Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

23 lutego 2019

Rozdział 1

Wprowadzenie

Rozdział 2

Cel pracy

Rozdział 3

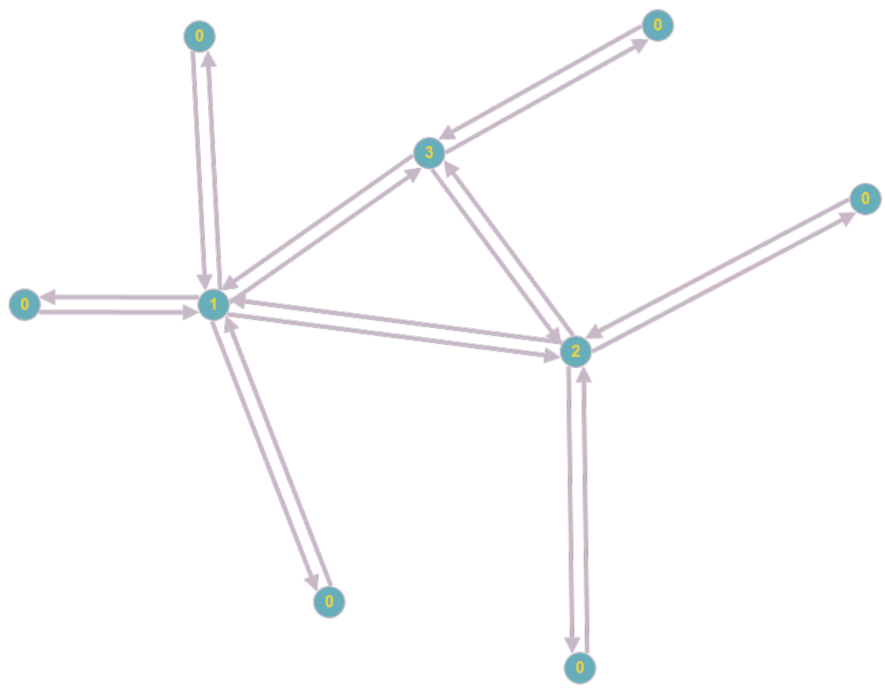
Zakres pracy

Rozdział 4

Model sieci dróg

4.1 Drogi i skrzyżowania

Sieć dróg przedstawia uporządkowana dwójka $G = (V, E)$, gdzie:
V to zbiór skrzyżowań,
E to zbiór dróg.
Droga $e \in E$ jest odcinkiem o długości L_e. Sieć dróg jest strukturą ograniczoną, zatem drogi mogą mieć swój początek lub koniec w punktach innych niż skrzyżowaniach (patrz rysunek 4.1).



Skrzyżowania są oznaczone numerami: 1,2,3. Punkty z numerem 0 są jedynie początkami i końcami dróg.

