同倫類型論

JoJo
jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 **項**

所有**項**的集合 Λ 的遞歸定義如下

1.（變量）Λ 中有無窮個變量；

2.（抽象）如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$，則 $(u.M) \in \Lambda$；

3.（應用）如果 $M, N \in \Lambda$，則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

定義 1.2 **子項**

項 M 的所有**子項**的集合定義爲 $Sub(M)$，Sub 的遞歸定義如下

1.（基礎）對於任何變量 x，$Sub(x) := \{x\}$；

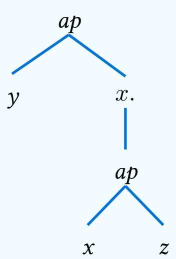
2.（抽象）$Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$；

3.（應用）$Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

引理 1.1 1.（自反性）對於任何項 M，有 $M \in Sub(M)$；

2.（傳遞性）如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$，則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出，如下圖中的例子



$(y(x.(xz)))$ 的樹表示

項的子項對應於項的樹表示的子樹.

慣例 1.1 1. 最外層括號可以省略；

2.（抽象是右結合的）$x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫；

3.（應用是左結合的）MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫；

4.（應用優先於抽象）$x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

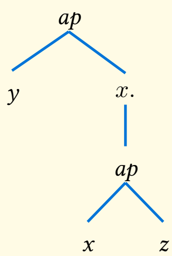
1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 **自由變量**

項 M 的所有**自由變量**的集合定義爲 $FV(M)$，FV 的遞歸定義如下

1. （變量） $FV(x) := \{x\}$；
2. （抽象） $FV(x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$；
3. （應用） $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}$.

定義 1.4 **閉項**

一個項 M 是**閉的** $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記爲 Λ^0.

1.3 α 等價

定義 1.5 **重命名**

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換爲 y，結果記爲 $\boldsymbol{M^{x\to y}}$.

定義 1.6 **α 等價**

定義 **α 等價** $=_\alpha$ 爲符合如下性質的關係

1. （重命名）如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x\to y}$；
2. （兼容性）如果 $M =_\alpha N$，則 $ML =_\alpha NL$，$LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$；
3. （自反性） $M =_\alpha M$；
4. （對稱性）如果 $M =_\alpha N$，則 $N =_\alpha M$；
5. （傳遞性）如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 **代入**

$(1a)$ $x[N/x] := N$；

$(1b)$ 如果 $x \neq y$，則 $y[N/x] := y$；

(2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$；

(3) 如果 $z.P^{y\to z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y\to z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 同時代入

$M[N_1, ..., N_n/x_1, ..., x_n]$ 表示把項 $N_1, ..., N_n$ **同時代入**到變量 $x_1, ..., x_n$.

2 類型論

2.1 λ 演算

慣例 2.1 **λ 演算**

一些概念沿用自 λ 演算，具體是哪些，則在本筆記後續內容中自然展現.

2.2 語境

定義 2.1 **語境**

一個**語境**是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_n : A_n$$

其中 $x_1, ..., x_n$ 是不同的變量，它們分別擁有類型 $A_1, ..., A_n$. 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.2 **語境規則**

$\boldsymbol{\Gamma}$ ***ctx*** 是一個判斷，表示“Γ 是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot\ ctx}\ ctx\text{-}EMP$$

$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}\ ctx\text{-}EXT$$

其中，變量 x_n 與變量 $x_1, ..., x_n$ 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.3 ***Vble*** **規則**

$$\frac{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash x_i : A_i}\ Vble$$

定義 2.4 **判斷相等**

如果 $a =_\alpha b$，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.5 **類型宇宙層級**

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}CUMUL$$

2.5 依賴函數類型（Π-類型）

定義 2.6 **依賴函數類型（Π-類型）**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \to B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \to B_1 \equiv (x : A_2) \to B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \Pi\text{-}COMP$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}UNIQ$$

定義 2.7 **函數類型**

設 $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \to \mathcal{U}$. 我們定義**函數類型**

$$A \to B :\equiv (x : A) \to B.$$

2.6 依賴序偶類型（Σ-類型）

定義 2.8 依賴序偶類型（Σ-類型）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i} \ \Sigma\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i} \ \Sigma\text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子（引入規則）: $\langle \_, \_ \rangle : \{B : A \to \mathcal{U}\} \to (a : A) \to b : B(a) \to (x : A) \times B$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B} \ \Sigma\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

消除器（消除規則）: $ind_{(x:A)\times B} : [C : ((x : A) \times B(x)) \to \mathcal{U}] \to [(a : A) \to (b : B(a)) \to C(\langle a, b\rangle)] \to [p : (x : A) \times B(x)] \to C(p)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]} \ \Sigma\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則: $ind_{(x:A)\times B}(C, g, \langle a, b\rangle) :\equiv g(a)(b)$

定義 2.9 *cartesian* 類型

設 $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \to \mathcal{U}$. 我們定義 ***cartesian*** **類型**

$$A \times B :\equiv (x : A) \times B.$$

引理 2.1 投影函數

對於任何 Σ-類型 $(x : A) \times B(x)$，我們有函數

$$\boldsymbol{pr_1} : ((x : A) \times B(x)) \to A, \boldsymbol{pr_1}(\langle a, b\rangle) :\equiv a$$

和

$$\boldsymbol{pr_2} : (p : (x : A) \times B(x)) \to B(pr_1(p)), \boldsymbol{pr_2}(\langle a, b\rangle) :\equiv b.$$

Proof. 略. □

2.7 餘積類型

定義 2.10 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \ +\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} \ +\text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子 1: $inl : \{A, B : \mathcal{U}\} \to A \to A + B$

構造子 2: $inl : \{A, B : \mathcal{U}\} \to B \to A + B$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash inl(a_1) \equiv inl(a_2) : A + B} \ +\text{-}INTRO_1\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash inr(b_1) \equiv inr(b_2) : A + B} \ +\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

消除器: $ind_{A+B} : [C : (A + B) \to \mathcal{U}] \to [(a : A) \to C(inl(a))] \to [(b : B) \to C(inr(b))] \to (e : A + B) \to C(e)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} \ +\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則 1: $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inl(a)) :\equiv g_0(a)$

計算規則 2: $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inr(b)) :\equiv g_1(b)$

2.8 空類型 0

定義 2.11 **空類型 0**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{0}\text{-}\mathit{FORM}$$

消除器：$ind_{\mathbf{0}} : (C : \mathbf{0} \to \mathcal{U}) \to (a : \mathbf{0}) \to C(a)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{0}}(x.C, a_1) \equiv ind_{\mathbf{0}}(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{0}\text{-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

2.9 單元類型 1

定義 2.12 **單元類型 1**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{1}\text{-}\mathit{FORM}$$

構造子：$\star : \mathbf{1}$

消除器：$ind_{\mathbf{1}} : (C : \mathbf{1} \to \mathcal{U}) \to C(\star) \to (x : \mathbf{1}) \to C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_1) \equiv ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{1}\text{-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

計算規則：$ind_{\mathbf{1}}(C, c, \star) :\equiv c$

2.10 boolean 類型

定義 2.13 ***boolean*** **類型**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{2} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{2}\text{-}\mathit{FORM}$$

構造子 1：$0_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

構造子 2：$1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

消除器：$ind_{\mathbf{2}} : (C : \mathbf{2} \to \mathcal{U}) \to C(0_{\mathbf{2}}) \to C(1_{\mathbf{2}}) \to (x : \mathbf{2}) \to C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0_{\mathbf{2}}/x] \quad \Gamma \vdash c_1 : C[1_{\mathbf{2}}/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{2}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{2}}(x.C, c_0, c_1, a_1) \equiv ind_{\mathbf{2}}(x.C, c_0, c_1, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{2}\text{-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

計算規則 1：$ind_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0$

計算規則 2：$ind_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1$

2.11 自然數類型

定義 2.14 **自然數類型**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{N}\text{-}FORM$$

構造子 1：$0 : \mathbb{N}$

構造子 2：$succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n_1) \equiv succ(n_2) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

消除器：$ind_{\mathbb{N}} : (C : \mathbb{N} \to \mathcal{U}) \to C(0) \to [(n : N) \to C(n) \to C(succ(n))] \to (n : \mathbb{N}) \to C(n)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則 1：$ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) :\equiv c_0$

計算規則 2：$ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, succ(n)) :\equiv c_s(n, ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n))$

2.12 恆等類型

定義 2.15 **恆等類型**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i}\ = \text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i}\ = \text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子：$refl : \{A : \mathcal{U}\} \to (a : A) \to (a = a)$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash refl_{a_1} \equiv refl_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2}\ = \text{-}INTRO\text{-}EQ$$

消除器：$ind_{=_A} : [C : (x, y : A) \to (x = y) \to \mathcal{U}] \to [(x : A) \to C(x, x, refl_x)] \to (x, y : A) \to (p : x = y) \to C(x, y, p)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]}\ = \text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則：$ind_{=_A}(C, c, x, x, refl_x) :\equiv c(x)$

恆等類型的項稱爲**道路**；恆等類型的消除規則稱爲**道路歸納**.

2.13 定義

例子 2.1 **函數的合成**

$\circ :\equiv (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \to C) \mapsto (f : A \to B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x))$.

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$，都能構造一個函數 $\_^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$ 使得 $(refl_x)^{-1} \equiv refl_x$.

p^{-1} 稱爲 p 的**逆**.

Proof. 第一種證明

設 $A : \mathcal{U}_i$，$D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}_i, D(x, y, p) :\equiv (y =_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_x : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$.

現在對於任何 $x, y : A$ 我們可以定義期望得到的函數 $\_^{-1} :\equiv p \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\mathrm{refl}_x)^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們想要構造一個項 $p^{-1} : y = x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下，refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x^{-1} :\equiv \mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$，都能構造一個函數 $\centerdot : (x =_A y) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$ 使得 $refl_x \centerdot refl_x :\equiv refl_x$.

$p \centerdot q$ 稱爲 p 和 q 的**連接**.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x, y, z : A) \to (x =_A y) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$.

我們將改爲定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x, y : A) \to (x =_A y) \to (z : A) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}_i, D(x, y, p) :\equiv (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

然後，爲了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型爲 $(x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 的函數，也就是類型爲 $(x, z : A) \to (q : x =_A z) \to (x =_A z)$.

現在設 $E : (x, z : A) \to (q : x =_A z) \to \mathcal{U}_i, E(x, z, q) :\equiv (x =_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_x : (x : A) \to E(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d : (x, z : A) \to (q : x =_A z) \to E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$.

因爲 $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$，所以 $d : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p\big) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p\big) :$$

$$(x, y : A) \to (x =_A y) \to (z : A) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$$

現在對於任何 $a, b, c : A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\centerdot :\equiv (p : a =_A b) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p\big) :$$

$$(a, b, c : A) \to (a =_A b) \to (b =_A c) \to (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\mathrm{refl}_a \centerdot \mathrm{refl}_a \equiv \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x : A) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \mathrm{refl}_a), a, a, \mathrm{refl}_a\big) \equiv \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \mathrm{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \mathrm{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$，$p : x = y$ 和 $q : y = z$，我們想要構造一個項 $p \cdot q : x = z$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot q : x = z$. 根據 q 的道路歸納，只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x : A$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x :\equiv \mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.3 設 $A : \mathcal{U}_i$，$x, y, z, w : A$，$p : x = y$，$q : y = z$ 且 $r : z = w$. 我們有以下結論：

1. $p = p \cdot \mathit{refl}_y$ 且 $p = \mathit{refl}_x \cdot p$;
2. $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_x$ 且 $p^{-1} \cdot p = \mathit{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1} = p$;
4. $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p = p \cdot \mathrm{refl}_y)$. 那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x, x, \mathrm{refl}_1) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_1)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : p = p \cdot \mathrm{refl}_y$.

