Optymalizacja systemu sygnalizacji świetlnej w oparciu o przepływowy model ruchu pojazdów.

Michał Lis

I. Model sieci dróg

Modelujemy sieć dróg jako multigraf skierowany oznaczony $G = (V, E)$. Gdzie V to zbiór skrzyżowań(węzłów grafu). E oznacza zbiór wszystkich pasów ruchu w sieci dróg (krawędzie grafu). Pas ruchu oznaczamy jako ${}^{k}e_i^j \in E$. Gdzie: i - indeks początkowego wierzchołka j - indeks docelowego wierzchołka k - numer pasu. Funkcja $L_v : V \to (0, \infty)$ zwraca długość pasu $v \in V$.

II. Model ruchu drogowego

A. Klasyfikacja modeli ruchu drogowego

Modele ruchu drogowego mają na celu ukazanie rzeczywistego przeplywu pojazdów w sposób czysto matematyczny. Ważnym kryterium doboru, czy też tworzenia modelu jest przystępność jego implementacji informatycznej. Powszechnie klasyfikuje się 3 podejścia modelowe dla omawianego problemu [?] - makroskopijny, mezoskopijny, mikroskopijny. Czasem [?] wyróżnia się także czwarte podejście - submikroskopijne. Jest to podział ze względu na poziom modelu. Najniższy poziom i najbardziej dokładny model gwarantuje podejście mikroskopijne. Rozważa on pojazdy indywidualnie w czasoprzestrzeni. Przyspieszenie pojazdu jest wyliczane na podstawie dynamiki(prędkości, przyspieszenia) i pozycji pojazdu bezpośrednio przed nim. Model mezoskopijny zapewnia indywidualne rozróżnienie pojazdów, jednak ich zachowanie jest wyliczane na danych zagregowanych[?]. Przykładowo pojazdy są zgrupowane w grupę podróżującą z pewnego punktu startowego do celu. Inne modele [?] mezoskopijne wyliczają dynamikę ruchu na podstawie aktualnego zatłoczenia drogi. Poziom mezoskopijny jest obliczeniowo bardziej opłacalny od mikroskopijnego. Wiele symulatorów stosujących model mezoskopijny oferuje symulację w czasie rzeczywistym dla sieci dróg całego miasta[?]. Ideą modelu makroskopijnego jest traktowanie ruchu ulicznego identycznie jak ruchu cieczy lub gazów. Po raz pierwszy w roku 1956 M. J. Lighthill i G. B. Whitham [?] przedstawili pomysł przyrównania ruchu ulicznego na zatłoczonych drogach do przepływu wody w rzekach. Z tego powodu nie rozróżniamy w nim indywidualnie pojazdów, ani też nawet grupowo. Rozważamy natomiast gęstość ruchu w danym punkcie na drodze i czasie - czyli ilość pojazdów na danym odcinku drogi. Ruch pojazdów jest wyliczany jedynie na podstawie gęstości ruchu. Jest to najmniej kosztowny obliczeniowo model. Właśnie w modelu makroskopijnym zostało stworzone środowisko symulacyjne. Szczegóły modelu są przedstawione w następnym podrozdziale.

B. Makroskopijny model ruchu

Istotą makroskopijnego modelu ruchu jest pojęcie gęstości ruchu. W niektórych artykułach [?] ta wartość jest przedstawiona jako iloraz ilości pojazdów znajdujących się na pewnym odcinku i długości tego odcinka drogi. Nie są to jednak czysto matematyczne formalne definicje. W makroskopijnym modelu nie rozróżniamy pojedynczych pojazdów, ani nawet grup, więc taka definicja gęstości ruchu może być odebrana jako nieścisła z ideą modelu. Makroskopijny model ruchu jest oparty o równanie różniczkowe (1) wraz z warunkiem początkowym (2). Model makroskopijny traktuje ruch uliczny na drogach podobnie do przepływu wody w rzekach. Możemy zatem gęstość ruchu utożsamiać z wysokością wody w rzece. Jest to także czynnik wpływający na prędkość ruchu. Zmianę gęstości i płynności ruchu definiuje następujący układ równań: $\begin{cases} \frac{\delta p(x,t)}{\delta t} + \frac{\delta q(x,t)}{\delta x} = 0 \ (1) \\ p(x, t = 0) = p_0(x)(2), \end{cases}$

gdzie $p \in [0, p_{max}]$ to gęstość ruchu w miejscu x w czasie t, ,a p_0 to początkowa gęstość dla punktu x na pewnej ustalonej drodze e. Wartość p_{max} to maksymalna gęstość pojazdów przy której samochody przestają się poruszać, a t_{max} to końcowy czas symulacji ruchu. Następnie $q \in [0, \infty)$ oznacza przepustowość ruchu. Zakładamy, że $q(p) = pv$. Oznaczmy prędkość maksymalną ruchu jako $v_{max} \in (0, \infty)$. Prędkość ruchu definiujemy jako rzeczywistą funkcję gęstości:

$$v(p) = (1 - \frac{p}{p_{max}})v_{max}$$

. Początkową gęstość formalnie definiujemy jako:

$$p_0(x) = \begin{cases} p_L & \text{for } x \leq x_0 \\ p_R & \text{for } x > x_0 \end{cases}$$

. Punkt $x_0 \in v$ będziemy nazywać punktem przegięcia. Dla punktów x będących na drodze przed x_0 gęstość wynosi p_l, a dla punktów następujących po x_0 jest to p_r. Ta różnica gęstości powoduje przemieszczanie się pojazdów.

