

同倫類型論

JoJo

jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算	3
1.1 項	3
1.2 自由和綁定變量	3
1.3 α 等價	4
1.4 代入	4
2 類型論	6
2.1 項	6
2.2 語境	6
2.3 結構規則	6
2.4 類型宇宙	6
2.5 依賴函數類型	7
2.6 依賴序偶類型	7
2.7 餘積類型	8
2.8 空類型 0	9
2.9 單元類型 1	9
2.10 自然數類型	10
2.11 恆等類型	10
2.12 定義	11
3 同倫類型論	12
3.1 類型是高維羣胚	12
3.2 函數是函子	14
3.3 類型族是纖維化	14
3.4 同倫和等價	15
3.5 Σ -類型	17
3.6 單元類型	17
3.7 宇宙和泛等公理	17
3.8 恆等類型	18
3.9 自然數	18
4 集合和邏輯	21
4.1 集合和 n -類型	21
4.2 命題	21

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有項的集合 Λ 的遞歸定義如下

1. (變量) Λ 中有無窮個變量;
2. (抽象) 如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$, 則 $(u.M) \in \Lambda$;
3. (應用) 如果 $M, N \in \Lambda$, 則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

定義 1.2 子項

項 M 的所有子項的集合定義為 $Sub(M)$, Sub 的遞歸定義如下

1. (基礎) 對於任何變量 x , $Sub(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$;
3. (應用) $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

- 引理 1.1
1. (自反性) 對於任何項 M , 有 $M \in Sub(M)$;
 2. (傳遞性) 如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$, 則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出, 如下圖中的例子



項的子項對應於項的樹表示的子樹.

- 慣例 1.1
1. 最外層括號可以省略;
 2. (抽象是右結合的) $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫;
 3. (應用是左結合的) MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫;
 4. (應用優先於抽象) $x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 自由變量

項 M 的所有自由變量的集合定義為 $FV(M)$ ， FV 的遞歸定義如下

1. (變量) $FV(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $FV(\lambda x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$;
3. (應用) $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}.$$

定義 1.4 閉項

一個項 M 是閉的 $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記為 Λ^0 .

1.3 α 等價

定義 1.5 重命名

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換為 y ，結果記為 $M^{x \rightarrow y}$.

定義 1.6 α 等價

定義 α 等價 $=_\alpha$ 為符合如下性質的關係

1. (重命名) 如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x \rightarrow y}$;
2. (兼容性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $ML =_\alpha NL$ ， $LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$;
3. (自反性) $M =_\alpha M$;
4. (對稱性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $N =_\alpha M$;
5. (傳遞性) 如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$ ，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 代入

- (1a) $x[N/x] := N$;
- (1b) 如果 $x \neq y$ ，則 $y[N/x] := y$;
- (2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$;
- (3) 如果 $z.P^{y \rightarrow z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$ ，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y \rightarrow z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$ ，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 同時代人

$M[N_1, \dots, N_n / x_1, \dots, x_n]$ 表示把項 N_1, \dots, N_n 同時代入到變量 x_1, \dots, x_n .

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個語境是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$$

其中 x_1, \dots, x_n 是不同的變量，它們分別擁有類型 A_1, \dots, A_n . 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\Gamma \text{ ctx}$ 是一個判斷，表示“ Γ 是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{ ctx-EMP}$$
$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}} \text{ ctx-EXT}$$

其中，變量 x_n 與變量 x_1, \dots, x_n 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 Vble 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \text{ Vble}$$

定義 2.5 判斷相等

如果 $a =_\alpha b$ ，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL}$$

2.5 依賴函數類型

定義 2.7 依賴函數類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \rightarrow B : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \rightarrow B_1 \equiv (x : A_2) \rightarrow B_2 : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]} \Pi\text{-COMP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-UNIQ}$$

2.6 依賴序偶類型

定義 2.8 依賴序偶類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM-EQ}$$

構造子 (引入規則): $\langle _, _ \rangle : \{B : A \rightarrow \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow b : B(a) \rightarrow (x : A) \times B$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO-EQ}$$

消除器 (消除規則): $ind_{(x:A) \times B} : [C : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow (b : B(a)) \rightarrow C(\langle a, b \rangle)] \rightarrow [p : (x : A) \times B(x)] \rightarrow C(p)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p) : C[p/z]} \Sigma\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]} \Sigma\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則: $ind_{(x:A) \times B}(C, g, \langle a, b \rangle) \equiv g(a)(b)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, (a, b)) \equiv g[a, b/x, y] : C[p/z]} \Sigma\text{-COMP}$$