本書後面將把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x, y, p) \mapsto (p = p \cdot \mathrm{refl}_y), x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}, x, y, p\big)$ 記爲 $\mathbf{ru}_{\boldsymbol{p}}$，把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x, y, p) \mapsto (p = \mathrm{refl}_y \cdot p), x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}, x, y, p\big)$ 記爲 $\mathbf{lu}_{\boldsymbol{p}}$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p \cdot \mathrm{refl}_y \equiv \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$. 因此只需證明 $\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$，這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : \mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$.

2. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p \cdot p^{-1} = \mathrm{refl}_x)$. 那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x^{-1} = \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$ 且 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : p \cdot p^{-1} = \mathrm{refl}_x$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p \cdot p^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$.

3. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p^{-1})^{-1} = p$. 那麼 $D(x, x, p)$ 是 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} = \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$，所以 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$，那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$(p^{-1})^{-1} \equiv (\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x, y, z, w : A) \to (p : x = y) \to (q : y = z) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$，我們改爲證明 $(x, y : A) \to (p : x = y) \to (z : A) \to (q : y = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$.

設 $D_1 : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D_1(x, y, p) :\equiv (z : A) \to (q : y = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$. 根據 p 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D_1(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x, z : A) \to (q : x = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot q) \cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_2 : (x, z : A) \to (q : x = z) \to \mathcal{U}, D_2(x, z, q) :\equiv (w : A) \to (r : z = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot q) \cdot r)$. 根據 q 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x, w : A) \to (r : x = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_3 : (x, w : A) \to (r : x = w) \to \mathcal{U}, D_3(x, w, r) :\equiv (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot r)$. 根據 r 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D_3(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x : A) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot \mathrm{refl}_x) \equiv (x : A) \to \mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}$.

因此，應用 3 此道路歸納，我們就得到了想要的類型的函數. □

引理 3.4 加鬚

1. 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b$，我們可以構造函數 $\_ \cdot_r \_ : (p = q) \to (r : b = c) \to (p \cdot r = q \cdot r), \alpha \cdot_r \mathit{refl}_b :\equiv \mathit{ru}_p^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathit{ru}_q$;
2. 對於任何 $a, b, c : A, r, s : b = c$，我們可以構造函數 $\_ \cdot_l \_ : (p : a = b) \to (r = s) \to (p \cdot r = p \cdot s), \mathit{refl}_b \cdot_l \beta :\equiv \mathit{lu}_r^{-1} \cdot \beta \cdot \mathit{lu}_s$.

Proof. 略. □

引理 3.5 **橫合成**

對於任何 $a,b,c:A$，$p,q:a=b$，$r,s:b=c$，我們可以構造函數 $\_\centerdot\_:(p=q)\to(r=s)\to(p\centerdot r=q\centerdot s)$.

Proof. 略. ☐

引理 3.6 **剪鬚**

1. 對於任何 $a,b,c:A,p,q:a=b$，我們可以構造函數 $(r:b=c)\to(p\centerdot r=q\centerdot r)\to(p=q)$；
2. 對於任何 $a,b,c:A,r,s:b=c$，我們可以構造函數 $(p:a=b)\to(p\centerdot r=p\centerdot s)\to(r=s)$.

Proof. 略. ☐

引理 3.7 對於任何 $a,b,c:A,p,q:a=b,r,s:b=c,\alpha:p=q,\beta:r=s$，我們有 $(\alpha\centerdot_r r)\centerdot(q\centerdot_l\beta)=(p\centerdot_l\beta)\centerdot(\alpha\centerdot_r s)$.

Proof. 略. ☐

定理 3.1 ***Eckmann–Hilton***

$$(\alpha,\beta:\Omega^2(A,a))\to(\alpha\centerdot\beta=\beta\centerdot\alpha)$$

Proof. 略. ☐

定義 3.1 **有點類型**

設 $A:\mathcal{U},a:A$. 序偶 $(A,a):(A:\mathcal{U})\times A$ 稱爲一個**有點類型**，a 稱爲它的**基點**. 類型 $(A:\mathcal{U})\times A$ 記爲 $\mathcal{U}_\bullet$.

定義 3.2 **迴路空間**

對於 $n:\mathrm{N}$，一個有點類型 (A,a) 的 $\boldsymbol{n}$ **重迭代迴路空間** $\Omega^n(A,a)$ 遞歸地定義爲

$$\Omega^0(A,a):\equiv(A,a),$$

$$\Omega^1(A,a):\equiv((a=_A a),refl_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A,a):\equiv\Omega^n(\Omega(A,a)),$$

它的一個項稱爲點 a 的一個 $\boldsymbol{n}$ **維迴路**.

慣例 3.1 設 $\Omega^n(A,a)\equiv(B,b)$. 則 $x:\Omega^n(A,a)$ 表示 $x:B$.

3.2 函數是函子

引理 3.8 對於任何 $A,B:\mathcal{U},f:A\to B,x,y:A$，都能構造函數 $\boldsymbol{ap}_f:(x=_A y)\to(f(x)=_B f(y)),\boldsymbol{ap}_f(refl_x)\equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(x=_A y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv(f(x)=_B f(y))$. 那麼我們有 $d:\equiv(x:A)\mapsto\mathrm{refl}_{f(x)}:(x:A)\to(f(x)=_B f(y))$. 根據 p 的道路歸納，我們得到函數 $\mathrm{ap}_f:(x=_A y)\to(f(x)=_B f(y))$. 根據恆等類型的計算規則，對於任何 $x:A$，有 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)\equiv\mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：爲了對任何 $p:x=y$ 定義 $\mathrm{ap}_f(p)$，根據 p 的道路歸納，只需要構造 p 是 refl_x 的情況. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x):\equiv\mathrm{refl}_{f(x)}:f(x)=f(x)$.

☐

慣例 3.2 我們將經常將 $ap_f(p)$ 簡寫爲 $f(p)$.

引理 3.9 對於任何函數 $f: A \to B, g: B \to C$ 和道路 $p: x =_A y, q: y =_A z$，我們有：

1. $ap_f(p \cdot q) = ap_f(p) \cdot ap_f(q)$;
2. $ap_f(p^{-1}) = \big(ap_f(p)\big)^{-1}$;
3. $ap_g\big(ap_f(p)\big) = ap_{g \circ f}(p)$;
4. $ap_{id_A}(p) = p$.

Proof. 1. 根據的道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) = \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) \cdot \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)$，這太簡單，遂略.

2. 根據道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x^{-1}) = \big(\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)\big)^{-1}$，略.

3. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_g\big(\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)\big) = \mathrm{ap}_{g \circ f}(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{ap}_g\big(\mathrm{refl}_{f(x)}\big) = \mathrm{refl}_{g \circ f}$，略.

4. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_{\mathrm{id}_A}(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_x$，略. □

3.3 類型族是纖維化

定義 3.3 纖維化

我們把類型族 $P: A \to \mathcal{U}$ 視爲一個**纖維化**，A 稱爲它的**底空間**，$P(x)$ 稱爲 x 上的**纖維**，$(x : A) \times P(x)$ 稱爲它的**全空間**，如果存在函數 $f: (x : A) \to P(x)$，則稱該函數爲 P 的一個**截面**.

有時也稱全空間爲 A 上的**纖維化**.

引理 3.10 傳送

設 $B: A \to \mathcal{U}, x, y: A$，則存在函數 $\boldsymbol{transport}^B(\_,\_) : (x =_A y) \to B(x) \to B(y), \boldsymbol{transport}^B(refl_x, \_) \equiv id_{B(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D: (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv B(x) \to B(y)$. 那麼我們有函數 $d :\equiv (x : A) \mapsto \mathrm{id}_{B(x)} : D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : B(x) \to B(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$，函數 $\mathrm{transport}^B(p, \_) :\equiv \mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$. 根據計算規則，$\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, \_) \equiv \mathrm{id}_{B(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，對於任何 $b : B(x)$，我們定義 $\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, b) :\equiv b$. □

引理 3.11 道路提升

設 $P: A \to \mathcal{U}, x, y : A$. 則對於任何 $u : P(x), p : x = y$，我們有 $\boldsymbol{lift}(u, p) : (x, u) =_{(x:A) \times P(x)} (y, transport^P(p, u)), \boldsymbol{lift}(u, refl_x) \equiv refl_{(x,u)}$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(x, u) = \big(x, \mathrm{id}_{P(x)}(u)\big)$，略. □

引理 3.12 依賴映射

設 $B: A \to \mathcal{U}, f: (x : A) \to B(x), x, y : A$. 我們有映射 $\boldsymbol{apd}_f : (p : x =_A y) \to \big(transport^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)\big), \boldsymbol{apd}_f(refl_x) :\equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D: (x, y : A) \to (x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv \mathrm{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$. 於是我們有函數 $d :\equiv (x : A) \mapsto \mathrm{refl}_{f(x)} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : \mathrm{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$，函數 $\mathrm{apd}_f(p) :\equiv \mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$. 根據計算規則，$\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{f(x)} : \mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, f(x)) =_{B(x)} f(x)$. □

引理 3.13 設 $B: A \to \mathcal{U}, B(x) :\equiv B, x, y : A$. 則能構造函數 $transportconst^B(\_,\_) : (p : x = y) \to b : B \to b = transport^B(p, b)$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(b : B) \to b = \mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, b)$，即 $(b : B) \to b = b$. 顯然只需定義 $\mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x, b) :\equiv \mathrm{refl}_b$. □

引理 3.14 設 $f: A \to B, x, y : A$. 則對於任何道路 $p : x = y$，我們有類型爲 $ap_f(p) = transportconst^B(p, f(x)) \cdot apd_f(p)$ 的道路.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x, f(x)) \cdot \mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{refl}_{f(x)} = \mathrm{refl}_{f(x)} \cdot \mathrm{refl}_{f(x)}$，這是顯然的. □

引理 3.15 $(P : A \to \mathcal{U}) \to (x, y : A) \to (p : x = y) \to (q : y = z) \to (u : P(x)) \to transport^P(q, transport^P(p, u)) = transport^P(p \centerdot q, u)$.

Proof. 略. □

引理 3.16 $(f : A \to B) \to (P : B \to \mathcal{U}) \to (x, y : A) \to (p : x = y) \to (u : P(f(x))) \to transport^{P \circ f}(p, u) = transport^P(ap_f(p), u)$.

Proof. 略. □

引理 3.17

$(P, Q : A \to \mathcal{U}) \to (f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)) \to (x, y : A) \to (p : x = y) \to (u : P(x)) \to transport^Q(p, f_x(u)) =_{Q(y)} f_y(transport^P(p, u))$.

