

# Faktorisierung auf dem Quantencomputer Erklärung und Implementierung

*Einführung in die Funktionsweise von Quantencomputern  
und Implementation zweier Programmbibliotheken in Q#  
mit arithmetischen Operationen sowie einer vollständigen  
Implementierung des Shor-Algorithmus*

Maturaarbeit von	Joël Benjamin Huber
Betreut von	Christian Steiger
an der	Kantonsschule Freudenberg Zürich
abgegeben am	15. Dezember 2020

**Zusammenfassung:** Die vorliegende Maturitätsarbeit beschäftigt sich mit Quantencomputern und ihrer Anwendung für das Faktorisierungsproblem. Zu diesem Zweck wurden arithmetische Operationen genauer betrachtet, um zu verstehen, wie sie auf Quantencomputern implementiert werden können. Danach wurde der Shor-Algorithmus genauer betrachtet, mit welchem sich Zahlen faktorisieren lassen. Dies alles wurde in der Form zweier Programmbibliotheken in der Quantenprogrammiersprache Q# und der klassischen Programmiersprache C# implementiert, sodass man diese Operationen auch in anderen Projekten verwenden kann.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Vorwort . . . . .	3
1.2	Die QInteger- und die QAlgorithm-Libraries und eine Implementation des Faktorisierungsalgorithmus . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Lineare Algebra . . . . .	6
2.1.1	Schreibweise . . . . .	6
2.1.2	Vektorräume . . . . .	6
2.1.3	Inneres Produkt . . . . .	7
2.1.4	Lineare Operatoren . . . . .	7
2.1.5	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	8
2.1.6	Das Tensorprodukt . . . . .	8
2.2	Quantensysteme . . . . .	9
2.2.1	Qubits . . . . .	9
2.2.2	Die Blochkugel . . . . .	11
2.2.3	Operationen auf Qubits . . . . .	11
2.2.4	Wichtige Quantengatter . . . . .	11
2.2.5	Kontrollierte und adjungierte Operatoren . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Arithmetische Operation auf Qubits ausführen - Die QInteger Library</b>	<b>14</b>
3.1	Überblick . . . . .	14
3.2	Zahlen in Qubits speichern - Der QInt-Typ . . . . .	14
3.3	Die Quanten-Fouriertransformation und die Fourier-Basis . . . . .	14
3.4	Addition . . . . .	16
3.5	Modulare Addition . . . . .	17
3.6	Modulare Multiplikation . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Der Weg zu Shor</b>	<b>20</b>
4.1	Überblick . . . . .	20
4.2	Phase-Kickback . . . . .	20
4.3	Phase Estimation . . . . .	21
4.4	Period Finding . . . . .	22
4.5	Die Ordnung von Zahlen bestimmen . . . . .	24
4.6	Das Ziel - Der Shor-Algorithmus . . . . .	24

<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>26</b>
5.1	Man kann Zahlen effizient faktorisieren - Was nun? . . . . .	26
5.2	Quantencomputer - Wie bald? . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Nachwort</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>29</b>
7.1	Mathematische Symbole . . . . .	29
7.2	Literatur . . . . .	29
7.3	Redlichkeitserklärung . . . . .	31

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Vorwort

Das Gebiet der Quantencomputer ist zweifellos eines der vielversprechendsten Forschungsgebiete. Quantencomputer würden uns theoretisch erlauben, Berechnungen auszuführen, die auf klassischen Computern nicht effizient ausgeführt werden können. Diese mathematischen Konstrukte werden in der Zukunft wahrscheinlich eine grössere Rolle spielen.

Immer wieder liest man in Zeitungs- und Journalartikeln über Relisierungen von Quantencomputern und immer wieder wurde von Durchbrüchen gesprochen. So wie zum Beispiel, als Google 2019 einen Artikel im Journal “Nature“ publizierte, in welchem sie behaupteten, die “Quantenüberlegenheit“ erreicht zu haben ([1]), was gleich darauf von der IBM in ihrem Blog angezweifelt wurde ([11]).

Aus diesem Grund ist es meiner Meinung nach ein guter Zeitpunkt, um sich vertieft mit dem Thema auseinanderzusetzen. Ich habe mich deshalb entschieden, mich auf diese Reise zu begeben und im Rahmen meiner Maturitätsarbeit zu versuchen zu verstehen, wie Quantencomputer funktionieren, um danach in einem nächsten Schritt arithmetische Operationen sowie den Shor-Algorithmus zu implementieren. Die grösste Schwierigkeit, mit der ich mich auf meinem Weg konfrontiert sah, war es, die Quantenalgorithmen zu debuggen.

Doch es dauerte immer eine Weile, bis etwas funktionierte. In der Tat denke ich, dass die grösste Schwierigkeit, die ich hatte, war, die Quantenalgorithmen zu debuggen. Mein Code war am Anfang noch sehr fehlerhaft und diese Fehler zu finden war schwierig. Dies liegt auch daran, dass Qubits schwierigere Konstrukte sind, so dass deren momentanen mit deren geplanten Zuständen zu vergleichen und zu finden, wieso etwas nicht stimmt, Stunden in Anspruch nehmen konnte.

In der Tat ist es meiner Meinung nach nicht sehr einfach, in dieses Gebiet einzusteigen. Auch deshalb soll meine Arbeit dazu dienen, zusammen mit der angegebenen Fachliteratur, den Einstieg zu vereinfachen. Dafür werden aber Kenntnisse der linearen Algebra vorausgesetzt, da diese sehr wichtig ist, um die mathematische Struktur zu verstehen. Zum Einstieg in die lineare Algebra habe ich selbst das Buch “Lineare Algebra“ von Gerd Fischer (siehe [6]) gelesen und empfehle dieses Buch, um sich die Grundlagen der linearen Algebra zu erarbeiten.

Ich habe mich sowohl damit auseinandergesetzt, wie arithmetische Operationen auf Quantencomputern programmiert werden können, als auch, wie man damit Zahlen faktorisieren kann. Was ich gelernt habe, habe ich in Code umgesetzt. Ich habe zwei Programmbibliotheken implementiert, die ich in Abschnitt 1.2 genauer beschreibe und in welchen man alle in dieser Arbeit betrachteten Operationen als Code finden kann. Zudem habe ich bei der Implementation ge-

zielt darauf geachtet, dass diese Bibliotheken auch in späteren Projekten gut verwendet werden können und ich habe vor, diese Bibliotheken in Zukunft kontinuierlich zu erweitern und Implementierungen anderer Quantenalgorithmen hinzuzufügen, so dass sie aktuell bleiben.

## 1.2 Die QInteger- und die QAlgorithm-Libraries und eine Implementation des Faktorisierungsalgorithmus

Das Produkt dieser Maturitätsarbeit sind zwei Programmbibliotheken, welche Algorithmen für Quantencomputer bereitstellen. Diese Programmbibliotheken sind in der Programmiersprache Q# geschrieben, einer Quantenprogrammiersprache entwickelt von Microsoft. Das Quantum Development Kit (QDK) von Microsoft beinhaltet dabei nicht nur die Sprache Q#, sondern auch einen Simulator, auf welchem man den Code ausführen kann. Gleichzeitig ist es das Ziel der Sprache, dass man sie auf echten Quantencomputern einsetzen kann, sobald diese genug weit entwickelt sein werden.

Die beiden Bibliotheken sollen mathematische Operationen auf Quantencomputern vereinfachen. Hier ein kurzer Überblick über ihre Funktionen:

- Die *QInteger-Library* definiert mit dem Typ "QInt" die grundlegende Datenstruktur "Zahl" auf einem Quantencomputer. Zudem stellt sie arithmetische Operationen und nützliche Funktionen für den Typ "QInt" bereit.
- In der *QAlgorithms-Library* sind Algorithmen für Quantencomputer implementiert, darunter auch der quantenbasierte Teil von Shors Algorithmus zur Faktorisierung von Zahlen, welcher zweifelsohne einer der nennenswertesten Errungenschaften auf dem Gebiets der Quantencomputer ist.

Diese beiden Bibliotheken stellen generelle, nützliche Funktionen für Quantencomputer bereit, welche auch zur Vereinfachung in anderen Projekten gebraucht werden können. Den Code zu diesen Programmbibliotheken kann man auf GitHub finden, wo er in Zukunft einige Aktualisierungen erhalten wird. Auf GitHub ist er unter folgendem Link verfügbar:

<https://github.com/johutha/QInteger-QAlgorithms>

Ich habe Q# gewählt, da es aktuell eine der populärsten Quantenprogrammiersprachen ist, über eine gute Dokumentation verfügt, gut unterstützt und regelmässig aktualisiert wird. Zudem kann der Compiler automatisch zu einer Quantenoperation deren Inverses oder deren kontrollierte Version generieren <sup>1</sup>, was den Code kürzer und übersichtlicher macht.

Nebst diesen beiden Bibliotheken finden sich im GitHub-Repository weitere Projekte. In einem dieser Projekte ist der "Factorizer" implementiert, welcher zusammen mit den Quanten-Programmbibliotheken eine komplette Implementierung von Shors Algorithmus bilden. Dazu sind im Projekt auch andere Faktorisierungsalgorithmen programmiert, so dass man diese miteinander vergleichen kann.

Im Weiteren befindet sich im Repository ein Projekt für eine einfache Konsolen-Applikation, welche den "Factorizer" benützt, so dass man diesen als Proof of Concept ausprobieren kann. Zudem gibt es ein Projekt für einen Zeitmesser, welcher misst, wie lange der "Factorizer" benötigt.

---

<sup>1</sup>Siehe auch Kapitel 2.2

Zudem befinden sich im Repository drei weitere Projekte, in welchen Unit-Tests implementiert sind. Unit-Tests testen die verschiedenen Komponenten einzeln, wodurch man einfacher Implementationsfehler lokalisieren und Bugs finden kann.

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Lineare Algebra

Um mit Quantencomputern arbeiten zu können, braucht es Kenntnisse der linearen Algebra. Operationen, die man auf Quantencomputern implementiert, sind lineare Operationen auf Qubits. Ich werde an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung der nötigen Grundlagen geben, welche erforderlich sind, um die Quanten-Grundlagen und Shors Algorithmus zu verstehen. Dies wird jedoch nur eine kurze Zusammenfassung und keine Einführung in dieses Gebiet sein. Für eine Einführung verweise ich auf [6].

Vor der Zusammenfassung möchte ich kurz die in der Quantenmechanik gebräuchliche Notation für lineare Algebra einführen. Diese nennt sich Dirac- oder Bra-Ket-Notation.