2.7 餘積類型

定義 2.9 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \text{+-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} \text{+-FORM-EQ}$$

構造子 1: $\text{inl} : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow A \rightarrow A + B$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{inl}(a) : A + B} \text{+-INTRO}_1$$

構造子 2: $\text{inl} : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow B \rightarrow A + B$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \text{inr}(b) : A + B} \text{+-INTRO}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{inl}(a_1) \equiv \text{inl}(a_2) : A + B} \text{+-INTRO}_1\text{-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash \text{inr}(b_1) \equiv \text{inr}(b_2) : A + B} \text{+-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器: $\text{ind}_{A+B} : [C : (A + B) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow C(\text{inl}(a))] \rightarrow [(b : B) \rightarrow C(\text{inr}(b))] \rightarrow (e : A + B) \rightarrow C(e)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e : (A + B)}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) : C[e/z]} \text{+-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} \text{+-ELIM-EQ}$$

計算規則 1: $\text{ind}_{A+B}(C, g_0, g_1, \text{inl}(a)) \equiv g_0(a)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \text{inl}(a)) \equiv c[a/x] : C[\text{inl}(a)/z]} \text{+-COMP}_1$$

計算規則 2: $\text{ind}_{A+B}(C, g_0, g_1, \text{inr}(b)) \equiv g_1(b)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \text{inr}(b)) \equiv d[b/y] : C[\text{inr}(b)/z]} \text{+-COMP}_2$$

2.8 空類型 0

定義 2.10 空類型 0

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0}\text{-FORM}$$

消除器: $\text{ind}_{\mathbf{0}} : (C : \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (a : \mathbf{0}) \rightarrow C(a)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a) : C[a/x]} \mathbf{0}\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_1) \equiv \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{0}\text{-ELIM-EQ}$$

2.9 單元類型 1

定義 2.11 單元類型 1

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \mathbf{1-FORM}$$

構造子: $\star : \mathbf{1}$

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \mathbf{1-INTRO}$$

消除器: $ind_1 : (C : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(\star) \rightarrow (x : \mathbf{1}) \rightarrow C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_1(x.C, c, a) : C[a/x]} \mathbf{1-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_1(x.C, c, a_1) \equiv ind_1(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{1-ELIM-EQ}$$

計算規則: $ind_1(C, c, \star) \equiv c$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash ind_1(x.C, c, \star) \equiv c : C[\star/x]} \mathbf{1-COMP}$$

2.10 自然數類型

定義 2.12 自然數類型

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i} \mathbb{N-FORM}$$

構造子 1: $0 : \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}} \mathbb{N-INTRO}_1$$

構造子 2: $succ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n) : \mathbb{N}} \mathbb{N-INTRO}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n_1) \equiv succ(n_2) : \mathbb{N}} \mathbb{N-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器: $ind_{\mathbb{N}} : (C : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(0) \rightarrow [(n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n) \rightarrow C(succ(n))] \rightarrow (n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n) : C[n/x]} \mathbb{N-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]} \mathbb{N-ELIM-EQ}$$

計算規則 1: $ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) \equiv c_0$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x]}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, 0) \equiv c_0 : C[0/x]} \mathbb{N-COMP}_1$$

計算規則 2: $ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, succ(n)) \equiv c_s(n, ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n))$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, succ(n)) \equiv c_s[n, ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n)/x, y] : C[succ(n)/x]} \mathbb{N-COMP}_2$$

2.11 恆等類型

定義 2.13 恆等類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} = \text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i} = \text{-FORM-EQ}$$

構造子: $\text{refl} : \{A : \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow (a = a)$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_a : a =_A a} = \text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_{a_1} \equiv \text{refl}_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2} = \text{-INTRO-EQ}$$

消除器: $\text{ind}_{=_A} : [C : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(x : A) \rightarrow C(x, x, \text{refl}_x)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow C(x, y, p)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q) : C[a, b, q/x, y, p]} = \text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]} = \text{-ELIM-EQ}$$

計算規則: $\text{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \text{refl}_x) := c(x)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, \text{refl}_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, \text{refl}_a/x, y, p]} = \text{-COMP}$$

恆等類型的項稱為**道路**；恆等類型的消除規則稱為**道路歸納**。

2.12 定義

例子 2.1 $\circ := (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \rightarrow C) \mapsto (f : A \rightarrow B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x))$.

