同倫類型論

JoJo
jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有**項**的集合 Λ 的遞歸定義如下

1. (變量) Λ 中有無窮個變量;
2. (抽象) 如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$, 則 $(u.M) \in \Lambda$;
3. (應用) 如果 $M, N \in \Lambda$, 則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

定義 1.2 子項

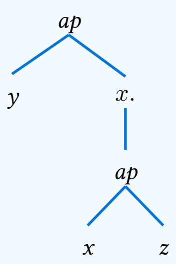
項 M 的所有**子項**的集合定義爲 $Sub(M)$, Sub 的遞歸定義如下

1. (基礎) 對於任何變量 x, $Sub(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$;
3. (應用) $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

引理 1.1 1. (自反性) 對於任何項 M, 有 $M \in Sub(M)$;

2. (傳遞性) 如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$, 則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出, 如下圖中的例子



$(y(x.(xz)))$ 的樹表示

項的子項對應於項的樹表示的子樹.

慣例 1.1 1. 最外層括號可以省略;

2. (抽象是右結合的) $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫;
3. (應用是左結合的) MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫;
4. (應用優先於抽象) $x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

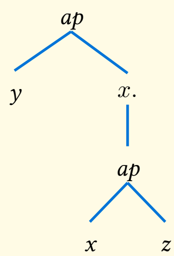
1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 自由變量

項 M 的所有**自由變量**的集合定義爲 $FV(M)$，FV 的遞歸定義如下

1. （變量） $FV(x) := \{x\}$；
2. （抽象） $FV(x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$；
3. （應用） $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}$.

定義 1.4 閉項

一個項 M 是**閉的** $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記爲 Λ^0.

1.3 α 等價

定義 1.5 重命名

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換爲 y，結果記爲 $\boldsymbol{M^{x \to y}}$.

定義 1.6 α 等價

定義 **α 等價** $=_\alpha$ 爲符合如下性質的關係

1. （重命名）如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x \to y}$；
2. （兼容性）如果 $M =_\alpha N$，則 $ML =_\alpha NL$，$LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$；
3. （自反性） $M =_\alpha M$；
4. （對稱性）如果 $M =_\alpha N$，則 $N =_\alpha M$；
5. （傳遞性）如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 代入

(1a) $x[N/x] := N$；

(1b) 如果 $x \neq y$，則 $y[N/x] := y$；

(2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$；

(3) 如果 $z.P^{y \to z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y \to z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 同時代入

$M[N_1, ..., N_n/x_1, ..., x_n]$ 表示把項 $N_1, ..., N_n$ **同時代入**到變量 $x_1, ..., x_n$.

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個**語境**是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_n : A_n$$

其中 $x_1, ..., x_n$ 是不同的變量，它們分別擁有類型 $A_1, ..., A_n$. 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\boldsymbol{\Gamma}$ ***ctx*** 是一個判斷，表示"Γ 是良構的語境."有如下規則

$$\frac{}{\cdot\ ctx}\ ctx\text{-}EMP$$

$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}\ ctx\text{-}EXT$$

其中，變量 x_n 與變量 $x_1, ..., x_n$ 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 *Vble* 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash x_i : A_i}\ Vble$$

定義 2.5 判斷相等

如果 $a =_\alpha b$，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}CUMUL$$

2.5 依賴函數類型

定義 2.7 依賴函數類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \to B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \to B_1 \equiv (x : A_2) \to B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \Pi\text{-}COMP$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}UNIQ$$

2.6 依賴序偶類型

定義 2.8 依賴序偶類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : (x : A) \times B}\ \Sigma\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B}\ \Sigma\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p) : C[p/z]}\ \Sigma\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]}\ \Sigma\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, (a, b)) \equiv g[a, b/x, y] : C[p/z]}\ \Sigma\text{-}COMP$$

