LVA-Nr: 138.094 Numerische Methoden und Simulation
SS2014– Gewöhnliche Differentialgleichungen

ÜBUNG 2: Verifikation des Levinson Theorems am Beispiel von Neutronenstreuung

Hintergrund – Die Berechnung von Streuphasen aus einer Streuwellenfunktion ist ein Standard-problem in der Atom-, Kern- und Teilchenphysik. Das Levinson-Theorem besagt, dass der Wert der absoluten Phasenverschiebung bei der Energie *E*=0 der Größe $N\pi$ entspricht, wobei *N* die Anzahl der Bindungszustände bei gleichem ℓ in diesem Potential ist. Das Levinson-Theorem stellt also eine Verbindung zwischen dem kontinuierlichen Spektrum (Streuzustände) und dem diskreten Spektrum (Bindungszustände) her.

Problemstellung – Verifizieren Sie das Levinson-Theorem für $\ell=1$ am Beispiel eines Neutron-Kernpotentials für ein Target mit der relativen Masse m_A=39,962591. Das Levinson-Theorem besagt, dass der Wert der absoluten Phasenverschiebung bei der Energie *E*=0 der Größe $N\pi$ entspricht, wobei *N* die Anzahl der Bindungszustände bei gleichem ℓ in diesem Potential ist. Das Potential hat dabei die Form

$$V(r) = -V_0 \frac{1}{1+\exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} + V_1 \exp\left(-\frac{(r-R_1)^2}{a_1}\right)$$

mit V_0=20,0 MeV, R_0=1,2 $A^{1/3}$ fm, *A*=40, a=0,60 fm, V_1=10 MeV oder 0, R_1=6 fm und a_1=4 fm^2.

Aufgaben – Führen Sie die folgenden Aufgaben durch:

(1) Legen Sie die in der numerischen Lösung verwendeten Einheiten fest (Vorschlag MeV,fm).
(2) Schreiben Sie ein Programm/Programmteil zur Lösung der entsprechend skalierten Schrödingergleichung für variable Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ auf der Basis des modifizierten Numerov Algorithmus. Der Programmteil soll die Integration der Schrödingergleichung sowohl von innen als auch von außen ermöglichen.
(3) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Energie *E* aus den erhaltenen Streulösungen für die p-Wellen mit dem angegebenen Potential mit V_1=0. Bestimmen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Energie *E* aus den erhaltenen Streulösungen für die p-Wellen mit dem angegebenen Potential mit V_1=10 MeV.
(4) Bestimmen Sie die absolute Streuphase für beide unter (3) berechneten Fälle und zeichnen Sie diese mittels gnuplot.
(5) Bestimmen Sie alle Bindungsenergien und Bindungszustände für beide Potentiale bei vorgegebenen $\ell=0,1$ und verifizieren Sie das Levinson Theorem für die Phasenverschiebung in der Partialwelle $\ell=0,1$.
(6) Zeichnen Sie die normierten Bindungszustände mit gnuplot.

Hinweis:
Man verwende die folgenden Werte für die Konstanten: $\hbar c = 197.327053(59)$ MeV fm,
Masse des Neutrons $m_n c^2$=939,56563 MeV, amu=931,49432 MeV.
Die sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen für $\ell=1$ lauten (Riccati-Form)

Sphärische Besselfunktion: $\hat{j}_1(x) = \sin(x)/x - \cos(x)$
Sphärische Neumannfunktion: $\hat{n}_1(x) = \cos(x)/x + \sin(x)$

Für die absolute Phasenverschiebung als Funktion von *E* gilt, dass die Phasenverschiebung zwischen $0 < E < \infty$ stetig ist und für $E \to \infty$ verschwindet.