Proof. 略. □

3.4 同倫和等價

定義 3.4 同倫

設 $P : A \to \mathcal{U}, f, g : (x : A) \to P(x)$. 從 f 到 g 的一個**同倫**定義爲一個類型爲 $(f \sim g) :\equiv (x : A) \to f(x) = g(x)$ 的函數.

引理 3.18 設 $f : A \to B$. 則 $(x : A) \mapsto refl_{f(x)} : f \sim f$.

Proof. 略. □

引理 3.19 設 $P : A \to \mathcal{U}$. 我們有:

1. $(f : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim f)$;
2. $(f, g : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim f)$;
3. $(f, g, h : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim h) \to (f \sim h)$.

Proof. 略. □

引理 3.20 設 $f, g : A \to B, H : f \sim g$. 則對於任何 $x, y : A, p : x = y$ 我們有 $H(x) \centerdot g(p) = f(p) \centerdot H(y)$，即下圖交換

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, "f(p)"] \arrow[d, "H(x)"'] & f(y) \arrow[d, "H(y)"] \\
g(x) \arrow[r, "g(p)"'] & g(y)
\end{tikzcd}$$

Proof. 略. □

推論 3.1 設 $f : A \to A, H : f \sim id_A$. 則對於任何 $x : A$ 我們有 $H(f(x)) = f(H(x))$.

Proof. 根據 H 的自然性，我們有 $f(H\,x) \centerdot H\,x = H(f\,x) \centerdot H\,x$，即下圖交換

$$
\begin{tikzcd}
f\,f\,x \arrow[r, "f(H\,x)"] \arrow[d, "H(f\,x)"'] & f\,x \arrow[d, "H\,x"] \\
f\,x \arrow[r, "H\,x"'] & x
\end{tikzcd}
$$

我們可以用 $(H\,x)^{-1}$ 加鬚來消除 $H\,x$，得到 $f(H\,x) = f(H\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x)$. □

定義 3.5 擬逆

對於一個函數 $f : A \to B$，它的一個**擬逆**是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \boldsymbol{qinv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$.

定義 3.6 等價

對於任何函數 $f : A \to B$，定義 $\boldsymbol{isequiv}(f) :\equiv [(g : B \to A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \to A) \times (f \circ h \sim id_B)]$，$(A \simeq B) :\equiv (f : A \to B) \times isequiv(f)$.

引理 3.21 1. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $qinv(f) \to isequiv(f)$；

2. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $isequiv(f) \to qinv(f)$.

Proof. 1. 略.

2. 給定四元組 $(g, \alpha, h, \beta) : \mathrm{isequiv}(f)$，我們有 $\alpha : (x : A) \to (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \to (f \circ h)(y) = y$，那麼我們有同倫 $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \to g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$ 和 $\alpha \circ h : (y : B) \to (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$. 於是我們可以定義同倫 $\gamma :\equiv (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \to g(y) = h(y)$. 那麼 $f \circ \gamma : (y : B) \to (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$. 於是有 $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim \mathrm{id}_B$. 所以有 $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathrm{qinv}(f)$. □

引理 3.22 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$，我們有 $isequiv(id_A)$，即 $A \simeq A$；

2. 對於任何函數 $f : A \to B$ 使得 $isequiv(f)$，即 $A \simeq B$，我們有一個函數 $f^{-1} : B \to A$ 使得 $isequiv(f^{-1})$，即 $B \simeq A$；

3. 對於任何函數 $f : A \to B$ 使得 $isequiv(f)$（即 $A \simeq B$）和 $g : B \to C$ 使得 $isequiv(g)$（即 $B \simeq C$），我們有 $isequiv(g \circ f)$（即 $A \simeq C$）.

Proof. 1. 我們要證明對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ 有 $[(g : B \to A) \times (g \circ \mathrm{id}_A \sim \mathrm{id}_A)] \times [(h : B \to A) \times (\mathrm{id}_A \circ h \sim \mathrm{id}_B)]$，略.

2. f 的擬逆.

3. $f^{-1} \circ g^{-1}$ 是 $g \circ f$ 的一個擬逆. □

3.5 Σ-類型

定理 3.2 設 $B : A \to \mathcal{U}$，$w, w' : (x : A) \times B(x)$.

則我們有一個等價 $(w = w') \simeq (p : pr_1(w) = pr_1(w')) \times (transport^B(p, pr_2(w)) = pr_2(w'))$.

Proof. 略. □

推論 3.2 設 $B : A \to \mathcal{U}$. 則對於任何 $w : (x : A) \times B(x)$，我們有 $w = \langle pr_1(w), pr_2(w) \rangle$.

Proof. 略. □

引理 3.23 設 $B : A \to \mathcal{U}$，$C : (x : A) \times (B(x) \to \mathcal{U})$. 則我們有 $[(x : A) \times (y : B(x)) \times C(\langle x, y \rangle)] \simeq [(p : (x : A) \times B(x)) \times C(p)]$.

Proof. 略. □

3.6 單元類型

定理 3.3

$$(x, y : \mathbf{1}) \to ((x = y) \simeq \mathbf{1}).$$

Proof. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$. 設函數 $f : (\star = \star) \to \mathbf{1}, x \mapsto \star$ 和 $g : \mathbf{1} \to (\star = \star), x \mapsto \mathrm{refl}_\star$. 那麼我們只需證明對於任何 $x : \star = \star$ 有 $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\star = \star}(x)$ 和對於任何 $x : \mathbf{1}$ 有 $(f \circ g)(x) = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}(x)$. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(g \circ f)(\mathrm{refl}_\star) = \mathrm{id}_{\star = \star}(\mathrm{refl}_\star)$ 和 $(f \circ g)(\star) = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}(\star)$，略. □

定理 3.4

$$(x, y : \mathbf{1}) \to (x = y).$$

Proof. 略. □

3.7 Π-類型

引理 3.24 ***happly***

對於任何函數 $f, g : (x : A) \to B(x)$，我們有函數

$$\boldsymbol{happly}(f, g) : (f = g) \to (x : A) \to (f(x) = g(x)),$$

$$\boldsymbol{happly}(f, g, refl_f) :\equiv (x : A) \mapsto refl_{f(x)}.$$

Proof. 略. □

定義 3.7 $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$

給定類型 X，類型族 $A, B : X \to \mathcal{U}$. 定義函數：

$$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) : X \to \mathcal{U}, (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})(x) :\equiv A(x) \to B(x).$$

引理 3.25 給定類型 X，一個路徑 $p : x_1 =_X x_2$，類型族 $A, B : X \to \mathcal{U}$，一個函數 $f : A(x_1) \to B(x_1)$. 則我們有：

$$transport^{A \to B}(p, f) =_{A(x_2) \to B(x_2)} x \mapsto transport^B\big(p, f\big(transport^A(p^{-1}, x)\big)\big).$$

Proof. 根據 p 的道路歸納，我們只需證明 $\mathrm{transport}^{A \to B}\big(\mathrm{refl}_{x_1}, f\big) =_{A(x_1) \to B(x_1)} x \mapsto \mathrm{transport}^B\Big(\mathrm{refl}_{x_1}, f\Big(\mathrm{transport}^A\big(\mathrm{refl}_{x_1}, x\big)\Big)\Big)$，即 $f =_{A(x_1) \to B(x_1)} x \mapsto f(x)$，證畢. □

3.8 宇宙和泛等公理

引理 3.26 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$，我們有一個函數 $\boldsymbol{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$.

Proof. 函數 $\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\_, \_) : (A =_{\mathcal{U}} B) \to A \to B$. 我們要證明 $(p : A =_{\mathcal{U}} B) \to \mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_)\big)$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{refl}_A, \_)\big)$，即證明 $\mathrm{isequiv}(\mathrm{id}_A)$，略.

定義 $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p) :\equiv \big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_), a\big) : A \simeq B$，其中 $a : \mathrm{isequiv}\big(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_)\big)$. □

引理 3.27 $(id_A, a) = idtoeqv_{A,B}(refl_A)$，其中 $a : isequiv(id_A)$.

Proof. 略. □

引理 3.28 對於任何 $x, y : A, p : x = y, B : A \to \mathcal{U}, u : B(x)$，我們有 $transport^B(p, u) = transport^{id_{\mathcal{U}}}(ap_B(p), u) = pr_1(idtoeqv(ap_B(p)))(u)$.

Proof. 根據歸納原理，只需證明 $\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, u) = \mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{ap}_B(\mathrm{refl}_x), u) = \mathrm{pr}_1(\mathrm{idtoeqv}(\mathrm{ap}_B(\mathrm{refl}_x)))(u)$，略. □

定義 3.8 **泛等公理**（不常用）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \boldsymbol{univalence}(A, B) : isequiv(idtoeqv_{A,B})}\ \mathcal{U}_i\text{-}UNIV$$

引理 3.29 $\big(idtoeqv_{A,B}, univalence(A,B)\big) : (A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$.

Proof. 略. ∎

定義 3.9 泛等公理（常用）

1. 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$，我們有一個函數 $\boldsymbol{ua} : (A \simeq B) \to (A =_{\mathcal{U}} B)$;
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$，我們有 $idtoeqv_{A,B}(\boldsymbol{ua}(f, a)) = (f, a)$;
3. 對於任何 $p : A =_{\mathcal{U}} B$，我們有 $p = \boldsymbol{ua}\big(idtoeqv_{A,B}(p)\big)$.

引理 3.30 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$，我們有 $refl_A = ua(id_A, a)$，其中 $a : isequiv(id_A)$;

2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B, (g, b) : B \simeq C$，我們有 $ua(f, a) \centerdot ua(g, b) = ua(g \circ f, c)$.

3. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ 和它的一個擬逆 (f^{-1}, b)，我們有 $(ua(f, a))^{-1} = ua(f^{-1}, b)$.

Proof. 略. ∎

3.9 恆等類型

定理 3.5 如果 $(f, a) : A \simeq B$，則對於任何 $x, x' : A$，函數 $ap_f : (x = x') \to (f(x) = f(x'))$ 也是一個等價.

Proof. 我們想要構造一個四元組 $(g, \gamma, h, \delta) : \mathrm{isequiv}\big(\mathrm{ap}_f\big)$，即 $g : (f(x) = f(x')) \to (x = x'), \gamma : (p : x = x') \to \big(g(\mathrm{ap}_f(p)) = p\big), h : (f(x) = f(x')) \to (x = x'), \delta : (q : f(x) = f(x')) \to \big(\mathrm{ap}_f(g(q))\big)$.

設 $(f^{-1}, \alpha, \beta) : \mathrm{qinv}(f)$，即 $f^{-1} : B \to A, \alpha : (x : A) \to (f^{-1}(f(x)) = x), \beta : (y : B) \to (f(f^{-1}(y)) = y)$.

那麼對於任何 $x, x' : A$，我們有 $\mathrm{ap}_{f^{-1}} : (f(x) = f(x')) \to (f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')))$.

於是對於任何 $p : x = x'$，我們有

$\alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}\big(\mathrm{ap}_f(p)\big) \centerdot \alpha_{x'}$

$= \alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1} \circ f}(p) \centerdot \alpha_{x'}$

$= \mathrm{ap}_{\mathrm{id}_A}(p)$

$= p$.