2.7 餘積類型

定義 2.9 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \ +\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} \ +\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash inl(a) : A + B} \ +\text{-}INTRO_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash inr(b) : A + B} \ +\text{-}INTRO_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash inl(a_1) \equiv inl(a_2) : A + B} \ +\text{-}INTRO_1\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash inr(b_1) \equiv inr(b_2) : A + B} \ +\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash e : (A + B)}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) : C[e/z]} \ +\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} \ +\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, inl(a)) \equiv c[a/x] : C[inl(a)/z]} \ +\text{-}COMP_1$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, inr(b)) \equiv d[b/y] : C[inr(b)/z]} \ +\text{-}COMP_2$$

2.8 空類型 0

定義 2.10 空類型 0

$$\frac{\Gamma \ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \ \mathbf{0}\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{0}}(x.C, a) : C[a/x]} \ \mathbf{0}\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{0}}(x.C, a_1) \equiv ind_{\mathbf{0}}(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \ \mathbf{0}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

2.9 單元類型 1

定義 2.11 單元類型 1

$$\frac{\Gamma \ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \ \mathbf{1}\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \ ctx}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \ \mathbf{1}\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a) : C[a/x]} \ \mathbf{1}\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_1) \equiv ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \ \mathbf{1}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, \star) \equiv c : C[\star/x]} \ \mathbf{1}\text{-}COMP$$

2.10 自然數類型

定義 2.12 **自然數類型**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{N}\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n_1) \equiv succ(n_2) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n) : C[n/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x]}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, 0) \equiv c_0 : C[0/x]}\ \mathbb{N}\text{-}COMP_1$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, succ(n)) \equiv c_s[n, ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n)/x, y] : C[succ(n)/x]}\ \mathbb{N}\text{-}COMP_2$$

2.11 恆等類型

定義 2.13 **恆等類型**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i}\ =\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i}\ =\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash refl_a : a =_A a}\ =\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash refl_{a_1} \equiv refl_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2}\ =\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q) : C[a, b, q/x, y, p]}\ =\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]}\ =\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, refl_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, refl_a/x, y, p]}\ =\text{-}COMP$$

恆等類型的項稱爲**道路**；恆等類型的消除規則稱爲**道路歸納**.

2.12 定義

例子 2.1 $\circ :\equiv (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \to C) \mapsto (f : A \to B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x))$.

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A:\mathcal{U}_i, x, y:A$，都能構造一個函數 $\_^{-1}:(x=_A y)\to(y=_A x)$ 使得 $(refl_x)^{-1}\equiv refl_x$.

p^{-1} 稱爲 p 的**逆**.

Proof. 第一種證明

設 $A:\mathcal{U}_i$，$D:(x,y:A)\to(x=_A y)\to\mathcal{U}_i, D(x,y,p):\equiv(y=_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d:\equiv x\mapsto \mathrm{refl}_x:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x,y:A,p:(x=_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):(y=_A x)$.

現在對於任何 $x,y:A$ 我們可以定義期望得到的函數 $\_^{-1}:\equiv p\mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\mathrm{refl}_x)^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x,y:A$ 和 $p:x=y$，我們想要構造一個項 $p^{-1}:y=x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下，refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x=x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x^{-1}:\equiv\mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A:\mathcal{U}_i, x,y,z:A$，都能構造一個函數 $\centerdot:(x=_A y)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$ 使得 $refl_x\centerdot refl_x:\equiv refl_x$.

$p\centerdot q$ 稱爲 p 和 q 的**連接**.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x,y,z:A)\to(x=_A y)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$.

我們將改爲定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x,y:A)\to(x=_A y)\to(z:A)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D:(x,y:A)\to(x=_A y)\to\mathcal{U}_i, D(x,y,p):\equiv(z:A)\to(q:y=_A z)\to(x=_A z)$.

然後，爲了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型爲 $(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$ 的函數，也就是類型爲 $(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to(x=_A z)$.

現在設 $E:(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to\mathcal{U}_i, E(x,z,q):\equiv(x=_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e:\equiv x\mapsto\mathrm{refl}_x:(x:A)\to E(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d:(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to E(x,z,q), x\mapsto z\mapsto q\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q)$.