#### 2.1.1 Schreibweise

Einen Vektor schreibt man in der Quantenmechanik als  $|\varphi\rangle$ . Diese besondere Art von Klammern wird als *ket* bezeichnet. Für einen Vektor  $|\varphi\rangle$  wird der dazugehörige duale Vektor als  $\langle\phi|$  bezeichnet. Diese zweite Klammer heisst *bra*, sodass die beiden Klammern zusammen ein Bra-Ket bildet, was vom englischen Wort bracket abstammt. Somit lässt sich das Skalarprodukt von  $|\psi\rangle$  und  $|\varphi\rangle$  als  $\langle\psi|\varphi\rangle$  darstellen.

#### 2.1.2 Vektorräume

Um Quantensysteme mathematisch beschreiben zu können, brauchen wir Vektorräume. Genauer benötigen wir endlichdimensionale Vektorräume über  $\mathbb{C}$ , zusammen mit einem Skalarprodukt. Diese Vektorräume werden auch unitäre Vektorräume<sup>1</sup> genannt. Diese sind isomorph zu  $\mathbb{C}^n$ .

Sei  $V$  ein solcher Vektorraum.

Wir nennen eine Menge von Vektoren in  $V$  ein *Erzeugendensystem*, falls jeder Vektor in  $V$  als eine Linearkombination der Vektoren in jener Menge geschrieben werden kann.

Eine Menge von Vektoren  $|v_0\rangle, |v_1\rangle, \dots, |v_{k-1}\rangle$  ist *linear unabhängig*, falls wenn aus der Gleichung  $a_0 |v_0\rangle + a_1 |v_1\rangle + \dots + a_{k-1} |v_{k-1}\rangle = 0$  folgt, dass  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$  gilt. Dabei

---

<sup>1</sup>Im Allgemeinen braucht es sogenannte Hilberträume. Da man es im Zusammenhang mit Quantencomputern aber nur mit endlichdimensionalen Räumen zu tun hat, reichen unitäre Vektorräume

sind die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  komplexe Zahlen. Diese Aussage ist äquivalent zur Aussage, dass sich keiner der Vektoren  $|v_i\rangle$  als Linearkombination der anderen Vektoren in der Menge darstellen lässt.

Eine *Basis* ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

### 2.1.3 Inneres Produkt

Die für die Beschreibung der Qubits benötigten unitären Vektorräumen sind mit einem Skalarprodukt ausgerüstet: Das heisst, es gibt eine Funktion  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Linear im zweiten Argument:

$$\sum_j \lambda_j (|\psi\rangle, |\varphi_j\rangle) = (|\psi\rangle, \sum_j \lambda_j |\varphi_j\rangle)$$

2. Hermitesch:

$$(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = \overline{(|\varphi\rangle, |\psi\rangle)}$$

3. Positiv definit:

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow (|\varphi\rangle, |\varphi\rangle) > 0$$

Wie oben schon angetönt, schreibt man dieses Produkt in der quantenmechanischen Notation als  $\langle\psi|\varphi\rangle$ . Ich habe für diese drei Bedingungen jedoch die  $(\cdot, \cdot)$ -Schreibweise verwendet, da man mit ihr die Bedingungen übersichtlicher darstellen kann.

Die *Norm* eines Vektors  $|\varphi\rangle$ , wird als  $\| |\varphi\rangle \|$  geschrieben und ist definiert als  $\| |\varphi\rangle \| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$ . Ein Vektor  $|\varphi\rangle$  ist normiert, falls  $\| |\varphi\rangle \| = 1$  gilt. Wir benutzen hier das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$  definiert als:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n \bar{c}_i w_i$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass das auf diese Weise definierte Skalarprodukt die oben genannten Bedingungen erfüllt.

### 2.1.4 Lineare Operatoren

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum<sup>2</sup>, seien  $|v\rangle$  und  $|w\rangle \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Definition:** Ein *linearer Operator*<sup>3</sup>  $L$  ist eine Funktion

$$\begin{array}{ccc} L : & V & \longrightarrow V \\ & v & \longmapsto Lv \end{array}$$

welcher die Bedingung der Linearität  $L(\sum_i \lambda_i |v_i\rangle) = \sum_i \lambda_i L(|v_i\rangle)$  erfüllt. Für eine Matrix

<sup>2</sup>Die Definitionen dieses Abschnittes würden auch für allgemeinere Vektorräume funktionieren. Das ist aber für diese Arbeit nicht nötig.

<sup>3</sup>In dieser Arbeit wird der Begriff *linearer Operator* synonym zum Begriff *lineare Abbildung* benutzt



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit Einträgen } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ schreiben wir kurz } A = (a_{ij}) \text{ und definieren } \dots$$

die *konjugierte* Matrix von  $A$ :  $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})$

die *transponierte* Matrix von  $A$ :  $A^T := (a_{ji})$

die *adjungierte* Matrix von  $A$ :  $A^\dagger := \bar{A}^T$

**Definition:** Ein *unitärer Operator*  $U$  ist ein linearer Operator, welcher die Bedingung  $U^\dagger U = I$ . Aufgrund dieser Bedingungen erhalten unitäre Operationen das Skalarprodukt der Vektoren:

$$(U|u\rangle, U|v\rangle) = \langle u|U^\dagger U|v\rangle = \langle u|v\rangle$$

Somit verändert sich auch das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst nicht, weshalb auch die Norm eines Vektors unter unitären Operatoren erhalten bleibt.

Zustände eines Quantensystems können als Vektoren eines unitären Vektorraumes  $V$  beschrieben werden. Zustandsänderungen werden durch unitäre Operationen beschrieben.

### 2.1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Eigenvektor  $|\varphi\rangle$  zu einem linearen Operator  $U$  ist ein Vektor, sodass  $U|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$  gilt, wobei  $\lambda$  als der dazugehörige Eigenwert bezeichnet wird und eine komplexe Zahl ist. Bei einem unitären Operator müssen alle Eigenwerte einen Betrag von 1 haben, denn sonst würde sich die Norm des Vektors verändern. Der grosse Vorteil von Eigenvektoren ist, dass sie sich bis auf einen skalaren Faktor nicht verändern, wenn der dazugehörige Operator auf sie angewendet wird.

### 2.1.6 Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt, geschrieben mit dem Zeichen  $\otimes$ , gibt uns die Möglichkeit alle Möglichkeiten Kombinationen der Einträge ihrer Operanden zu generieren. Sei  $A := (a_{ij})$  eine  $n_a \times m_a$  Matrix und  $B := (b_{ij})$  eine  $n_b \times m_b$  Matrix. Die daraus resultierende Matrix  $A \otimes B = C := (c_{ij})$  ist eine  $n_a n_b \times m_a m_b$  Matrix, die wie folgt generiert wird:

$$\begin{aligned}
C = A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a 1} & \cdots & a_{n_a m_a} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b 1} & \cdots & b_{n_b m_b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b 1} & \cdots & b_{n_b m_b} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1m_a} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b 1} & \cdots & b_{n_b m_b} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a 1} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b 1} & \cdots & b_{n_b m_b} \end{bmatrix} & \cdots & a_{n_a m_a} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b 1} & \cdots & b_{n_b m_b} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1m_b} & a_{12}b_{11} & \cdots & a_{1m_a}b_{1m_b} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2m_b} & a_{12}b_{21} & \cdots & a_{1m_a}b_{2m_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n_b 1} & a_{11}b_{n_b 2} & \cdots & a_{11}b_{n_b m_b} & a_{12}b_{n_b 1} & \cdots & a_{1m_a}b_{n_b m_b} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1m_b} & a_{22}b_{11} & \cdots & a_{2m_a}b_{1m_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a 1}b_{n_b 1} & a_{n_a 1}b_{n_b 2} & \cdots & a_{n_a 1}b_{n_b m_b} & a_{n_a 2}b_{n_b 1} & \cdots & a_{n_a m_a}b_{n_b m_b} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 2.2 Quantensysteme

Die Quantensysteme, die wir im Rahmen dieser Arbeit betrachten, sind rein mathematische Systeme, die nicht an eine fixe physikalische Realisierung gebunden sind. In der Tat gibt es verschiedene Möglichkeiten, solche Systeme physikalisch umzusetzen, wobei jede Variante eigene Vor- und Nachteile hat.

### 2.2.1 Qubits

Ein klassisches Bit hat genau zwei Zustände - 0 und 1 - und ist immer in genau einem dieser beiden Zustände. Kann man zwei solche Zustände in einem quantenmechanischen System gezielt herbeizuführen, treten auch die Gesetze der Quantenphysik in Kraft. Ein Beispiel einer physikalischen Realisierung, das bei der Vorstellung helfen kann, wäre ein Atom in einem Grundzustand und einem angeregten Zustand, wobei der Grundzustand einem klassischen 0 und der angeregte Zustand einem klassischen 1 entsprechen könnte. Gemäss den Gesetzen der Quantenphysik kann sich das Atom aber auch in einer Überlagerung der beiden Zustände befinden. Dies nennt man eine Superposition. Von diesem Beispiel aus können wir uns nun die genaue Definition eines Qubits betrachten:

**Definition:** Ein *Qubit* ist ein Quantensystem mit den beiden Basiszuständen  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ . Es kann alle Zustände  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  annehmen, sodass  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  gilt.

Ein Zustand des Qubits, welcher durch die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  definiert ist, entspricht einem normierten Vektor im Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Dass sich der Zustand eines quantenmechanischen System als Vektor beschreiben lässt, garantiert uns das erste Postulat der Quantenmechanik. Da diese Postulate den Rahmen dieser Arbeit übersteigt, verweise ich für eine genauere Betrachtung dieser Postulate auf [10], Kapitel 2.2

Wenn wir zu unserem Beispiel von vorhin zurückgehen, dann würde der Zustand  $|0\rangle$  dem Grundzustand und der Zustand  $|1\rangle$  dem angeregten Zustand entsprechen.

Qubits können wir messen<sup>5</sup>. Betrachten wir ein Qubit im Zustand  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass wir  $|0\rangle$  messen,  $|\alpha|^2$ , und die Wahrscheinlichkeit,  $|1\rangle$  zu messen, beträgt  $|\beta|^2$ . Die Bedingung, dass  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  gelten muss (dass der Vektor normiert sein muss), führt dazu, dass sich die Wahrscheinlichkeiten auf 1 summieren. Nach der Messung kollabiert das Quantensystem in den gemessenen Zustand. Messen wir also  $|1\rangle$ , befindet sich das Qubit nachher immer im Zustand  $|1\rangle$ , unabhängig davon, was  $\alpha$  und  $\beta$  vorher waren.

