NUMERISCHE METHODEN UND SIMULATION

LVA Nr. 138.094

Methoden zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Teil 1

H. Leeb

Inhalt

Gegenstand dieser Vorlesung und den zugehörigen Übungseinheiten sind einige grundlegende Verfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und deren Anwendung in der Physik.

(1) Einschrittverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung
(2) Konsistenz und Konvergenz von Lösungsalgorithmen
(3) Runge-Kutta-Verfahren
(4) Rundungsfehler
(5) Das Numerov-Verfahren
(6) Mehrschrittverfahren (Korrektor- und Prediktorverfahren)
(7) Extrapolationsverfahren

<u>Anwendungen:</u>

- Schwingungsprobleme: Das Pendel (Übung 1)
- Transmission und Reflexion am eindimensionalen Potentialwall
- Streulösungen der radialen Schrödingergleichung (Übung 2)
- Einfachschießverfahren: Bindungszustände in einem Zentralpotential (Übung 3)
- Selbstkonsistente Verfahren zur Bestimmung von *Mean-Fields*

Konstruktion von Einschrittverfahren

Die Konstruktion von Einschrittverfahren zur Lösung von

$y' = f(x,y)$ mit der Randbedingung $y(x=a) = y_a$

geht von der Differenzierbarkeit der Lösung aus. Es kann dann eine Reihenentwicklung in der Schrittweite angesetzt werden

$$y(x+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(x+\vartheta h) \text{ mit } 0 \le \vartheta \le 1$$

Die Ableitungen lassen sich durch *f(x,y)* ausdrücken:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

Konzept von Einschrittverfahren

Die numerische Lösung im Intervall [a,b] erfolgt auf einem Gitter von Stützpunkten x_i, i=0,1, …, N mit $x_0=a$, $x_N=b$, welche bei einem Einschrittverfahren nicht notwendigerweise äquidistant sein müssen. Die Schrittweite ist h bzw. $h_i=x_{i+1}-x_i$

Explizites Einschrittverfahren:

Aus der Kenntnis der Lösung $y^h(x_i)$ läßt sich direkt der Wert an der nächsten Stützstelle $y^h(x_{i+1})$ berechnen [x_i,x_{i+1} sind Stützstellen, $h=x_{i+1}-x_i$ Schrittweite]

$$y^h(x_{i+1}) = y^h(x_i) + h\,\Phi\big(x_i, y^h(x_i); h\big) \text{ mit } y^h(x_0) = y_a$$

Die Funktion $\Phi(x,y;h)$ ist charakteristisch für das verwendete Einschrittverfahren

Polygonzugverfahren - Eulerverfahren

Das Polygonzug- oder Euler-Verfahren ist das einfachste Einschrittverfahren, welches bei *m=1* abbricht, d.h.

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf\left(x_i, y_i^h\right) \quad i = 0,1,\cdots,N-1$$

$$\text{d.h.} \quad \Phi\left(x,y;h\right) = f(x,y)$$

Sei *z(x)* die exakte Lösung der Differentialgleichung *y'=f(x,y)* , dann gilt:

$$z\left(x+h\right) = z\left(x\right) + hz'\left(x\right) + \frac{h}{2}z''\left(x\right) + \cdots$$

$$\Delta\left(x,y;h\right) = \frac{z\left(x+h\right) - z\left(x\right)}{h} = z'\left(x\right) + \frac{h}{2}z''\left(x\right) + \cdots = f\left(x,y\right) + \frac{h}{2}z''\left(x\right) + \cdots$$

$$\tau\left(x,y;h\right) = \Delta\left(x,y;h\right) - \Phi\left(x,y;h\right) = \frac{h}{2}z''\left(x\right) + \cdots = o\left(h\right)$$

Das Euler-Verfahren ist konsistent in 1. Ordnung

<u>Konsistenz eines Einschrittverfahrens</u>: Ein Einschrittverfahren heißt konsistent in *p.* Ordnung, wenn *Φ(x,y;h)* die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\tau\left(x,y;h\right) \underset{h\to 0}{=} \Delta\left(x,y;h\right) - \Phi\left(x,y;h\right) = o\left(h^p\right)$$

Konvergenz von Einschrittverfahren

Ein Einschrittverfahren heisst an der Stelle x ε [a,b] konvergent von Ordnung p>0 falls gilt

$$y_i^h - z(x_i) = o\left(h^p\right) \text{ für } h \to 0,\ \forall\, j = 0,1,\cdots,N$$

Hinweis

Konvergenz bezieht sich auf Lösung:

$$\tau(x,z;h) = y_i^h - z(x_i) = o\left(h^p\right)$$

Konsistenz bezieht sich auf Einschrittfunktion:

$$\Delta(\mathrm{x},\mathrm{y};\mathrm{h}) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y;h) = o\left(h^p\right)$$

SATZ:

Für eine Einzeldifferentialgleichung *y'=f(x,y)* sei ein Einschrittverfahren *Φ(x,y;h)* definiert:

a) Die Einschrittfunktion Φ*(x,y;h)* ist stetig bezüglich aller Veränderlicher *x, y und h*

b) Das Verfahren sei konsistent von Ordnung p>0

c) Die Funktion Φ*(x,y;h)* erfülle bezüglich *y* eine Lipschitzbedingung

so folgt: das Einschrittverfahren ist konvergent von der Ordnung *p*

Verfahren höherer Ordnung

Beispiel: Konstruktion eines Verfahrens 2. Ordnung für die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = f(x,y)$

$$\Phi(x,y;h) = a_1 f(x,y) + a_2 f(x + p_1 h, y + p_2 h\, f(x,y))$$

Entwicklung von Φ nach *h* liefert:

