# 通信网中节点重要性的评价方法

陈勇，胡爱群，胡啸
（东南大学 无线电工程系，江苏 南京 210096）

**摘 要**：提出了一种对通信网中节点重要性进行评价的方法，并给出了简洁的归一化解析表达式。通过比较生成树的数目，可以判断图中任意数目的两组节点的相对重要性。从图中去掉节点以及相关联的链路后，所得到的图对应的生成树数目越少，则表明该组节点越重要。实验结果表明，该方法计算简单，更为精确地反映基于网络拓扑的节点重要性。

**关键词**：通信网；可靠性；节点；生成树

**中图分类号**：TN915.02　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-436X(2004)08-0129-06

# Evaluation method for node importance in communication networks



CHEN Yong, HU Ai-qun, HU Xiao
(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract**: An evaluation method for node importance in communication networks is proposed, the concise generalized expressions are given. The relative importance of two groups of nodes in the graph can be compared with respect to the number of spanning trees. The most vital nodes are those whose removal with their incident links most drastically decreases the number of spanning trees. Experimental results show that the method is simple and can reflect node importance determined by the network topology more precisely.

**Key words**: communication networks; reliability; node; spanning tree

## 1 引言

在通信网的设计和维护过程中，网络可靠性是一项重要的性能指标，这一课题已逐步引起人们的重视[1~8]。目前采用的网络模型主要包括了通信链路[3~6]的可靠性，很少涉及到节点的可靠性。

文献[2]提出了一种网络可靠性评估的简便方法，是一种很好的测度，其中网络可靠性的分量可以用来评价节点重要性，但它省略了大量迂回路由对可靠性影响的细节，只考虑迂回路由影响的效果，从而影响了评价的精度。文献[7，8]基于源点到汇点最短路径来评价节点

**收稿日期**：2003-01-14；**修订日期**：2004-03-23
**基金项目**：国家高技术研究与发展计划基金资助项目（2002AA143010, 2003AA143040）；教育部优秀青年教师基金资助项目

重要性，定义最重要的节点为去掉该节点使最短路径距离增加最大。但是该方法只适用于评价两终端的情况，无法评价全网范围内的节点重要性，且数值结果无法归一化。

## 2 相关概念

假设图 $G(V, E)$为无自环的无向图，$V=\{v_1,v_2,\dots v_n\}$代表节点集合，$E=\{e_1,e_2,\dots e_m\}\subseteq V\times V$代表链路集合，$G-v_i$代表去掉节点 $v_i$ 以及它的关联链路后得到的图。树是连通无环图，图 $G$ 的树是 $G$ 的一个连通无环子图。图 $G$ 的生成树是具有 $G$ 的全部顶点的树。假设节点具有相同的可靠概率，但不需要知道该数值。$G$ 的全节点关联矩阵 $\boldsymbol{A}_c=[a_{ij}]$具有 $n$ 行和 $m$ 列，每行对应一个节点，每列对应一条链路。$\boldsymbol{A}_c$ 的元素 $a_{ij}$ 定义如下：$G$ 是有向图时，

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第}j\text{条链路与第}i\text{个节点关联，且离开第}i\text{个节点}\\ -1 & \text{第}j\text{条链路与第}i\text{个节点关联，且指向第}i\text{个节点}\\ 0 & \text{第}j\text{条链路与第}i\text{个节点无关联}\end{cases} \tag{1}$$

$\boldsymbol{A}_c$ 的一行称为 $G$ 的一个关联向量。从式(1)可以看出，$\boldsymbol{A}_c$ 的每一列恰好含有两个非零元素，分别为+1 和−1。因此，我们可以从任意剩余的 $n-1$ 行得出去掉的那一行。这样，$\boldsymbol{A}_c$ 的任意 $n-1$ 行都包含了关于 $\boldsymbol{A}_c$ 的全部信息，也就是说，$\boldsymbol{A}_c$ 中的各行是线性相关的。

$\boldsymbol{A}_c$ 的任意 $n-1$ 行子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为图 $G$ 的一个关联矩阵。对应于 $\boldsymbol{A}_c$ 中某行但不在 $\boldsymbol{A}$ 中的顶点称为 $\boldsymbol{A}$ 的参考顶点。值得注意的是，全节点关联矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 和它的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是两个不同的概念，需要区别使用。