Ähnlich entspricht der Zustand eines Multiqubitsystems mit  $n$  Qubits einen normierten Vektor im Vektorraum  $\mathbb{C}^{2^n}$ . Die Basiszustände des Vektorraums entsprechen dabei den einzelnen Kombinationen der  $|0\rangle$ s und  $|1\rangle$ s der einzelnen Qubits. Zum Beispiel hat der Vektorraum zu einem Quantensystem mit 2 Qubits die vier Basiszustände  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  und  $|11\rangle$ . Der Bitstring von Länge  $n$  innerhalb dem Ket, entspricht dabei der Konfiguration der Qubits. Der Zustand  $|101\rangle$  in einem System mit 3 Qubits entspricht dem Zustand, in welchem das erste Qubit im Zustand  $|1\rangle$ , das zweite im Zustand  $|0\rangle$  und das dritte im Zustand  $|1\rangle$  ist. Anstelle des Bitstrings wird innerhalb des Kets auch oft eine Zahl verwendet, welche in der Binärdarstellung diesen Bitstring ergibt. Zum Beispiel entspricht  $|5\rangle$  dem Zustand  $|101\rangle$ .

Ein Zustand ist nun ein normierter Vektor im Vektorraum  $\mathbb{C}^{2^n}$ . Der Koeffizient des Basiszustands  $|j\rangle$  eines Vektors in diesem Vektorraum entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $j$  zu messen. Auch hier summieren sich die Wahrscheinlichkeiten wieder auf 1, da der Vektor normiert ist. Auch hier schreibt man die Zustände auch oft wieder als eine Linearkombination der Basiszustände:  $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \alpha_3|3\rangle$ .

Um den Zustand des Multiqubitsystems beschreiben zu können, wenn wir im Besitz der Zustände der einzelnen Qubits sind, können wir die Vektoren dieser Zustände mit Hilfe des Tensorprodukts zusammenmultiplizieren, und bekommen dann den Zustandsvektor für das Multiqubitsystem. Zudem kann man mit dem Tensorprodukt auch Operationen zusammenmultiplizieren: Wenn wir  $n$  Qubits haben und auf jedes Qubit eine Operation anwenden (dies kann auch die Identität sein, falls wir das Qubit unverändert lassen wollen). Wenn wir dann die Matrizen dieser Operationen multiplizieren, bekommen wir die Matrix, die der Operation entspricht, die alle unsere ausgewählten Operationen ausführt. Wichtig ist aber noch anzumerken, dass das Tensorprodukt nicht kommutativ ist, und die Reihenfolge der Faktoren somit wichtig ist.

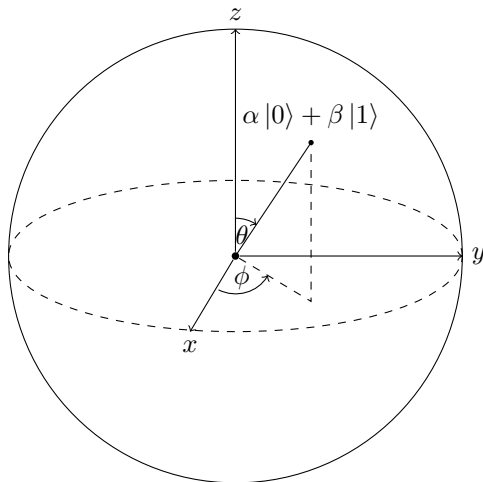
Falls wir nur einzelne Qubits messen, kollabiert das System in die restlichen, noch möglichen Zustände. Nehmen wir als Beispiel ein 2-Qubit-System im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$  und messen das erste Qubit. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir dieses Qubit im Zustand  $|1\rangle$  messen, liegt bei  $|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = \frac{1}{3}$ . Falls wir diesen Zustand messen, kollabiert unser Quantensystem sofort in den Zustand  $\frac{\alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}} = |11\rangle$ , wobei der Nenner dafür sorgt, dass der neue Quantenzustand wieder normiert ist. Die Wahrscheinlichkeit eines  $|0\rangle$  in der Messung des ersten Qubit hingegen liegt bei  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 = \frac{2}{3}$ . Der Zustand des Systems nach der Messung ist dann  $\frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}}|00\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|01\rangle$ .

---

<sup>5</sup>Auch die Messungen basieren auf einem Postulat der Quantenmechanik, nämlich auf dem dritten Postulat.

### 2.2.2 Die Blochkugel

Die Blochkugel dient der graphischen Darstellung des Zustands eines einzelnen Qubits. Zu diesem Zweck betrachten wir noch einmal ein einzelnes Qubit  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  mit  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Diese Bedingung führt dazu, dass wir den Zustand als  $e^{i\gamma} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)$  umschreiben können. Den Faktor  $e^{i\gamma}$  können wir nicht beobachten, da er auf beide Koeffizienten wirkt<sup>6</sup>. Deshalb ist der Zustand durch die beiden Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  definiert. Diese beiden Winkel kann man graphisch als einen Punkt auf einer Einheitskugel darstellen. Diese Darstellung wird die Bloch-Kugel genannt.



### 2.2.3 Operationen auf Qubits

Operationen, die man auf Qubits implementiert, sind lineare Operationen und lassen sich somit als Matrizen darstellen. Man kann den Vektor, welcher den Zustand beschreibt, mit der Matrix des Operators multiplizieren, um den Zustand nach der Operation zu erhalten. Dazu müssen die Operatoren die Norm des Quantenzustands bewahren, da die Zustände immer normiert sein müssen, und somit unitär sein. Dies hat die direkte Konsequenz (für eine unitäre Matrix  $U$  gilt  $UU^\dagger = I$ ), dass ein inverser Operator existieren muss und deshalb alle Berechnungen reversibel sein müssen. Beispielsweise kann der Modulo Operator nicht auf Quantencomputern implementiert werden, da man aus dem Ergebnis  $x \equiv 2 \pmod{3}$  die Eingabe  $x \in \{2, 5, 8, \dots\}$  nicht eindeutig wiederherstellen kann. Dies hat grosse Konsequenzen für die Berechnungen auf Quantencomputern.

Gleichzeitig stellt sich heraus, dass es verschiedene universelle Kombinationen von Operationen gibt, wobei universell in diesem Zusammenhang bedeutet, dass man jeden unitären Operator nur mit den ausgewählten Operatoren beliebig annähern kann. Die Konstruktion dazu kann man in [10], Seiten 188ff. nachlesen.

### 2.2.4 Wichtige Quantengatter

An dieser Stelle werden die wichtigsten Quantengatter eingeführt, die wir benötigen werden. Zuerst betrachten wir fünf grundlegende Gatter auf Qubits: die drei Pauli-Matrizen  $X, Y$  und  $Z$ ,

<sup>6</sup>Dies nennt man eine globale Phase: Dieser Faktor hat Betrag 1 und verändert deshalb die Wahrscheinlichkeiten nicht. Da er sich zudem auf alle Zustände auswirkt, kann man ihn bei den Quantenoperatoren wegen der Linearität ausklammern. Somit bleibt er immer über alle Qubits bestehen.

das  $H$ -Gatter und das  $CNOT$ -Gatter.

- Das  $X$ -Gatter ist das Qubit-Equivalent zum  $NOT$ -Gatter eines elektronischen Schaltkreises. In Matrixform sieht der Operator so aus:  $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Dieses Gatter dreht den Zustand des Qubits um  $\pi$  um die  $x$ -Achse in der Blochkugel.
- Das  $Y$ -Gatter wird durch die Matrix  $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  dargestellt. Dieses Gatter entspricht einer Rotation von  $\pi$  um die  $y$ -Achse in der Blochkugel.
- Das  $Z$ -Gatter, als Matrix  $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , dreht den Zustand um  $\pi$  um die  $z$ -Achse.
- Das Hadamard-Gatter, meistens einfach durch den Buchstaben  $H$  abgekürzt, ist der einfachste Weg, eine Superposition zu erzeugen. Mit der Matrix  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  kann man die beiden Zustände  $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  und  $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  erzeugen. Diese beiden Zustände kommen so häufig vor, dass man ihnen die Namen  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  und  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  gegeben hat.
- $CNOT$  steht als Abkürzung für "Controlled NOT". Dieses Gatter wirkt auf zwei Qubits und wendet ein  $NOT$  auf das zweite Qubit an, wenn das erste Qubit auf 1 ist. Als Matrix sieht die Operation so aus:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Gatter gehören zu den wichtigsten Gattern im Bereich der Quantencomputer. Wir werden auf unserem Weg jedoch weitere Gatter antreffen. Eines, von welchem wir noch mehr Gebrauch machen werden, möchte ich hier kurz definieren. Ich nenne es  $Rot(k)$  und in Matrix-Form sieht es so aus:  $Rot(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{2^k}} \end{bmatrix}$ . Dieses Gatter multipliziert den Koeffizienten von  $|1\rangle$  mit  $e^{\frac{2i\pi}{2^k}}$

und wir werden es bei der Quanten-Fouriertransformation<sup>7</sup> und dessen Anwendungen antreffen.

Abschliessend möchte ich noch ein Gatter auf zwei Qubits erwähnen, bekannt als das  $SWAP$ -Gatter. Dieses Gatter vertauscht die Zustände der beiden Qubits, indem es die Amplituden in derjenigen Zustände vertauscht, in welchen die beiden Qubits nicht gleich sind. Es wird durch die folgende Matrix beschrieben:

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir das erste Qubit als  $a$  und das zweite als  $b$  bezeichnen, sehen wir auf der rechten Seite, dass wir das  $SWAP(a, b)$  als Abfolge dreier  $CNOT$ -Gates ( $CNOT(a, b)$ , dann  $CNOT(b, a)$  und dann  $CNOT(a, b)$ ) programmieren können.

---

<sup>7</sup>Siehe Kapitel 3

### 2.2.5 Kontrollierte und adjungierte Operatoren

Wie wir bereits erfahren haben, müssen die Operatoren, welche man auf Quantencomputern umsetzen kann, unitär und somit reversibel sein. Dies setzt sofort die Existenz eines adjungierten Operatoren (auch inversen Operator genannt) zu einem Operator  $U$  voraus, welcher aus einem Zustand  $|\varphi\rangle$  den Zustand  $|\psi\rangle$  mit  $U|\psi\rangle = |\varphi\rangle$  macht. Ein Schaltkreis zu diesem adjungiertem Operator lässt generieren, indem man die Gatter des Schaltkreises für  $U$  rückwärts durchgeht, und immer den adjungierten Operator des jeweiligen Gatters nimmt. Viele Quantenprogrammiersprachen können deshalb auch die adjungierte Version eines Quantenoperators aus dem Programmcode des ursprünglichen Operators generieren.