$f(x,y) \rightarrow \quad a_1 + a_2 = 1$

$$\Phi(x,y;h) = \boxed{a_1 f(x,y) + a_2 f(x,y)}$$

$$+ \boxed{a_2 h \left[p_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + p_2 \frac{dy}{dx} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right]}$$

$y''/2 \quad \rightarrow \quad a_2 p_1 = a_2 p_2 = 1/2$

Einschrittverfahren höherer Ordnung

<u>Einschrittverfahren zweiter Ordnung</u>:

Verfahren von Heun: $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \qquad p_1 = p_2 = 1$

$$\Phi(x, y; h) = \frac{1}{2}\left[f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y)) \right]$$

Modifiziertes Euler Verfahren: $a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \qquad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$\Phi(x, y; h) = f\left(x + \tfrac{1}{2}h, y + \tfrac{1}{2}hf(x, y)\right)$$

<u>Einschrittverfahren vierter Ordnung</u>:

Runge-Kutta-Verfahren: mit fester Schrittweite

mit Schritweitenanpassung

Das Verfahren nach Runge-Kutta

Verfahren vierter Ordnung: $m = 4$

$$y' = f(x,y) \quad \rightarrow \quad \Phi(x,y;h) = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + O(h^5)$$

mit $\quad k_1 = f(x,y) \qquad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \qquad k_4 = f\left(x + h, y + hk_3\right)$$

Diese Einschrittfunktion 4. Ordnung muss die folgende Relation erfüllen

$$\Phi(x,y;h) = y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + \frac{h^2}{6}y'''(x) + \frac{h^3}{24}y^{(4)}$$

Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweitenanpassung

Genauigkeit der Lösung sollte laufend kontrolliert werden

<u>Einschrittverfahren:</u> Genauigkeit lässt sich über Schrittweite kontrollieren.

bei starker Änderung der Lösung → kleine Schrittweite

bei geringer Änderung der Lösung → große Schrittweite

Effizienzsteigerung von 100 und mehr möglich

Information über Güte zur Festlegung der Schrittweite: Verdopplung der Schritte

$$z(x+2h) = y_2(x+2h) + (2h)^5\phi + O(h^6) + \cdots$$ y_2 Num. Wert bei *x+2h* mit 2*h*

$$z(x+2h) = y_1(x+2h) + 2(h)^5\phi + O(h^6) + \cdots$$ y_1 Num. Wert bei *x+2h* mit *h*

Differenz der beiden Lösungen: $\Delta = y_1 - y_2 = 30h^5\phi + O(h^6)$

Z(x+2h) ist exakte Lösung

Bedingung für Schrittweitenanpassung:

$\Delta >$ acc → verkleinern der Schrittweite

$\Delta <$ acc → ausreichende Genauigkeit erzielt

Alternative Einschrittverfahren mit Schrittweitenanpassung

Eingebettete Runge-Kutta-Formeln von Fehlberg:

(a) Verfahren 5. Ordnung mit 6 Funktionsaufrufen $$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} c_i k_i + O\left(h^6\right)$$

mit $$k_i = h\, f\left(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \qquad j = 1, \cdots, 6$$

(b) Verfahren 4. Ordnung mit gleichen Funktionsaufrufen $$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} \tilde{c}_i k_i + O\left(h^6\right)$$

i	a_i	b_{ij}					c_i	$\tilde{c}_i$
1	0						$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

Parameter von J.R. Cash und A.H. Karp,
ACM Trans. Math. Software **16**, 201 (1990)

Bedingung für Schrittweitenanpassung:

$$\Delta = y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{6} \left(c_j - \tilde{c}_j\right) k_j = \begin{cases} < acc & \text{Genauigkeit ausreichend} \\ > acc & \text{verkleinern der Schrittweite} \end{cases}$$

Fehlerabschätzung

Fehlerquellen:

- Unsicherheit der Eingabedaten
- Algorithmenfehler (Abbrechfehler)
- Rundungsfehler

gesamter Rundungsfehler

Numerische Lösung: $\tilde{\eta}_{i+1} = \tilde{\eta}_i + h\,\Phi(x_i, \tilde{\eta}_i; h) + \varepsilon_{i+1}$

Exakte Lösung: $z(x_{i+1}) = z(x_i) + h\,\Phi(x_i, z_i; h) + O(h^{p+1})$

Differenzbildung:

$$r_{i+1} = \tilde{\eta}_{i+1} - z(x_{i+1})$$

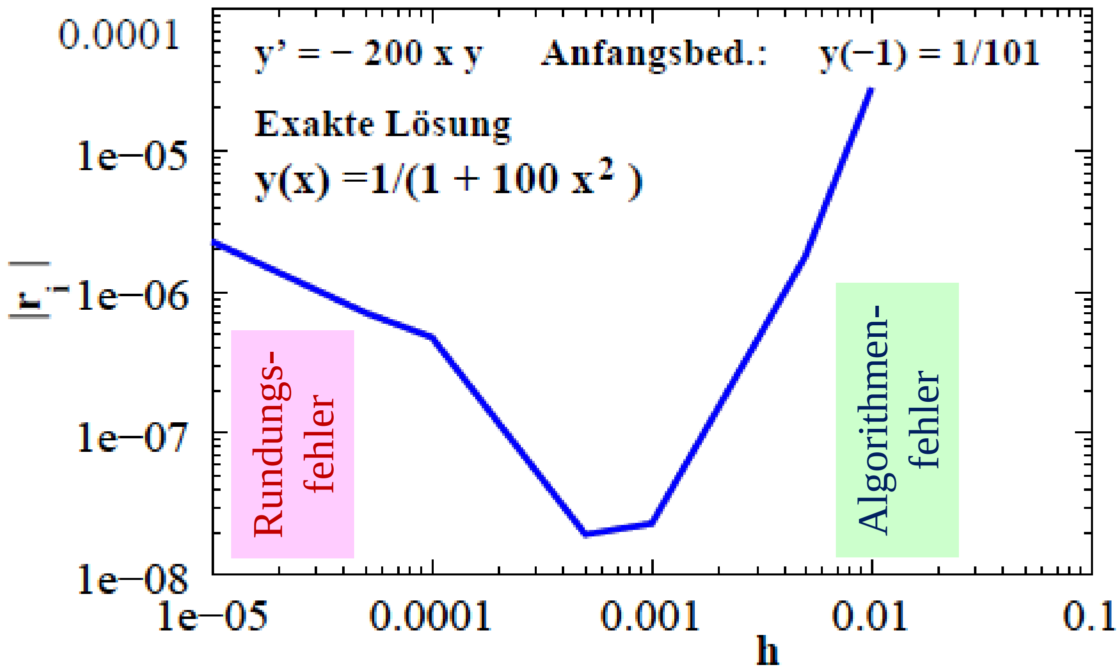
$$= \underbrace{\tilde{\eta}_i - z(x_i)}_{r_i} + h\left[\Phi(x_i, \tilde{\eta}_i; h) - \Phi(x_i, z_i; h)\right] + \varepsilon_{i+1} + O(h^{p+1})$$

Unter der Annahme einer Lipschitzbedingung für Φ erhält man die Abschätzung

$$|r_{i+1}| \le |r_i| + hL|r_i| + |\varepsilon_{i+1}| + Mh^{p+1}$$

$$|r_i| \le \left[Mh^p + \frac{|\varepsilon_i / L|}{h} \right] \frac{e^{L(x_e - x_a)} - 1}{L}$$

Beispiel - Rundungsfehler



Typische Form des Gesamtfehlers bei der Lösung einer Gewöhnlichen Differentialgleichung

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Im allgemeinen schreibt man Differentialgleichungen höherer Ordnung zuerst als System von Differentialgleichungen erster Ordnung an:

Wir betrachten die allgemeine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \cdots, y^{(n-1)})$$

Definiert man nun:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} z_1(x) = y(x) & & z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2(x) = y'(x) & & z_2'(x) = z_3(x) \\ z_3(x) = y''(x) & \Longrightarrow & z_3'(x) = z_4(x) \\ \vdots & & \vdots \\ z_n(x) = y^{(n-1)}(x) & & z_n'(x) = f(x, z_1, z_2, \cdots, z_n) \end{array}}$$

Weitere Vereinfachung – Autonomes System:

zusätzliche Definition von z_0

$$\boxed{z_0 = x \quad \Longrightarrow \quad z_0' = 1}$$

Lösung eines Systems von Dgl. 1. Ordnung

$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{z})$ bzw. autonomes System $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z})$

Taylorreihenentwicklung: $0 \le \varepsilon \le 1$

$$\mathbf{z}(x+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{h^k}{k!}\,\mathbf{z}^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\,\mathbf{z}^{(m+1)}(x+\varepsilon h)$$

Ersetzen der Ableitungen durch Ausdrücke mit **f**(t,z)

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{z})\,, \quad \ddot{\mathbf{z}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f} + \sum_i \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial}{\partial z_i}\mathbf{f}\,, \quad \dddot{\mathbf{z}} = \ldots$$

Man erhält die gleichen Verfahren wie für Einzeldifferentialgleichung

Einschrittverfahren für Systeme von Dgl. 1. Ordnung

allgemein:

$$\boxed{\mathbf{z}\left(x+h\right)=\mathbf{z}(x)+h\,\boldsymbol{\Phi}(x,\mathbf{z}(x);h)}$$

Schrittweite *h* ist evtl. veränderlich

charakteristisch für Einschrittverfahren

m=1 Euler- oder Polygonzugverfahren

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\mathbf{z}(x);h)=\mathbf{f}\left(x,\mathbf{z}\right)$$

m=2 Verfahren nach Heun und modifiziertes Eulerverfahren

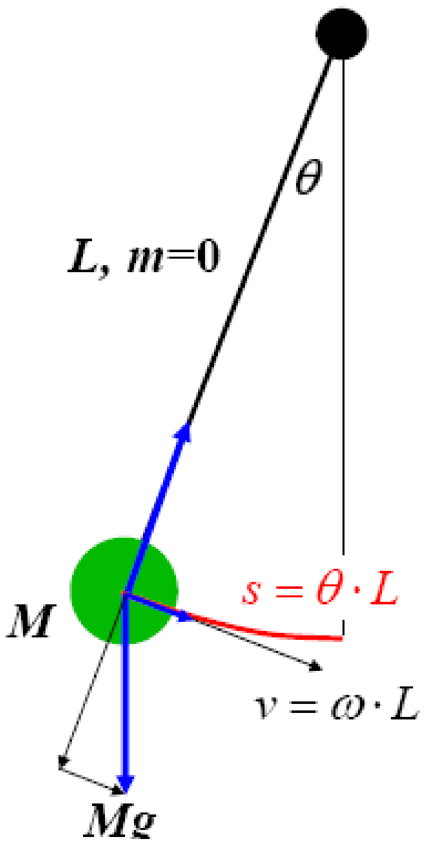
m=4 Verfahren nach Runge-Kutta

……. ……………………………….