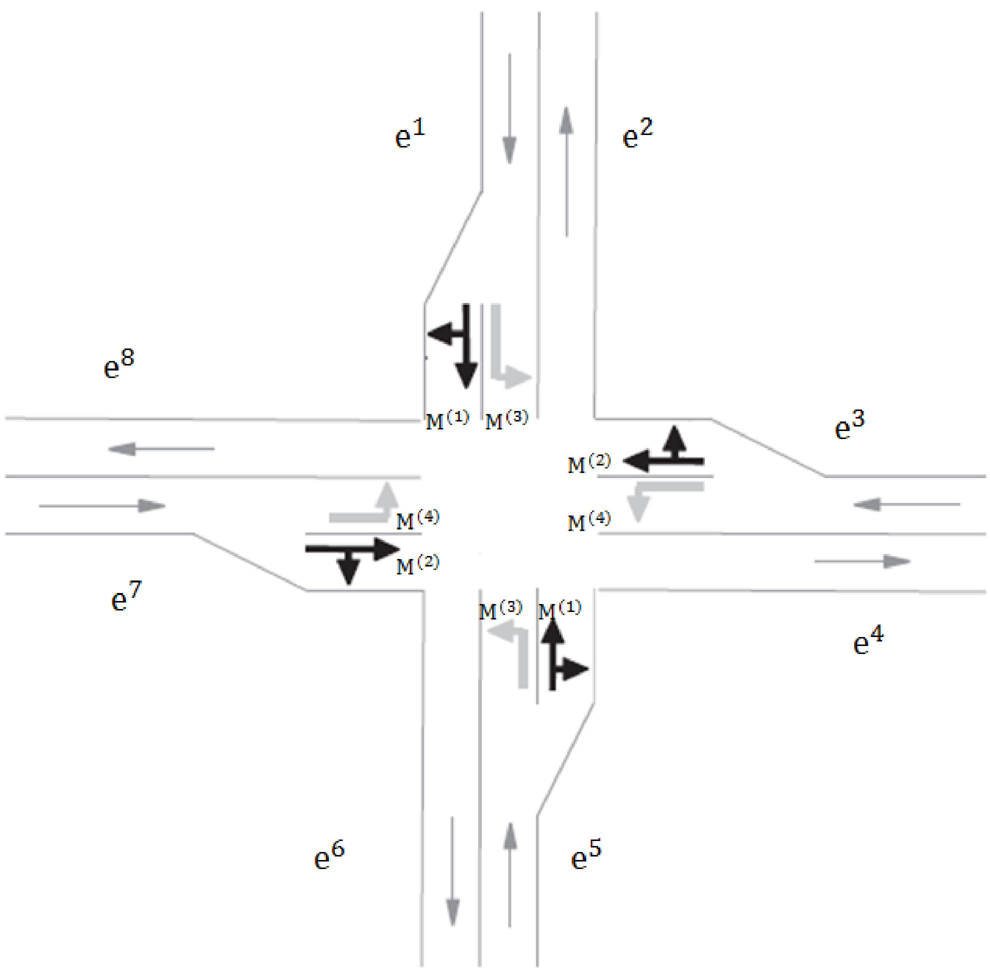
Rysunek 4.1: Przykładowa sieć dróg

4.2 Sygnalizacja świetlna

Na końcu drogi kończącej się na skrzyżowaniu znajdują się sygnalizacje świetlne, które zezwalają na jazdę w danym kierunku(lub kierunkach).
Manewr zdefiniowany jest jako para - kierunku jazdy na skrzyżowaniu (np. w prawo) oraz drogi umożliwiającej wjazd na to skrzyżowanie.
Faza świateł to zbiór manewrów, które nie powodują ze sobą kolizji. Tylko jedna faza M_v może być aktywna w danej chwili t i będziemy ją oznaczać z indeksem jako $\overline{M_v}$. Aktywna faza określa zielone światła na sygnalizacjach przypisanych do odpowiadających manewrów fazy.

4.2.1 Przykład sygnalizacji

Niech dane będzie skrzyżowanie posiadające po 4 drogi wlotowe i wylotowe. Drogi wlotowe oznaczamy nieparzystymi indeksami jako $E_{in} = \{e^1, e^3, e^5, e^7\}$, a wlotowe parzystymi t.j. $E_{in} = \{e^2, e^4, e^6, e^8\}$. Położenie dróg przedstawia rysunek 4.2 Każda z dróg wlotowych posiada dwie sygnalizacje świetlne - pierwsza określa możliwość manewru skrętu w lewo, a druga - dwóch manewrów: jazdy prosto i skrętu w prawo. Proponowane fazy to:
$M^{(1)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^1, e^5
$M^{(2)}$ - jazda prosto i w prawo dla pasów e^3, e^7
$M^{(3)}$ - jazda w lewo dla pasów e^1, e^5
$M^{(4)}$ - jazda w lewo dla pasów e^3, e^7
Należy zwrócić uwagę, że jest to tylko jedno z wielu możliwych rozwiązań. Jest ono poprawne, gdyż żadne z manewrów konkretnej fazy się nie wykluczają. Przykładem niepoprawnej fazy jest:
M - jazda prosto dla pasów e^1_{in},e^2_{in}.Łatwo zauważyć, że te dwa manewry powodują kolizję.



