Analysis Cheat Sheet

Basics

Youngsche Ungleichung: $\forall \varepsilon > 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R} \; : 2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Binomialsatz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}$

Bernoulli Ungleichung: $\forall n \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R} \;:\; (1+x)^n \geq 1 + nx$

Stirlings Approximation: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Komplexe Zahlen:

- **Modulus**: $||z|| = z\overline{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Inverse**: $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{||z||^2}$
- **Cartesian ⇒ Polar**

  $$\left.\begin{aligned} r &= ||z|| \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\tfrac{a}{b}\right) \end{aligned}\right\} \implies z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}$$

- **Polar ⇒ Cartesian**

  $$\left.\begin{aligned} a &= \cos(\phi) \\ b &= \sin(\phi) \end{aligned}\right\} \implies z = a + bi$$

Folgen

Konvergenz:

Folge a_n ist konvergent falls es ein $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$, die Menge

$M(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - l| \geq \varepsilon\}$ endlich ist.

$\iff$ falls $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1 \;\; \forall n \geq N \;:\; |a_n - l| < \varepsilon$

Bolzano Weierstrass:

Jede beschränkte Folge a_n hat eine konvergente Teilfolge b_n.

Für jede konvergente Teilfolge b_n gilt: $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

Reihen

- **Geometrische Reihe:**

  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{for } |q| < 1$$

- **Teleskop Reihe:**

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = (\lim_{n\to\infty} b_n) - b_0$$

- **Harmonische Reihe:**

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ konvergiert}$$

Quotientenkriterium:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absoult}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Wurzelkriterium:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absoult}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Cauchy Produkt:

Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$$

Falls a_i und b_j absolut konvergieren, ist das Cauchy Produkt eine lineare Anordnung und deshalb gleich dem Produkt der beiden Reihenwerten.

Exponentialreihe:

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe:

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergiert absolut für alle $|x| < \rho$ und divergiert für $|x| > \rho$wobei $\rho :=$
$$\begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$
das Intervall der **p**unktweisen Konvergenz beschreibt

Ableitung einer Potenzreihe:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j} \quad \text{für } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Taylor Approximation:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in (a, b) stetig und $n + 1$ mal differenzierbar. Sei $x_0 \in (a, b)$.

Für alle $x \in [a, b]$ gibt es ein ζ zwischen x und x_0 sodass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Taylor Koeffizienten}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Lagrange Restglied}}$$

$$\implies T(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Funktionen

Umkehrabbildung:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf einem beliebigen Intervall I.
Dann ist
$J := f(I)$ auch ein Intervall.
Dann ist
$f^{-1} : J \to I$ auch stetig und streng monoton.

Stetigkeit:

$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : |x - x_0| \; < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- Sei die ε-Umgebung das Intervall $\big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$ der y-Achse.
  Dann existiert eine
  δ-Umgebung, welche das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ der x-Achse,

  sodass für alle x in der δ-Umgebung der Funktionswert in der ε-Umgebung liegt.
- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; : \; f\big((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) \subseteq \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$
- Der Funktionswert $f(x)$ unterscheidet sich von $f(x_0)$ beliebig wenig (ε), wenn x sich der Stelle x_0 genügend nähert (δ).
- für alle Folgen a_n mit Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} a_n)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zwischenwertsatz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$, dann gilt:

$\forall c \in [f(a), f(b)] \, \exists z \in [a, b] \; : \; f(z) = c$

Min-Max Satz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I.
Dann gibt es
$u, v \in I$ sodass $\forall x \in I \; : \; f(u) \le f(x) \le f(v)$ und daraus folgend ist die Funktion auch beschränkt auf dem Intervall.

Exponential Lower Bound: $\forall x \in \mathbb{R} \; : \; \exp(x) \ge 1 + x \iff \exp(-x) \ge 1 - x$

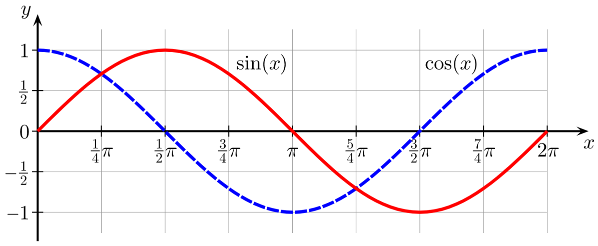
Punktweise Konvergenz:

- Falls für jeden Punkt $x \in D$ gilt: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
- Falls $\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmässige Konvergenz:

- Falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- Falls $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0$
  Supremum finden mithilfe der ersten Ableitung von $|f(x) - f_n(x)|$