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$ ，都能構造一個函數 $_{-}^{-1} : (x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$ 使得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

p^{-1} 稱為 p 的逆.

Proof. 第一種證明

設 $A : \mathcal{U}_i, D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (y =_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$.

現在對於任何 $x, y : A$ 我們可以定義期望得到的函數 $_{-}^{-1} := p \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$ ，我們想要構造一個項 $p^{-1} : y = x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下， refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x^{-1} := \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$ ，都能構造一個函數 $\cdot : (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ 使得 $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$.

$p \cdot q$ 稱為 p 和 q 的連接.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x, y, z : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

我們將改為定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ ，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

然後，為了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型為 $(x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ 的函數，也就是類型為 $(x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

現在設 $E : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow \mathcal{U}_i, E(x, z, q) := (x =_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow E(x, x, \text{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$.

因為 $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$ ，所以 $d : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : \\ (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$$

現在對於任何 $a, b, c : A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\cdot := (p : a =_A b) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p) : \\ (a, b, c : A) \rightarrow (a =_A b) \rightarrow (b =_A c) \rightarrow (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \text{refl}_a), a, a, \text{refl}_a) \equiv \text{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \text{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \text{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$, $p : x = y$ 和 $q : y = z$, 我們想要構造一個項 $p \bullet q : x = z$. 根據 p 的道路歸納, 我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet q : x = z$. 根據 q 的道路歸納, 只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x : A$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納, 我們完成了構造. \square

引理 3.3 設 $A : \mathcal{U}_i$, $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ 且 $r : z = w$. 我們有以下結論:

1. $p = p \bullet \text{refl}_y$ 且 $p = \text{refl}_x \bullet p$;
2. $p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$ 且 $p^{-1} \bullet p = \text{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1} = p$;
4. $p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p = p \bullet \text{refl}_y)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x = \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p = p \bullet \text{refl}_y$.

本書後面將把 $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = p \bullet \text{refl}_y), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$ 記為 \mathbf{ru}_p , 把 $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = \text{refl}_y \bullet p), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$ 記為 \mathbf{lu}_p .

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet \text{refl}_y \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 因此只需證明 $\text{refl}_x = \text{refl}_x$, 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x} : \text{refl}_x = \text{refl}_x$.

2. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ 且 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet p^{-1} \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

3. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p^{-1})^{-1} = p$. 那麼 $D(x, x, p)$ 是 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 所以 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $(p^{-1})^{-1} \equiv (\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x, y, z, w : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$, 我們改為證明 $(x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$.

設 $D_1 : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D_1(x, y, p) \equiv (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$. 根據 p 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_1(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_2 : (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow \mathcal{U}, D_2(x, z, q) \equiv (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$. 根據 q 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_2(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_3 : (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow \mathcal{U}, D_3(x, w, r) \equiv (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$. 根據 r 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_3(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow \text{refl}_x = \text{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x}$.

因此, 應用 3 此道路歸納, 我們就得到了想要的類型的函數. \square

引理 3.4 加贅

1. 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b$, 我們可以構造函數 $_ \bullet_{\mathbf{r}} _ : (p = q) \rightarrow (r : b = c) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet r), \alpha \bullet_{\mathbf{r}} \text{refl}_b \equiv ru_p^{-1} \bullet \alpha \bullet ru_q$;
2. 對於任何 $a, b, c : A, q, r : b = c$, 我們可以構造函數 $_ \bullet_{\mathbf{l}} _ : (p : a = b) \rightarrow (q = r) \rightarrow (p \bullet q = p \bullet r), \text{refl}_b \bullet_{\mathbf{l}} \beta \equiv lu_q^{-1} \bullet \beta \bullet lu_r$.

Proof. 略. \square

引理 3.5 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b, r, s : b = c, \alpha : p = q, \beta : r = s$, 我們有 $(\alpha \bullet_{\mathbf{r}} r) \bullet (q \bullet_{\mathbf{l}} \beta) = (p \bullet_{\mathbf{l}} \beta) \bullet (\alpha \bullet_{\mathbf{r}} s)$.

Proof. 略. □

定理 3.1 Eckmann–Hilton

$$(\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)) \rightarrow (\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha)$$

Proof. 略. □

定義 3.1 有點類型

設 $A : \mathcal{U}, a : A$. 序偶 $(A, a) : (A : \mathcal{U}) \times A$ 稱為一個**有點類型**, a 稱為它的**基點**. 類型 $(A : \mathcal{U}) \times A$ 記為 \mathcal{U}_\bullet .

