siatka bazowa b_n i pomocnicza $\widetilde{b_n}$

5.7 Dyskretyzacja makroskopowego przepływu ruchu

Najpierw rozważone zostaną gęstości ruchu jedynie dla punktów wewnętrznych ciągu b_n czyli z pominięciem b_0 i b_l . Dla każdego z tych punktów gęstość będzie wyliczona na podstawie jego otoczenia (b_n, b_{n+1}) . Gęstość w punkcie b_n i czasie $t_k = k \cdot \Delta t$ definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} \frac{p(x, k \cdot \Delta t)}{\Delta x} dx.$$
 (5.9)

Na podstawie (5.2) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t)) dt = 0$$
 (5.10)

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t) dt = 0$$
 (5.11)

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach t_k . Wtedy wartości $q(\widetilde{b_n},t)$ i $q(\widetilde{b_{n+1}},t)$ są stałe na całym przedziale całkowania $[t_k,t_{k+1})$. Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) = 0$$
(5.12)

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k))$$
 (5.13)

Powyższy wzór zawiera niezdefiniowane wartości q i p dla punktów ciągu $\widetilde{b_n}$ - będziemy je odpowiednio oznaczać $\widetilde{q_n^k}$ i $\widetilde{p_n^k}$. Dyskretyzacja wedle schematu stagerred Lax-Friedrichs [8] prowadzi do następujących wartości dla dowolnej chwili t_k :

$$\widetilde{p_n^k} = \frac{p_{n-1}^k + p_n^k}{2} \tag{5.14}$$

$$\widetilde{q_n^k} = \frac{q_{n-1}^k + q_n^k}{2} \tag{5.15}$$

Ustalona teraz będzie ewolucja gęstości dla pomocniczego ciągu $\widetilde{b_n}$. Jest ona opisana analogicznie do (5.12):

$$\widetilde{p_n^{k+1}} = \widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q(p_n^k) - q(p_{n-1}^k))$$
 (5.16)

Z równania (5.13) można wykazać, że dla dowolnego n:

$$p_n^{k+1} = \frac{\widetilde{p_{n+1}^{k+1}} + \widetilde{p_{n+1}^{k+1}}}{2} \tag{5.17}$$

Na podstawie wzorów (5.15) i (5.16) otrzymujemy:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}\widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) + \frac{1}{2}\widetilde{p_{n+1}^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.18}$$

Co prowadzi do końcowej zależności:

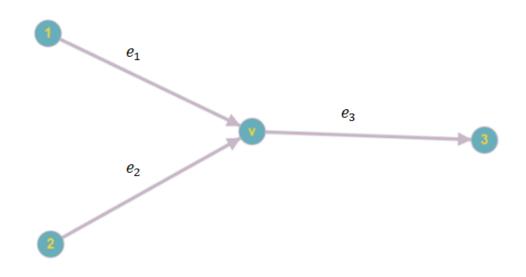
$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.19}$$

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n-1}^k - q_{n+1}^k).$$
 (5.20)

Powyższy wzór kończy rozważania odnośnie punktów wewnętrznych drogi. Przypadek punktów brzegowych b_0, b_l różni się diametralnie od punktów wewnętrznych ze względu na to iż trzeba w nich ująć aspekty wprowadzenia nowych pojazdów do ruchu oraz opuszczenia drogi. Podstawowe równanie modelu makroskopowego (5.2) nie uwzględnia ani źródła, ani też ujścia ruchu, co pozwala na zastosowanie własnego rozwiązania w tym zakresie. W przypadku gdy rozważana jest jedynie jedna droga gęstość źródła ruchu p_0^k może być dowolna. Jeśli pojazdy mogą bezproblemowo opuścić drogę wtedy $p_l^k=0$. Przypadek gdy droga kończy lub zaczyna się na skrzyżowaniu zostaje przedstawiony w następnym rozdziale.

5.8 Przepływ ruchu na skrzyżowaniu 1

Udało się przedstawić przepływ ruchu dla pojedynczej drogi. W tym momencie należy skonstruować logiczny model przepływu ruchu przez skrzyżowanie. Początkowo wykorzystany będzie bardzo prosty przykład, aby ustalić przepływ ruchu na skrzyżowaniu. Skrzyżowanie jest przedstawione na rysunku 5.4.