Die Physik des mathematischen Pendels zeigt eine Vielfalt von Phänomene, die mit fundamentalen Konzepten der modernen Physik zusammenhängen. Die numerische Behandlung eröffnet die Möglichkeit auch komplexere Verhalten, z.B. den Übergang in chaotische Bewegung aufzuzeigen. Folgende Fragestellungen werden behandelt:

- Lösung der Bewegungsgleichung
- Darstellung im Phasenraum
- Phasenraumvolumen der Zustände
- Frequenzspektrum des freien, gedämpften und getriebenen Pendels

Pendel – Aufstellen der Bewegungsgleichung



- masseloser Stab, Länge L
- punktförmige Pendelmasse M
- ideale Aufhängung (keine Reibung)

→ nur zwei Kräfte:

- Schwerkraft
- Kraft, die vom Stab ausgeübt wird (Stab kompensiert Teil der Schwerkraft)

Bogenlänge:	$s = \theta \cdot L$
Geschwindigkeit:	$v = \dot{\theta} \cdot L = \omega \cdot L$
Beschleunigung:	$a = \ddot{\theta} \cdot L = \dot{\omega} \cdot L$

→ **Newton'sche Bewegungsgleichung**

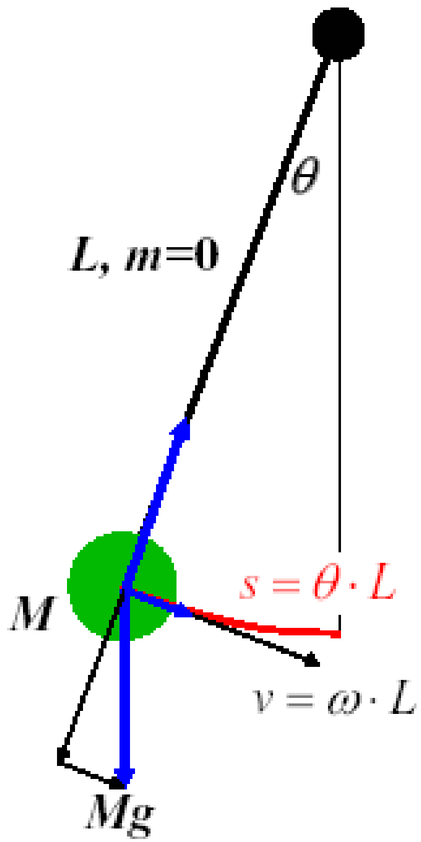
$$\to \quad \boxed{F = Ma = ML\ddot{\theta} = -Mg\sin(\theta)}$$

Bewegungsgleichung des Pendels

Bewegungsgleichung:

$$F = Ma = ML\ddot{\Theta} = -Mg\sin(\Theta)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\Theta} = -\omega_0^2 \sin(\Theta) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}$$



Definition eines Variablenvektors:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\omega_0^2 \sin(z_1) \end{pmatrix}}$$

„autonomes Systems", da die Zeit (unabhängige Variable) nicht explizit in der rechten Seite auftritt

Das gedämpfte Pendel

Einschränkung auf linearisierte Bewegungsgleichung: (für kleine Auslenkung $\sin(\Theta) \approx \Theta$)

$$ML\ddot{\Theta} + \gamma L\dot{\Theta} + Mg\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\Theta} + \frac{\gamma}{M}\dot{\Theta} + \frac{g}{L}\Theta = 0$$

mit $\tau \equiv \dfrac{M}{\gamma}$ und $\omega_0^2 \equiv \dfrac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\Theta} + \dfrac{1}{\tau}\dot{\Theta} + \omega_0^2\Theta = 0$

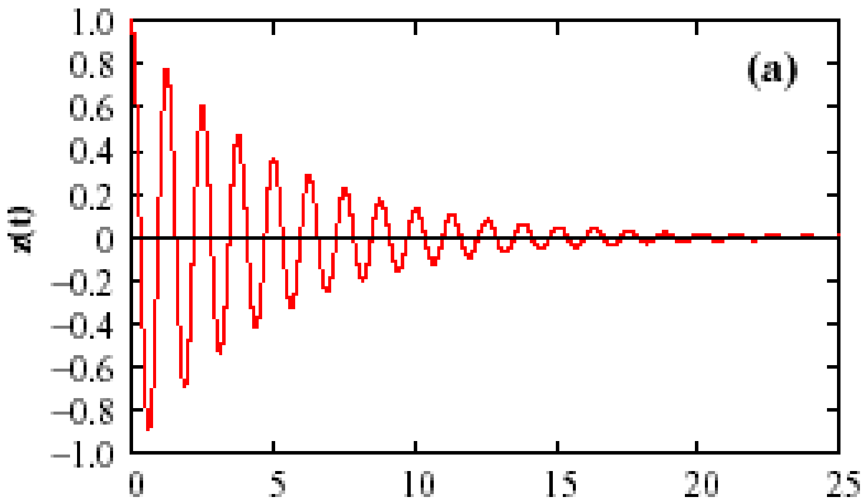
Lösung

$$\Theta(t) = A\,\mathrm{e}^{-\eta t}\sin(\omega t + \alpha)$$

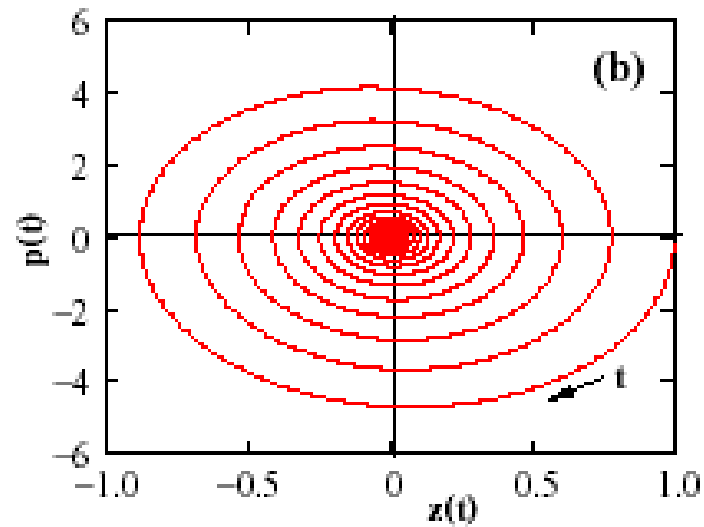
mit $\eta = \dfrac{1}{2\tau}$ und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2}$