定義 3.2 迴路空間

對於 $n : \mathbb{N}$, 一個有點類型 (A, a) 的 n 重迭代迴路空間 $\Omega^n(A, a)$ 遞歸地定義為

$$\Omega^0(A, a) \equiv (A, a),$$

$$\Omega^1(A, a) \equiv ((a =_A a), \text{refl}_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A, a) \equiv \Omega^n(\Omega(A, a)),$$

它的一個項稱為點 a 的一個 n 維迴路.

慣例 3.1 設 $\Omega^n(A, a) \equiv (B, b)$. 則 $x : \Omega^n(A, a)$ 表示 $x : B$.

3.2 函數是函子

引理 3.6 對於任何 $A, B : \mathcal{U}, f : A \rightarrow B, x, y : A$, 都能構造函數 $\mathbf{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y)), \mathbf{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (f(x) =_B f(y))$. 那麼我們有 $d \equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : (x : A) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$. 根據 p 的道路歸納, 我們得到函數 $\mathbf{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$. 根據恆等類型的計算規則, 對於任何 $x : A$, 有 $\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

第二種證明: 為了對任何 $p : x = y$ 定義 $\mathbf{ap}_f(p)$, 根據 p 的道路歸納, 只需要構造 p 是 refl_x 的情況. 在該情況下, 我們定義 $\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$. □

慣例 3.2 我們將經常將 $\mathbf{ap}_f(p)$ 簡寫為 $f(p)$.

引理 3.7 對於任何函數 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ 和道路 $p : x =_A y, q : y =_A z$, 我們有:

1. $\mathbf{ap}_f(p \bullet q) = \mathbf{ap}_f(p) \bullet \mathbf{ap}_f(q)$;
2. $\mathbf{ap}_f(p^{-1}) = (\mathbf{ap}_f(p))^{-1}$;
3. $\mathbf{ap}_g(\mathbf{ap}_f(p)) = \mathbf{ap}_{g \circ f}(p)$;
4. $\mathbf{ap}_{\text{id}_A}(p) = p$.

Proof. 1. 根據的道路歸納, 只需要證明 $\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = \mathbf{ap}_f(\text{refl}_x) \bullet \mathbf{ap}_f(\text{refl}_x)$, 這太簡單, 遂略.

2. 根據道路歸納, 只需要證明 $\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x^{-1}) = (\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x))^{-1}$, 略.

3. 根據道路歸納, 只需證明 $\mathbf{ap}_g(\mathbf{ap}_f(\text{refl}_x)) = \mathbf{ap}_{g \circ f}(\text{refl}_x)$, 即 $\mathbf{ap}_g(\text{refl}_{f(x)}) = \text{refl}_{g \circ f}$, 略.

4. 根據道路歸納, 只需證明 $\mathbf{ap}_{\text{id}_A}(\text{refl}_x) = \text{refl}_x$, 略. □

3.3 類型族是纖維化

引理 3.8 傳送

設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$, 則存在函數 $\mathbf{transport}^B(_, _) : p : x =_A y \rightarrow B(x) \rightarrow B(y), \mathbf{transport}^B(\text{refl}_x, b) \equiv b$.

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) := B(x) \rightarrow B(y)$. 那麼我們有函數 $d := (x : A) \mapsto \text{id}_{B(x)} : D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : B(x) \rightarrow B(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$ ，函數 $\text{transport}^B(p, _) := \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$. 根據計算規則， $\text{transport}^B(\text{refl}_x, _) \equiv \text{id}_{B(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x . 在該情況下，對於任何 $b : B(x)$ ，我們定義 $\text{transport}^B(\text{refl}_x, b) := b$. □

引理 3.9 道路提升

設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$. 則對於任何 $u : P(x), p : x = y$ ，我們有 $\text{lift}(u, p) : (x, u) =_{(x:A) \times P(x)} (y, \text{transport}^P(p, u)), \text{lift}(u, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{(x,u)}$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(x, u) = (x, \text{id}_{P(x)}(u))$ ，略. □

引理 3.10 依賴映射

設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, f : (x : A) \rightarrow B(x), x, y : A$. 我們有映射 $\text{apd}_f : (p : x =_A y) \rightarrow (\text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)), \text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) := \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$. 於是我們有函數 $d := (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$ ，函數 $\text{apd}_f(p) := \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$. 根據計算規則， $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x . 在該情況下，我們定義 $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : \text{transport}^B(\text{refl}_x, f(x)) =_{B(x)} f(x)$. □