且對於任何 $q : f(x) = f(x')$，我們有

$\mathrm{ap}_f\big(\alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \centerdot \alpha_{x'}\big)$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \centerdot \beta_{f(x)} \centerdot \mathrm{ap}_f\big(\alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \centerdot \alpha_{x'}\big) \centerdot \beta_{f(x')}^{-1} \centerdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_f\Big(\mathrm{ap}_f^{-1}\big(\mathrm{ap}_f\big(\alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \centerdot \alpha_{x'}\big)\big)\Big) \centerdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_f\big(\alpha_x \centerdot \alpha_x^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \centerdot \alpha_{x'} \centerdot \alpha_{x'}^{-1}\big) \centerdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \centerdot \mathrm{ap}_f\big(\mathrm{ap}_{f^{-1}}(q)\big) \centerdot \beta_{f(x')}$

$= q$. ∎

引理 3.31 對於任何 $a, x_1, x_2 : A$ 和 $p : x_1 = x_2$，我們有

1. $(q : a = x_1) \to transport^{x \mapsto (a = x)}(p, q) = q \centerdot p$;
2. $(q : x_1 = a) \to transport^{x \mapsto (x = a)}(p, q) = p^{-1} \centerdot q$;
3. $(q : x_1 = x_2) \to transport^{x \mapsto (x = x)}(p, q) = p^{-1} \centerdot q \centerdot p$.

Proof. 略. ∎

3.10 餘積

定義 3.10 ***code*** (“固定 $a_0 : A$”的版本)

給定 $A, B : \mathcal{U}$，$a_0 : A$.

定義函數

$$\boldsymbol{code} : A + B \to \mathcal{U},$$

模式匹配

$$\boldsymbol{code}(\mathit{inl}(\_)) :\equiv a_0 = \_ : A \to \mathcal{U}$$

$$\boldsymbol{code}(\mathit{inr}(\_)) :\equiv b \mapsto \mathbf{0} : B \to \mathcal{U}.$$

定理 3.6 對於任何 $x : A + B$，我們有 $(\mathit{inl}(a_0) = x) \simeq \mathit{code}(x)$.

Proof. 定義函數

$$\mathbf{encode} : (x : A + B) \to (\mathrm{inl}(a_0) = x) \to \mathrm{code}(x),$$

$$\mathbf{encode}(x, p) :\equiv \mathrm{transport}^{\mathrm{code}}\left(p, \mathrm{refl}_{a_0}\right).$$

和函數

$$\mathbf{decode} : (x : A + B) \to \mathrm{code}(x) \to (\mathrm{inl}(a_0) = x),$$

模式匹配

$$\mathbf{decode}(\mathrm{inl}(a), c) :\equiv \mathrm{ap}_{\mathrm{inl}}(c)$$

$$\mathbf{decode}(\mathrm{inr}(b), c) :\equiv \mathrm{ind}_{\mathbf{0}}((x : \mathbf{0}) \mapsto (\mathrm{inl}(a_0) = \mathrm{inr}(b)), c)$$

接下來我們需要證明對於任何 $x : A + B$ 有 $\mathrm{encode}(x, \_)$ 和 $\mathrm{decode}(x, \_)$ 互爲擬逆.

在其中一個方向，我們要證明對於任何 $p : \mathrm{inl}(a_0) = x$ 有 $\mathrm{decode}(x, \mathrm{encode}(x, p)) = p$. 根據 p 的道路歸納，我們只需證明 $x \equiv \mathrm{inl}(a_0)$，$p \equiv \mathrm{refl}_{\mathrm{inl}(a_0)}$ 的情況：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{decode}\Big(\mathrm{inl}(a_0), \mathrm{encode}\big(\mathrm{inl}(a_0), \mathrm{refl}_{\mathrm{inl}(a_0)}\big)\Big) \\
&\equiv \mathrm{decode}\Big(\mathrm{inl}(a_0), \mathrm{transport}^{\mathrm{code}}\big(\mathrm{refl}_{\mathrm{inl}(a_0)}, \mathrm{refl}_{a_0}\big)\Big) \\
&\equiv \mathrm{decode}\big(\mathrm{inl}(a_0), \mathrm{refl}_{a_0}\big) \\
&\equiv \mathrm{ap}_{\mathrm{inl}}\big(\mathrm{refl}_{a_0}\big) \\
&\equiv \mathrm{refl}_{\mathrm{inl}(a_0)} \\
&\equiv p.
\end{aligned}$$

在另一個方向，我們要證明對於任何 $c : \mathrm{code}(x)$ 有 $\mathrm{encode}(x, \mathrm{decode}(x, c)) = c$：

當 $x \equiv \mathrm{inl}(a)$ 時，$c : a_0 = a$：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{encode}(\mathrm{inl}(a), \mathrm{decode}(\mathrm{inl}(a), c)) \\
&\equiv \mathrm{encode}(\mathrm{inl}(a), \mathrm{ap}_{\mathrm{inl}}(c)) \\
&\equiv \mathrm{transport}^{\mathrm{code}}\big(\mathrm{ap}_{\mathrm{inl}}(c), \mathrm{refl}_{a_0}\big) \\
&\equiv \mathrm{transport}^{a \mapsto (a_0 = a)}\big(c, \mathrm{refl}_{a_0}\big) \\
&\equiv \mathrm{refl}_{a_0} \cdot c \\
&\equiv c.
\end{aligned}$$

當 $x \equiv \mathrm{inr}(b)$ 時，$c : \mathbf{0}$，略. □

推論 3.3

$$encode(inl(a), \_) : (inl(a_0) = inl(a)) \to (a_0 = a);$$

$$encode(inr(b), \_) : (inl(a_0) = inr(b)) \to \mathbf{0}.$$

Proof. 略. □

引理 3.32 $\mathbf{2} \simeq \mathbf{1} + \mathbf{1}$.

Proof. 略. □

推論 3.4 $0_{\mathbf{2}} \neq 1_{\mathbf{2}}$.

Proof. 略. □

定義 3.11 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$

給定一個類型 X，類型族 $A, B : X \to \mathcal{U}$，定義類型族：

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) : X \to \mathcal{U}, (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(x) :\equiv A(x) + B(x).$$

引理 3.33 給定一個類型 X，一個道路 $p : x_1 =_X x_2$，類型族 $A, B : X \to \mathcal{U}$，則我們有：

$$transport^{A+B}(p, inl(a)) = inl\big(transport^{A}(p, a)\big);$$

$$transport^{A+B}(p, inr(b)) = inr\big(transport^{A}(p, b)\big).$$

Proof. 略. □

3.11 自然數

定義 3.12 ***code***

定義函數

$$\boldsymbol{code} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U},$$

模式匹配

$$\boldsymbol{code}(0, 0) :\equiv \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{code}(succ(m), 0) :\equiv \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{code}(0, succ(n)) :\equiv \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{code}(succ(m), succ(n)) :\equiv \boldsymbol{code}(m, n).$$

定義 3.13 $\boldsymbol{r}$

定義函數

$$\boldsymbol{r} : (n : \mathbb{N}) \to code(n, n)$$

模式匹配

$$\boldsymbol{r}(0) :\equiv \star$$

$$\boldsymbol{r}(succ(n)) :\equiv \boldsymbol{r}(n).$$

定理 3.7 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 我們有 $(m = n) \simeq code(m, n)$.

Proof. 定義函數

$$\mathbf{encode} : (m, n : \mathbb{N}) \to (m = n) \to \mathrm{code}(m, n),$$

$$\mathbf{encode}(m, n, p) :\equiv \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(m, \_)}(p, r(m)),$$

和函數

$$\mathbf{decode} : (m, n : \mathbb{N}) \to \mathrm{code}(m, n) \to (m = n),$$

模式匹配

$$\mathbf{decode}(0, 0, \star) :\equiv \mathrm{refl}_0$$

$$\mathbf{decode}(\mathrm{succ}(m), 0, c) :\equiv \mathrm{ind}_{\mathbf{0}}((x : \mathbf{0}) \mapsto (m = n), c)$$

$$\mathbf{decode}(0, \mathrm{succ}(n), c) :\equiv \mathrm{ind}_{\mathbf{0}}((x : \mathbf{0}) \mapsto (m = n), c)$$

$$\mathbf{decode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), c) :\equiv \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}} \circ \mathbf{decode}(m, n, c).$$

接下來我們要證明對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 有 $\mathrm{encode}(m, n, \_)$ 和 $\mathrm{decode}(m, n, \_)$ 互爲擬逆.

我們先證明對於任何 $p : m = n$ 有 $\mathrm{decode}(m, n, \mathrm{encode}(m, n, p)) = p$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\mathrm{decode}(m, m, \mathrm{encode}(m, m, \mathrm{refl}_m)) = \mathrm{refl}_m$，即 $\mathrm{decode}(m, m, r(m)) = \mathrm{refl}_m$. 對 m 使用歸納法，如果 $m \equiv 0$，那麼 $\mathrm{decode}(0, 0, r(0)) = \mathrm{decode}(0, 0, \star) = \mathrm{refl}_0$；設 $x : \mathbb{N}, y : \mathrm{decode}(x, x, r(x)) = \mathrm{refl}_x$，則 $\mathrm{decode}(\mathrm{succ}(x), \mathrm{succ}(x), r(\mathrm{succ}(x))) = \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(x, x, r(x))) = \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_{\mathrm{succ}(x)}$.

然後我們證明對於任何 $c : \mathrm{code}(m, n)$ 有 $\mathrm{encode}(m, n, \mathrm{decode}(m, n, c)) = c$. 我們對 m, n 進行雙歸納. 如果都是 0，那麼 $\mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{decode}(0, 0, c)) = \mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{decode}(0, 0, \star)) = \mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{refl}_0) = r(0) = \star = c$；如果 m 是 0 且 n 是一個後繼，或反之，那麼有 $c : \mathbf{0}$；最後是兩個後繼的情況，根據歸納假設我們有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{encode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), \mathrm{decode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), c)) \\
&= \mathrm{encode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(m, n, c))) \\
&= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(\mathrm{succ}(m), _)}(\mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(m, n, c)), r(\mathrm{succ}(m))) \\
&= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(_))}(\mathrm{decode}(m, n, c), r(\mathrm{succ}(m))) \\
&= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(m, _)}(\mathrm{decode}(m, n, c), r(m)) \\
&= \mathrm{encode}(m, n, \mathrm{decode}(m, n, c)) \\
&= c
\end{aligned}$$

□

推論 3.5 1. 對於任何 $m : \mathbb{N}$，我們有 $\mathit{encode}(\mathit{succ}(m), 0, \_) : (\mathit{succ}(m) = 0) \to \mathbf{0}$；

2. 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$，我們有 $\mathit{encode}(\mathit{succ}(m), \mathit{succ}(n), \mathit{decode}(\mathit{succ}(m), \mathit{succ}(n), \_)) : (\mathit{succ}(m) = \mathit{succ}(n)) \to (m = n)$.

Proof. 略. □

3.12 泛性質

定理 3.8 設 $A : X \to \mathcal{U}$，$P : (x : X) \to A(x) \to \mathcal{U}$. 則有等價：

$$[(x : X) \to (a : A(x)) \times P(x, a)] \simeq [(g : (x : X) \to A(x)) \times ((x : X) \to P(x, g(x)))]$$

Proof. 定義函數 $\varphi : [(x : X) \to (a : A(x)) \times P(x, a)] \to [(g : (x : X) \to A(x)) \times ((x : X) \to P(x, g(x)))]$, $\varphi(f) :\equiv \langle x \mapsto \mathrm{pr}_1(f(x)), x \mapsto \mathrm{pr}_2(f(x))\rangle$ 和 $\psi : [(g : (x : X) \to A(x)) \times ((x : X) \to P(x, g(x)))] \to [(x : X) \to (a : A(x)) \times P(x, a)]$, $\psi(\langle g, h\rangle) :\equiv x \mapsto \langle g(x), h(x)\rangle$.