Trigonometry



	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Function	Definition	Derivative	Domain	Range
sin(x)	Opposite / Hypotenuse	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
cos(x)	Adjacent / Hypotenuse	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
tan(x)	$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbb{R}$
cot(x)	$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$x \neq k\pi$	$\mathbb{R}$
arcsin(x)	Inverse of sin(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos(x)	Inverse of cos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan(x)	Inverse of tan(x)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot(x)	Inverse of cot(x)	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

sinh(x)	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
cosh(x)	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$[1,\infty)$
tanh(x)	$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$1-\tanh^2(x)$	$\mathbb{R}$	$(-1,1)$
arsinh(x)	Inverse of sinh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
arcosh(x)	Inverse of cosh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1,\infty)$	$[0,\infty)$
artanh(x)	Inverse of tanh(x)	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$	$\mathbb{R}$

Trigonometry:

- $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
- **Gerade Funktion**: $\cos(-z) = \cos(z)$
- **Ungerade Funktion**: $\sin(-z) = -\sin(z)$
- **Exponential Expression**: $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \implies \sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \implies \cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$
- **Pythagorean Identity**: $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \implies \cos(z) = \sqrt{1-\sin(x)^2}$
- **Series Approximation**: $\forall 0 \le x \le \sqrt{6} \ : \ x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x$
- **Pi**: $\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$ ist das Infimum aller Nullstellen von sin
- **Polarform**: $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \implies e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ und $e^{i\pi} = -1$ und $e^{2i\pi} = 1$
- **Umwandeln**: $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- **Vorzeichen wechseln**: $\sin(x+\pi) = -\sin(x), \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$
- **Periode hinzufügen**: $\cos(x+2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- **Nullstellen von Sinus**: $\{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
  - $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- **Nullstellen von Cosinus**: $\left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$
  - $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Grenzwerte von Funktionen

Substitution:

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$ falls der Grenzwert $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und g stetig im Punkt y_0 ist.

Variablenwechsel:

1. Sei $y := \text{Ausdruck mit } x$
2. Limes umschreiben in Abhängigkeit von y, sodass keine x mehr vorkommen. Wir passen auch den Grenzwert an, d.h. aus $x \to x_0$ wird $y \to y_0$ wobei $y_0 := \lim_{x \to x_0} y$
3. Endergebnis berechnen

L'Hôpital:

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\forall x \in (a, b) \ : \ g'(x) \neq 0$

Falls $\frac{\lim_{x \to b^\pm} f(x)}{\lim_{x \to b^\pm} g(x)}$ die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erfüllt und der Grenzwert $\lim_{x \to b^\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann gilt $\implies$
$\lim_{x \to b^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Differenzial

Differenzierbarkeit:

Falls der Grenzwert $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

differenzierbar $\implies$ stetig

Quotienten: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Exponential: $(a^x)' = a^x \ln a$

Logarithmus: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Inverse: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Satz von Rolle:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es einen Punkt
$\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$ Ableitung null.

Mittelwertsatz:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar.
Dann gibt es einen Punkt
$\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

Cauchys Mittelwertsatz:

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar.
Dann gibt es einen Punkt
$\zeta \in (a, b)$ mit $g'(\xi)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(\xi)\left(g(b) - g(a)\right)$

Falls $\forall x \in (a, b) \ : \ g'(x) \neq 0$ folgt $g(a) \neq g(b)$ und $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Konvexität:

- $f'' \geq 0 \iff f$ konvex
- $f'' > 0 \implies f$ streng konvex, aber die Umkehrung gilt nicht

Höhere Ableitungen:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in (a, b) stetig und $n + 1$ mal differenzierbar.

Sei $x_0 \in (a, b)$ und $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$

- Falls n gerade ist und x_0 eine lokale Extremalstelle ist, folgt $f^{(n+1)} = 0$
- Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)} > 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle
- Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)} < 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

Integral

Lineare Funktionen: $\int_a^b x\ dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Schranken tauschen: $\int_b^a f(x)\ dx := -\int_a^b f(x)\ dx$

Anfang gleich Ende: $\int_a^a f(x)\ dx := 0$

Linearität: $\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\ dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx$

Majoranten vergleichen: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ falls $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$

Betrag: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Cauchy-Schwarz: $\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$

Schranken in die Funktion ziehen:

$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$ und $\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (d.h. integrierbar)

Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Im allgemeinen möchte man Polynome ableiten und $\exp, \cos, \sin$ integrieren

Substitution:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

- Vorgehen für schwierigen Integrand ($\Leftarrow$):
  1. $y := \text{Substitutionsfunktion}$
  2. $dx = \frac{1}{y'} \cdot dy$
  3. Integral mit y ausdrücken und lösen
  4. Zurück einsetzen
- Vorgehen für schwierige Grenzen ($\Rightarrow$):
  1. Finde ein ϕ, sodass $\phi(t_0) = a$ und $\phi(t_1) = b$