引理 3.11 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, B(x) := B, x, y : A$. 則能構造函數 $\text{transportconst}^B(_, _) : (p : x = y) \rightarrow b : B \rightarrow b = \text{transport}^B(p, b)$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(b : B) \rightarrow b = \text{transport}^B(\text{refl}_x, b)$ ，即 $(b : B) \rightarrow b = b$. 顯然只需定義 $\text{transportconst}^B(\text{refl}_x, b) \equiv \text{refl}_b$. □

引理 3.12 設 $f : A \rightarrow B, x, y : A$. 則對於任何路徑 $p : x = y$ ，我們有類型為 $\text{ap}_f(p) = \text{transportconst}^B(p, f(x)) \cdot \text{apd}_f(p)$ 的路徑.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $\text{ap}_f(\text{refl}_x) = \text{transportconst}^B(\text{refl}_x, f(x)) \cdot \text{apd}_f(\text{refl}_x)$ ，即 $\text{refl}_{f(x)} = \text{refl}_{f(x)} \cdot \text{refl}_{f(x)}$ ，這是顯然的. □

引理 3.13 $(P : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^P(q, \text{transport}^P(p, u)) = \text{transport}^P(p \cdot q, u)$.

Proof. 略. □

引理 3.14 $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (P : B \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(f(x))) \rightarrow \text{transport}^{P \circ f}(p, u) = \text{transport}^P(\text{ap}_f(p), u)$.

Proof. 略. □

引理 3.15

$(P, Q : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^Q(p, f_x(u)) =_{Q(y)} f_y(\text{transport}^P(p, u))$.

Proof. 略. □

3.4 同倫和等價

定義 3.3 同倫

設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}, f, g : (x : A) \rightarrow P(x)$. 從 f 到 g 的一個同倫定義為一個類型為 $(f \sim g) := (x : A) \rightarrow f(x) = g(x)$ 的函數.

引理 3.16 設 $f : A \rightarrow B$. 則 $(x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : f \sim f$.

Proof. 略. □

引理 3.17 設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$. 我們有:

1. $(f : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim f)$;
2. $(f, g : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim f)$;
3. $(f, g, h : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim h) \rightarrow (f \sim h)$.

Proof. 略. □

引理 3.18 設 $f, g : A \rightarrow B, H : f \sim g$. 則對於任何 $x, y : A, p : x = y$ 我們有 $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$, 即下圖交換

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(p)} & f(y) \\ \downarrow H(x) & & \downarrow H(y) \\ g(x) & \xrightarrow{g(p)} & g(y) \end{array}$$

Proof. 略. □

推論 3.1 設 $f : A \rightarrow A, H : f \sim id_A$. 則對於任何 $x : A$ 我們有 $H(f(x)) = f(H(x))$.

Proof. 根據 H 的自然性, 我們有 $f(H(x)) \cdot Hx = H(fx) \cdot Hx$, 即下圖交換

$$\begin{array}{ccc} ffx & \xrightarrow{f(Hx)} & fx \\ \downarrow H(fx) & & \downarrow Hx \\ fx & \xrightarrow{Hx} & x \end{array}$$

我們可以用 $(Hx)^{-1}$ 加鬚來消除 Hx , 得到 $f(Hx) = f(Hx) \cdot Hx \cdot (Hx)^{-1} = H(fx) \cdot Hx \cdot (Hx)^{-1} = H(fx)$. □

定義 3.4 擬逆

對於一個函數 $f : A \rightarrow B$, 它的一個擬逆是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \mathbf{qinv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$.

定義 3.5 等價

對於任何函數 $f : A \rightarrow B$, 定義 $\mathbf{isequiv}(f) \equiv [(g : B \rightarrow A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (f \circ h \sim id_B)]$, $(A \simeq B) \equiv (f : A \rightarrow B) \times \mathbf{isequiv}(f)$.

引理 3.19 1. 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 存在函數 $\mathbf{qinv}(f) \rightarrow \mathbf{isequiv}(f)$;

2. 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 存在函數 $\mathbf{isequiv}(f) \rightarrow \mathbf{qinv}(f)$.

Proof. 1. 略.

