「足利連分数展開について II」 sp：佐藤さん

§1 ： Affine toric variety の 基礎 c.f. 石井 志保子「特異点入門」

§2 ： 足利連分数 と 特異点解消 c.f. ・T. Ashitaka, "Multidimensional cont. frac. for ....."

・S.S, "Crep. properties of Fujiki-Oka resol. for Gor. ab. quo. sing."

§1 ： $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$.

Definition

・G : alg. integral var. が **代数群** であるとは，

(1) $\exists \mu : G \times G \longrightarrow G$ (s.t.) $\mu(\mu(g_1, g_2), g_3) = \mu(g_1, \mu(g_2, g_3))$

(2) $\exists e \in G$ (s.t.) $\mu(g, e) = \mu(e, g) = g$ for $\forall g \in G$

(3) $\exists \beta : G \xrightarrow{\sim} G$: auto / $\Bbbk$ (s.t.) $\mu(\beta(g), g) = \mu(g, \beta(g)) = e$ for $\forall g \in G$

Example

1) $T^1_{\Bbbk} := \Bbbk^{\times}$

$$\begin{array}{rccc} \mu : & T^1_{\Bbbk} \times T^1_{\Bbbk} & \longrightarrow & T^1_{\Bbbk} \\ & (a.b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $T^1_{\Bbbk}$ は 1次元の可換な代数群．

2) $T^n_{\Bbbk} := T^1_{\Bbbk} \times \cdots \times T^1_{\Bbbk}$ も $\mu : T^n_{\Bbbk} \times T^n_{\Bbbk} \longrightarrow T^n_{\Bbbk}$, $((a_i), (b_i)) \longmapsto (a_i b_i)$ とすれば $T^{\Bbbk}_n$ も可換な代数群である．

$T^n_{\Bbbk}$ は **n次元代数的トーラス** という．

Definition

X : alg. integral var / $\Bbbk$.
G : alg. var. / $\Bbbk$.

$G \curvearrowright X$ とする． (i.e.) $\exists\, G \times X \longrightarrow X$ (s.t.) it is mor. of alg. var.

・$\mathcal{O}_G(x) := \{gx \mid g \in G\}$ を $x \in X$ の G による **軌道** という．

・$\exists x \in X$ (s.t.) $X = \overline{\mathcal{O}_G(x)}$ であるとき，X は **概等質空間** という．

Definition

X : n-dimensional irr. alg. var $/k$

$T_k^n \overset{\sigma}{\curvearrowright} X$ のとき X が toric var $\overset{\text{def}}{\iff}$ X : 概等質空間 under σ.

☺ X : toric var $\Rightarrow$ $T_k^n \subset X$: open dense.

$n=1$ のときの toric. var. $/\mathbb{C}$ は分類されていて, $\mathbb{P}_k^1$, $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $(\mathbb{A}^1)^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

X の中の点の軌道の分類により Fan が得られる.

e.x

$X = \mathbb{P}_k^1$

N

$-1 \quad 0 \quad 1$

1次元 錐体

$\rightsquigarrow F(\sigma) = \{$  $\}$

$0 \leftrightarrow (t_1^{\pm 1})$, $\mathbb{A}^1 \leftrightarrow (t_1^1)$, $\mathbb{A}_k^1 \leftrightarrow (t_1^{-1})$, T_k^1

$\downarrow \lim_{t_1 \to 0}$ $T_k^1 \curvearrowright (0)$ の orbit は 1点.

$T_k^1 \curvearrowright (1)$ の orbit は T_k^1 自身.

dual

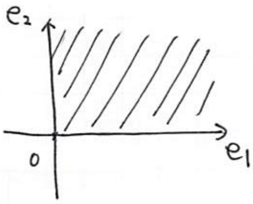
$-1 \quad 1$

$\updownarrow$

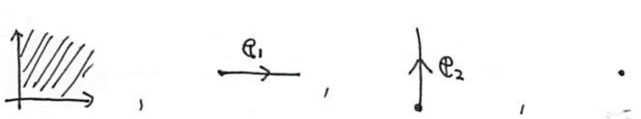
$k[x, x^{-1}]$

Example

$X = \mathbb{C}^2$



$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} e_2$

$\sim F(\sigma) = \{$  $\}$

$(*, *)$	$(*, 0)$	$(0, *)$	$(0, 0)$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(t_1^*, t_2^*)	(t_1^*, t_2^0)	(t_1^0, t_2^*)	$T_k^2 \curvearrowright (t_1^0, t_2^0)$ の orbit は $(\mathbb{C}^*)^2$
$\downarrow \lim_{t \to 0}$	$\downarrow \lim_{t \to 0}$	$\downarrow \lim_{t \to 0}$	
$T_k^2 \curvearrowright (0,0)$ の orbit は $(0,0)$ (原点)	$T_k^2 \curvearrowright (0, t_2^0)$ の orbit は $\mathbb{C}^*$ (x軸$\setminus\{0\}$)	$T_k^2 \curvearrowright (t_1^0, 0)$ の orbit は $\mathbb{C}^*$ (y軸$\setminus\{0\}$)	

Definition

X: m-dim toric var.
Y: n-dim toric var.

$f : X \longrightarrow Y$ mor. of alg. var が toric var. の射
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varphi : T_{\mathbb{k}}^m \longrightarrow T_{\mathbb{k}}^n$ (s.t.)

① $f|_{T^m} = \varphi$

② $$\begin{tikzcd} T^m \times X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\varphi \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T^n \times X \arrow[r, "\sigma_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

以上より Cat(TV) : cat. of toric variety を得る.