## 3 基于生成树数目的节点重要性评价方法

如果一个矩阵的每个子方阵的行列式为 1，−1 或 0，则该矩阵是单位模的。

**引理 1** 有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是单位模的。

**证明** 对 $\boldsymbol{A}$ 的一个子方阵的阶进行归纳来证明引理 1。显然，$\boldsymbol{A}$ 的每个一阶子方阵的行列式为 1，−1 或 0。作为归纳假设，假定每个阶数小于 $k$ 的子方阵的行列式等于 1，−1 或 0。考虑 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $k$ 阶非奇异子方阵。这个矩阵的每列最多包含两个非零元素，一个为+1，与（或）一个为−1。由于这个子矩阵是奇异的，所以并非每列都有+1 和−1。同理，在这个子矩阵中，没有一列是仅由 0 组成的。这样，至少有一列仅包含一个非零元素。将子矩阵的行列式按这一列展开，并用归纳假设，我们发现所期望的行列式为±1。证明完毕。

计算连通图的生成树数目的公式是由 Binet-Cauchy 定理的矩阵理论导出的[9]。

**引理 2** （Binet-Cauchy 定理）如果 $\boldsymbol{P}$ 是 $p\times q$ 矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 是 $q\times p$ 矩阵，且 $p\leqslant q$，那么

$$\det(\boldsymbol{PQ})=\sum\left(\boldsymbol{P}\text{和}\boldsymbol{Q}\text{的相应大子式的乘积}\right) \tag{2}$$

一个主行列式(或简称一个矩阵的大子式)是一个矩阵的最高阶行列式。如果 $\boldsymbol{P}$ 的一个大子式是由 $\boldsymbol{P}$ 中 $i_1, i_2,\dots i_p$ 列组成，那么 $\boldsymbol{Q}$ 的相应大子式就是由 $\boldsymbol{Q}$ 中 $i_1, i_2,\dots i_p$ 行所组成。例如，

如果 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ -3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，那么对于 $\boldsymbol{P}$ 的大子式 $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$ 的相应大子式

为$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$。根据引理 1，2，可以推导出下面的定理。

**定理 1**　设 $G$ 是连通无向图，$\boldsymbol{A}$ 是由 $G$ 的每条链路任意标定方向后所得到的有向图的关联矩阵。因此

$$\tau(G) = \det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right) \tag{3}$$

其中，$\tau(G)$是 $G$ 的生成树的数目。

**证明**　由 Binet-Cauchy 定理，式(2)成立，即 $\det(\boldsymbol{PQ}) = \Sigma$($\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的相应大子式的乘积)。由引理 1，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^T$ 相应大子式都具有等于 1，−1 或 0 的相同值。因此，式(3)右边求和式中的每个非零项的值为 1。此外，$\boldsymbol{A}$ 的大子式不为 0，当且仅当对应于 $\boldsymbol{A}$ 的大子式的列的链路形成一个生成树。这样，式(2)右边求和式中的非零项与 $G$ 的生成树之间就存在着一一对应关系。证毕。

节点对应的生成树数目越少，表明该节点越重要，具有相同生成树数目的节点有相同的重要性。如果要使指标归一化，只需令

$$r_i = 1 - \frac{\tau(G - v_i)}{\tau(G)} \tag{4}$$

即可，其中，$r_i$ 为节点 $v_i$ 的归一化重要性，$\tau(G-v_i)$为图 $G-v_i$ 的生成树的数目，$\tau(G)$为图 $G$ 的生成树数目。$\tau(G-v_i)$的数值越小，则 $r_i$ 所得数值越大，表明该节点的失效对整个通信网的破坏程度越为严重，该节点越重要。当第 $i$ 个节点对应的生成树数目 $\tau(G-v_i)$为零时，则表明去掉该节点以及相关联的链路后，图是不连通的，这时该节点被认为在网络拓扑结构中具有最重要的地位，相应的归一化结果为 1。