Auch lassen sich kontrollierte Versionen eines Operators bilden. Die kontrollierte Version eines Operators nimmt zusätzlich zu den Qubits, auf welche die Operation ausgeführt werden soll, noch eine Menge an sogenannten Kontrollqubits. Diese Version der Operation wird nur dann ausgeführt, wenn die Kontrollqubits im Zustand  $|1\rangle$  sind. Als Beispiel nehmen wir eine Operation, welche die Bitrepräsentation zyklisch um ein Bit nach rechts verschiebt (also aus dem Zustand  $|01101\rangle$  den Zustand  $|10110\rangle$  macht). Haben wir nun den Zustand  $|0\rangle|11101\rangle + |1\rangle|10110\rangle + |0\rangle|01000\rangle$  haben (das erste Bit habe ich hier getrennt dargestellt, da es für diese Operation als Kontrollqubit verwenden will). Wenn wir nun die Operation mit dem ersten Bit als Kontrollqubit anwenden, so bekommen wir den Zustand  $|0\rangle|11101\rangle + |1\rangle|01011\rangle + |0\rangle|01000\rangle$ .

Ein Qubit darf aber nie gleichzeitig ein Kontrollqubit und eines jener Qubits, auf dem der Operator angewendet wird, sein. Um dies zu sehen betrachten wir das *CNOT*, welches die kontrollierte Variante des *X*-Operators ist. Wenn wir den Operator auf ein Qubit mit demselben Qubit als Kontrollqubit anwenden, so wird dieses Qubit nach der Anwendung immer im Zustand  $|0\rangle$  sein. Somit ist dieser Operator nicht mehr reversibel. Wenn diese Bedingung aber eingehalten wird, so ist dieser Operator reversibel, da man aus den Kontrollqubits, welche während der Operation nicht verändert werden, ablesen kann, ob die Operation durchgeführt wurde.

Auch diese Version wird von den meisten Quantenprogrammiersprachen automatisch generiert, da man den Schaltkreis der kontrollierten Version einfach herstellen kann, indem man vom Schaltkreis des ursprünglichen Operators bei jedem Gatter die kontrollierte Version nimmt.

Zudem lassen sich die beiden oben genannten Varianten auch kombinieren, um eine kontrollierte, adjungierte Version eines Operators zu generieren.

## Kapitel 3

# Arithmetische Operation auf Qubits ausführen - Die QInteger Library

### 3.1 Überblick

### 3.2 Zahlen in Qubits speichern - Der QInt-Typ

Da ich davon ausgehe, dass in absehbarer Zeit die Anzahl Qubits zwar wachsen, allerdings jedoch nicht so schnell ansteigen wird, dass man schon bald mehrere grössere Qubit-Einheiten speichern kann, habe ich mich entschieden, in meiner Implementation auf eine einheitliche Grösse zu verzichten und dafür auf eine variable Grösse zu setzen. Deshalb besteht der QInt-Typ aus einer klassischen Zahl, der Anzahl Qubits, und einem Array von Qubits, welcher die eigentliche Zahl speichert. Ich habe mich auch dazu entschieden, die Quantenzahl im Little-Endian Format zu speichern, da so neue Qubits einfach angehängt werden können, ohne den Wert der Zahl zu verändern.

```
// Definition of the QInt type with variable size. QInts
// are represented in little-endian.
newtype QInt = (Size : Int, Number : Qubit []);
```

### 3.3 Die Quanten-Fouriertransformation und die Fourier-Basis

Die Quanten-Fouriertransformation ist eine Transformation, die eine Quantenzahl von der uns bekannten binären Basis in die Fourierbasis transformiert. Die Fouriertransformation, die dabei auf den Qubits implementiert wird, ist mathematisch definiert als eine Transformation, die aus einem Vektor  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  den Vektor  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  macht, mit  $y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{2i\pi \frac{kj}{n}}$ . Da dies ein linearer Operator ist, genügt es, wenn wir uns die Wirkung des Operators auf die Basiszustände anschauen. Betrachten wir nun die Wirkung des Operators auf den Basiszustand

$|x\rangle$ . Wir erhalten:

$$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2i\pi \frac{xj}{2^n}} |j\rangle$$

Gleichzeitig lässt sich dieser Zustand faktorisieren, nämlich zu:

$$\begin{aligned} (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^{n-1}}} |1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^1}} |1\rangle) = \\ \bigotimes_{j=0}^{n-1} (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^{n-j}}} |1\rangle) \end{aligned}$$

Dies kann man durch ausmultiplizieren beweisen. Um die folgende Gleichung zu vereinfachen, sei hier  $b_k(j) = 1$ , falls das  $k$ -te Bit von  $j$  gesetzt ist, und  $b_k(j) = 0$ , falls nicht. Dazu sei  $B_j$  als das Set aller  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $b_k(j) = 1$ . Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^{n-j}}} |1\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( \prod_{k \in B_j} e^{2i\pi \frac{x}{2^{n-k}}} \right) |j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{x \cdot b_k(j)}{2^{n-k}} \right)} |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2i\pi \frac{x \sum_{k=0}^{n-1} (2^k \cdot b_k(j))}{2^n}} |j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2i\pi \frac{xj}{2^n}} |j\rangle \end{aligned}$$

Was bringt uns diese Faktorisierung? Als erstes stellen wir fest, dass die Bits unabhängig und nicht verschränkt sind. Zudem sehen wir, dass der Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi\theta} |1\rangle)$  in der Blochkugel einem Zeiger in der  $XY$ -Ebene, welcher um  $\theta$  um die  $Z$ -Achse gedreht ist, entspricht. Schauen wir uns die einzelnen Qubits an, entspricht das  $j$ -te Qubit einem Zeiger in der  $XY$ -Ebene, gedreht um  $\frac{x}{2^{n-j}}$  um die  $Z$ -Achse. Dies ist die sogenannte Fourier-Basis.

Die Fourierbasis hat verschiedene Vorteile. Zum Beispiel werden wir in Kapitel 4.3 sehen, dass wenn wir in einer Operation ein Qubit um  $\theta$  um die  $Z$ -Achse drehen, was der Multiplikation des Koeffizienten von  $|1\rangle$  mit dem Wert  $e^{2i\pi\theta}$  entspricht, wir nichts anderes tun, als den Wert der Qubits in der Fourierbasis zu verändern. Später können wir dann die inverse  $QFT$  anwenden, um den Wert  $\theta$  als Binärzahl auslesen zu können. Auch dass die Qubits unabhängig sind, ist ein grosser Vorteil, wie wir bei der Addition feststellen werden.

Schauen wir uns an, wie man die Transformation implementieren kann. Sie lässt sich mit  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen ohne zusätzliche Qubits implementieren. Wenn wir uns nun wieder der Faktorisierung zuwenden, stellen wir fest, dass das letzte Qubit in der binären Basis nur das erste Qubit in der Fourierbasis beeinflusst, da  $2^{n-1}$  in  $x$  im Term  $e^{2i\pi \frac{x}{2^a}}$  mit  $a \leq n-1$  nur ganze Rotationen im Einheitskreis hinzufügt, was den Wert nicht beeinflusst. Weiterhin beeinflusst das zweitletzte Qubit in der binären Basis nur die beiden ersten Qubits in der Fourierbasis etc. Kehren wir die Reihenfolge der Qubits der Fourierbasis um. Wir bekommen  $\bigotimes_{j=0}^{n-1} (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x}{2^{j+1}}} |1\rangle)$ . Dann beeinflusst jedes Qubit in der binären Basis nur das gleiche und alle nachfolgenden Qubits in der Fourierbasis. Nun können wir die Qubits von hinten nach vorne in die Fourierbasis transformieren und danach die Reihenfolge zurückkehren, was sich ganz einfach mit dem  $SWAP$ -Operator bewerkstelligen lässt.



Betrachten wir nun ein einzelnes Qubit  $j$ . Dabei sind alle Qubits mit Index grösser als  $j$  bereits in der Fourierbasis und alle mit kleinerem Index noch nicht. Zuerst wenden wir den  $H$ -Operator auf das Qubit an. Wir erhalten den Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ , falls  $b_j(x) = 0$  und  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ , falls  $b_j(x) = 1$ . Dies ist nichts anderes als  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{b_j x 2^j}{2^j+1}} |1\rangle)$ , was den Beitrag vom  $j$ -ten Qubit in der binären Basis an das  $j$ -te Qubit in der umgekehrten Fourierbasis ist. Nun müssen wir nur noch den Beitrag aller Qubits vor dem  $j$ -ten Qubit dazurechnen. Das  $l$ -te Qubit mit  $l < j$  soll  $e^{2i\pi \frac{b_l(x) 2^l}{2^j+1}}$  zum Koeffizienten beitragen. Das  $b_l(x)$  lässt sich so umsetzen, dass wir das  $l$ -te Qubit in der binären Basis als Kontroll-Qubit für die Operation nehmen, die  $e^{2i\pi \frac{2^l}{2^j+1}}$  zum Koeffizienten von  $|1\rangle$  dazurechnet. Dies ist nichts anderes als das  $Rot(k)$ -Gatter, mit  $k = (j+1) - l$ . Damit haben wir eine Implementation für die Quanten-Fouriertransformation, die  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen und keine zusätzlichen Qubits benötigt.

*// Implements the Quantum Fourier Transform*

```
internal operation PerformQFT(qn : QInt) : Unit is Adj+Ctl
{
    let n = qn::Size;
    for (i in n-1..-1..0)
    {
        H(qn::Number[i]);
        for (j in i-1..-1..0)
        {
            (Controlled RotQ)([qn::Number[j]],
                               (i - j + 1, qn::Number[i]));
        }
    }
    ReverseBits(qn);
}
```

### 3.4 Addition

Die wohl grundlegendste arithmetische Operation ist die Addition. Die Subtraktion kann als Addition ausgedrückt werden und auch die Multiplikation (und somit die Division) ist abhängig von der Addition. Deshalb ist sie die erste arithmetische Operation, die wir betrachten.

Wir wollen die Operation auf zwei QInts implementieren, welche zwei QInts im Zustand  $(|x\rangle, |y\rangle)$  in den Zustand  $(|x\rangle, |x+y\rangle)$  umwandelt. Die Implementation anderer Additionsmethoden (Addition einer klassischen Zahl zu einem QInt, Addition zweier QInts in ein drittes QInt) funktioniert analog. Zusätzlich kann man feststellen, dass die Subtraktion nichts anderes als die inverse Operation zur Addition ist, somit hat man zur Addition die Subtraktion mitimplementiert.

Für die Addition gibt es zwei verschiedene Techniken, die oft benutzt werden. Die eine benutzt zusätzliche Carry-Bits und erreicht so eine Gatterzahl in  $\mathcal{O}(n)$ , benötigt aber  $\mathcal{O}(n)$  zusätzliche Qubits, während die andere ohne zusätzliche Qubits auskommt, dafür aber  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen benötigt. Ich habe mich entschieden, die zweite Version in meiner QInteger-Library zu implementieren. Gründe dafür sind, dass in heutigen Systemen die Anzahl verfügbarer Qubits stark begrenzt ist und in Simulationen einzelne Qubits sehr viel zusätzliche Leistung benötigen,

während eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2)$  in diesem Fall weniger ausmacht. Sobald mehr Qubits zur Verfügung stehen, wird es lohnenswerter, auf die andere Version zu wechseln, denn da die Addition eine Operation auf einem sehr tiefen Level ist, kann die Zeit, welche sie benötigt, beträchtliche Auswirkungen auf die gesamte Laufzeit haben.