Rysunek 5.3: Skrzyzowanie 1

Skrzyżowanie v posiada dwie drogi wlotowe e_1, e_2 oraz jedną wylotową e_3 . Źródła ruchu dla tej sieci dróg znajdują się na początku dróg e_1, e_2 (punkty 1 i 2 na Rysunku 5.4). Należy podkreślić, że ujścia dróg e_1, e_2 i źródło drogi e_3 są fizycznie w tym samym punkcie oznaczonym jako v. Gęstość w tym punkcie w chwili t_k będziemy oznaczać jako p_v^k . Skrzyżowanie posiada dwie fazy świateł:

 $M^{(1)}$ - umożliwiające jazdę w lewo z drogi e_1

 ${\cal M}^{(2)}$ - umożliwiające jazdę w prawo z drogi e_2

Rozwój gęstości zostanie przedstawiony jako ciąg macierzy x(k).

$$x(k) = \begin{bmatrix} _{1}p_{0}^{k} & \dots & _{1}p_{l}^{k} \\ _{2}p_{0}^{k} & \dots & _{2}p_{l}^{k} \\ _{3}p_{0}^{k} & \dots & _{3}p_{l}^{k} \end{bmatrix}$$

Macierz A przedstawia możliwe przepływy na skrzyżowaniu (tzn. z dróg e_1, e_2 do e_3).

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$
 (5.21)

Macierz B przedstawia sygnalizację świetlną. Wartość 1 oznacza możliwość wjechania na skrzyżowanie podczas obecnej fazy z danej drogi, a 0 - brak możliwości.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$
 (5.22)

Macierz u(k) przedstawia gęstość napływających pojazdów na skrzyzowanie.

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1p_l \\ 2p_l \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$
 (5.23)

Wzór przedstawiający rozwój gęstości przedstawia się następująco:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

W przypadku fazy światła $M^{(1)}$ w chwili t_k rozwój gęstości wygląda następująco:

$$_{3}p_{0}^{k+1} = _{3}p_{0}^{k} - (_{3}p_{1}^{k+1} - _{3}p_{1}^{k}) + \frac{1}{2} {}_{1}p_{l}^{k}$$

$$_{1}p_{l}^{k+1} = \frac{1}{2} p_{l}^{k} + (p_{l-1}^{k} - p_{l-1}^{k+1})$$

$$_{2}p_{l}^{k+1} = _{2}p_{l}^{k} + (_{2}p_{l-1}^{k} - _{2}p_{l-1}^{k+1})$$

$${}_{3}p_{0}^{k+1} = \begin{cases} {}_{3}p_{0}^{k} - ({}_{3}p_{1}^{k+1} - {}_{3}p_{1}^{k}) + \frac{1}{2}{}_{1}p_{l}^{k}} & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} & (5.24) \\ {}_{3}p_{0}^{k} - ({}_{3}p_{1}^{k+1} - {}_{3}p_{1}^{k}) + \frac{1}{2}{}_{2}p_{l}^{k}} & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} & (5.25) \end{cases}$$

$${}_{1}p_{l}^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} {}_{1}p_{l}^{k} + ({}_{1}p_{l-1}^{k} - {}_{1}p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_{1}p_{l}^{k} + ({}_{1}p_{l-1}^{k} - {}_{1}p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases}$$
(5.26)

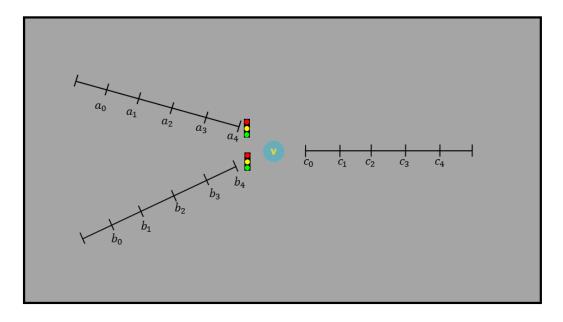
$${}_{2}p_{l}^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} p_{l}^{k} + ({}_{2}p_{l-1}^{k} - {}_{2}p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \\ {}_{2}p_{l}^{k} + ({}_{2}p_{l-1}^{k} - {}_{2}p_{l-1}^{k+1}) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \end{cases}$$
(5.28)

Szczegółowa dane pozwalające na przeprowadzenie symulacji są następujące: z=0.2

$$_{1}p_{0}^{k} = 0.2$$

 $_{2}p_{0}^{k} = 0.1$

$$p_{max}=0.25$$
 (dla wszystkich dróg)
 $\Delta x=50$
 $\Delta t=1$
 $\lambda=2$
 $L_{e_1},L_{e_2},L_{e_3}=200$



Rysunek 5.4: Skrzyzowanie 1

Bibliografia

- [1] S. Boubaker, F. Rehimi, and A. Kalboussi, "Comparative analysis of microscopic models of road traffic data," in *Logistics (LOGISTIQUA)*, 2011 4th International Conference on. IEEE, 2011, pp. 474–478.
- [2] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, "Multilevel modeling of the traffic dynamic," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.
- [3] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, "A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation," in *Intelligent Transportation Systems Conference*, 2006. ITSC'06. IEEE. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.
- [4] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, "Network state estimation and prediction for real-time traffic management," *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.
- [5] V. A. Vu and G. Tan, "High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks," in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.
- [6] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, "On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads," Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.
- [7] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, "Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model," *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.
- [8] S. Göttlich, M. Herty, and U. Ziegler, "Modeling and optimizing traffic light settings in road networks," *Computers & operations research*, vol. 55, pp. 36–51, 2015.