剩餘證明略. □

4 集合和邏輯

4.1 集合和 n-類型

定義 4.1 **集合（0-類型）**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isSet}(A) :\equiv (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q).$$

例子 4.1 類型 $\mathbf{1}$ 是一個集合.

例子 4.2 類型 $\mathbf{0}$ 是一個集合.

例子 4.3 自然數類型 $\mathbb{N}$ 是一個集合.

定義 4.2 **1-類型**

一個類型 A 是一個 **1-類型** 如果 $(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

引理 4.1 如果 A 是一個集合，則 A 是一個 1-類型.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)] \to (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

設 $f : \text{isSet}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 和 $p, q : x = y$ 我們有 $p = q$. 給定 x, y 和 p，定義 $g : (q : x = y) \to (p = q), g :\equiv f(x, y, p, \_)$. 那麼對於任何 $q, q' : x = y$ 和 $\alpha : q = q'$，我們有 $\text{apd}_g(\alpha) : \text{transport}^{q \mapsto (p=q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$，也就有 $g(q) \bullet \alpha = g(q')$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$，我們有 $g(p) \bullet \alpha = g(q)$ 且 $g(p) \bullet \beta = g(q)$，也就有 $g(p) \bullet \alpha = g(p) \bullet \beta$，也就有 $\alpha = \beta$. □

例子 4.4 宇宙 $\mathcal{U}$ 不是一個集合.

Proof. 設 $f : \mathbf{2} \to \mathbf{2}, f(0_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}, f(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}$. 顯然 f 是一個等價. 因此，根據泛等，由 f 可以導出一個道路 $p : A = A$.

如果 $p = \text{refl}_A$，那麼有 $f = \text{id}_A$，矛盾，證畢. □

4.2 命題

定義 4.3 **命題（-1-類型）**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isProp}(A) :\equiv (x, y : A) \to (x = y).$$

引理 4.2 如果 P 是一個命題且 $x_0 : P$，則 $P \simeq \mathbf{1}$.

Proof. 略. □

引理 4.3 如果 P 和 Q 是命題，且有 $P \to Q$ 和 $Q \to P$，則我們有 $P \simeq Q$.

Proof. 設 $f : P \to Q$，$g : Q \to P$. 那麼由於 P 是命題，則對於任何 $x : P$ 我們有 $g(f(x)) = x$. 同理，對於任何 $y : Q$ 我們有 $f(g(y)) = y$. 因此 f 和 g 互為擬逆. □

引理 4.4 每個命題都是一個集合.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \to (x = y)] \to (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)$.

設 $f : \text{isProp}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 我們有 $f(x, y) : x = y$. 給定 x，定義 $g : (y : A) \to x = y, g :\equiv f(x, \_)$. 那麼對於任何 $y, z : A$ 和 $p : y = z$，我們有 $\text{apd}_g(p) : \text{transport}^{y \mapsto x=y}(p, g(y)) = g(z)$，也就有 $g(y) \bullet p = g(z)$，也就有 $p = (g(y))^{-1} \bullet g(z)$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y$，我們有 $p = (g(x))^{-1} \bullet g(y) = q$. □

4.3 子集

引理 4.5 設 $P : A \to \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$，$P(x)$ 是一個命題. 則對於任何 $u, v : (x : A) \times P(x)$，若 $pr_1(u) = pr_1(v)$，則有 $u = v$.

Proof. 設 $p : \mathrm{pr}_1(u) = \mathrm{pr}_1(v)$. 則爲了證明 $u = v$，我們只需證明 $\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(u)) = \mathrm{pr}_2(v)$. 因爲 $\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(u)), \mathrm{pr}_2(v) : P(\mathrm{pr}_1(v))$ 且該類型是一個命題，所以證畢. □

定義 4.4 子類型，子集

設 $P : A \to \mathcal{U}$ 是一個命題族（即每個 $P(x)$ 是一個命題）.

$$\{x : A \mid P(x)\} :\equiv (x : A) \times P(x);$$

$$a \in \{x : A \mid P(x)\} :\equiv P(a).$$

$\{x : A \mid P(x)\}$ 稱爲 A 的一個**子類型**；如果 A 是集合，則 $\{x : A \mid P(x)\}$ 稱爲 A 的一個**子集**.

定義 4.5 $\boldsymbol{Set}_{\mathcal{U}}$

定義 $\mathcal{U}$ 的一個"子宇宙"：

$$\boldsymbol{Set}_{\mathcal{U}} :\equiv \{A : \mathcal{U} \mid isSet(A)\}.$$

定義 4.6 $\boldsymbol{Prop}_{\mathcal{U}}$

$$\boldsymbol{Prop}_{\mathcal{U}} :\equiv \{A : \mathcal{U} \mid isProp(A)\}.$$

定義 4.7 關係

一個**關係**是一個命題族 $R : A \times A \to Prop$，其中 A 是集合.

4.4 命題截斷

定義 4.8 命題截斷（−1-截斷）

命題截斷系如下資料：

1. 類型形成器：$\| \_ \| : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$；
2. 構造子 1：$| \_ | : A \to \|A\|$；
3. 構造子 2：對於任何 $x, y : \|A\|$，我們有 $x = y$；
4. 消除器：如果有 $isProp(B)$，則有 $rec_{\| \_ \|} : (A \to B) \to \|A\| \to B$；
5. 計算規則：$rec_{\| \_ \|}(f)(|a|) :\equiv f(a)$

定義 4.9 傳統邏輯記號

給定類型 A 和 B.

$$A\text{和}B\text{ 是邏輯等價的}(\,A\;iff\;B\,):\equiv(A\to B)\times(B\to A)$$

給定命題 P 和 Q.

$$\top:\equiv\mathbf{1}$$

$$\bot:\equiv\mathbf{0}$$

$$P\wedge Q:\equiv P\times Q$$

$$P\Rightarrow Q:\equiv P\to Q$$

$$P\Leftrightarrow Q:\equiv P=Q$$

$$\neg P:\equiv P\to\mathbf{0}$$

$$P\vee Q:\equiv\|P+Q\|$$

$$\forall(x:A).P(x):\equiv(x:A)\to P(x)$$

$$\exists(x:A).P(x):\equiv\|(x:A)\times P(x)\|$$

$$\{x:A\mid P(x)\}\cap\{x:A\mid Q(x)\}:\equiv\{x:A\mid P(x)\wedge Q(x)\}$$

$$\{x:A\mid P(x)\}\cup\{x:A\mid Q(x)\}:\equiv\{x:A\mid P(x)\vee Q(x)\}$$

$$A\setminus\{x:A\mid P(x)\}:\equiv\{x:A\mid\neg P(x)\}$$

4.5 可縮性

定義 4.10 可縮的

$$\boldsymbol{isContr}(A):\equiv(a:A)\times((x:A)\to(a=x)).$$

引理 4.6 對於任何類型 A，以下類型是邏輯等價的：

1. $isContr(A)$；
2. $A\times isProp(A)$；
3. $A\simeq\mathbf{1}$.

Proof. 略. □

引理 4.7 對於任何類型 A，類型 $isContr(A)$ 是命題.

Proof. 略. □

引理 4.8 如果類型 A 等價於 B 且 A 可縮，則 B 可縮.

Proof. 略. □

定義 4.11 收縮，截面，收縮核

稱函數 $r:A\to B$ 是一個**收縮**，如果存在一個函數 $s:B\to A$，稱爲它的一個**截面**，和一個同倫 $r\circ s\sim id_B$. 我們稱 B 爲 A 的一個**收縮核**.

引理 4.9 如果 B 是 A 的一個收縮核，且 A 是可縮的，則 B 是可縮的.

Proof. 令 $r:A\to B$ 是一個收縮，$s:B\to A$ 是它的一個截面，$\varepsilon:r\circ s\sim\mathrm{id}_B$，$a_0:A$，$\mathrm{contr}_{s(b)}:a_0=s(b)$，$b_0:\equiv r(a_0), b:B$.
那麼我們有 $r\left(\mathrm{contr}_{s(b)}\right)\cdot\varepsilon(b):b_0=b$，證畢. □

引理 4.10 對於任何類型 A 和 $a : A$，類型 $(x : A) \times (a = x)$ 是可縮的.

Proof. 我們要證明 $(\langle x, p\rangle : (x : A) \times (a = x)) \to \langle a, \mathrm{refl}_a\rangle = \langle x, p\rangle$，略. □

引理 4.11 設 $B : A \to \mathcal{U}$. 則有：

1. $[(x : A) \to isContr(B(x))] \to [((x : A) \times B(x)) \simeq A]$；
2. $(a : A) \times [((x : A) \to (a = x)) \to (((x : A) \times B(x)) \simeq B(a))]$.

Proof. 略. □

5 等價

5.1 半伴隨等價

回顧 5.1　對於任何函數 $f : A \to B$，定義 $\boldsymbol{isequiv}(f) :\equiv [(g : B \to A) \times (g\, f \sim id_A)] \times [(h : B \to A) \times (f\, h \sim id_B)]$，$(A \simeq B) :\equiv (f : A \to B) \times isequiv(f)$.

對於一個函數 $f : A \to B$，它的一個**擬逆**是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \boldsymbol{qinv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times (g\, f \sim id_A) \times (f\, g \sim id_B)$.

定義 5.1 半伴隨等價

$$\boldsymbol{ishae}(f) :\equiv (g : B \to A) \times (\eta : g\, f \sim id_A) \times (\varepsilon : f\, g \sim id_B) \times (f\, \eta \sim \varepsilon\, f);$$

$$\boldsymbol{ishae}'(f) :\equiv (g : B \to A) \times (\eta : g\, f \sim id_A) \times (\varepsilon : f\, g \sim id_B) \times (g\, \varepsilon \sim \eta\, g).$$

引理 5.1 $ishae(f)$ 和 $ishae'(f)$ 是邏輯等價的.

Proof. 我們先證明 $\mathrm{ishae}(f) \to \mathrm{ishae}'(f)$.

設 $(g, \eta, \varepsilon, \tau) : \mathrm{ishae}(f)$. 我們要構造一個四元組 $(g', \eta', \varepsilon', \tau') : \mathrm{ishae}'(f)$. 設 $g' :\equiv g$，$\eta' :\equiv \eta$，$\varepsilon' :\equiv \varepsilon$.