2. 給定四元組 $(g, \alpha, h, \beta) : \mathbf{isequiv}(f)$, 我們有 $\alpha : (x : A) \rightarrow (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \rightarrow (f \circ h)(y) = y$, 那麼我們有同倫 $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \rightarrow g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$ 和 $\alpha \circ h : (y : B) \rightarrow (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$. 於是我們可以定義同倫 $\gamma \equiv (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \rightarrow g(y) = h(y)$. 那麼 $f \circ \gamma : (y : B) \rightarrow (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$. 於是有 $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim id_B$. 所以有 $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathbf{qinv}(f)$. □

引理 3.20 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ ，我們有 $isequiv(id_A)$ ，即 $A \simeq A$ ；

2. 對於任何函數 $f : A \rightarrow B$ 使得 $isequiv(f)$ ，即 $A \simeq B$ ，我們有一個函數 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 使得 $isequiv(f^{-1})$ ，即 $B \simeq A$ ；

3. 對於任何函數 $f : A \rightarrow B$ 使得 $isequiv(f)$ （即 $A \simeq B$ ）和 $g : B \rightarrow C$ 使得 $isequiv(g)$ （即 $B \simeq C$ ），我們有 $isequiv(g \circ f)$ （即 $A \simeq C$ ）。

Proof. 1. 我們要證明對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ 有 $[(g : B \rightarrow A) \times (g \circ id_A \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (id_A \circ h \sim id_B)]$ ，略。

2. f 的擬逆。

3. $f^{-1} \circ g^{-1}$ 是 $g \circ f$ 的一個擬逆。 □

3.5 Σ -類型

定理 3.2

3.6 單元類型

定理 3.3

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow ((x = y) \simeq \mathbf{1}).$$

Proof. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$ 。設函數 $f : (\star = \star) \rightarrow \mathbf{1}, x \mapsto \star$ 和 $g : \mathbf{1} \rightarrow (\star = \star), x \mapsto \text{refl}_\star$ 。那麼我們只需證明對於任何 $x : \star = \star$ 有 $(g \circ f)(x) = id_{\star = \star}(x)$ 和對於任何 $x : \mathbf{1}$ 有 $(f \circ g)(x) = id_{\mathbf{1}}(x)$ 。根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(g \circ f)(\text{refl}_\star) = id_{\star = \star}(\text{refl}_\star)$ 和 $(f \circ g)(\star) = id_{\mathbf{1}}(\star)$ ，略。 □

定理 3.4

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow (x = y).$$

Proof. 略。 □

3.7 宇宙和泛等公理

引理 3.21 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$ ，我們有一個函數 $idtoeqv_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$ 。

Proof. 函數 $\text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(_, _) : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow A \rightarrow B$ 。我們要證明 $(p : A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow isequiv(\text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(p, _))$ 。根據 p 的道路歸納，只需證明 $isequiv(\text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(\text{refl}_A, _))$ ，即證明 $isequiv(id_A)$ 。

定義 $idtoeqv_{A,B}(p) \equiv (\text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(p, _), a) : A \simeq B$ ，其中 $a : isequiv(\text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(p, _))$ 。 □

引理 3.22 $(id_A, a) = idtoeqv_{A,B}(\text{refl}_A)$ ，其中 $a : isequiv(id_A)$ 。

引理 3.23 對於任何 $x, y : A, p : x = y, B : A \rightarrow \mathcal{U}, u : B(x)$ ，我們有 $\text{transport}^B(p, u) = \text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(\text{ap}_B(p), u) = \text{pr}_1(idtoeqv(\text{ap}_B(p)))(u)$ 。

Proof. 根據歸納原理，只需證明 $\text{transport}^B(\text{refl}_x, u) = \text{transport}^{id_{\mathcal{U}}}(\text{ap}_B(\text{refl}_x), u) = \text{pr}_1(idtoeqv(\text{ap}_B(\text{refl}_x)))(u)$ ，略。 □

Proof. 略。 □

定義 3.6 泛等公理（不常用）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \text{univalence}(A, B) : isequiv(idtoeqv_{A,B})} \mathcal{U}_i\text{-UNIV}$$

引理 3.24 $(idtoeqv_{A,B}, \text{univalence}(A, B)) : (A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$ 。

Proof. 略。 □

定義 3.7 泛等公理 (常用)

1. 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$ ，我們有一個函數 $\mathbf{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B)$;
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ ，我們有 $\text{idtoeqv}_{A,B}(\mathbf{ua}(f, a)) = (f, a)$;
3. 對於任何 $p : A =_{\mathcal{U}} B$ ，我們有 $p = \mathbf{ua}(\text{idtoeqv}_{A,B}(p))$.