Rysunek 4.2: Skrzyżowanie

4.2.2 Rozkład prawdopodobieństwa manewrów

Ustalone jest, że wszyscy kierowcy jadący drogą e wjeżdżając na skrzyżowanie v posiadają taki sam rozkład prawdopodobieństwa wyboru kierunku drogi. Niech manewr będzie parą (e, k), gdzie k jest kierunkiem obranym na skrzyżowaniu. Prawdopodobieństwo jazdy zgodnie z kierunkiem k oznaczone jest jako $P_{e,k}$. Aby każdy pojazd opuścił skrzyżowanie funkcja musi spełniać równanie dla dowolnej drogi wlotowej e:

$$\sum_{k \in K} P_{e,k} = 1 \tag{4.1}$$

gdzie K to wszystkie możliwe do wyboru kierunki jazdy na skrzyżowaniu z drogi e.

Rozdział 5

Model ruchu drogowego

5.1 Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przepływu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [1] - makroskopowy, mezoskopowy oraz mikroskopowy. Czasem [2] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopowe. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopowe. Rozważa ono pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki(prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopowy zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych [3]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [4] mezoskopowe wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopowy jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopowego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopowy oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta[5]. Ideą modelu makroskopowego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [6] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Sposób w jaki poruszają się pojazdy jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopowym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

5.2 Makroskopowy model ruchu

5.2.1 Wstęp

Istotą makroskopowego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. Jest to zmienna stanowa określona dla każdego punktu drogi w czasie. Formalnie gęstość można rozumieć jako czynnik definiujący dynamikę ruchu. Im większa gęstość tym mniejsza prędkość ruchu. W niektórych artykułach gęstość ruchu [7] jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopowym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu.

5.2.2 Rozwój gęstości ruchu na drodze

Makroskopowy model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (5.2) wraz z warunkiem początkowym (5.1) . Model makroskopowy traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gęstość ruchu utożsamiać z polem powierzchni przekroju poprzecznego rzeki, co dla ustalonej szerokości rzeki - upraszcza się do wysokości wody w rzece.
Dla ustalonej drogi e zmianę gęstości ruchu definiuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} p(x,0) = p_0(x) & (5.1) \\ \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial f(p(x,t))}{\partial x} = 0 & (5.2) \end{cases}$$

Gdzie $p(x,t)$ to gęstość ruchu w punkcie x i czasie t. Wartość funkcji gęstości należy do przedziału $[0, p^{max}]$.
Równanie (5.1) zakłada istnienie pewnej z góry nałożonej początkowej gęstości drogi $p_0(x)$.
Równianie (5.2) określa wedle założeń modelu makroskopowego [6] rozwój gęstości ruchu na drodze. Funkcja płynności ruchu f powinna być wklęsła. W przedstawionym w tej pracy modelu funkcja ma następującą definicję:

$$f(p) = \begin{cases} \lambda p & \text{dla } \; p \in [0, p^*] & (5.3) \\ \lambda \cdot (2p^* - p) & \text{dla } \; p \in (p^*, p^{max}] & (5.4) \end{cases}$$

Gdzie λ jest stałym parametrem funkcji trójkątnej oraz $p^* = \frac{1}{2}p^{max}$.

5.3 Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj są łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonana zostanie dyskretyzacja osi czasu, modelu sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

5.4 Dyskretyzacja czasu

Proces dyskretyzacji przeprowadzony zostanie najpierw dla osi czasu. Czas nie będzie traktowany jako wartość ciągła, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako Δt. Przestrzeń czasowa określona jest jako ciąg:

$$(t_k)_{k=0}^{m} = k\Delta t \tag{5.5}$$

Gdzie m liczba naturalna określająca moment końca symulacji ruchu drogowego. Oznaczamy go jako $t_{max} = m \cdot \Delta t$.