Bewegung des gedämpften Pendels

Zeitliche Bewegung



Phasenraum



Bei schwacher Dämpfung:

$$\omega_0 \tau >> 1 \qquad \Theta(t) \approx \Theta_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

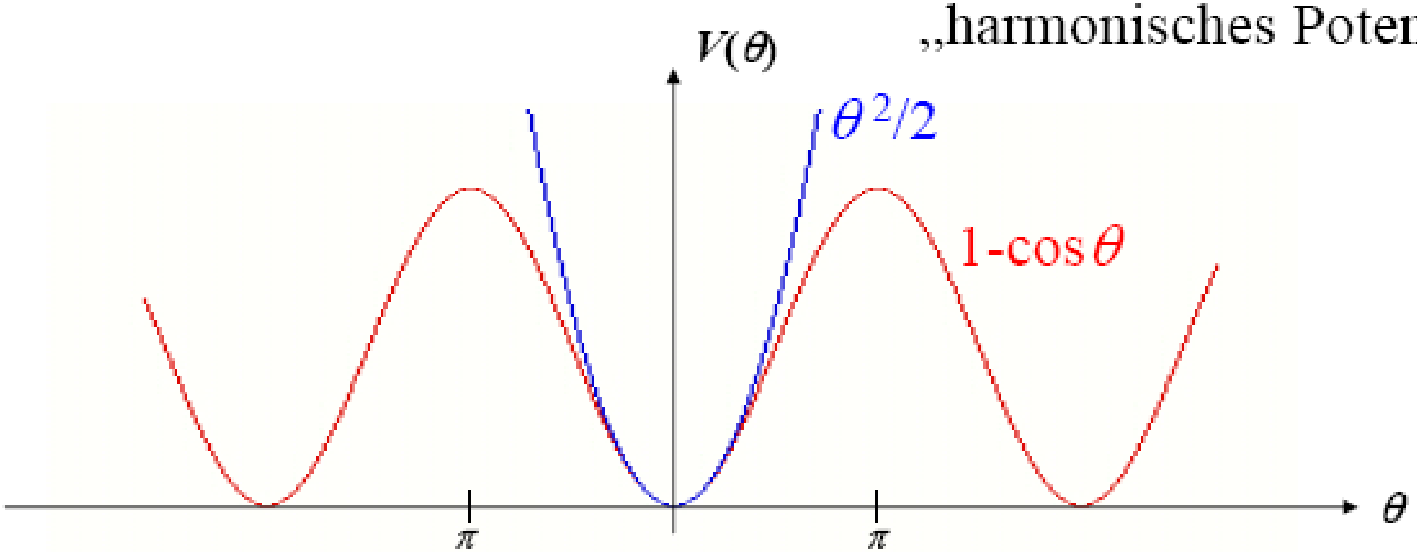
Hamilton Operator für Pendelbewegung

$$H = T + V = E = \text{konstant} \quad \leftarrow \quad \text{konservatives System}$$

$$= \frac{Mv^2}{2} + Mgz = \frac{1}{2} M \left(L\dot{\Theta} \right)^2 + MgL(1 - \cos\Theta)$$

$$= \frac{1}{2} ML^2\dot{\Theta}^2 + 2MgL\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \approx \frac{1}{2} ML^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} M\omega_0^2 L^2\Theta^2$$

„harmonisches Potential“



Hamilton Operator und Phasenraum

Darstellung der Energie als Funktion von verallgemeinerten Orts- und Impulskoordinaten

$$H(q_i, p_i) = T + V \quad \to \quad E\,; \qquad i = 1, \ldots, M$$

Dynamik des Systems beschrieben durch Hamilton-Gleichungen

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,; \qquad i = 1, \ldots, M}$$

„konservatives System“: keine explizite Zeitabhängigkeit in H

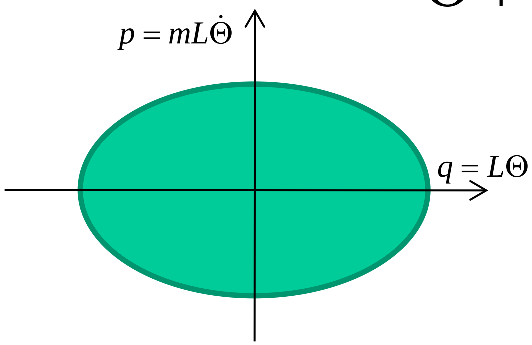
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \to \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} = 0$$

$$\to \quad H = const = E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Energieerhaltung}}$$

Phasenraumvolumen

Ungedämpftes linearisiertes Pendel = Harmonischer Oszilator

$$\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H = \tfrac{1}{2} M \left(L\dot{\Theta}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M \omega_0^2 \left(L\Theta\right)^2$$



Energieeigenwerte des HO: $E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \tfrac{1}{2}\right)$