- 引理 3.25** 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ ，我們有 $\text{refl}_A = \text{ua}(\text{id}_A, a)$ ，其中 $a : \text{isequiv}(\text{id}_A)$;
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B, (g, b) : B \simeq C$ ，我們有 $\text{ua}(f, a) \bullet \text{ua}(g, b) = \text{ua}(g \circ f, c)$.
 3. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ 和它的一個擬逆 (f^{-1}, b) ，我們有 $(\text{ua}(f, a))^{-1} = \text{ua}(f^{-1}, b)$.

Proof. 略. □

3.8 恆等類型

定理 3.5 如果 $(f, a) : A \simeq B$ ，則對於任何 $x, x' : A$ ，函數 $\text{ap}_f : (x = x') \rightarrow (f(x) = f(x'))$ 也是一個等價。

Proof. 我們想要構造一個四元組 $(g, \gamma, h, \delta) : \text{isequiv}(\text{ap}_f)$ ，即 $g : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \gamma : (p : x = x') \rightarrow (g(\text{ap}_f(p)) = p), h : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \delta : (q : f(x) = f(x')) \rightarrow (\text{ap}_f(g(q)))$.

設 $(f^{-1}, \alpha, \beta) : \text{qinv}(f)$ ，即 $f^{-1} : B \rightarrow A, \alpha : (x : A) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = x), \beta : (y : B) \rightarrow (f(f^{-1}(y)) = y)$.

那麼對於任何 $x, x' : A$ ，我們有 $\text{ap}_{f^{-1}} : (f(x) = f(x')) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')))$.

於是對於任何 $p : x = x'$ ，我們有

$$\begin{aligned} & \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(\text{ap}_f(p)) \bullet \alpha_{x'} \\ &= \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1} \circ f}(p) \bullet \alpha_{x'} \\ &= \text{ap}_{\text{id}_A}(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

且對於任何 $q : f(x) = f(x')$ ，我們有

$$\begin{aligned} & \text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \bullet \text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \bullet \beta_{f(x')}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\text{ap}_f^{-1}(\text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}))) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\alpha_x \bullet \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'} \bullet \alpha_{x'}^{-1}) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\text{ap}_{f^{-1}}(q)) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= q. \end{aligned}$$

□

引理 3.26 對於任何 $a, x_1, x_2 : A$ 和 $p : x_1 = x_2$ ，我們有

1. $(q : a = x_1) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (a=x)}(p, q) = q \bullet p$;
2. $(q : x_1 = a) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (x=a)}(p, q) = p^{-1} \bullet q$;
3. $(q : x_1 = x_2) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (x=x)}(p, q) = p^{-1} \bullet q \bullet p$.

Proof. 略. □

3.9 自然數

定義 3.8 $code$

定義函數

$$code : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U},$$

模式匹配

$$code(0, 0) \equiv 1$$

$$code(succ(m), 0) \equiv 0$$

$$code(0, succ(n)) \equiv 0$$

$$code(succ(m), succ(n)) \equiv code(m, n).$$

定義 3.9 r

定義函數

$$r : (n : \mathbb{N}) \rightarrow code(n, n)$$

模式匹配

$$r(0) \equiv \star$$

$$r(succ(n)) \equiv r(n).$$

定理 3.6 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 我們有 $(m = n) \simeq code(m, n)$.

Proof. 定義函數

$$encode : (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow (m = n) \rightarrow code(m, n),$$

$$encode(m, n, p) \equiv transport^{code(m, \cdot)}(p, r(m)),$$

和函數

$$decode : (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow code(m, n) \rightarrow (m = n),$$

模式匹配

$$decode(0, 0, \star) \equiv refl_0$$

$$decode(succ(m), 0, _) \equiv ind_0((x : 0) \mapsto (m = n), _)$$

$$decode(0, succ(n), _) \equiv ind_0((x : 0) \mapsto (m = n), _)$$

$$decode(succ(m), succ(n), _) \equiv ap_{succ} \circ decode(m, n, _).$$

接下來我們要證明對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 有 $encode(m, n, _)$ 和 $decode(m, n, _)$ 互為擬逆。