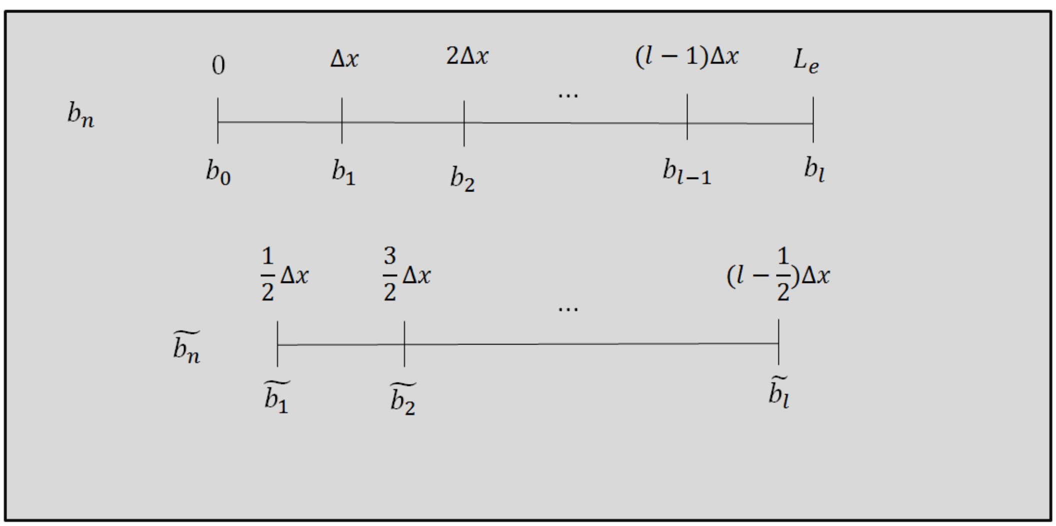
5.5 Dyskretyzacja drogi

Zadaniem jest określenie ciągu b_n wybranych punktów drogi e dla których będą wyliczane gęstości. Niech dana będzie liczba naturalna l określająca ilość wybranych punktów z drogi. Wtedy odległość między sąsiednimi punktami to $\Delta x = \frac{L_e}{l}$. Ciąg b_n jest zdefiniowany następująco:

$$b_n = n \cdot \Delta x \quad \text{dla } n = 0, 1, ..., l \tag{5.6}$$

Powyższy ciąg (5.6) będzie nazywany siatką bazową. Punkty b_0,b_l będziemy dalej nazywać jako punkty brzegowe drogi, a $b_1, ..., b_{l-1}$ jako wewnętrzne.
Do celów czysto obliczeniowych przedstawionych w rozdziale 5.6 zostaje utworzona również siatka pomocnicza:

$$\widetilde{b_n} = n \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} \quad \text{dla } n = 1, ..., l \tag{5.7}$$



Rysunek 5.1: Siatka bazowa b_n i pomocnicza $\widetilde{b_n}$

5.6 Dyskretyzacja makroskopowego przepływu ruchu

Najpierw rozważone zostaną gęstości ruchu jedynie dla punktów wewnętrznych ciągu b_n czyli z pominięciem b_0 i b_l. Dla każdego z tych punktów gęstość będzie wyliczona na podstawie jego otoczenia $(\widetilde{b_n}, \widetilde{b_{n+1}})$. Gęstość w punkcie b_n i czasie $t_k = k \cdot \Delta t$ definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} \frac{p(x, k \cdot \Delta t)}{\Delta x} dx. \tag{5.8}$$

Na podstawie (5.2) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{\widetilde{b_n}}^{\widetilde{b_{n+1}}} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t)) dt = 0 \tag{5.9}$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\widetilde{b_{n+1}}, t) - q(\widetilde{b_n}, t)) dt = 0 \tag{5.10}$$

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach t_k. Wtedy wartości $q(\widetilde{b_n}, t)$ i $q(\widetilde{b_{n+1}}, t)$ są stałe na całym przedziale całkowania $[t_k, t_{k+1})$. Otrzymujemy równanie:

$$\Delta x(p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) = 0 \tag{5.11}$$