因爲 $E(x,z,q)\equiv(x=_A z)$，所以 $d:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x,y:A,p:(x=_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)\equiv\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x,z:A)\mapsto(q:y=_A z)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q),x,y,p\big):(z:A)\to(q:y=_A z)\to(x=_A z)$.

於是我們有

$$(x,y:A)\mapsto(p:x=_A y)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x,z:A)\mapsto(q:y=_A z)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q),x,y,p\big):$$

$$(x,y:A)\to(x=_A y)\to(z:A)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$$

現在對於任何 $a,b,c:A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\centerdot:\equiv(p:a=_A b)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x:A)\mapsto(q:b=_A c)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,c,q),a,b,p\big):$$

$$(a,b,c:A)\to(a=_A b)\to(b=_A c)\to(a=_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\mathrm{refl}_a\centerdot\mathrm{refl}_a\equiv\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x:A)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,a,\mathrm{refl}_a),a,a,\mathrm{refl}_a\big)\equiv\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,a,a,\mathrm{refl}_a)\equiv e(a)\equiv\mathrm{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x,y,z:A$，$p:x=y$ 和 $q:y=z$，我們想要構造一個項 $p\cdot q:x=z$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x,z:A$ 和 $q:x=z$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x\cdot q:x=z$. 根據 q 的道路歸納，只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x:A$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x:x=x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x:\equiv\mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.3 設 $A:\mathcal{U}_i$，$x,y,z,w:A$，$p:x=y$，$q:y=z$ 且 $r:z=w$. 我們有以下結論：

1. $p=p\cdot \mathit{refl}_y$ 且 $p=\mathit{refl}_x\cdot p$;
2. $p\cdot p^{-1}=\mathit{refl}_x$ 且 $p^{-1}\cdot p=\mathit{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1}=p$;
4. $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv(p=p\cdot\mathrm{refl}_y)$. 那麼 $D(x,x,\mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x\equiv\mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x,x,\mathrm{refl}_1)\equiv(\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d:\equiv x\mapsto\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_1)$. 根據道路歸納，對於每個 $x,y:A$ 和 $p:x=y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):p=p\cdot\mathrm{refl}_y$.

本書後面將把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x,y,p)\mapsto(p=p\cdot\mathrm{refl}_y),x\mapsto\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x},x,y,p\big)$ 記爲 $\mathbf{ru}_{\boldsymbol{p}}$，把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x,y,p)\mapsto(p=\mathrm{refl}_y\cdot p),x\mapsto\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x},x,y,p\big)$ 記爲 $\mathbf{lu}_{\boldsymbol{p}}$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p\cdot\mathrm{refl}_y\equiv\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x\equiv\mathrm{refl}_x$. 因此只需證明 $\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x$，這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}:\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x$.

2. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv(p\cdot p^{-1}=\mathrm{refl}_x)$. 那麼 $D(x,x,\mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x^{-1}=\mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$ 且 $\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x\equiv\mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x,x,\mathrm{refl}_x)\equiv(\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d:\equiv x\mapsto\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x,y:A$ 和 $p:x=y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):p\cdot p^{-1}=\mathrm{refl}_x$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p\cdot p^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$.

3. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv(p^{-1})^{-1}=p$. 那麼 $D(x,x,p)$ 是 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1}=\mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$，所以 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$，那麼 $D(x,x,\mathrm{refl}_x)\equiv(\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d:\equiv x\mapsto\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x,y:A$ 和 $p:x=y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):(p^{-1})^{-1}=p$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$(p^{-1})^{-1}\equiv(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x,y,z,w:A)\to(p:x=y)\to(q:y=z)\to(r:z=w)\to(p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r)$，我們改爲證明 $(x,y:A)\to(p:x=y)\to(z:A)\to(q:y=z)\to(w:A)\to(r:z=w)\to(p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r)$.