同理，式(4)也可以推广到多个节点的情况。对于指定的一组节点 $v_1, v_2, \ldots v_k$，从原始图中将这组节点以及与这组节点相关联的链路去掉后，计算所得图的生成树数目。因此，多个节点的归一化重要性可以表示为

$$r_k = 1 - \frac{\tau\left(G - \sum_{i=1}^{k} v_i\right)}{\tau(G)} \tag{5}$$

式(4)可以看作是式(5)的一个特例。

综上所述，通信网中各个节点重要性评价算法如下，其中，通信网的初始模型为无自环的无向连通图 $G$：

输入：$G$ 的全节点关联矩阵；

输出：$G$ 中各个节点及相关联链路被去掉后，图中各节点对应的生成树数目及归一化结果。

**step1**　输入全节点关联矩阵 $\boldsymbol{A}_c$。

**step2**　step2~4 为算法的主循环，共循环 $n$ 次。对于第 $i$ 个节点，去掉 $\boldsymbol{A}_c$ 中所在的第 $i$ 行以及该行不为零的元素所在的列，得到一个新的矩阵 $\boldsymbol{B}$。

**step3**　从 $\boldsymbol{B}$ 中去掉任意一行，得到矩阵 $\boldsymbol{A}$。

**step4**　应用式(3)，计算出第 $i$ 个节点对应的生成树的数目 $\tau(G-v_i)$。

**step5**　应用式(4)，计算出第 $i$ 个节点的归一化重要性 $r_i$。返回 step2。

要想对多个节点的重要性进行评价，只需对上述算法进行简单的修正：

输入：$G$ 的全节点关联矩阵和待评价的 $k$ 个节点($k \leqslant n-1$)；

输出：$G$ 中这组节点及相关联链路被去掉后，所得图对应的生成树数目及归一化结果。

**step1**　输入全节点关联矩阵 $\boldsymbol{A}_c$，并赋给矩阵 $\boldsymbol{B}$。

**step2**　将待评价的该组节点标号按从大到小进行排序。

**step3**　按节点标号从大到小的顺序，循环 $k$ 次。对于第 $i$ 个节点，去掉 $\boldsymbol{B}$ 中所在的第 $i$ 行以及该行不为零的元素所在的列后，将所得矩阵重新赋给矩阵 $\boldsymbol{B}$。

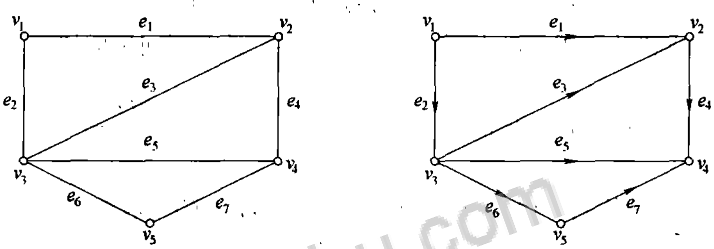
**step4**　从 $\boldsymbol{B}$ 中去掉任意一行，得到矩阵 $\boldsymbol{A}$。

**step5**　应用式(3)，计算出 $k$ 个节点对应的生成树数目。

**step6**　应用式(5)，计算出 $k$ 个节点对应的归一化节点重要性 $r_k$。

## 4　实验结果与讨论

利用图 1 对算法进行说明，图 1(a)和(b)给出了无向图 $G$ 和它对应的一个有向图。$A_c$ 是无向图 $G$ 的每条链路任意标定方向后所得到的有向图的全节点关联矩阵。




(a) 无向图 $G$　　　　(b) 有向图 $G$

图 1　无向图 $G$ 及 $G$ 中链路任意标定方向后得到的一个有向图



对式(6)的全节点关联矩阵应用本文算法，得到表 1 中的结果，第 2 行表示相应节点及关联链路去除后，得到的图的生成树数目；第 3 行表示算法归一化后的结果。其中去掉节点 $v_3$ 及其相关联的链路后，得到的图的生成树数目最少，该节点最重要，这与文献[2]得到的结论是一致的。节点的重要性由高到低依次为：$v_3 \rightarrow v_2$、$v_4 \rightarrow v_1$、$v_5$，节点 $v_2$ 和 $v_4$ 具有相同的重要性。观察节点 $v_3$，节点 $v_3$ 在文献[2]中的结果为 1，而节点 $v_3$ 失效后，其它节点仍然保持连通，所以本文方法更符合网络拓扑的实际情况。式(6)的全节点关联矩阵中的各行之间，各列之间交换位置，不影响计算结果，这是因为相应的操作相当于图 $G$ 中的节点和链路标号发生变化，全网的拓扑结构不受影响。