Schauen wir uns nun den in der QInteger-Library verwendeten Additionsalgorithmus an. Der Algorithmus basiert auf der Fourierbasis (und somit auf der Faktorisierung der Fouriertransformation). Bei der Addition in der binären Basis sind die einzelnen Bits voneinander abhängig. Deshalb werden sogenannte Carry-Bits verwendet, welche für jedes Bit abspeichern, ob wir beim nächsten Bit noch eine zusätzliche 1 addieren müssen. Dies ist bei der Fourierbasis nicht der Fall: Die Bits sind voneinander unabhängig. Das heisst, wir können die einzelnen Bits voneinander unabhängig modifizieren, ohne dabei auf die anderen Bits achten zu müssen. Dies ist der grosse Vorteil der Fourier-Basis, welcher uns erlaubt, auf zusätzliche Qubits zu verzichten. Betrachten wir nun noch einmal die Faktorisierung: Das  $j$ -te Qubit der Zahl  $y$  in der Fourierbasis ist im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{y}{2^{n-j}}} |1\rangle)$ . Wir wollen es aber in den Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{x+y}{2^{n-j}}} |1\rangle)$  bringen, denn wenn wir alle Qubits in den entsprechenden Zustand bringen könnten, könnten wir mit der inversen  $QFT$  den Zustand  $|x+y\rangle$  wiederherstellen. Nehmen wir wieder das aus der Fouriertransformation bereits bekannte Gatter  $Rot(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{2^k}} \end{bmatrix}$ . Mit dem Gatter können wir den Wert  $2i\pi \frac{1}{2^k}$  dem Exponenten von  $|1\rangle$  hinzufügen. Das heisst, wenn wir das Gatter auf ein Qubit im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{y}{2^{n-j}}} |1\rangle)$  anwenden, wird es in den Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{y+2^{n-j-k}}{2^{n-j}}} |1\rangle)$  versetzt. Wir können also mit Hilfe dieses Gatters Zweierpotenzen zum Qubit in der Fouriertransformation addieren. Wenn wir das Qubit im Zustand  $|x\rangle$  in der binären Basis belassen, können wir die Addition wie folgt mit  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen implementieren:

1. Wende  $QFT$  auf den zweiten Summanden im Zustand  $|y\rangle$  an. Das Register befindet sich nun im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} \left( |0\rangle + e^{2i\pi \frac{y}{2^{n-j}}} |1\rangle \right)$ .
2. Für jedes  $j$ -te Bit im zweiten Register, wende für jedes  $k$ -te Bit im ersten (binären) Register mit  $k < n - j$  ein kontrolliertes  $Rot(n - i - j)$  an. Das  $j$ -te Bit befindet sich nachher im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{y + \sum_{k=0}^{n-j-1} b_k(x) \cdot 2^{n-j-(n-j-k)}}{2^{n-j}}} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{y+x}{2^{n-j}}} |1\rangle)$$

Wobei alle Bits höher als  $2^{n-j-1}$  uns nicht interessieren, da sie alle Vielfache von  $2^{n-j}$  sind und somit nur ganze Umrundungen zur Rotation hinzufügen.

3. Die Qubits im zweiten Register befinden sich nun in folgendem Zustand:  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} \left( |0\rangle + e^{2i\pi \frac{x+y}{2^{n-j}}} |1\rangle \right)$ . Mit der inversen  $QFT$  kann man aus diesem Zustand den Zustand  $|x+y\rangle$  wiederherstellen.

### 3.5 Modulare Addition

Den uns bekannten Modulus-Operator kann man auf Qubits nicht implementieren, da er nicht reversibel ist ( $a$  und  $a+m$  haben dasselbe Resultat Modulo  $m$ ). Die modulare Addition ist jedoch reversibel, wenn beide Summanden kleiner als das Modulo sind, denn wir können die Informationen über die beiden Summanden benutzen. Wir haben wieder zwei Register in den Zuständen  $|x\rangle, |y\rangle$  und eine klassische Zahl  $m$  und möchten die Register in den Zustand  $|x\rangle, |(x+y)\%m\rangle$  setzen. Hier lässt sich das Modulo  $m$  durch einen QInt ersetzen (oder den ersten Summanden

durch eine klassische Zahl). Für den Shor-Algorithmus benötigen wir die Operation nur mit einem klassischen Modulo  $m$ , die Implementationen für QInt-Modulos folgen analog und sind auch in der QInt-Library enthalten.

Zuerst addieren wir  $|x\rangle$  zum Register  $|y\rangle$ , um das Register in den Zustand  $|x + y\rangle$  zu versetzen. Nun überprüfen wir, ob diese Summe grössergleich dem Modulo  $m$  ist.

Wie überprüfen wir, ob eine Quantenzahl grössergleich einer anderen Zahl ist? Konkret, ist  $|A\rangle$  grössergleich der Zahl  $B$ , wobei  $B$  auch einen QInt sein könnte? In der QInteger-Library ist die Funktion *GreaterOrEqual* für  $A \geq B$  als  $\neg$ *LessThan* implementiert. Hier unterscheiden sich die Implementationen für die Fälle, wenn  $B$  ein QInt oder eine klassische Zahl ist, sie machen jedoch das Gleiche. Wir schauen uns die Implementation für den Fall an, wenn  $B$  eine klassische Zahl ist. Wir wissen, dass  $A \geq B$  gilt (für  $A$  und  $B$  ganze Zahlen), falls  $A - B < 0$  oder  $A - B == 0$  gilt. Da nicht beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein können, können wir die Resultate der beiden Checks einfach auf das gleiche Qubit setzen. Ein QInt ist genau dann gleich 0, wenn alle seine Qubits auf 0 sind. Gleichzeitig, falls das Resultat der Subtraktion kleiner als 0 sein soll, gibt es einen Underflow, das heisst, die Zahl  $A - B$  wird zu  $2^n - (B - A)$  und somit das grösste Qubit auf 1 gesetzt. Das heisst, wir können einfach das grösste Qubit betrachten. Es kann aber passieren, dass  $A - B \geq 2^{n-1}$  gelten kann, deshalb verlängere ich in meiner Implementation das Register, welches  $A$  enthält, um 1.

```
// Checks if an Integer is less than a QInt

operation LessThanCQ(A : Int, B : QInt, res : Qubit) : Unit is Adj+Ctl
{
    using (an = Qubit())
    {
        // Extend the length of B by one to make sure that
        // the first Qubit is 0 if there is no overflow
        let b1 = GrowQIntBy(B, 1, [an]);

        within
        {
            // Subtract A from B
            (Adjoint AddCQ)(A, b1);
        }
        apply
        {
            // Initialize the res to 1
            X(res);
            // Result smaller than 0  $\rightarrow A !< B$ 
            CNOT(b1::Number[b1::Size - 1], res);
            // Result equals to zero  $\rightarrow A !< B$ 
            IsZeroQInt(b1, res);
        }
    }
}
```

Nun können wir messen, ob  $x + y \geq m$  gilt, und diese Information in einem zusätzlichen Qubit speichern. Falls  $x + y \geq m$  gilt, subtrahieren wir  $m$  von der Zahl und haben somit den Zustand  $|x + y - m\rangle$  im zweiten Register. Nun ist die Information, ob  $x + y \geq m$  gilt, noch in

einem Qubit gespeichert, welches wir zurücksetzen müssen. Hier machen wir die Beobachtung, dass  $x + y \geq m$  genau dann gilt, wenn das Resultat grössergleich dem Summanden  $x$  ist. Die Richtung  $res < x \rightarrow x + y \geq m$  ist nicht schwierig. Für die andere Richtung sehen wir, dass  $x + y - m \geq x$  genau dann gelten kann, falls  $y \geq m$  gilt, was aber nach der Annahme  $x, y < m$  nicht stimmen kann. Somit können wir mit diesem Vergleich die Information in unserem Aushilfsqubit wieder löschen.

### 3.6 Modulare Multiplikation

Mit Hilfe der modularen Addition können wir nun die modulare Multiplikation implementieren. Zuerst stellen wir fest, dass wir die modulare Multiplikation  $|x\rangle \rightarrow |(ax) \pmod{m}\rangle$  nur dann implementieren können, wenn  $\text{ggT}(a, m) = 1$  gilt, ansonsten wäre sie nicht reversibel.

Wir schauen uns die modulare Multiplikation auf QInts in zwei Schritten an.

Zuerst implementieren wir die Quantenoperation auf zwei Register, welche für gegebenes  $a$  und  $m$  folgende Operation bewirkt:

$$U'_{a,m} |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |(y + ax) \pmod{m}\rangle$$

Wir sehen, dass wenn wir  $x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 \dots$  in seine Zweierpotenzen aufteilen, dann können wir  $ax = x_0(2^0 a \pmod{m}) + x_1(2^1 a \pmod{m}) + \dots$  schreiben. Dieses  $+ x_0(\dots)$  ist nichts anders als Addition, kontrolliert durch das  $x_0$  Qubit. Dies heisst, wir können diese Operation relativ einfach durchführen:

Für jedes  $j$ , führe eine modulare Addition, kontrolliert durch das Qubit  $x_j$ , auf das Ausgaberegister mit dem Summanden  $2^j a \pmod{m}$  durch, den wir klassisch berechnen können.

Diese Unteroperation ruft den modularen Addierer  $\mathcal{O}(n)$  mal auf und jede dieser Additionen braucht  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen. Damit kommen wir auf  $\mathcal{O}(n^3)$  Gatteroperationen.

Mit Hilfe dieser Unteroperation können wir nun die Operation, welche

$$U_{a,m} |x\rangle = |(ax) \pmod{m}\rangle$$

bewirkt, implementieren:

1. Führe ein temporäres Register im Zustand  $|0\rangle$  ein und bringe es mit Hilfe der oberen Unteroperation in den Zustand  $|ax \pmod{m}\rangle$ .
2. Berechne klassisch das Inverse von  $a$  Modulo  $m$ . Dieses Inverse existiert, da  $a$  und  $m$  teilerfremd sind.
3. Wende die inverse Operation der oben definierten Unteroperation mit  $a^{-1}$  mit dem temporären Register als Eingaberegister und dem ersten Register als Ausgaberegister an. Dies ergibt den Zustand:

$$|x - a^{-1}(ax) \pmod{m}\rangle |ax \pmod{m}\rangle = |0\rangle |ax \pmod{m}\rangle$$

4. Wechsle den Wert der beiden Register mit Hilfe der Swap-Operation, wir bekommen den Zustand  $|ax \pmod{m}\rangle |0\rangle$ . Das temporäre Register im Zustand  $|0\rangle$  können wir wieder freigeben und das erste Register ist nun im Zustand  $|ax \pmod{m}\rangle$ .