設 $D_1:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U},D_1(x,y,p):\equiv(z:A)\to(q:y=z)\to(w:A)\to(r:z=w)\to(p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r)$. 根據 p 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x:A)\to D_1(x,x,\mathrm{refl}_x)\equiv(x,z:A)\to(q:x=z)\to(w:A)\to(r:z=w)\to(\mathrm{refl}_x\cdot(q\cdot r)=(\mathrm{refl}_x\cdot q)\cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_2:(x,z:A)\to(q:x=z)\to\mathcal{U},D_2(x,z,q):\equiv(w:A)\to(r:z=w)\to(\mathrm{refl}_x\cdot(q\cdot r)=(\mathrm{refl}_x\cdot q)\cdot r)$. 根據 q 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)\equiv(x,w:A)\to(r:x=w)\to(\mathrm{refl}_x\cdot(\mathrm{refl}_x\cdot r)=(\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x)\cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_3:(x,w:A)\to(r:x=w)\to\mathcal{U},D_3(x,w,r):\equiv(\mathrm{refl}_x\cdot(\mathrm{refl}_x\cdot r)=(\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x)\cdot r)$. 根據 r 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x:A)\to D_3(x,x,\mathrm{refl}_x)\equiv(x:A)\to(\mathrm{refl}_x\cdot(\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x)=(\mathrm{refl}_x\cdot\mathrm{refl}_x)\cdot\mathrm{refl}_x)\equiv(x:A)\to\mathrm{refl}_x=\mathrm{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}$.

因此，應用 3 此道路歸納，我們就得到了想要的類型的函數. □

引理 3.4 **加鬚**

1. 對於任何 $a,b,c:A,p,q:a=b$，我們可以構造函數 $\_\cdot_{\boldsymbol{r}}\_:(p=q)\to(r:b=c)\to(p\cdot r=q\cdot r),\alpha\cdot_r\mathit{refl}_b:\equiv\mathit{ru}_p^{-1}\cdot\alpha\cdot\mathit{ru}_q$;
2. 對於任何 $a,b,c:A,q,r:b=c$，我們可以構造函數 $\_\cdot_{\boldsymbol{l}}\_:(p:a=b)\to(q=r)\to(p\cdot q=p\cdot r),\mathit{refl}_b\cdot_l\beta:\equiv\mathit{lu}_q^{-1}\cdot\beta\cdot\mathit{lu}_r$.

Proof. 略. □

引理 3.5 對於任何 $a,b,c:A,p,q:a=b,r,s:b=c,\alpha:p=q,\beta:r=s$，我們有 $(\alpha\cdot_r r)\cdot(q\cdot_l\beta)=(p\cdot_l\beta)\cdot(\alpha\cdot_r s)$.

Proof. 略. ☐

定理 3.1 ***Eckmann–Hilton***

$$(\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)) \to (\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha)$$

Proof. 略. ☐

定義 3.1 **有點類型**

設 $A : \mathcal{U}, a : A$. 序偶 $(A, a) : (A : \mathcal{U}) \times A$ 稱爲一個**有點類型**，a 稱爲它的**基點**. 類型 $(A : \mathcal{U}) \times A$ 記爲 $\mathcal{U}_\bullet$.

定義 3.2 **迴路空間**

對於 $n : \mathbb{N}$，一個有點類型 (A, a) 的 $\boldsymbol{n}$ **重迭代迴路空間** $\Omega^n(A, a)$ 遞歸地定義爲

$$\Omega^0(A, a) :\equiv (A, a),$$

$$\Omega^1(A, a) :\equiv ((a =_A a), refl_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A, a) :\equiv \Omega^n(\Omega(A, a)),$$

它的一個項稱爲點 a 的一個 $\boldsymbol{n}$ **維迴路**.

慣例 3.1 設 $\Omega^n(A, a) \equiv (B, b)$. 則 $x : \Omega^n(A, a)$ 表示 $x : B$.