$$
A_c = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{6}
$$

**表 1**　　通信网中不同方法的节点重要性比较

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 本文算法 | 8 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 归一化结果 | 0.6190 | 0.8571 | 0.9524 | 0.8571 | 0.6190 |
| 文献[2]算法 | 0.6875 | 0.875 | 1 | 0.875 | 0.6875 |

图 2 是利用文献[2]方法处理节点 $v_1$ 重要性的跳面示意图，网络中任意节点对之间都有一定跳数的距离，称与某一节点具有相同跳数距离的所有节点具有该跳数的跳面节点。由于同一跳面中迂回路由的存在，对于某一节点对之间的迂回路由会参与其它节点的可靠性计算，从网络可靠性角度来看，迂回路由的影响也会考虑进去，不失为一种好的可靠性测度。但对于节点重要性而言，忽略同一跳面的迂回路由，节点的重要性评价精度会有所降低。从图 2 中可以看到，由于文献[2]方法忽略了迂回路由对可靠性的影响，因此，在评价节点 $v_1$ 重要性时，无论链路 $e_3$ 是否存在，都不影响节点 $v_1$ 对应的数值结果，从而降低了该节点重要性的评价精度。

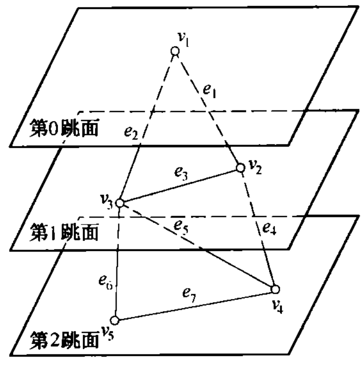



图 2　文献[2]方法评价图 1 中节点 $v_1$ 重要性的跳面示意图

利用图 3 对多个节点的节点重要性评价进行说明。图 3 是 ARPA 网络，图中共有 21 个节点和 26 条链路。表 2 是利用本文算法得到的各节点所对应的生成树数目和归一化节点重要性。为了比较多个节点的重要性，我们不妨对节点$\{v_1, v_3\}$和$\{v_5, v_7\}$的重要性进行研究，由表 2 可知，当分别去掉节点$\{v_1, v_3\}$和$\{v_5, v_7\}$及相关联的链路后，节点$\{v_1, v_3\}$对应的生成树数目更少，其归一化数值大于节点$\{v_5, v_7\}$的归一化数值。因此，节点$\{v_1, v_3\}$比节点$\{v_5, v_7\}$在整个网络结构中具有更重要的作用。观察节点$\{v_5, v_7\}$和$\{v_5, v_8\}$，两者对应的生成树数目完全相同，这一点不难理解，节点 $v_7$ 和 $v_8$ 的度均为 2，并且是串联的关系，删除其中的一个节点就等价于删除另外一个节点，本文方法客观地反映了这一事实。除此之外，本文方法还可以比较具有不同数目节点之间的相对重要性，如节点 $v_1$ 和$\{v_5, v_7\}$相比，尽管在 ARPA 网络中有两个节点$\{v_5, v_7\}$失效，但其破坏程度仍然没有节点 $v_1$ 失效对整个通信网的破坏程度严重。而节点 $v_6$ 和$\{v_5, v_7\}$对应的生成树数目相等，两者具有相同的重要性，从而使得具有不同数目节点的相对重要性也可以进行比较。而文献[2]方法引入跳面节点的概念来评价节点重要性，无法推广到对多个节点的重要性进行评价。