Diese Multiplikation benötigt  $n$  extra Qubits für das temporäre Register. Sie ruft die Unteroperation 2  $\in \mathcal{O}(1)$  mal auf und benötigt somit  $\mathcal{O}(n^3)$  Gatteroperationen. Wir erinnern uns, dass man die Addition mit  $\mathcal{O}(n)$  Gatteroperationen und dafür  $n$  zusätzlichen Qubits implementieren könnte, was dazu führt, dass wir nur noch  $\mathcal{O}(n^2)$  Gatteroperationen, dafür aber  $2n$  extra Qubits benötigen würden.

# Kapitel 4

## Der Weg zu Shor

### 4.1 Überblick

In diesem Kapitel werden wir uns die notwendigen Konzepte und Ideen hinter dem quantenbasierten Teil des Shor-Algorithmus anschauen. Dabei beginnen wir beim simplen Konzept des “Phase Kickback“, schauen uns dann die darauf basierende “Phase Estimation“ an, bevor wir mit deren Hilfe die Ordnung einer Zahl finden. Zum Schluss werden wir uns den kompletten quantenbasierten Teil des Algorithmus zusammenfassend anschauen.

### 4.2 Phase-Kickback

Beginnen wir den Abschnitt mit einer Frage: Wenn wir eine kontrollierte Operation ausführen, sollte sich das Control-Qubit eigentlich nicht ändern, oder? In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass dies überraschenderweise doch so ist. Dafür schauen wir uns das CNOT-Gatter an. Was geschieht, wenn wir CNOT auf zwei Qubits im Zustand  $|+-\rangle$  anwenden, mit dem ersten Qubit als Control-Qubit? Zuerst haben wir  $|+-\rangle = |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle$ . Nachdem wir das CNOT anwenden, bekommen wir den Zustand  $|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle = |--\rangle$ . Überraschenderweise stellen wir fest, dass sich das Control-Qubit verändert hat, während das Ziel-Qubit gleich blieb. Was ist passiert? Betrachten wir das CNOT-Gatter genauer: Das CNOT-Gatter ist nichts anderes als eine kontrollierte Version des  $X$ -Gatters. Was geschieht, wenn wir das  $X$ -Gatter auf den  $|-\rangle$ -Zustand anwenden?  $X|-\rangle = -|0\rangle + |1\rangle = -|-\rangle = (-1) * |-\rangle$ . Hier können wir sehen, dass  $|-\rangle$  ein Eigenvektor des  $X$ -Gatters mit Eigenwert  $-1$  ist. Das heisst, der Zustand des Qubits ändert sich nicht, nur die betroffenen Koeffizienten werden mit dem Eigenwert multipliziert. Da aber in diesem Fall alle Koeffizienten mit diesem Wert (mit Betrag 1) multipliziert werden, können wir keinen Unterschied feststellen.

Wenn wir hingegen die Operation kontrolliert durchführen, wird diese Phase nur in den Zuständen sichtbar, in welchen die Operation durchgeführt wurde, sprich in den Zuständen, in denen das Control-Qubit im Zustand  $|1\rangle$  ist. Dies konnten wir zuvor beim CNOT-Gatter beobachten. Betrachten wir nun eine allgemeinere Operation  $U$  mit einem Eigenvektor  $|\psi\rangle$  und dem Eigenwert  $\lambda$ . Nehmen wir jetzt ein Kontrollqubit im Zustand  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , ein Qubit-Register im Zustand  $|\psi\rangle$  und führen ein kontrolliertes  $U$  auf das Register  $|\psi\rangle$  kontrolliert durch jenes Kontrollqubit durch:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|\psi\rangle \xrightarrow{\text{C-U}} \alpha|0\rangle|\psi\rangle + \beta|1\rangle * U|\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \lambda\beta|1\rangle)|\psi\rangle$$

Das Ziel-Qubit verändert sich nicht, es ist ja ein Eigenvektor, stattdessen sehen wir, dass der Eigenwert zurück in die Phase des Kontroll-Qubit “gekickt” wird, daher der Name Phase Kickback. Im nächsten Abschnitt werden wir diesen Effekt anwenden, um den Eigenwert eines Operators abzuschätzen.

### 4.3 Phase Estimation

Verschiedene Quanten-Algorithmen basieren darauf, den Eigenwert eines Operators zu einem Eigenvektor abzuschätzen. Dazu benutzen wir Phase-Kickbacks, um den Eigenwert in ein Quantenregister in der Fourier-Basis zu schreiben, welches wir dann mit der inversen Quanten-Fouriertransformation in die binäre Basis zurückrechnen. Dazu können wir die Anzahl Qubits variieren, um die Präzision der Approximation festlegen. Genauer gibt der Algorithmus zum Eigenwert  $\lambda = e^{2i\pi\theta}$  die Zahl  $2^n\theta$  zurück, wobei  $n$  die Anzahl Qubits des Zählerregisters ist, die für bessere Präzision erhöht werden kann.

Um zu verstehen, wie dieser Algorithmus funktioniert, erinnern wir uns zuerst daran, wie eine Zahl in der Fourierbasis aussieht. Dafür benutzen wir die Bloch-Kugel. Wir erinnern uns, dass für die Zahl  $x$  in der Fourierbasis mit  $n$  Qubits das  $k$ -te Qubit um  $\frac{2^k x}{2^n}$  um die Z-Achse gedreht wird. Das heisst, es befindet sich im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{2^k x}{2^n}} |1\rangle)$ . Wir machen jetzt die Beobachtung, dass wir mit Hilfe von Phase-Kickback das gesuchte  $\theta$  in der Fourierbasis in die Kontrollqubits schreiben können, da der Phase-Kickback nichts anderes macht, als das Kontrollqubit auf die selbe Art und Weise zu rotieren. Schauen wir uns mal an, was passiert, wenn wir  $2^k$  mal das kontrollierte  $U$  anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |\psi\rangle &\xrightarrow{(C-U)^{2^k}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\psi\rangle + |1\rangle * U^{2^k} |\psi\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (e^{2i\pi\theta})^{2^k} |1\rangle) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi 2^k \theta} |1\rangle) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi \frac{2^k (2^n \theta)}{2^n}} |1\rangle) |\psi\rangle \end{aligned}$$

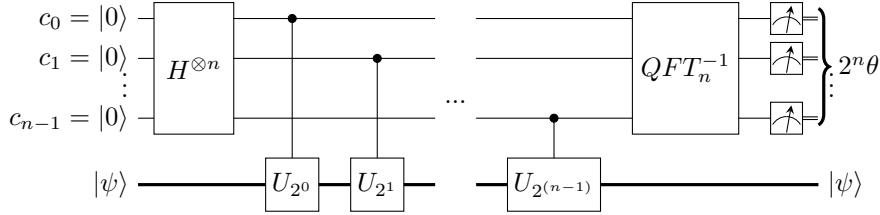
Dies entspricht genau dem  $k$ -ten Qubit der Repräsentation von  $2^n\theta$  in der Fourierbasis. Das heisst, wenn wir für jedes Qubit im Zählerregister mehrmals ein kontrolliertes  $U$  anwenden, können wir einen Zustand kreieren, welcher der Zahl  $2^n\theta$  in der Fourierbasis entspricht. Wenden wir anschliessend die inverse Fouriertransformation an, können wir die Zahl  $2^n\theta$  im Zählerregister ablesen. Falls  $2^n\theta$  keine ganze Zahl ist, erhalten wir im Zählerregister eine Superposition, wobei eine Zahl wahrscheinlicher ist, je näher sie am echten Wert liegt.

Um die Phase abzuschätzen, müssen wir also den Operator mehrmals hintereinander anwenden, zuerst nur einmal, dann zweimal, im  $i$ -ten Mal  $2^i$  mal. Dies führt dazu, dass wir die Operation  $2^n$  mal anwenden müssen. Allerdings ist es oft möglich, dass wir die Operation  $U^{2^m}$  für einen beliebigen Parameter  $m$  implementieren können. Wenn dies möglich ist, brauchen wir nur  $n$  Anwendungen jener Operation.

#### Algorithmus

1. Initialisiere zwei Quantenregister, das Zählerregister und das Eigenvektor-Register, und setze das Eigenvektor-Register auf den gewünschten Eigenvektor  $|\psi\rangle$ .

2. Wende  $H^{\otimes n}$  auf das Zähler-Register an, um es auf  $|+\rangle^{\otimes n}$  zu setzen.
3. Für jedes  $i$ -te Bit im Zählerregister, wende ein kontrolliertes  $U^{2^i}$  mit  $c_i$  als Kontroll-Qubit an.
4. Wende die inverse Quantenfouriertransformation auf das Zählerregister an, um die Approximation in die binäre Basis umzurechnen.
5. Miss das Zählerregister, um die Abschätzung abzulesen.

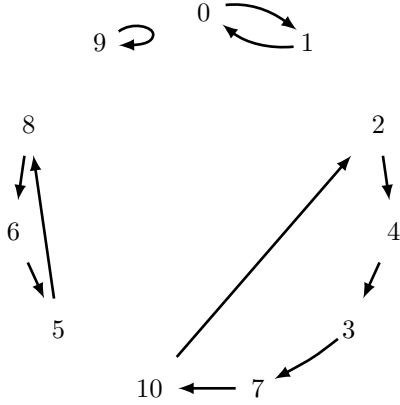


## 4.4 Period Finding

Gegeben sei eine Funktion  $f : S \rightarrow S$  mit  $S \subset \mathbb{Z}$ , welche sich auf einem Quantencomputer implementieren lässt, und ein Wert  $x \in S$ . Wir versuchen nun, die kleinste Zahl  $r \in \mathbb{N}$  zu berechnen, sodass  $f^r(x) = x$  gilt.