由 $g\, \varepsilon$ 的自然性，我們有路徑的交換圖如下：

$$\begin{tikzcd}
g\, f\, g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, f\, g\, \varepsilon\, y"] \arrow[d, "g\, \varepsilon\, f\, g\, y"'] & g\, f\, g\, y \arrow[d, "g\, \varepsilon\, y"] \\
g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, \varepsilon\, y"'] & g\, y
\end{tikzcd}$$

從而有：

$$\begin{tikzcd}
g\, f\, g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, f\, g\, \varepsilon\, y"] \arrow[d, "g\, f\, \eta\, g\, y"'] & g\, f\, g\, y \arrow[d, "g\, \varepsilon\, y"] \\
g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, \varepsilon\, y"'] & g\, y
\end{tikzcd}$$

從而有：

$$\begin{tikzcd}
g\, f\, g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, f\, g\, \varepsilon\, y"] \arrow[d, "\eta\, g\, f\, g\, y"'] & g\, f\, g\, y \arrow[d, "\eta\, g\, y"] \\
g\, f\, g\, y \arrow[r, "g\, \varepsilon\, y"'] & g\, y
\end{tikzcd}$$

根據 η 的自然性，我們有：

$$
\begin{tikzcd}
g\,f\,g\,f\,g\,y \arrow[r, "g\,f\,g\,\varepsilon\,y"] \arrow[d, "\eta\,g\,f\,g\,y"'] & g\,f\,g\,y \arrow[d, "g\,\varepsilon\,y"] \\
g\,f\,g\,y \arrow[r, "g\,\varepsilon\,y"'] & g\,y
\end{tikzcd}
$$

所以我們有 $g\,\varepsilon\,y = \eta\,g\,y$，證畢.

反方向類似，略. □

定理 5.1 對於任何 $f : A \to B$，我們有 *ishae*(f) *iff qinv*(f).

Proof. 正方向顯然，我們來證明反方向.

設 $(g, \eta, \varepsilon) : \mathrm{qinv}(f)$. 我們要構造一個四元組 $(g', \eta', \varepsilon', \tau) : \mathrm{ishae}(f)$. 設 $g' :\equiv g$，$\eta' :\equiv \eta$. 我們要構造合適的 ε'的定義，使得對於任何 $a : A$ 有 $f\,\eta\,a = \varepsilon'\,f\,a$.

根據 ε 的自然性，我們有如下交換圖：

$$
\begin{tikzcd}
f\,g\,f\,g\,f\,a \arrow[r, "f\,g\,f\,\eta\,a"] \arrow[d, "\varepsilon\,f\,g\,f\,a"'] & f\,g\,f\,a \arrow[d, "\varepsilon\,f\,a"] \\
f\,g\,f\,a \arrow[r, "f\,\eta\,a"'] & f\,a
\end{tikzcd}
$$

所以有 $(f\,g\,f\,\eta\,a) \cdot (\varepsilon\,f\,a) = (\varepsilon\,f\,g\,f\,a) \cdot (f\,\eta\,a)$，於是有 $(\varepsilon\,f\,g\,f\,a)^{-1} \cdot (f\,\eta\,g\,f\,a) \cdot (\varepsilon\,f\,a) = f\,\eta\,a$.

於是我們可以定義 $\varepsilon' b :\equiv (\varepsilon\,f\,g\,b)^{-1} \cdot (f\,\eta\,g\,b) \cdot (\varepsilon\,b)$，證畢. □

定義 5.2 同倫纖維

一個函數 $f : A \to B$ 在一個點 $y : B$ 的一個**同倫纖維**定義爲：

$$\boldsymbol{fib}_f(y) :\equiv (x : A) \times (f(x) = y).$$

引理 5.2 對於任何 $f : A \to B, y : B$ 和 $(x, p), (x', p') : fib_y$. 我們有 $((x, p) = (x', p')) \simeq ((\gamma : x = x') \times (p = f(\gamma) \cdot p'))$.

Proof. 略. □

定理 5.2 如果 $f : A \to B$ 是一個半伴隨等價，則對於任何 $y : B$，同倫纖維 $fib_f(y)$ 是可縮的.

Proof. 設 $(g, \eta, \varepsilon, \tau) : \mathrm{ishae}(f)$，$y : B$. 那麼有 $(g\,y, \varepsilon\,y) : \mathrm{fib}_f(y)$. 設 $(x, p) : \mathrm{fib}_f$，我們要構造從 $(g\,y, \varepsilon\,y)$ 到 (x, p) 的一條道路. 我們只需給出路徑 $\gamma : g\,y = x$ 使得 $\varepsilon\,y = f(\gamma) \cdot p$.

根據 ε 的自然性，我們有：

$$\begin{tikzcd}
f\,g\,f\,x \arrow[r, "f\,g\,p"] \arrow[d, "\varepsilon\,f\,x"'] & f\,g\,y \arrow[d, "\varepsilon\,y"] \\
f\,x \arrow[r, "p"'] & y
\end{tikzcd}$$

也就有：

$$\begin{tikzcd}
f\,g\,f\,x \arrow[r, "f\,g\,p"] \arrow[d, "f\,\eta\,x"'] & f\,g\,y \arrow[d, "\varepsilon\,y"] \\
f\,x \arrow[r, "p"'] & y
\end{tikzcd}$$

令 $\gamma :\equiv (g\,p)^{-1}$，證畢. □

定義 5.3 左逆和右逆

給定 $f : A \to B$，我們定義 f 的**左逆**和**右逆**的類型爲

$$\boldsymbol{linv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times (g\,f \sim id_A);$$

$$\boldsymbol{rinv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times (f\,g \sim id_B).$$

引理 5.3 如果 $f : A \to B$ 有一個擬逆 $g : B \to A$，那麼函數 $(f \circ \_) : (C \to A) \to (C \to B)$ 和 $(\_ \circ f) : (B \to C) \to (A \to C)$ 也有擬逆.

Proof. $(g \circ \_) : (C \to B) \to (C \to A)$；$(\_ \circ g) : (A \to C) \to (B \to C)$.

$(f \circ \_) \circ (g \circ \_) \equiv f \circ g \circ \_$；$(\_ \circ g) \circ (\_ \circ f) \equiv \_ \circ f \circ g$. □

定義 5.4 給定 $f : A \to B$，$\langle g, \eta\rangle : linv(f)$，$\langle g, \varepsilon\rangle : rinv(f)$. 我們定義：

$$\boldsymbol{lcoh}_f(\langle g, \eta\rangle) :\equiv (\varepsilon : f \circ g \sim id_B) \times (g\,\varepsilon \sim \eta\,g);$$

$$\boldsymbol{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon\rangle) :\equiv (\eta : g \circ f \sim id_A) \times (f\,\eta \sim \varepsilon\,f).$$

引理 5.4 對於任何 $f : A \to B$，$\langle g, \eta\rangle : linv(f)$，$\langle g, \varepsilon\rangle : rinv(f)$，我們有：

$$lcoh_f(\langle g, \eta\rangle) \simeq (y : B) \to [\langle f\,g\,y, \eta\,g\,y\rangle = \langle y, refl_{g\,y}\rangle];$$

$$rcoh_f(\langle g, \varepsilon\rangle) \simeq (x : A) \to [\langle g\,f\,x, \varepsilon\,f\,x\rangle = \langle x, refl_{f\,x}\rangle].$$

Proof. 略. □

引理 5.5 如果 $f : A \to B$ 是一個半伴隨等價，則對於任何 $\langle g, \varepsilon\rangle : rinv(f)$，我們有 $rcoh_f(\langle g, \varepsilon\rangle)$ 是可縮的.

Proof. 我們只需證明對於任何 $x : A$，$\langle g\,f\,x, \varepsilon\,f\,x\rangle = \langle x, \mathrm{refl}_{f\,x}\rangle$ 是可縮的.

我們已經知道 $\mathrm{fib}_f(f\,x)$ 是可縮的，又因爲可縮空間的道路空間是可縮的，證畢. □

5.2 雙可逆映射

定義 5.5 **雙可逆映射**

我們將之前定義的 *isequiv* 重命名爲 ***biinv***:

$$\boldsymbol{biinv}(f) :\equiv linv \times rinv\,.$$

定理 5.3 對於任何 $f : A \to B$,我們有 $biinv(f)$ iff $ishae(f)$.

Proof. 略. □

5.3 可縮纖維

定義 5.6 **可縮映射**

設 $f : A \to B$. 我們定義:

$$\boldsymbol{isContr}(f) :\equiv (y : B) \to isContr\big(fib_f(y)\big).$$

定理 5.4 對於任何 $f : A \to B$,我們有 $ishae(f)$ iff $isContr(f)$.

Proof. 正方向我們已經證明過了,現在我們來證明反方向.

設 $P : \mathrm{isContr}(f) \equiv (y : B) \to \mathrm{isContr}\big(\mathrm{fib}_f(y)\big) \equiv (y : B) \to \big[a : \mathrm{fib}_f(y)\big] \times \big[\big(b : \mathrm{fib}_f(y)\big) \to (a = b)\big] \equiv (y : B) \to [a : (x : A) \times (f(x) = y)] \times [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \to (a = b)]$. 設函數 $g : B \to A, g\,y :\equiv \mathrm{pr}_1\,\mathrm{pr}_1\,P\,y$,函數 $\varepsilon : f\,g \sim \mathrm{id}_B, \varepsilon\,y :\equiv \mathrm{pr}_2\,\mathrm{pr}_1\,P\,y$,函數 $\alpha : (y : B) \to [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \to ((\mathrm{pr}_1\,P\,y) = b)], \alpha\,y :\equiv \mathrm{pr}_2\,P\,y$.

我們要構造四元組 $\langle g', \varepsilon', \eta, \tau\rangle : \mathrm{ishae}(f)$. 令 $g' :\equiv g$,$\varepsilon' :\equiv \varepsilon$.

還剩 η 和 τ 需要構造,這其實相當於構造 $\mathrm{rcoh}_f(g, \varepsilon)$ 的一個項,也就相當於構造 $(x : A) \to \big[\langle g\,f\,x, \varepsilon\,f\,x\rangle = \langle x, \mathrm{refl}_{f\,x}\rangle\big]$ 的一個項,略. □

定理 5.5 對於任何 $f : A \to B$,我們有 $qinv(f)$ iff $isContr(f)$ iff $ishae(f)$ iff $biinv(f)$.

5.4 閉包性質

定義 5.7 **收縮核**

稱函數 $g : A \to B$ 是函數 $f : X \to Y$ 的一個**收縮核**，如果：

1. 存在如下一個圖：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"'] \arrow[rr, bend left, "id_A"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "r"'] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "s'"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r, "r'"] & B
\end{tikzcd}
$$

使得有如下存在：

(i) 一個同倫 $R : r \circ s \sim id_A$；

(ii) 一個同倫 $R' : r' \circ s' \sim id_B$；

(iii) 一個同倫 $L : f \circ s \sim s' \circ g$；

(iv) 一個同倫 $K : g \circ r \sim r' \circ f$.

2. 對於任何 $a : A$，我們有一條道路 $H(a)$ 見證下圖的交換：

$$
\begin{tikzcd}
g\,r\,s\,a \arrow[r, Rightarrow, "K\,s\,a"] \arrow[d, Rightarrow, "g\,R\,a"'] & r'\,f\,s\,a \arrow[d, Rightarrow, "r'\,L\,a"] \\
g\,a \arrow[r, Rightarrow, "(R'\,g\,a)^{-1}"'] & r'\,s'\,g\,a
\end{tikzcd}
$$

回顧 5.2 **纖維化**

我們把類型族 $P : A \to \mathcal{U}$ 視爲一個**纖維化**，A 稱爲它的**底空間**，$P(x)$ 稱爲 x 上的**纖維**，$(x : A) \times P(x)$ 稱爲它的**全空間**，如果存在函數 $f : (x : A) \to P(x)$，則稱該函數爲 P 的一個**截面**.