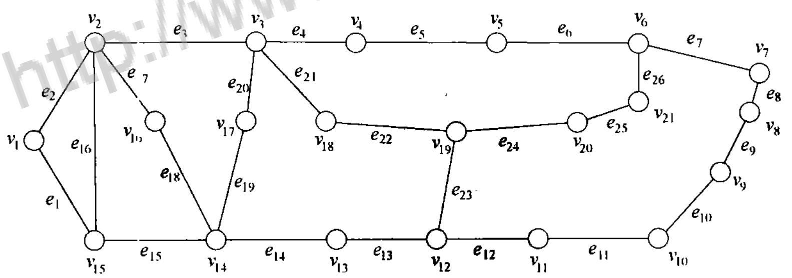



图 3　ARPA 网络模型，引自文献[3]



**表 2　　ARPA 网络中各节点对应的生成树数目和归一化重要性**

| $v_i$ | $\tau(G-v_i)$ | $r_i$ | $v_i$ | $\tau(G-v_i)$ | $r_i$ | $v_i$ | $\tau(G-v_i)$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5856 | 0.6262 | 12 | 344 | 0.9780 | 18 | 3602 | 0.7701 |
| 2 | 437 | 0.9721 | 13 | 3053 | 0.8051 | 19 | 515 | 0.9671 |
| 3 | 110 | 0.9930 | 14 | 213 | 0.9864 | 20,21 | 2697 | 0.8279 |
| 4,5 | 2527 | 0.8387 | 15 | 1901 | 0.8787 | {1, 3} | 40 | 0.9974 |
| 6 | 257 | 0.9836 | 16 | 5266 | 0.6639 | {5, 7} | 257 | 0.9836 |
| 7,8,9,10,11 | 1884 | 0.8797 | 17 | 4736 | 0.6977 | {5, 8} | 257 | 0.9836 |

## 5　结论

本文提出了一种对通信网节点进行重要性评价的方法。通过比较生成树的数目，判断图中任意数目的两组节点的相对重要性。与文献[7,8]相比，该方法可以反映全网范围内的节点重要性，并可以将所得结果归一化。与文献[2]相比，更为有效地反映基于网络拓扑的节点重要性，并将评价方法推广到多个节点的情况，是一种有效的通信网可靠性测度。

### 参考文献：


[1] 熊蔚明，刘有恒. 关于通信网可靠性的研究进展[J]. 通信学报, 1990, 11(4)：43-49.

[2] 郭伟. 野战地域通信网可靠性的评价方法[J]. 电子学报, 2000, 28(1):3-6.

[3] PAGE L, PERRY J. Reliability polynomials and links importance in networks[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(1):51-58.

[4] TRALDI L. Commentary on: reliability polynomials and links importance in networks[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(3):322.

[5] RAO V. Most-vital edge of a graph with respect to spanning trees[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1998, 47(1):6-7.

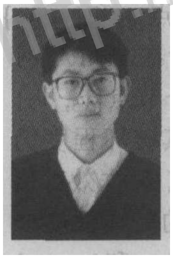
[6] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. A faster computation of the most vital edge of a shortest path[J]. Information Processing Letters, 2001, 79(2):81-85.

[7] CORLEY H, SHA D. Most vital links and nodes in weighted networks[J]. Operations Research Letters, 1982, 1(4):157-160.

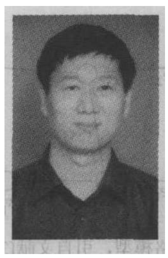
[8] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. Finding the most vital node of a shortest path[A]. COCOON 2001, LNCS 2108[C]. Springer-Verlag, 2001.278-287.

[9] SWAMY M, THULASIRAMAN K. Graphs, Networks, and Algorithms[M]. New York: John Wiley & Sons Inc,1981.


### 作者简介：

**陈勇**（1976-），男，四川三台人，东南大学无线电系博士生，主要研究方向为高速无线互联网和通信网可靠性等。



**胡爱群**（1964-），男，江苏南通人，东南大学教授、博士生导师，国家“863”计划信息安全主题专家组成员，主要研究方向为信息安全和数字通信等。

**胡啸**（1968-），男，河南罗山人，东南大学无线电系博士生，主要研究方向为自适应回波抵消和有源噪声控制等。