3.2 函數是函子

引理 3.6 對於任何 $A, B : \mathcal{U}, f : A \to B, x, y : A$，都能構造函數 $ap_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y)), ap_f(refl_x) \equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (f(x) =_B f(y))$. 那麼我們有 $d :\equiv (x : A) \mapsto \mathrm{refl}_{f(x)} : (x : A) \to (f(x) =_B f(y))$. 根據 p 的道路歸納，我們得到函數 $\mathrm{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$. 根據恆等類型的計算規則，對於任何 $x : A$，有 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) \equiv \mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：爲了對任何 $p : x = y$ 定義 $\mathrm{ap}_f(p)$，根據 p 的道路歸納，只需要構造 p 是 refl_x 的情況. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$.

☐

慣例 3.2 我們將經常將 $ap_f(p)$ 簡寫爲 $f(p)$.

引理 3.7 對於任何函數 $f : A \to B, g : B \to C$ 和道路 $p : x =_A y, q : y =_A z$，我們有：

1. $ap_f(p \cdot q) = ap_f(p) \cdot ap_f(q)$；
2. $ap_f(p^{-1}) = (ap_f(p))^{-1}$；
3. $ap_g(ap_f(p)) = ap_{g \circ f}(p)$；
4. $ap_{id_A}(p) = p$.

Proof. 1. 根據的道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) = \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) \cdot \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)$，這太簡單，遂略.

2. 根據道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x^{-1}) = (\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x))^{-1}$，略.

3. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_g(\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)) = \mathrm{ap}_{g \circ f}(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{ap}_g(\mathrm{refl}_{f(x)}) = \mathrm{refl}_{g \circ f}$，略.

4. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_{\mathrm{id}_A}(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_x$，略. ☐

3.3 類型族是纖維化

引理 3.8 **傳送**

設 $B : A \to \mathcal{U}, x, y : A$，則存在函數 $transport^B(\_, \_) : p : x =_A y \to B(x) \to B(y), transport^B(refl_x, b) \equiv b$.

Proof. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U}, D(x,y,p):\equiv B(x)\to B(y)$. 那麼我們有函數 $d:\equiv(x:A)\mapsto \mathrm{id}_{B(x)}:D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x,y:A,p:x=y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):B(x)\to B(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p:x=y$，函數 $\mathrm{transport}^B(p,\ \_):\equiv \mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$. 根據計算規則，$\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,\ \_)\equiv \mathrm{id}_{B(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，對於任何 $b:B(x)$，我們定義 $\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,b):\equiv b$. □

引理 3.9 道路提升

設 $P:A\to\mathcal{U},x,y:A$. 則對於任何 $u:P(x),p:x=y$，我們有 $lift(u,p):(x,u)=_{(x:A)\times P(x)}(y,transport^P(p,u)), lift(u,refl_x)\equiv refl_{(x,u)}$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(x,u)=\big(x,\mathrm{id}_{P(x)}(u)\big)$，略. □

引理 3.10 依賴映射

設 $B:A\to\mathcal{U},f:(x:A)\to B(x),x,y:A$. 我們有映射 $apd_f:(p:x=_A y)\to\big(transport^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)\big), apd_f(refl_x):\equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(x=y)\to\mathcal{U}, D(x,y,p):\equiv \mathrm{transport}^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)$. 於是我們有函數 $d:\equiv(x:A)\mapsto \mathrm{refl}_{f(x)}:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x,y:A,p:x=y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):\mathrm{transport}^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p:x=y$，函數 $\mathrm{apd}_f(p):\equiv \mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$. 根據計算規則，$\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x):\equiv \mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x):\equiv \mathrm{refl}_{f(x)}:\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,f(x))=_{B(x)}f(x)$. □

引理 3.11 設 $B:A\to\mathcal{U},B(x):\equiv B,x,y:A$. 則能構造函數 $transportconst^B(\_,\_):(p:x=y)\to b:B\to b=transport^B(p,b)$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(b:B)\to b=\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,b)$，即 $(b:B)\to b=b$. 顯然只需定義 $\mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x,b):\equiv \mathrm{refl}_b$. □

引理 3.12 設 $f:A\to B,x,y:A$. 則對於任何路徑 $p:x=y$，我們有類型爲 $ap_f(p)=transportconst^B(p,f(x))\bullet apd_f(p)$ 的路徑.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)=\mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x,f(x))\bullet \mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{refl}_{f(x)}=\mathrm{refl}_{f(x)}\bullet \mathrm{refl}_{f(x)}$，這是顯然的. □

引理 3.13 $(P:A\to\mathcal{U})\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(q:y=z)\to(u:P(x))\to transport^P(q,transport^P(p,u))=transport^P(p\bullet q,u)$.