C. Dyskretyzacja modelu

Modele dyskretne zazwyczaj są łatwiejsze i mniej kosztowne w implementacji komputerowej. Z tego powodu dokonamy dyskretyzacji modelu zarówno sieci drogowej jak i ruchu obowiązującego na niej.

D. Dyskretyzacja modelu sieci drogowej

Niech G=(V,E) będzie multigrafem sieci drogowej. W modelu dyskretnym istotna obliczeniowo jest przeliczalna liczba punktów. Zatem wybierzmy liczbę naturalną l. Określa ona punkty które zostaną wybrane z drogi w procesie dyskretyzacji. Ciąg punktów na drodze v, dla których będą wyliczane wartości gęstości to: $b_n = (0, \frac{L_v}{l}, ..., L_v)$. Ustalmy podział drogi tak, aby punkty ciągu b_n były środkami przedziałów:

$$B_n = \begin{cases} [0, \frac{L_v}{2l}] & \text{dla } n = 0 \\ [\frac{(2n-1)L_v}{2l}, \frac{(2n+1)L_v}{2l}] & \text{dla } n = 1, 2, ..., l-1 \\ [\frac{(2l-1)L_v}{2l}, L_v] & \text{dla } n = l \end{cases}$$

Wyjątkiem są punkty krańcowe drogi $b_1 = 0$ i $b_2 = L_v$, które znajdują się także na krańcach przedziałów B_0 i B_l. Podział to formalnie:

$$B = \bigcup_{n=1}^{l} B_n$$

Podobny proces przeprowadzamy dla osi czasu. Nie będziemy traktować czasu jako wartości ciągłej, więc zdefiniujemy przeskok czasu jako Δt. Przestrzeń czasową określamy jako zbiór.

$$T = \bigcup_{t=0}^{m} \Delta t$$

Dodatkowo nakładamy warunek, że m to taka liczba naturalna, że $t_{max} = m \cdot \Delta t$. Dla punktów ciągu b_n jesteśmy zobligowani do przedstawienia wartości reprezentującej gęstość. Będzie ona wyliczona na podstawie odpowiadających zbiorów B_n. Gęstość w punkcie b_n i czasie $t_k = k \cdot \Delta t \in T$ definiujemy jako:

$$p_n^k = \int_{B_n} \frac{p(b_n, k \cdot \Delta t)}{\mu(B_n)} dx.$$

Gdzie μ to długość przedziału. Analogicznie definiujemy przepustowość jako:

$$q_n^k = \int_{B_n} \frac{q(b_n, k \cdot \Delta t)}{\mu(B_n)} dx.$$

Wspomniane zostały już zalety modelu dyskretnego. Wadą często jest większy stopień skomplikowania. W tym momencie musimy jeszcze odnieść się do sposobu zmiany gęstości ruchu. Na podstawie (LWR) możemy wywnioskować, że:

$$\int_{B_n} p(x, t_{k+1}) dx - \int_{B_n} p(x, t_k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(B_n^p, t) - q(B_n^l, t)) dt = 0$$

Gdzie symbole B_n^l, B_n^p oznaczają odpowiednio lewy i prawy kraniec przedziału B_n. Upraszczając z (odniesienie):

$$\mu(B_n)(p_n^{k+1} - p_n^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q(B_n^p, t) - q(B_n^l, t)) dt = 0$$

Przyjmujemy, że wartości przepustowości i gęstości zmieniają się w tylko w chwilach $t \in T$. Wtedy wartości $q(B_n^p, t)$ i $q(B_{n+1}^p, t)$ są stałe na całym przedziale całkowania $[t_k, t_{k+1})$. Otrzymujemy równanie:

$$\mu(B_n)(p_n^{k+1} - p_n^k) + \Delta t(q(B_n^l, t_k) - q(B_n^p, t_k)) = 0$$

Rezultatem jest rekurencyjny wzór na gęstość ruchu:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\mu(B_n)}(q(B_n^p, t_k) - q(B_n^l, t_k)) = 0$$

Nie znamy płynności na krańcach przedziału B_n, gdyż ustaliliśmy, że istotne obliczeniowo będą jedynie punkty ciągu b_n. Z tego powodu przyjmujemy, że $q(B_n^l, t_k) = \frac{q(b_n-1,t_k)+q(b_n,t_k)}{2}$ oraz $q(B_n^p) = \frac{q(b_n,t_k)+q(b_n+1,t_k)}{2}$.Ostateczny wzór rekurencyjny to:

$$p_n^{k+1} = p_n^k - \frac{\Delta t}{\mu(B_n)}(\frac{q(b_{n+1}, t_k) - q(b_{n-1}, t_k)}{2})$$

Warto zaznaczyć, że powyższy wzór ma sens tylko dla $n = 1, 2, ..., l-1$. Wartość $q(0, t_k)$ odpowiada ilości nowych pojazdów pojawiających się na drodze w trakcie sekundy. Na jej podstawie wyliczane jest p_0^k.

$$p_0^k = \frac{p_{max}}{2} - \frac{1}{2}(p_{max}^2 - 4p_{max}q(0, t_k)/v_{max})^{1/2}$$

Wartość p_l^{k+1} liczymy jako:

$$p_l^{k+1} = p_l^k + \frac{\Delta t}{2\mu(B_n)} q(b_{n-1}, t_k))$$

. Zakładamy, że pojazdy mogą bezproblemowo opuścić drogę.

Przykład:

Wzór:

$$q = p(1 - \frac{p}{p_max})v_{max}$$