有時也稱全空間爲 A 上的**纖維化**.

定義 5.8 **逐纖維變換**

給定 $P, Q : A \to \mathcal{U}$，我們稱一個函數 $f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)$ 爲一個**逐纖維變換**.

定義 5.9 ***total***

給定 $P, Q : A \to \mathcal{U}$ 和一個逐纖維變換 $f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)$，我們定義函數

$$\boldsymbol{total}(f) :\equiv (w : (x : A) \times P(x)) \mapsto \langle pr_1\, w, f(pr_1\, w, pr_2\, w)\rangle : [(x : A) \times P(x)] \to (x : A) \times Q(x).$$

定理 5.6 設 $f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)$ 是一個逐纖維變換，$x : A$，$v : Q(x)$. 那麼我們有一個雙可逆映射

$$fib_{total(f)}(\langle x, v\rangle) \simeq fib_{f(x)}(v).$$

Proof. 略. □

定義 5.10 逐纖維等價

我們稱一個逐纖維變換 $f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)$ 是一個**逐纖維等價**，如果 $(x : A) \to \mathit{ishae}(f(x))$.

定理 5.7 設 $f : (x : A) \to P(x) \to Q(x)$ 是一個逐纖維變換. 那麼，"f 是一個逐纖維等價" *iff* "$\mathit{total}(f)$ 是一個雙可逆映射".

Proof. f 是一個逐纖維等價

iff $(x : A) \to \mathrm{ishae}(f(x))$

iff $(x : A) \to \mathrm{isContr}(f(x))$

iff $(x : A) \to (v : Q(x)) \to \mathrm{isContr}\big(\mathrm{fib}_{f(x)}(v)\big)$

iff $(w : (x : A) \times Q(x)) \to \mathrm{isContr}\big(\mathrm{fib}_{\mathrm{total}(f)}(w)\big)$

iff $\mathrm{isContr}(\mathrm{total}(f))$

iff $\mathrm{total}(f)$ 是一個雙可逆映射. □

5.5 對象分類器

引理 5.6 設 $B : A \to \mathcal{U}$，$a : A$，$pr_1 : ((x : A) \times B(x)) \to A$ 是投影函數. 則我們有一個雙可逆映射 $\mathit{fib}_{pr_1}(a) \simeq B(a)$.

Proof. 略. □

5.6 函數外延性

定義 5.11 弱函數外延性原理（*WFE*）

弱函數外延性原理斷言：對於任何 $P : A \to \mathcal{U}$，存在一個函數

$$[(x : A) \to \mathit{isContr}(P(x))] \to \mathit{isContr}[(x : A) \to P(x)].$$

引理 5.7 設有類型 $A, B, X : \mathcal{U}$ 和一個雙可逆映射 $e \equiv \langle f_e, \alpha\rangle : A \simeq B$. 那麼存在一個雙可逆映射 $f_e \circ \_ : (X \to A) \simeq (X \to B)$.

Proof. 根據泛等，我們可以令 $e = \mathrm{idtoeqv}(p)$ 其中 $p : A = B$. 根據 p 的道路歸納，我們只需假設 $p \equiv \mathrm{refl}_A$，那麼我們有 $e = \mathrm{id}_A$. 剩餘證明略. □

推論 5.1 設 $B : A \to \mathcal{U}$，$(x : A) \to \mathit{isContr}(B(x))$. 那麼我們有：

1. 投影 $pr_1 : ((x : A) \to B(x)) \to A$ 是一個雙可逆映射；
2. 存在一個雙可逆映射 $pr_1 \circ \_ : [A \to ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \to A)$.

Proof. 1. 對於任何 $x : A$，我們有一個雙可逆映射 $\mathrm{fib}_{\mathrm{pr}_1}(x) \simeq B(x)$. 因爲 $B(x)$ 是可縮的，所以 $\mathrm{fib}_{\mathrm{pr}_1}(x)$ 是可縮的，所以 pr_1 是可縮的，所以 pr_1 是一個雙可逆映射.

2. 略. □

定理 5.8 設 $B : A \to \mathcal{U}$，$(x : A) \to \mathit{isContr}(B(x))$，$\alpha :\equiv pr_1 \circ \_ : [A \to ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \to A)$. 那麼我們有：

1. $(x : A) \to B(x)$ 是 $\mathit{fib}_\alpha(\mathit{id}_A)$ 的一個收縮核；
2. $(x : A) \to B(x)$ 是可縮的（**弱函數外延性原理**）.

Proof. 1. 定義函數 $\varphi : [(x : A) \to B(x)] \to \mathrm{fib}_\alpha(\mathrm{id}_A) \equiv [(x : A) \to B(x)] \to [(g : A \to ((x : A) \times B(x))) \times (\mathrm{pr}_1\, g = \mathrm{id}_A)]$, $\varphi(f) :\equiv \langle x \mapsto \langle x, f(x)\rangle, \mathrm{refl}_{\mathrm{id}_A}\rangle$ 和 $\psi : \mathrm{fib}_\alpha(\mathrm{id}_A) \to (x : A) \to B(x) \equiv [(g : A \to ((x : A) \times B(x))) \times (\mathrm{pr}_1\, g = \mathrm{id}_A)] \to (x : A) \to B(x)$, $\psi(\langle g, p\rangle) :\equiv (x : A) \mapsto \mathrm{transport}^B(\mathrm{happly}(p, x), \mathrm{pr}_2\, g\, x)$.

顯然，$\psi\varphi \sim \mathrm{id}_{(x:A)\to B(x)}$.

2. 我們只需證明 $\mathrm{fib}_\alpha(\mathrm{id}_A)$ 是可縮的，而這可以通過證明 α 是可縮的來證明，略. □

引理 5.8 設 $f : A \to B$. 如果 A, B 是可縮的，那麼 f 是一個雙可逆映射.

Proof. 設 $\alpha : \mathrm{isContr}(A)$，$\beta : \mathrm{isContr}(B)$，$a :\equiv \mathrm{pr}_1(\alpha)$，$b :\equiv \mathrm{pr}_1(\beta)$.

那麼有 $p : b = f(a)$，對於任何 $y : B$ 有 $q_y :\equiv (\mathrm{pr}_2\, \beta)\, y : b = y$

我們要證明對於任何 $y : B$，$\mathrm{fib}_f(y)$ 是可縮的.

現在讓我們固定 $y : B$. 定義 $p_y :\equiv p^{-1} \cdot q_y : f(a) = y$. 因此 $\langle a, p_y \rangle : \mathrm{fib}_f(y)$.

我們只需證明對於任何 $\langle a', p' \rangle : \mathrm{fib}_f(y)$ 有 $k : a = a'$ 和 $\mathrm{transport}^{\mathrm{fib}_f(y)}(k, p_y) = p'$.

我們有 $(\mathrm{pr}_2\, \alpha)\, a' : a = a'$.

根據道路歸納，我們只需要證明 $\mathrm{transport}^{\mathrm{fib}_f(y)}(\mathrm{refl}_a, p_y) = p'$，即 $p_y = p'$.

根據道路歸納，只需證明 $p_{f(a)} = p'$，即 $\mathrm{refl}_{f(a)} = \mathrm{refl}_{f(a)}$. ☐

定理 5.9 函數外延性原理

對於任何 $B : A \to \mathcal{U}$，$f : (x : A) \to B(x)$，$g : (x : A) \to B(x)$，我們有如下結論：

函數

$$\mathit{happly}(f, g) : (f = g) \to [(x : A) \to f(x) = g(x)]$$

是一個雙可逆映射.

Proof. 我們只需證明 $\mathrm{happly}(f, \_) : (g : (x : A) \to B(x)) \to (f = g) \to (f \sim g)$ 是一個逐纖維等價，而這只需要證明 $\mathrm{total}(\mathrm{happly}(f, \_)) : [(g : (x : A) \to B(x)) \times (f = g)] \to (g : (x : A) \to B(x)) \times (f \sim g)$ 是一個雙可逆映射. 我們已經知道 $(g : (x : A) \to B(x)) \times (f = g)$ 是可縮的，所以只需要證明 $(g : (x : A) \to B(x)) \times (f \sim g)$ 是可縮的.

我們有 $(g : (x : A) \to B(x)) \times (f \sim g)$ 是 $(x : A) \to (u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 的一個收縮核，所以只需證明 $(x : A) \to (u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 是可縮的.

根據 WFE，我們只需證明對於任何 $x : A$ 有 $(u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 是可縮的，證畢. ☐

推論 5.2 *funext*

對於任何 $B : A \to \mathcal{U}$，$f : (x : A) \to B(x)$，$g : (x : A) \to B(x)$，函數 $\mathit{happly}(f, g) : (f = g) \to [(x : A) \to f(x) = g(x)]$ 有一個擬逆：

$$\boldsymbol{\mathit{funext}} : [(x : A) \to f(x) = g(x)] \to (f = g).$$

Proof. 略. ☐

引理 5.9 對於任何類型 A，我們有 $\mathit{isProp}(A)$ 和 $\mathit{isSet}(A)$ 是命題.

Proof. funext. ☐

引理 5.10 $\mathit{isProp}(A) \simeq (A \to \mathit{isContr}(A))$.

Proof. 我們只需證明 $\mathrm{isProp}(A)$ iff $(A \to \mathrm{isContr}(A))$，略. ☐

引理 5.11 如果 $f : A \to B$ 有一個擬逆，那麼 $\mathit{linv}(f)$ 和 $\mathit{rinv}(f)$ 是可縮的.

Proof. 根據函數外延性，我們有 $\mathrm{linv}(f) \simeq (g : B \to A) \times (g\, f = \mathrm{id}_A)$，即 $\mathrm{linv}(f) \simeq \mathrm{fib}_{\_\circ f}(\mathrm{id}_A)$. 因爲 $\mathrm{fib}_{\_\circ f}(\mathrm{id}_A)$ 是可縮的，所以 $\mathrm{linv}(f)$ 是可縮的.

類似地，可以證明 $\mathrm{rinv}(f)$ 是可縮的. ☐

定理 5.10 對於任何 $f : A \to B$，$\mathit{ishae}(f)$ 是一個命題.

Proof. 我們只需假設 f 是一個半伴隨等價，並證明 $\mathrm{ishae}(f)$ 是可縮的，即證明 $(g : B \to A) \times (\varepsilon : f\, g \sim \mathrm{id}_B) \times (\eta : g\, f \sim \mathrm{id}_A) \times (f\, \eta \sim \varepsilon\, f)$ 是可縮的，即證明 $(u : (g : B \to A) \times (f\, g \sim \mathrm{id}_B)) \times (\eta : (\mathrm{pr}_1\, u)\, f \sim \mathrm{id}_A) \times (f\, \eta \sim (\mathrm{pr}_2\, u)\, f)$ 是可縮的，即證明 $(u : \mathrm{rinv}(f)) \times \mathrm{rcoh}(\langle \mathrm{pr}_1(u), \mathrm{pr}_2(u) \rangle)$ 是可縮的. 剩餘證明略. ☐

定理 5.11 對於任何 $f : A \to B$，$\mathit{biinv}(f)$ 是一個命題.