Proof. 略. □

引理 3.14 $(f:A\to B)\to(P:B\to\mathcal{U})\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(u:P(f(x)))\to transport^{P\circ f}(p,u)=transport^P\big(ap_f(p),u\big)$.

Proof. 略. □

引理 3.15

$(P,Q:A\to\mathcal{U})\to(f:(x:A)\to P(x)\to Q(x))\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(u:P(x))\to transport^Q(p,f_x(u))=_{Q(y)}f_y(transport^P(p,u))$.

Proof. 略. □

3.4 同倫和等價

定義 3.3 同倫

設 $P:A\to\mathcal{U},f,g:(x:A)\to P(x)$. 從 f 到 g 的一個**同倫**定義爲一個類型爲 $(f\sim g):\equiv(x:A)\to f(x)=g(x)$ 的函數.

引理 3.16 設 $f:A\to B$. 則 $(x:A)\mapsto refl_{f(x)}:f\sim f$.

Proof. 略. □

引理 3.17 設 $P : A \to \mathcal{U}$. 我們有：

1. $(f : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim f)$；
2. $(f, g : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim f)$；
3. $(f, g, h : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim h) \to (f \sim h)$.

Proof. 略. □

引理 3.18 設 $f, g : A \to B, H : f \sim g$. 則對於任何 $x, y : A, p : x = y$ 我們有 $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$，即下圖交換

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "f(p)"] \arrow[d, "H(x)"'] & f(y) \arrow[d, "H(y)"] \\ g(x) \arrow[r, "g(p)"'] & g(y) \end{tikzcd}$$

Proof. 略. □

推論 3.1 設 $f : A \to A, H : f \sim id_A$. 則對於任何 $x : A$ 我們有 $H(f(x)) = f(H(x))$.

Proof. 根據 H 的自然性，我們有 $f(H\,x) \cdot H\,x = H(f\,x) \cdot H\,x$，即下圖交換

$$\begin{tikzcd} f\,f\,x \arrow[r, "f(H\,x)"] \arrow[d, "H(f\,x)"'] & f\,x \arrow[d, "H\,x"] \\ f\,x \arrow[r, "H\,x"'] & x \end{tikzcd}$$

我們可以用 $(H\,x)^{-1}$ 加鬚來消除 $H\,x$，得到 $f(H\,x) = f(H\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x)$. □

定義 3.4 擬逆

對於一個函數 $f : A \to B$，它的一個**擬逆**是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \boldsymbol{qinv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$.

定義 3.5 等價

對 於 任 何 函 數 $f : A \to B$， 定 義 $\boldsymbol{isequiv}(f) :\equiv [(g : B \to A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \to A) \times (f \circ h \sim id_B)]$， $(A \simeq B) :\equiv (f : A \to B) \times isequiv(f)$.

引理 3.19 1. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $qinv(f) \to isequiv(f)$；

2. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $isequiv(f) \to qinv(f)$.

Proof. 1. 略.

2. 給 定 四 元 組 (g, α, h, β): $\mathrm{isequiv}(f)$， 我 們 有 $\alpha : (x : A) \to (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \to (f \circ h)(y) = y$， 那 麼 我 們 有 同 倫 $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \to g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$ 和 $\alpha \circ h : (y : B) \to (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$. 於 是 我 們 可 以 定 義 同 倫 $\gamma :\equiv (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \to g(y) = h(y)$. 那 麼 $f \circ \gamma : (y : B) \to (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$. 於 是 有 $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim \mathrm{id}_B$. 所以有 $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathrm{qinv}(f)$. □