Unsere Funktion soll auf einem Quantencomputer implementierbar sein. Daraus folgt bereits, dass  $f$  bijektiv ist: Falls es ein  $a$  und ein  $b$  mit  $f(a) = f(b) = c$  gibt, lässt sich  $f^{-1}(c)$  nicht berechnen, was im Widerspruch zur Reversibilität steht. Daraus folgt, dass  $f$  injektiv ist. Aus diesem Grund müssen  $|S|$  verschiedene Funktionswerte von  $f$  existieren, woraus die Surjektivität folgt. Somit ist  $f$  bijektiv und man kann  $f$  als Permutation der Elemente von  $S$  interpretieren. Diese Permutation kann als Vereinigung disjunkter Zyklen zerlegen. Dies bedeutet, dass man  $S$  in verschiedene Teilmengen  $S_0, S_1, \dots$  aufteilen kann, sodass jede dieser Teilmengen einen einzelnen Zyklus der Permutation bildet. Sei nun  $x \in S_i$ . Da  $S_i$  einen Zyklus bildet, gilt  $f^{|S_i|}(x) = x$ . Gleichzeitig kann kein  $r \in \mathbb{N}$  mit  $r < |S_i|$  existieren, sodass  $f^r(x) = x$  gilt, denn sonst hätte unser Zyklus nur  $r < |S_i|$  Elemente. Wir wollen nun also für ein  $x \in S_i$  die Grösse  $|S_i|$  finden.

Als Beispiel nehmen wir  $g : A \rightarrow A$  mit  $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ,  $g(x) = -x^3 + 1$ . Man kann zeigen, dass  $x^3 \pmod{p}$  bijektiv ist, falls  $p \equiv 2 \pmod{3}$ . Somit ist auch  $f$  bijektiv. Wenn wir den Graphen anschauen, sehen wir die einzelnen Zyklen:  $A_0 = \{0, 1\}$ ,  $A_1 = \{2, 3, 4, 7, 10\}$ ,  $A_2 = \{5, 6, 8\}$  und  $A_3 = \{9\}$ . Wir sehen nun, dass  $f^1(9) = 9$ ,  $f^3(8) = 8$ ,  $f^5(2) = 2$  etc.



Die Frage ist nun, wie können wir effizient die Grösse der Teilmenge finden, in der  $x$  sich befindet. Dafür müssen wir den Operator  $f$  genauer betrachten. Was passiert, wenn wir dem Operator eine Superposition der Zahlen in  $S_i$  übergeben? Seien  $r = |S_i|$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  die Zahlen in  $S_i$ , sodass  $f(x_j) = x_{(j+1) \pmod r}$  und  $U_f$  die Quantenoperation, die  $f$  implementiert. Schauen wir mal, was passiert, wenn wir  $U_f$  auf den Zustand  $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_j\rangle$  anwenden. Wir bekommen:

$$U_f\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_j\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |f(x_j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_{(j+1) \pmod r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_j\rangle$$

Daraus schliessen wir, dass  $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_j\rangle$  ein Eigenvektor von  $U_f$  mit Eigenwert 1 ist. Dieser Eigenwert ist nicht wirklich interessant. Wir können ihn aber interessanter machen, indem wir den einzelnen Summanden eine Phase mitgeben. Dazu konstruieren wir die Superposition  $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)$  für ein  $k < r$ . Was passiert, wenn wir  $U_f$  darauf anwenden?

$$\begin{aligned} U_f\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)\right) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_{(j+1) \pmod r}\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{k(j-1)}{r}} |x_j\rangle) = e^{2i\pi \frac{k}{r}} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)\right) \end{aligned}$$

Auch hier haben wir wieder einen Eigenvektor, aber mit einem interessanteren Eigenwert, nämlich  $e^{2i\pi \frac{k}{r}}$ , denn  $r$  ist im Eigenwert enthalten. Wir machen auch die Beobachtung, dass unser Eigenvektor von vorher ( $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |x_j\rangle$ ) auch von der Form ist, die wir gerade analysiert haben, einfach mit  $k = 0$ . Falls wir jetzt irgendwie einen Zustand von der Form  $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)$  erzeugen können, könnten wir mit Hilfe der Phase Estimation den Quotienten  $\frac{k}{r}$  abschätzen. Die Frage ist, wie können wir solch einen Zustand generieren? Zuerst sagen wir,  $|\psi_k\rangle$  sei  $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)$ . Dann stellen wir fest, dass  $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, \dots, |\psi_{r-1}\rangle$  linear unabhängig und damit eine Basis des Untervektorraums über die Zahlen  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  sind. Was passiert nun, wenn wir alle diese Vektoren mit gleichem Gewicht aufsummieren?

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sum_{j=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)\right) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle) = |x_0\rangle$$



Eine andere Art, dieses überraschende Resultat zu sehen, ist, dass man die Summe  $\sum_{k=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle)$  für  $j = 0$  betrachtet. Da  $j = 0$  gilt, gilt  $e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} = e^0 = 1$  und somit  $\sum_{k=0}^{r-1} (e^{-2i\pi \frac{kj}{r}} |x_j\rangle) = r |x_j\rangle$ . Da  $\frac{1}{r}(r |x_j\rangle)$  bereits einen Betrag von 1 hat, kann kein anderer Zustand mit positivem Betrag existieren, da die Beträge sich sonst zu etwas Grösserem als 1 aufsummieren würden.

Somit ist  $x_0$  einfach eine Superposition jener Eigenvektoren. Da wir der Periodenabschätzungsfunktion einen Startwert mitgeben, sei jener Startwert ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_0$ , haben wir eine Superposition dieser Eigenvektoren. Schätzen wir somit den Eigenwert dieser Superposition ab, kollabiert sie in eine der Eigenvektoren und wir bekommen einen Quotienten  $\frac{k}{r}$  zurück, wobei jedes  $k$  die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Genauer bekommen wir die Zahl  $2^n \frac{k}{r}$  zurück, wobei  $n$  die Präzision ist, die wir dem Phase Estimation-Algorithmus mitgeben. Wir können mit Hilfe von Kettenbrüchen den Quotienten  $\frac{k}{r}$  vom Quotienten  $\frac{2^n \frac{k}{r}}{2^n}$  abschätzen. Sobald wir den Bruch  $\frac{k}{r}$  haben, wissen wir  $r$ , welches die Zahl ist, die unsere Funktion zurückgeben soll. Nun kann es sein, dass  $ggT(k, r) = g \neq 1$  ist, somit der Bruch mit  $g$  gekürzt wird und wir dann als Resultat  $\frac{r}{g}$  bekommen. Wenn wir die Prozedur aber  $2\log(N)$  mal wiederholen, bekommen wir mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die korrekte Periode. Den Beweis dazu kann man in [10], Seiten 229ff., nachlesen.

## 4.5 Die Ordnung von Zahlen bestimmen

Der Algorithmus von Shor ist deshalb so schnell, da mit Hilfe des quantenbasierten Teils des Algorithmus die Ordnung einer Zahl effizient bestimmt werden kann. Die Ordnung einer Zahl  $a$  Modulo einer Zahl  $n$ , geschrieben als  $ord_n(a)$ , ist die kleinste positive Zahl  $r$ , sodass  $a^r \equiv 1 \pmod{n}$  gilt. Dabei muss  $gcd(a, n) = 1$  gelten, denn sonst kann dieses  $r$  nicht existieren. Wir rechnen nun in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Da  $ord_n(a)$  nichts anderes ist als die Periode der Funktion  $g(x) = a^x$ , können wir die Funktion  $f(x) = ax$  implementieren, sodass  $f_s(x) = f^x(s) = sa^x$  gilt. Mit  $s = 1$  bekommen wir dann  $f_1(x) = f^x(1) = a^x$ . Sei  $U$  die Quantenoperation, die  $f_1$  implementiert, dafür können wir einfach die Multiplikation aus der QInteger-Library verwenden. Gleichzeitig können wir auch  $U^{2^i}$  effizient implementieren:  $U^{2^i}$  ist nichts anderes als die Operation zu  $f^{2^i}$ . Da  $f^{2^i}(x) = a^{2^i} x$ , können wir ganz einfach  $a^{2^i}$  klassisch berechnen und dann wieder die gewöhnliche Multiplikation aus der QInteger-Library verwenden. Wir können nun den Algorithmus aus dem vorherigen Kapitel verwenden, um die Periode der Funktion  $f_1(x) = a^x$  abzuschätzen. Wir brauchen dafür nur noch eine Funktion, die  $f(x) = a^x$  klassisch berechnet, um das Resultat überprüfen zu können, dafür kann man direkt FastPowMod aus der QInteger-Library verwenden. Dies führt dazu, dass der Code dieser Funktion nur sehr kurz ist.

## 4.6 Das Ziel - Der Shor-Algorithmus

Wie erlaubt uns dies nun, Zahlen zu faktorisieren? Sei  $n$  die zu faktorisierende Zahl. Zuerst überprüfen wir, ob die Zahl durch 2 teilbar oder eine Primpotenz ist, und finden diese Faktoren entsprechend. Nun nehmen wir ein zufälliges  $1 < a < n$ . Falls  $g = ggT(a, n) \neq 1$ , haben wir bereits einen Teiler gefunden, nämlich  $g$ . Sonst sind  $a$  und  $n$  teilerfremd. Danach suchen wir die Ordnung von  $a$  modulo  $n$ . Falls diese Ordnung ungerade ist, beginnen wir nochmals von vorne, sonst ist sie gerade. Sei diese Ordnung  $r$ . Mit  $r$  können wir nun mit gewisser Wahrscheinlichkeit einen Teiler finden. Falls  $a^{\frac{r}{2}} \not\equiv -1 \pmod{n}$  gilt, haben wir eine Wurzel von 1  $\pmod{n}$  gefunden, sonst müssen wir es noch einmal versuchen. Da  $r$  die Ordnung von  $a$  ist, muss  $a^{\frac{r}{2}} \not\equiv 1 \pmod{n}$  gelten. Nun gilt:  $n | (a^{\frac{r}{2}} + 1)(a^{\frac{r}{2}} - 1)$ , aber  $n \nmid a^{\frac{r}{2}} + 1$  und  $n \nmid a^{\frac{r}{2}} - 1$ . Wir haben zwei Zahlen  $b$  und  $c$ , sodass  $n | bc$ , aber  $n \nmid b$  und  $n \nmid c$ . Sei  $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots$ . Schreibe  $b = s_b p_0^{\beta_0} p_1^{\beta_1} \dots$  und

$b = s_c p_0^{\gamma_0} p_1^{\gamma_1} \dots$ . Wir wissen nun, dass  $\beta_i + \gamma_i \geq \alpha_i$  gelten muss, da sonst  $n|bc$  nicht erfüllt wäre. Gleichzeitig müssen ein  $j_b$  und ein  $j_c$  existieren, sodass  $\beta_{j_b} > 0$  und  $\gamma_{j_c} > 0$  stimmt. Nehme an, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\gamma_i = 0$  für alle  $i$  gelte. Dann müsste  $\beta_i \geq \alpha_i$  für alle  $i$  gelten und  $n | b$  teilen, was ein Widerspruch zur Annahme  $n \nmid b$  wäre. Somit beinhalten beide Faktoren  $b$  und  $c$  Teiler von  $n$ , welche mit dem einfachen  $ggT$ -Algorithmus extrahiert werden können. Somit kennen wir nun den ganzen Algorithmus, um einen Teiler von  $n$  zu finden.