Phasenraumfläche = Phasenraumvolumen in d=1

$$I(E) = \oint p(q, E)\, dq$$

Fläche einer Ellipse: $A = a\, b\, \pi$

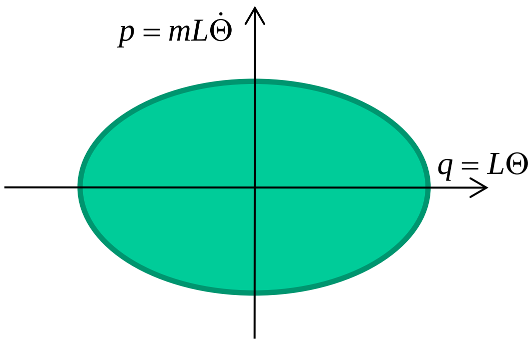
Halbachsen a, b

Halbachsen des harmonischen Oszillators im Phasenraum

$$\left.\begin{aligned} p_{\max} &= ML\dot{\Theta}_{\max} = \sqrt{2ME} \\ q_{\max} &= L\Theta_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{M\omega_0^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = p_{\max} q_{\max} \pi = 2\pi \frac{E}{\omega_0}$$

Quantisierung des Phasenraumvolumens

$$\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H = \tfrac{1}{2} M \left(L\dot{\Theta}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M \omega_0^2 \left(L\Theta\right)^2$$



Quantenmechanik
Energieeigenwerte des HO: $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \tfrac{1}{2}\right)$

Phasenraumfläche = Phasenraumvolumen in d=1

$$I(E_n) = \oint p(q, E_n)\, dq = 2\pi \frac{E_n}{\omega_0} = h\left(n + \tfrac{1}{2}\right)$$

Weylsche Regel:

Für Quantenzustand mit Energie $E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$

➔ Phasenraumvolumen $I(E_n) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)h$

Anzahl der Quantenzustände bis zur Energie E = $\dfrac{I(E)}{h} + \dfrac{1}{2} \approx \dfrac{I(E)}{h}$ für $E >> E_0$

Frequenzspektrum

Analyse der Schwingung in Frequenzanteile ist meist von Interesse

Fouriertransformation: $\tilde{\Theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(\mathrm{t})\, \mathrm{e}^{i\omega t}$

Ungedämpftes Pendel:

$$\Theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ für } t \in \left]-\infty, +\infty\right[\Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = i\pi A\left[\mathrm{e}^{-i\alpha}\delta(\omega-\omega_0) - \mathrm{e}^{i\alpha}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

alternative Randbedingung

$$\Theta(t) = \begin{cases} A\sin(\omega_0 t + \alpha) & \text{für } t \in \left]0, +\infty\right[\\ 0 & \text{für } t \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases} \Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = i\frac{\pi}{2}A\left[\mathrm{e}^{-i\alpha}\delta(\omega-\omega_0) - \mathrm{e}^{i\alpha}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

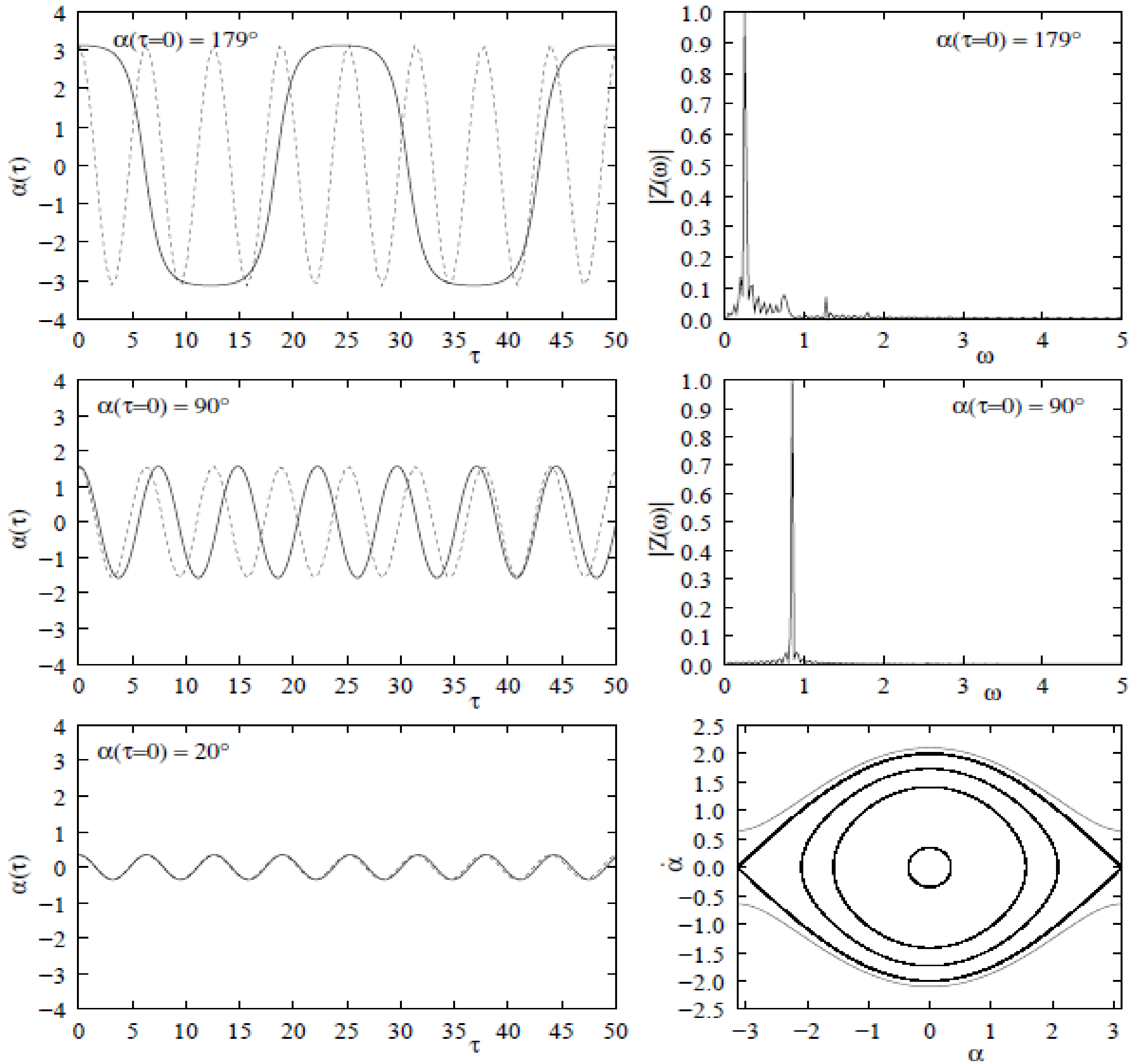
unter Verwendung von $\int_0^{\infty} dt\, \mathrm{e}^{i\omega t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \mathrm{e}^{i\omega t}$