我們先證明對於任何 $p : m = n$ 有 $decode(m, n, encode(m, n, p)) = p$ 。根據 p 的道路歸納，只需證明 $decode(m, m, encode(m, m, refl_m)) = refl_m$ ，即 $decode(m, m, r(m)) = refl_m$ 。對 m 使用歸納法，如果 $m \equiv 0$ ，那麼 $decode(0, 0, r(0)) = decode(0, 0, \star) = refl_0$ ；設 $x : \mathbb{N}, y : decode(x, x, r(x)) = refl_x$ ，則 $decode(succ(x), succ(x), r(succ(x))) = ap_{succ}(decode(x, x, r(x))) = ap_{succ}(refl_x) = refl_{succ(x)}$ 。

然後我們證明對於任何 $c : code(m, n)$ 有 $encode(m, n, decode(m, n, c)) = c$ 。我們對 m, n 進行雙歸納。如果都是 0，那麼 $encode(0, 0, decode(0, 0, c)) = encode(0, 0, decode(0, 0, \star)) = encode(0, 0, refl_0) = r(0) = \star = c$ ；如果 m 是 0 且 n 是一個後繼，或反之，那麼有 $c : 0$ ；最後是兩個後繼的情況，根據歸納假設我們有

$$\begin{aligned} & encode(succ(m), succ(n), decode(succ(m), succ(n), c)) \\ &= encode(succ(m), succ(n), ap_{succ}(decode(m, n, c))) \\ &= transport^{code(succ(m), \cdot)}(ap_{succ}(decode(m, n, c)), r(succ(m))) \\ &= transport^{code(succ(m), succ(\cdot))}(decode(m, n, c), r(succ(m))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{transport}^{\text{code}(m, _)}(\text{decode}(m, n, c), r(m)) \\
&= \text{encode}(m, n, \text{decode}(m, n, c)) \\
&= c
\end{aligned}$$

□

- 推論 3.2** 1. 對於任何 $m : \mathbb{N}$, 我們有 $\text{encode}(\text{succ}(m), 0, _) : (\text{succ}(m) = 0) \rightarrow \mathbf{0}$;
2. 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$, 我們有 $\text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), _)) : (\text{succ}(m) = \text{succ}(n)) \rightarrow (m = n)$.

Proof. 略.

□

4 集合和邏輯

4.1 集合和 n -類型

定義 4.1 集合 (0-類型)

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\mathbf{isSet}(A) := (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q).$$

定義 4.2 1-類型

一個類型 A 是一個 **1-類型** 如果 $(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$.

引理 4.1 如果 A 是一個集合, 則 A 是一個 1-類型.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$.

設 $f : \mathbf{isSet}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 和 $p, q : x = y$ 我們有 $p = q$. 給定 x, y 和 p , 定義 $g : (q : x = y) \rightarrow (p = q), g := f(x, y, p, _)$. 那麼對於任何 $q, q' : x = y$ 和 $\alpha : q = q'$, 我們有 $\text{apd}_g(\alpha) : \text{transport}^{q \rightarrow (p=q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$, 也就有 $g(q) \cdot \alpha = g(q')$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$, 我們有 $g(p) \cdot \alpha = g(q)$ 且 $g(p) \cdot \beta = g(q)$, 也就有 $g(p) \cdot \alpha = g(p) \cdot \beta$, 也就有 $\alpha = \beta$. \square

4.2 命題

定義 4.3 命題 (−1-類型)

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\mathbf{isProp}(A) := (x, y : A) \rightarrow (x = y).$$

引理 4.2 如果 P, Q 是命題使得 $P \rightarrow Q$ 且 $Q \rightarrow P$, 則 $P \simeq Q$.

Proof. 略. \square

引理 4.3 如果 P 是一個命題且 $x_0 : P$, 則 $P \simeq \mathbf{1}$.

Proof. 略. \square

定義 4.4 可縮的

$$\mathbf{isContr}(A) := (a : A) \times ((x : A) \rightarrow (a = x)).$$

引理 4.4 每個命題都是一個集合.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \rightarrow (x = y)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)$.

設 $f : \mathbf{isProp}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 我們有 $f(x, y) : x = y$. 給定 x , 定義 $g : (y : A) \rightarrow x = y, g := f(x, _)$. 那麼對於任何 $y, z : A$ 和 $p : y = z$, 我們有 $\text{apd}_g(p) : \text{transport}^{y \rightarrow x=y}(p, g(y)) = g(z)$, 也就有 $g(y) \cdot p = g(z)$, 也就有 $p = (g(y))^{-1} \cdot g(z)$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y$, 我們有 $p = (g(x))^{-1} \cdot g(y) = q$. \square