1. Falls  $n$  durch zwei teilbar ist, gib 2 zurück und terminiere.
2. Falls  $n = p^a$  eine Primpotenz ist, gib die Primzahl  $p$  zurück und terminiere.
3. Bestimme eine zufällige Zahl  $1 < a < n - 1$ .
4. Finde  $g = ggT(a, n)$ . Falls  $g \neq 1$  ist, gib  $g$  zurück und terminiere.
5. Bestimme die Ordnung von  $a$  modulo  $n$  mit Hilfe des Quantenteils des Algorithmus:
  - (a) Schätze die Phase des Operators  $U_f$  ab, der  $f(x) = ax$  implementiert mit einer Präzision von  $m = 2 \log_2(n)$  ab. Benutze dazu den in Kapitel 4.3 vorgestellten Algorithmus. Sei das Resultat  $2^m \lambda$ .
  - (b) Schätze den Quotienten  $\frac{k}{r}$  von  $\frac{2^m \lambda}{2^m}$  ab. Falls  $r$  nicht die gesuchte Periode ist, gehe zurück zu (a), sonst gib die Periode  $r$  zurück.
6. Falls  $r$  ungerade ist, gehe zurück zu 2. Sonst berechne  $a^{r/2} \pmod{n}$ . Falls dies kongruent zu  $-1 \pmod{n}$  ist, gehe zurück zu 2.
7. Berechne  $b = (a^{\frac{r}{2}} + 1)$ . Gib  $ggT(b, n)$  zurück und terminiere.

# Kapitel 5

## Ausblick

### 5.1 Man kann Zahlen effizient faktorisieren - Was nun?

Wir haben nun gesehen, dass man Zahlen mit Hilfe von Quantencomputern effizient faktorisieren kann. Einerseits ist dies eine grosse Errungenschaft: Shors Algorithmus demonstriert uns, wie man mit Quantencomputern exponentielle Verschnellerungen erreichen kann. Auf der anderen Seite birgt diese Errungenschaft auch Gefahren. Zum Beispiel können Verschlüsselungsverfahren geknackt werden, wenn man Zahlen faktorisieren kann. Ich möchte hier kurz vorzeigen, wie man das RSA-Verschlüsselungsverfahren knacken kann, wenn man Zahlen effizient faktorisieren kann. Zu einer kurzen Beschreibung verweise ich auf [3] oder für die originale Arbeit auf [12].

Sei  $n = pq$  der Modulus der Verschlüsselung und  $e$  der öffentliche Schlüssel. Da wir nun  $n = pq$  faktorisieren können, können wir  $\phi(n) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p-1)(q-1)$  berechnen. Damit können wir den privaten Schlüssel  $d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)}$  berechnen, denn wir wissen, dass  $m^{e \cdot d} \equiv m^{e \cdot e^{-1} \pmod{\phi(n)}} \equiv m^1 \equiv m \pmod{n}$  gilt, wobei die letzte Äquivalenz wegen des Satzes von Euler-Fermat gilt.

Da nun Verschlüsselungen, die auf der Schwierigkeit der Faktorisierung beruhen, geknackt werden können, steht das Forschungsgebiet der Kryptographie vor neuen Herausforderungen. Das neue Gebiet, welches sich mit der Kryptographie im Zeitalter der Quantencomputer befasst, nennt sich Post-Quantum-Kryptographie.

### 5.2 Quantencomputer - Wie bald?

Wie bereits angesprochen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, Quantencomputer physikalisch zu realisieren. Technik-Firmen und Forschungsinstitute versuchen schon länger, Quantencomputer zu bauen. Bereits im Jahr 1998 gelang es zwei Forschern aus Oxford, einen Quantenalgorithmus für Deutschs Problem [8], und drei amerikanischen Forschern, Grovers Algorithmus experimentell zu realisieren [4]. Bereits im Jahr 2001 folgte darauf die erste experimentelle Realisation des Shor-Algorithmus [13], mit welcher die Zahl 15 faktorisiert werden konnte.

Über die Jahre entwickelten sich Quantencomputer immer weiter. Zum Zeitpunkt dieser Arbeit haben Tech-Firmen wie Google, IBM, Intel etc. Quantenprozessoren mit bis zu 72 Qubits (Googles Bristlecone [9]). Im Jahr 2019 legte Google einen Artikel [1] vor, laut welchem sie die Quantenüberlegenheit erreicht hätten. Dies bedeutet, dass sie auf einem Quantencomputer etwas effizient berechnet hätten, was auf einem klassischen Computer nicht effizient berechenbar wäre. Dies löste prompt einen Disput aus und die IBM zweifelte in einem Blog die Quantenüberlegenheit

an [11]. Während im Bericht von Google behauptet wurde, ein klassischer Computer würde 10000 Jahre benötigen, wurde in IBMs Blog behauptet, dass ein klassischer Computer dies in 2.5 Tage tun könne. Der Artikel von Google blieb unpubliziert. Trotzdem ist es meiner Meinung nach beeindruckend, dass Googles Quantencomputer für diese Aufgabe nur etwa 200 Sekunden benötigt, während ein Supercomputer 2.5 Tage benötigt.

Die IBM selbst jedoch hat auch grosse Pläne. Im September 2020 hat sie in ihrer Quantum Roadmap [7] angekündigt, dass sie bis im Jahr 2023 einen Quantencomputer mit 1121 Qubits bauen und somit die Qubit-Zahlen sprengen möchte.

Wenn die IBM diesen Plan durchziehen kann und Google sowie die anderen Tech-Firmen auch in naher Zukunft so grosse Quantencomputer bauen, denke ich, dass die Zeit, in der quantenbasierte Supercomputer schwierige Berechnungen übernehmen werden, nicht mehr weit entfernt ist.

## Kapitel 6

# Nachwort

Ich höre immer wieder die Frage, ob Quantencomputer die Computer der Zukunft sind. Ich denke, dass Quantencomputer in Zukunft sehr wichtig werden. Da sie auf anderen physikalischen Vorgängen beruhen als normale Computer, kann man mit ihnen weitaus schwierigere Dinge berechnen als mit klassischen Computern. Zudem ist das Gebiet der Quantencomputer noch sehr neu, deshalb denke ich, dass wir noch nicht das ganze Potenzial von Quantencomputern kennen.

Quantencomputer sind ein aktuelles Thema. Ich lese immer wieder Zeitungs- und Journalartikel über Fortschritte in diesem Gebiet.

Dieses Gebiet weckte so mein Interesse, jedoch verstand ich anfangs nichts davon und ich brauchte eine gewisse Zeit, bis ich die Grundlagen auch nur ansatzweise verstand. Aber das Gebiet faszinierte mich sehr und ich war motiviert, weiterzufahren. Zu sehen, wenn etwas funktionierte, erfreute mich jedes Mal von Neuem.

Ich habe durch diese Arbeit sehr viel gelernt und es war die Mühe wert, in dieses komplexe Thema einzutauchen.

## Kapitel 7

# Anhang

### 7.1 Mathematische Symbole

### 7.2 Literatur

# Literatur

- [1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lindmark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandrà, J. R. McClean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Trevithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven und J. M. Martinis, “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor,” *Nature*, Jg. 574, Nr. 7779, S. 505–510, Okt. 2019, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/s41586-019-1666-5. Adresse: <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [2] A. Asfaw, L. Bello, Y. Ben-Haim, S. Bravyi, N. Bronn, L. Capelluto, A. C. Vazquez, J. Ceroni, R. Chen, A. Frisch, J. Gambetta, S. Garion, L. Gil, S. D. L. P. Gonzalez, F. Harkins, T. Imamichi, D. McKay, A. Mezzacapo, Z. Mineev, R. Movassagh, G. Nannicini, P. Nation, A. Phan, M. Pistoia, A. Rattew, J. Schaefer, J. Shabani, J. Smolin, K. Temme, M. Tod, S. Wood und J. Wootton. (2020). “Learn Quantum Computation Using Qiskit,” Adresse: <http://community.qiskit.org/textbook>.
- [3] S. Asjad, “The RSA Algorithm,” Dez. 2019.
- [4] I. L. Chuang, N. Gershenfeld und M. Kubinec, “Experimental Implementation of Fast Quantum Searching,” *Phys. Rev. Lett.*, Jg. 80, S. 3408–3411, 15 Apr. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.3408. Adresse: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.3408>.
- [5] T. G. Draper, “Addition on a Quantum Computer,” Sep. 1998. Adresse: <https://cds.cern.ch/record/450434/files/0008033.pdf>.
- [6] G. Fischer, *Lineare Algebra*, 18 A. Springer Spektrum, 2013, ISBN: 978-3-658-03944-8.
- [7] J. Gambetta, *IBM’s Roadmap For Scaling Quantum Technology*, Sep. 2020. Adresse: <https://www.ibm.com/blogs/research/2020/09/ibm-quantum-roadmap/> (besucht am 28.10.2020).
- [8] J. A. Jones und M. Mosca, “Implementation of a quantum algorithm on a nuclear magnetic resonance quantum computer,” *The Journal of Chemical Physics*, Jg. 109, Nr. 5, S. 1648–1653, Aug. 1998, ISSN: 1089-7690. DOI: 10.1063/1.476739. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1063/1.476739>.

- [9] J. Kelly, *A Preview of Bristlecone, Google's New Quantum Processor*, März 2018. Adresse: <https://ai.googleblog.com/2018/03/a-preview-of-bristlecone-googles-new.html> (besucht am 28.10.2020).
- [10] M. A. Nielsen und I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10. Aufl. Cambridge University Press, 2010, ISBN: 978-1-107-00217-3.
- [11] E. Pednault, J. Gunnels, D. Maslov und J. Gambetta. (Okt. 2019). "On "Quantum Supremacy"," Adresse: <https://www.ibm.com/blogs/research/2019/10/on-quantum-supremacy/> (besucht am 25.10.2020).
- [12] R. L. Rivest, A. Shamir und L. Adleman, "A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems," *Commun. ACM*, Jg. 21, Nr. 2, S. 120–126, Feb. 1978, ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/359340.359342. Adresse: <https://doi.org/10.1145/359340.359342>.
- [13] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood und I. L. Chuang, "Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance," *Nature*, Jg. 414, Nr. 6866, S. 883–887, Dez. 2001, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/414883a. Adresse: <https://doi.org/10.1038/414883a>.
- [14] V. Vedral, A. Barenco und A. Ekert, "Quantum networks for elementary arithmetic operations," *Physical Review A*, Jg. 54, Nr. 1, S. 147–153, Juli 1996, ISSN: 1094-1622. DOI: 10.1103/physreva.54.147. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.54.147>.

### 7.3 Redlichkeitserklärung