Gedämpftes Pendel (Θ=0 für t<0) mit $\eta = 1/2\tau$ und $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \eta^2}$:

$$\Theta(t) = A\,\mathrm{e}^{-\eta t}\sin(\bar{\omega}t + \alpha) \text{ für } t \in \left]0, +\infty\right[\Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = \frac{A}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{(\omega+\bar{\omega})+i\eta} - \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{(\omega-\bar{\omega})+i\eta}\right]$$

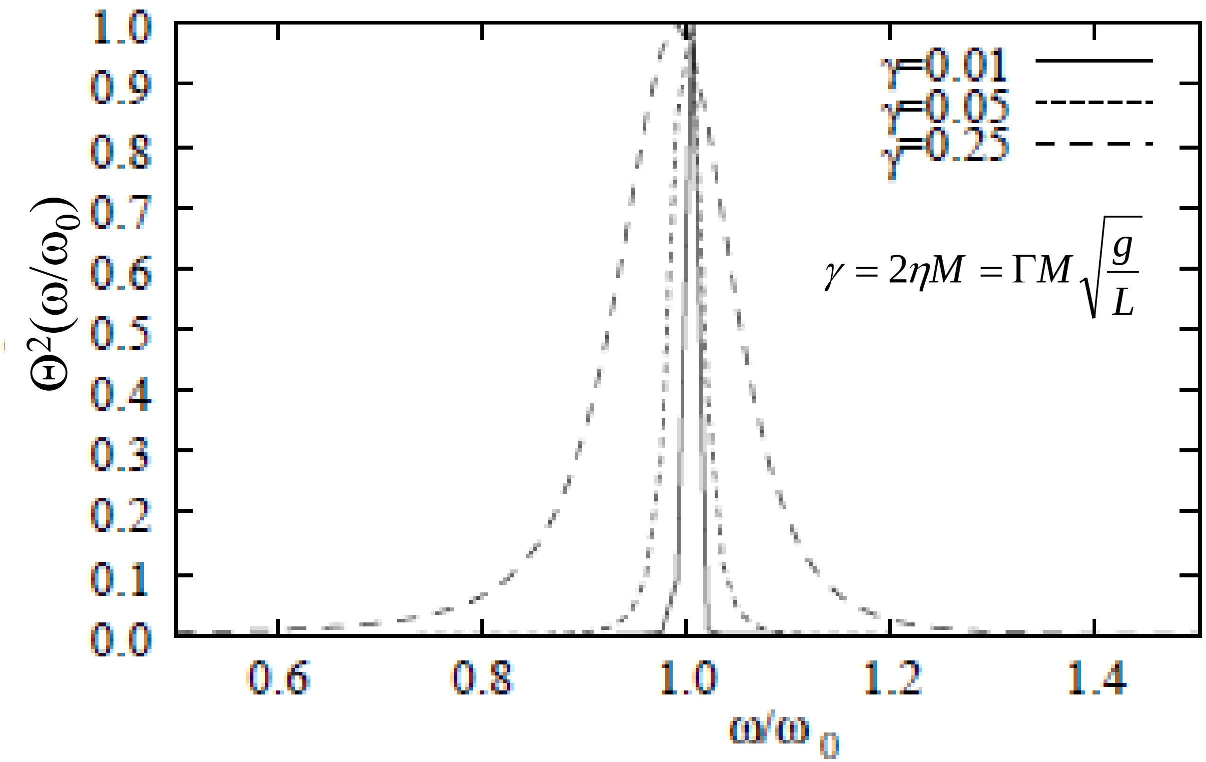
$$\boxed{\tilde{\Theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(\mathrm{t})\cos(\omega t) + i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(\mathrm{t})\sin(\omega t) \Rightarrow \left|\tilde{\Theta}(\omega)\right|^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(\mathrm{t})\cos(\omega t)\right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(\mathrm{t})\sin(\omega t)\right]^2}$$

Beispiel – freies ungedämpftes Pendel



Abhängigkeit von der Amplitude der Auslenkung Θ

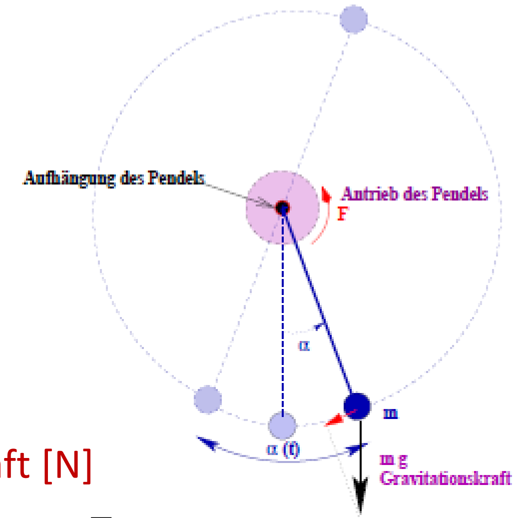
Frequenzspektren

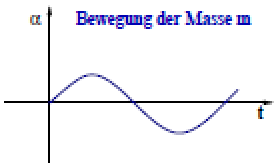


Frequenzspektren des gedämpften Pendels für verschiedene Dämpfungsstärken γ=0.01, 0.05 und 0.025 N/ms^{-1}