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(\widetilde{b_{n+1}}, t_k) - q(\widetilde{b_n}, t_k)) \tag{5.12}$$

Powyższy wzór zawiera niezdefiniowane wartości q i p dla punktów ciągu $\widetilde{b_n}$ - będziemy je odpowiednio oznaczać $\widetilde{q_n^k}$ i $\widetilde{p_n^k}$. Dyskretyzacja wedle schematu stagerred Lax-Friedrichs [8] prowadzi do następujących wartości dla dowolnej chwili t_k:

$$\widetilde{p_n^k} = \frac{p_{n-1}^k + p_n^k}{2} \tag{5.13}$$

$$\widetilde{q_n^k} = \frac{q_{n-1}^k + q_n^k}{2} \tag{5.14}$$

Ustalona teraz będzie ewolucja gęstości dla pomocniczego ciągu $\widetilde{b_n}$. Jest ona opisana analogicznie do (5.12):

$$\widetilde{p_n^{k+1}} = \widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q(p_n^k) - q(p_{n-1}^k)) \tag{5.15}$$

Z równania (5.13) można wykazać, że dla dowolnego n:

$$p_n^{k+1} = \frac{\widetilde{p_n^{k+1}} + \widetilde{p_{n+1}^{k+1}}}{2} \tag{5.16}$$

Na podstawie wzorów (5.15) i (5.16) otrzymujemy:

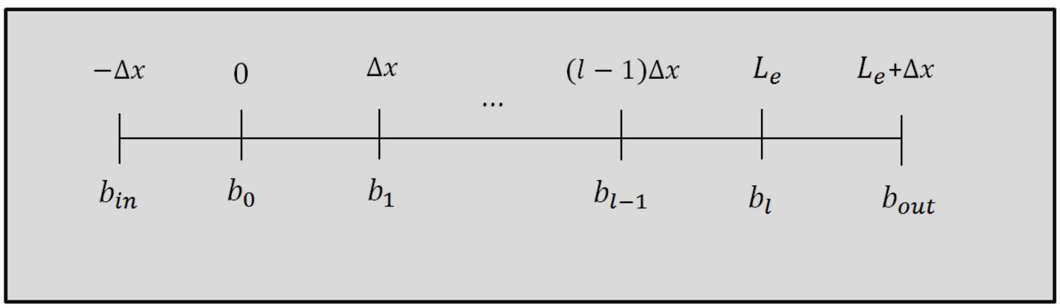
$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}\widetilde{p_n^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) + \frac{1}{2}\widetilde{p_{n+1}^k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.17}$$

Co prowadzi do końcowej zależności:

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_n^k - q_{n-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n+1}^k - q_n^k). \tag{5.18}$$

$$p_n^{k+1} = \frac{1}{2}p_n^k + \frac{1}{4}p_{n+1}^k + \frac{1}{4}p_{n-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{n-1}^k - q_{n+1}^k). \tag{5.19}$$

Powyższy wzór kończy rozważania odnośnie punktów wewnętrznych drogi. Przypadek punktów brzegowych b_0, b_l różni się diametralnie od punktów wewnętrznych ze względu na to iż trzeba w nich ująć aspekty wprowadzenia nowych pojazdów do ruchu oraz opuszczenia drogi. Podstawowe równanie modelu makroskopowego (5.2) nie uwzględnia ani źródła, ani też ujścia ruchu, co pozwala na zastosowanie własnego rozwiązania w tym zakresie.



Rysunek 5.2: Siatka bazowa b_n wraz ze źródłem i ujściem

Przedstawiony w pracy pomysł zakłada, że źródło b_{in} i ujście b_{out} ruchu znajdują się w odległości Δx odpowiednio od punktów b_0 i b_l (patrz Rysunek 5.2).
Gęstość w źródle oznaczamy jako p_{in}^k. Rozwój gęstości w początkowym punkcie drogi b_0 jest ustalony analogicznym wzorem do (5.19):

$$p_0^{k+1} = \frac{1}{2}p_0^k + \frac{1}{4}p_1^k + \frac{1}{4}p_{in}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q(p_{in}^k) - q_1^k). \tag{5.20}$$