引理 3.20 1. 對於任何類型 $A:\mathcal{U}$，我們有 $isequiv(id_A)$，即 $A\simeq A$;

2. 對於任何函數 $f:A\to B$ 使得 $isequiv(f)$，即 $A\simeq B$，我們有一個函數 $f^{-1}:B\to A$ 使得 $isequiv(f^{-1})$，即 $B\simeq A$;

3. 對於任何函數 $f:A\to B$ 使得 $isequiv(f)$（即 $A\simeq B$）和 $g:B\to C$ 使得 $isequiv(g)$（即 $B\simeq C$），我們有 $isequiv(g\circ f)$（即 $A\simeq C$）.

Proof. 1. 我們要證明對於任何類型 $A:\mathcal{U}$ 有 $[(g:B\to A)\times(g\circ \mathrm{id}_A\sim \mathrm{id}_A)]\times[(h:B\to A)\times(\mathrm{id}_A\circ h\sim \mathrm{id}_B)]$，略.

2. f 的擬逆.

3. $f^{-1}\circ g^{-1}$ 是 $g\circ f$ 的一個擬逆. □

3.5 宇宙和泛等公理

引理 3.21 對於任何類型 $A,B:\mathcal{U}$，我們有一個函數 $\boldsymbol{idtoeqv}_{A,B}:(A=_{\mathcal{U}}B)\to(A\simeq B)$.

Proof. 函數 $\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\_,\_):(A=_{\mathcal{U}}B)\to A\to B$. 我們要證明 $(p:A=_{\mathcal{U}}B)\to \mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p,\_)\big)$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{refl}_A,\_)\big)$，即證明 $\mathrm{isequiv}(\mathrm{id}_A)$.

定義 $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p):\equiv\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p,\_),a\big):A\simeq B$，其中 $a:\mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p,\_)\big)$. □

定義 3.6 泛等公理

$$\frac{\Gamma\vdash A:\mathcal{U}_i\quad \Gamma\vdash B:\mathcal{U}_i}{\Gamma\vdash univalence(A,B):isequiv\big(idtoeqv_{A,B}\big)}\ \mathcal{U}_i\text{-}UNIV$$

引理 3.22 $\big(idtoeqv_{A,B},univalence(A,B)\big):(A=_{\mathcal{U}}B)\simeq(A\simeq B)$.

3.6 恆等類型

引理 3.23 對於任何 $a,x_1,x_2:A$ 和 $p:x_1=x_2$，我們有

1. $(q:a=x_1)\to transport^{x\mapsto(a=x)}(p,q)=q\cdot p$;

2. $(q:x_1=a)\to transport^{x\mapsto(x=a)}(p,q)=p^{-1}\cdot q$;

3. $(q:x_1=x_2)\to transport^{x\mapsto(x=x)}(p,q)=p^{-1}\cdot q\cdot p$.

Proof. 略. □

4 集合和邏輯

4.1 集合和 n-類型

定義 4.1 **集合（0-類型）**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isSet}(A) :\equiv (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)$$

定義 4.2 **1-類型**

一個類型 A 是一個 **1-類型** 如果 $(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

引理 4.1 如果 A 是一個集合，則 A 是一個 1-類型.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)] \to (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

設 $f : \mathrm{isSet}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 和 $p, q : x = y$ 我們有 $p = q$. 給定 x, y 和 p，定義 $g : (q : x = y) \to (p = q), g :\equiv f(x, y, p, \_)$. 那麼對於任何 $q, q' : x = y$ 和 $\alpha : q = q'$，我們有 $\mathrm{apd}_g(\alpha) : \mathrm{transport}^{q \mapsto (p = q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$，也就有 $g(q) \cdot \alpha = g(q')$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$，我們有 $g(p) \cdot \alpha = g(q)$ 且 $g(p) \cdot \beta = g(q)$，也就有 $g(p) \cdot \alpha = g(p) \cdot \beta$，也就有 $\alpha = \beta$. □

4.2 命題

定義 4.3 **命題**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isProp}(A) :\equiv (x, y : A) \to (x = y)$$