

II. Référentiel accélérés

Prof. Cécile Hébert

1^{er} septembre 2022

Plan du cours

- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

Table des matières

1. Introduction
2. Position vitesse et accélération
3. Analyse et cas particuliers

1. Introduction et notation

Soient un référentiel \mathcal{R} fixe, muni du repère cartésien $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

un référentiel \mathcal{R}' muni du repère cartésien $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ en mouvement dans \mathcal{R} .

On notera \vec{e}_{x_i} respectivement \vec{e}_{y_i} les vecteurs unitaires de ces deux repères.

Dans \mathcal{R} :

$$\overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$$

Dans \mathcal{R}' :

$$\overrightarrow{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$$

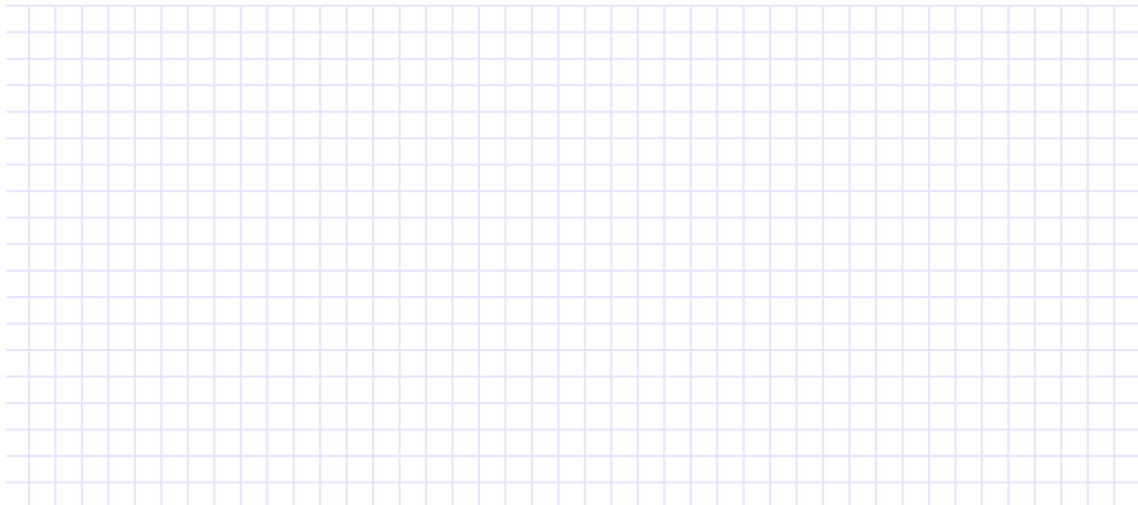
On peut séparer le mouvement de \mathcal{R}' dans \mathcal{R} en deux composantes : une rotation et une translation.

La translation donne le mouvement de A dans \mathcal{R} et la rotation la rotation des axes (y_j) par rapport aux axes (x_i) . On appelle $\vec{\omega}$ le vecteur rotation.

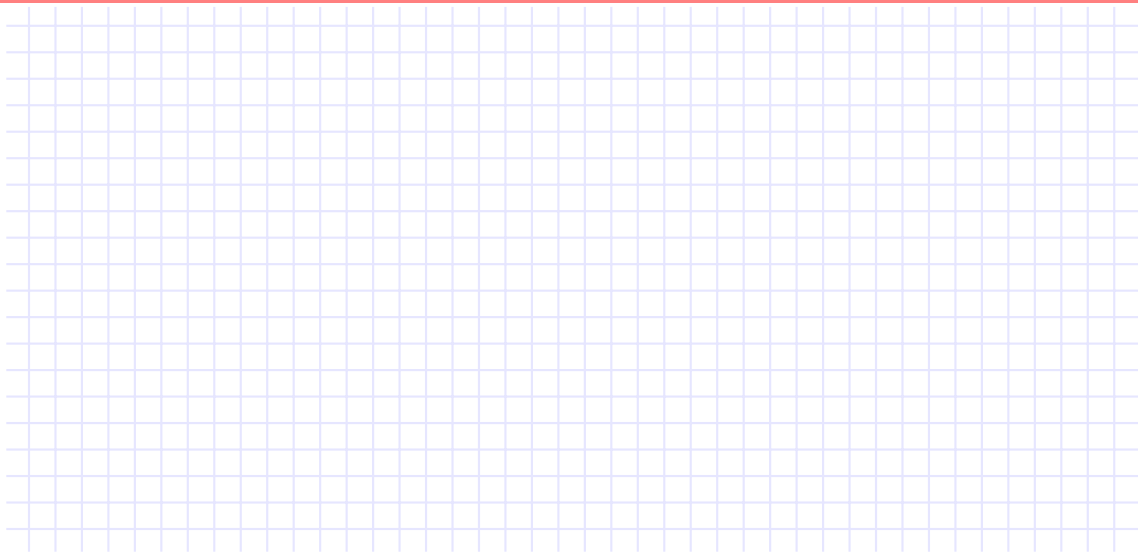
Les vecteurs \vec{e}_{y_j} changent dans \mathcal{R} . On obtient leur dérivée par :

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_{y_j} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_j}$$

2. Position, vitesse et accélération



II. Référentiel accélérés 2. Position vitesse et accélération



Résumé :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : \mathcal{R}' a un mouvement de translation uniforme dans \mathcal{R}

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 1 : \mathcal{R}' a un mouvement de translation uniforme dans \mathcal{R}

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$$



Cas particulier 2 :

\mathcal{R}' a un mouvement de rotation uniforme dans \mathcal{R} avec $A = O$ et P fixe dans \mathcal{R}'

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 2 :

\mathcal{R}' a un mouvement de rotation uniforme dans \mathcal{R} avec $A = O$ et P fixe dans \mathcal{R}'
 P a donc un mouvement circulaire uniforme dans \mathcal{R} .

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

Cas particulier 3 : \mathcal{R}' a un mouvement de rotation uniforme dans \mathcal{R} avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 3 : \mathcal{R}' a un mouvement de rotation uniforme dans \mathcal{R} avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Nomenclature dans le cas général

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$