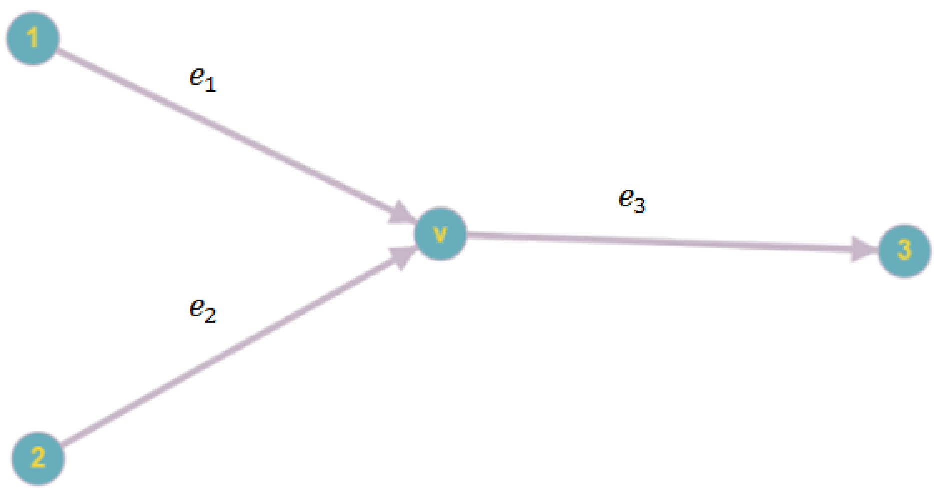
Gęstość ujścia oznaczona jest jako p_{out}^k. Gęstość w końcowym punkcie drogi b_l cechuje się następującą zmiennością:

$$p_l^{k+1} = \frac{1}{2}p_l^k + \frac{1}{4}p_{out}^k + \frac{1}{4}p_{l-1}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q(p_{l-1}^k) - q(p_{out}^k)). \tag{5.21}$$

W przypadku pojedynczej drogi p_0^k może być dowolną funkcją. Z kolei p_l^k zakładając, że pojazdy nie mają problemu z opuszczeniem drogi jest równe 0.

5.7 Przepływ ruchu na skrzyżowaniu 1

Udało się przedstawić przepływ ruchu dla pojedynczej drogi. W tym momencie należy skonstruować logiczny model przepływu ruchu przez skrzyżowanie. Początkowo wykorzystany będzie bardzo prosty przykład, aby ustalić przepływ ruchu na skrzyżowaniu. Skrzyżowanie jest przedstawione na rysunku 5.4.