Das getriebene Pendel

Annahme:
Pendel kann beliebig durchdrehen
(Schwingung über 180°)





Bewegungsgleichung

$$ML\ddot{\alpha} + 2\eta ML\dot{\alpha} + Mg\alpha = F\sin(\Omega t + \beta)$$ Dimension: Kraft [N]

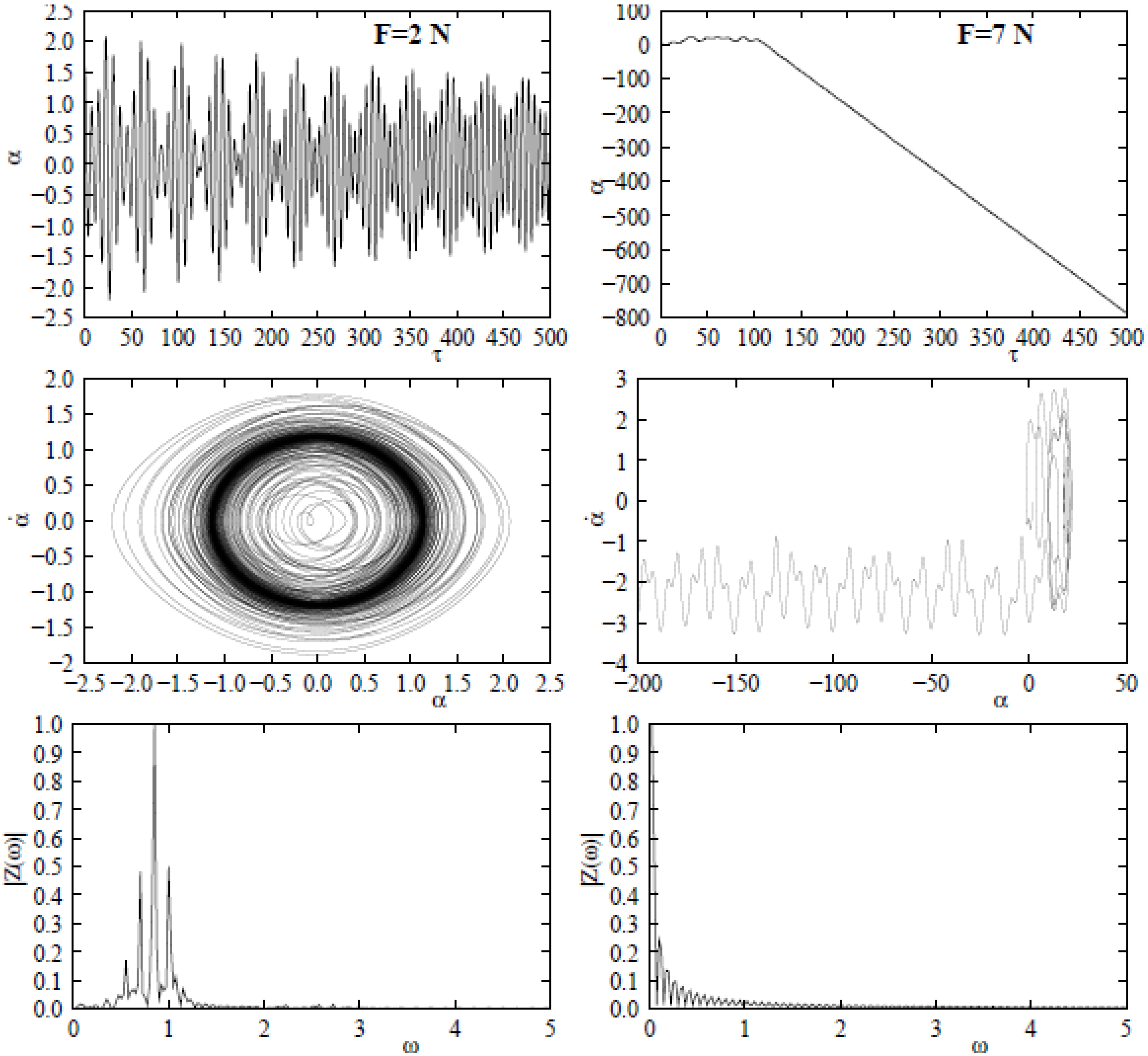
$$\ddot{\alpha} + 2\eta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = f\sin(\Omega t + \beta) \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad \text{und} \quad f = \frac{F}{ML}$$ Dimension: Zeit^{-2} [s^{-2}]

Transformation auf dimensionslose Parameter für Studien oft nützlich

$$t_0 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad \sigma = \frac{t}{t_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\Theta}{d\sigma^2} + \Gamma\frac{d\Theta}{d\sigma} + \sin(\Theta) = d\sin\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\sigma + \beta\right)$$

$$\text{mit} \quad \Gamma = 2\frac{\eta}{\omega_0} = 2\eta\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{und} \quad d = \frac{f}{\omega_0^2} = f\frac{L}{g} = \frac{F}{Mg}$$

Beispiel – getriebenes Pendel



Treiberfrequenz Ω=3.2 Hz

Antriebskraft 2 und 7 N