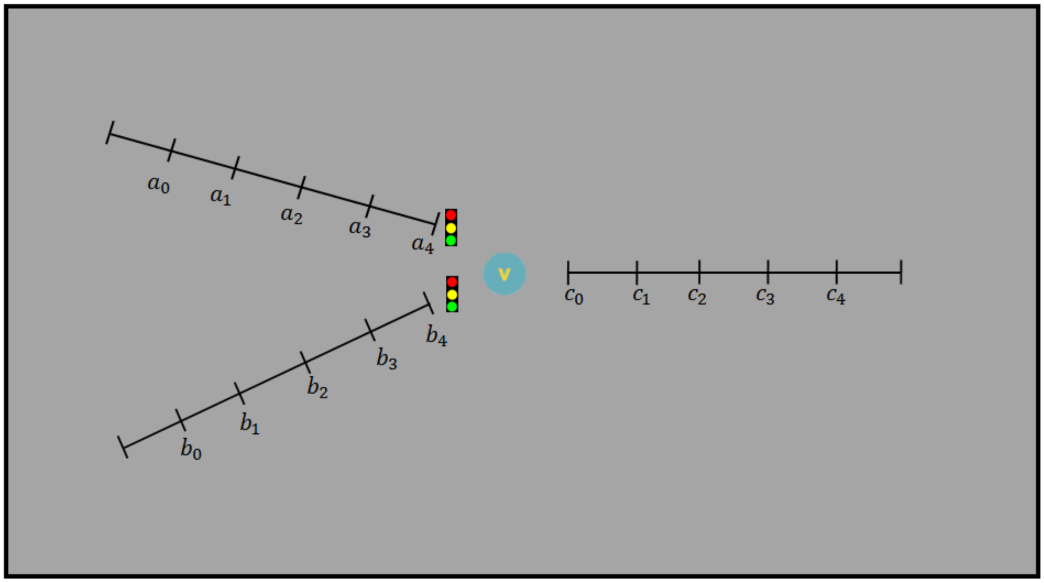
Rysunek 5.3: Skrzyzowanie 1

Skrzyżowanie v posiada dwie drogi wlotowe e_1, e_2 oraz jedną wylotową e_3. Źródła ruchu dla tej sieci dróg znajdują się na początku dróg e_1, e_2 (punkty 1 i 2 na Rysunku 5.4). Należy podkreślić, że ujścia dróg e_1, e_2 i źródło drogi e_3 są fizycznie w tym samym punkcie oznaczonym jako v. Gęstość w tym punkcie w chwili t_k będziemy oznaczać jako p_v^k.
Skrzyżowanie posiada dwie fazy świateł:
$M^{(1)}$ - umożliwiające jazdę w lewo z drogi e_1
$M^{(2)}$ - umożliwiające jazdę w prawo z drogi e_2
Bazując na wzorach opisujących rozwój gęstości w dyskretnym modelu przedstawiony zostanie wzór opisujący rozwój gęstości w punkcie v.

$$p_v^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}p_v^k + \frac{1}{4}{}_3p_0^k + \frac{1}{4}{}_1p_{out}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}({}_1q_{out}^k - {}_3q_0^k) & \text{gdy } M^{(1)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.22) \\ \frac{1}{2}p_v^k + \frac{1}{4}{}_3p_0^k + \frac{1}{4}{}_2p_{out}^k + \frac{\Delta t}{2\Delta x}({}_2q_{out}^k - {}_3q_0^k) & \text{gdy } M^{(2)} \text{ jest aktywną fazą} \quad (5.23) \end{cases}$$

Szczegółowa dane pozwalające na przeprowadzenie symulacji są następujące:
${}_1p_{in}^k = 0.2$
${}_2p_{in}^k = 0.1$
$p_{max} = 0.25$ (dla wszystkich dróg)

$\Delta x = 50$
$\Delta t = 1$
$\lambda = 2$
$L_{e_1}, L_{e_2}, L_{e_3} = 200$



Rysunek 5.4: Skrzyzowanie 1

Bibliografia

[1] S. Boubaker, F. Rehimi, and A. Kalboussi, “Comparative analysis of microscopic models of road traffic data,” in *Logistics (LOGISTIQUA), 2011 4th International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 474–478.

[2] P. Kumar, R. Merzouki, B. Conrard, V. Coelen, and B. O. Bouamama, “Multilevel modeling of the traffic dynamic,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1082, 2014.

[3] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos, and I. Andreasson, “A discrete-event mesoscopic traffic simulation model for hybrid traffic simulation,” in *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC’06. IEEE*. IEEE, 2006, pp. 1102–1107.

[4] M. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H. N. Koutsopoulos, and R. Mishalani, “Network state estimation and prediction for real-time traffic management,” *Networks and spatial economics*, vol. 1, no. 3-4, pp. 293–318, 2001.

[5] V. A. Vu and G. Tan, “High-performance mesoscopic traffic simulation with gpu for large scale networks,” in *Proceedings of the 21st International Symposium on Distributed Simulation and Real Time Applications*. IEEE Press, 2017, pp. 127–135.

[6] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, “On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955.

[7] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, and M. Treiber, “Master: macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 35, no. 2, pp. 183–211, 2001.

[8] S. Göttlich, M. Herty, and U. Ziegler, “Modeling and optimizing traffic light settings in road networks,” *Computers & operations research*, vol. 55, pp. 36–51, 2015.