Proof. 略. ☐

引理 5.12 設 A 是類型，$B : A \to \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$ 有 $B(x)$ 是一個命題. 則 $(x : A) \to B(x)$ 是一個命題.

Proof. funext. ☐

定理 5.12 對於任何 $f : A \to B$，$\mathit{isContr}(f)$ 是一個命題.

Proof. 略. ☐

定理 5.13 對於任何 $f : A \to B$，我們有 $\mathit{isContr}(f) \simeq \mathit{ishae}(f) \simeq \mathit{biinv}(f)$.

Proof. 略. ☐

回顧 5.3 **半伴隨等價**

$$\boldsymbol{ishae}(f) :\equiv (g : B \to A) \times (\eta : g\, f \sim id_A) \times (\varepsilon : f\, g \sim id_B) \times (f\, \eta \sim \varepsilon\, f).$$

定義 5.12 **等價**

對於任何函數 $f : A \to B$，我們定義 $\boldsymbol{isequiv}(f) :\equiv \mathit{ishae}(f)$.

引理 5.13 對於任何函數 $f, g : A \to B$，有 $(f = g) \to (\mathit{isequiv}(f) = \mathit{isequiv}(g))$.

Proof. 略. ☐

慣例 5.1 對於任何等價 f，以後如無必要，我們不區分 f 和 $\langle f, e\rangle$（其中 $e : \mathit{isequiv}(f)$）.

定理 5.14 $\neg \boldsymbol{DNE}_\infty$

$$\neg((A : \mathcal{U}) \to \neg\neg A \to A)$$

Proof. 我們只需假設 $f : (A : \mathcal{U}) \to \neg\neg A \to A$，並構造 $\mathbf{0}$ 的一個項.

設 $e : \mathbf{2} \simeq \mathbf{2}, e(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}, e(0_\mathbf{2}) :\equiv 1_\mathbf{2}$ 是一個等價. 設 $p :\equiv \mathrm{ua}(e) : \mathbf{2} = \mathbf{2}$.

那麼我們有 $f(\mathbf{2}) : \neg\neg\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ 和

$$\mathrm{apd}_f(p) : \mathrm{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \to A}(p, f(\mathbf{2})) = f(\mathbf{2}).$$

因此對於任何 $u : \neg\neg\mathbf{2}$，我們有 $\mathrm{happly}\big(\mathrm{apd}_f(p), u\big) : \mathrm{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \to A}(p, f(\mathbf{2}))(u) = f(\mathbf{2})(u)$.

那麼對於任何 $u : \neg\neg\mathbf{2}$，我們有 $\mathrm{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \to A}(p, f(\mathbf{2}))(u) = \mathrm{transport}^{\mathrm{id}_\mathcal{U}}\big(p, f(\mathbf{2})\big(\mathrm{transport}^{A \mapsto \neg\neg A}(p^{-1}, u)\big)\big)$.

根據 funext，對於任何 $u, v : \neg\neg\mathbf{2}$ 有 $u = v$. 因此我們有 $\mathrm{transport}^{A \mapsto \neg\neg A}(p^{-1}, u) = u$. 所以我們有 $\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_\mathcal{U}}(\mathrm{ua}(e), f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u)$.

根據泛等，我們有

$$e(f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u).$$

又因爲我們可以證明 $(x : \mathbf{2}) \to \neg(e(x) = x)$，所以推出矛盾，證畢. ☐

6 範疇論

6.1 範疇和預範疇

定義 6.1 預範疇

一個**預範疇** A 系如下資料:

1. 一個類型 A_0,它的項稱爲**對象**;
2. 一個函數 $hom_A : (A_0 \times A_0) \to Set$. 集合 $hom_A(a, b)$ 的元素稱爲**態射**;
3. 一個函數 $1 : (a : A_0) \to hom_A(a, a)$,$1_a$ 稱爲**恆等態射**;
4. 一個函數 $\_\circ\_ : hom_A(b, c) \to hom_A(a, b) \to hom_A(a, c)$ 稱爲**合成**;
5. 對於任何 $a, b : A_0$ 和 $f : hom_A(a, b)$,我們有 $f = 1_b \circ f$ 且 $f = f \circ 1_a$;
6. 對於任何 $a, b, c, d : A$ 和 $f : hom_A(a, b), g : hom_A(b, c), h : hom_A(c, d)$,我們有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

定義 6.2 同構

一個態射 $f : hom_A(a, b)$ 是一個**同構**,如果存在一個態射 $g : hom_A(b, a)$ 使得 $g \circ f = 1_a$ 且 $f \circ g = 1_b$.

$\boldsymbol{isIso}(f) :\equiv (g : hom_A(b, a)) \times (g \circ f = 1_a) \times (f \circ g = 1_b)$,

$a \cong b :\equiv (f : hom_A(a, b)) \times isIso(f)$.

引理 6.1 對於任何態射 $f : hom_A(a, b)$,$isIso(f)$ 是一個命題. 因此 $a \cong b$ 是一個集合.

Proof. 只需證明 $g = g'$,略.

我們以後將同構 $f : a \cong b$ 的**逆**記作 $\boldsymbol{f^{-1}}$. □

引理 6.2 ***idtoiso***

如果 A 是一個預範疇且 a, b 是它的對象,則有 $\boldsymbol{idtoiso}_{a,b} : (a = b) \to (a \cong b)$.

Proof. 略. □

引理 6.3 設 A 是類型,$B : A \to \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$ 有 $B(x)$ 是一個集合. 則 $(x : A) \to B(x)$ 是一個集合.

Proof. funext. □

例子 6.1 預範疇 $\boldsymbol{\mathcal{S}et}$

1. 對象類型爲 Set;
2. $hom_{\mathcal{S}et}(a, b) :\equiv a \to b$;
3. $1_a :\equiv id_a$;
4. 態射合成定義爲函數的合成.

定義 6.3 範疇

稱一個預範疇 A 是一個**範疇**,如果對於它的任何對象 a, b 有 $idtoiso_{a,b}$ 是一個等價.

引理 6.4 在一個範疇中,對於任何它的對象 a, b,我們有 $\boldsymbol{isotoid}_{a,b} : (a \cong b) \to (a = b)$.

Proof. 略. □

例子 6.2 $\mathcal{S}et$ 是一個範疇.

Proof. ua. □

引理 6.5 在一個範疇中，所有對象組成的類型是一個 1-類型.

Proof. 只需證明 $a = b$ 是集合，略. □

引理 6.6 在一個範疇 A 中，對於 $p : a = a'$，$q : b = b'$，$f : hom_A(a, b)$，我們有 $transport^{hom_A}(\langle p, q\rangle, f) =_{hom_A(a',b')} idtoiso_{b,b'}(q) \circ f \circ (idtoiso_{a,a'}(p))^{-1}$.

Proof. 根據道路歸納。我們可以假設 $p \equiv \mathrm{refl}_a$，$q \equiv \mathrm{refl}_b$. 那麼引理中等式左邊就是 f，右邊是 $1_b \circ f \circ 1_a$，等於 f，證畢. □

引理 6.7 1. $idtoiso(p^{-1}) = (idtoiso(p))^{-1}$；

2. $idtoiso(p \cdot q) = idtoiso(q) \circ idtoiso(p)$；

3. $isotoid(f \circ e) = isotoid(e) \cdot isotoid(f)$.

Proof. 略. □

例子 6.3 預序

一個預範疇 A，如果它的每個集合 $hom_A(a, b)$ 都是命題，則它等價於一個配備了一個自反且傳遞的關係的類型 A_0. 我們稱這是一個**預序**.

引理 6.8 在一個預序 A 中，如果我們有 $f : a \le b$ 和 $g : b \le a$，則我們有 $a \cong b$，且 $a \cong b$ 是一個命題.

Proof. 略. □

例子 6.4 偏序集

稱一個預序 A 是一個**偏序集**，如果它是一個範疇，即如果 A_0 是一個集合且 $\le$ 是反對稱的.

例子 6.5 羣胚

對於任何 1-類型 X，存在一個範疇，它的對象類型是 X，且 $hom(x, y) :\simeq x = y$，我們稱之爲一個**羣胚**.

6.2 函子和自然變換

定義 6.4 函子

設 A 和 B 是預範疇. 一個**函子** $\boldsymbol{F} : A \to B$ 系如下資料：

1. 一個函數 $\boldsymbol{F_0} : A_0 \to B_0$；

2. 對於每對 $a, b : A_0$，一個函數 $\boldsymbol{F_{a,b}} : hom_A(a, b) \to hom_A(F_0\, a, F_0\, b)$；

3. 對於每個 $a : A_0$，我們有 $F_{a,a}(1_a) = 1_{F_0\, a}$；

4. 對於每組 $a, b, c : A_0$ 和 $f : hom_A(a, b)$ 和 $g : hom_A(b, c)$，我們有 $F_{a,c}(g \circ f) = F_{b,c}\, g \circ F_{a,b}\, f$.

例子 6.6 恆等函子

設 A 是一個預範疇. **恆等函子** $\boldsymbol{1_A} : A \to A$ 系如下資料：

1. 恆等函數 $id_{A_0} : A_0 \to A_0$；

2. 對於每對 $a, b : A_0$，一個恆等函數 $id_{hom_A(a,b)} : hom_A(a, b) \to hom_A(a, b)$.

定義 6.5 **自然變換**

給定函子 $F, G : A \to B$，一個**自然變換** $\boldsymbol{\gamma} : F \to G$ 系如下資料：

1. 對於每個 $a : A_0$，一個態射 $\boldsymbol{\gamma_a} : hom_B(F_0\, a, G_0\, a)$；
2. （**自然公理**）對於每組 $a, b : A_0$ 和 $f : hom_A(a, b)$，我們有 $G_{a,b}\, f \circ \gamma_a = \gamma_b \circ F_{a,b}\, f$，如下面的交換圖所示：

$$\begin{tikzcd}
F_0\, a \arrow[r, "F_{a,b}\, f"] \arrow[d, "\gamma_a"'] & F_0\, b \arrow[d, "\gamma_b"] \\
G_0\, a \arrow[r, "G_{a,b}\, f"'] & G_0\, b
\end{tikzcd}$$

引理 6.9 給定函子 $F, G : A \to B$，從 F 到 G 的自然變換的類型是一個集合.

Proof. 略. □

定義 6.6 **函子預範疇，自然同構**

給定預範疇 A, B，存在一個預範疇 $\boldsymbol{B^A}$，稱爲**函子預範疇**，定義爲：

1. $\left(\boldsymbol{B^A}\right)_{\boldsymbol{0}}$ 是從 A 到 B 的函子的類型；
2. $\boldsymbol{hom_{B^A}(F, G)}$ 是從 F 到 G 的自然變換的集合；
3. $\left(\boldsymbol{1_F}\right)_{\boldsymbol{a}}$ 定義爲 $1_{F_0\, a}$；
4. 態射（自然變換）的合成 $\left(\boldsymbol{\delta \circ \gamma}\right)_{\boldsymbol{a}}$ 定義爲 $\delta_a \circ \gamma_a$.

B^A 中的同構稱爲函子間的**自然同構**.

引理 6.10 一個自然變換 $\gamma : F \to G$ 是 B^A 中的一個同構 *iff* 任何 γ_a 是 B 中的一個同構.

Proof. 略. □

定理 6.1 如果 B 是一個範疇，則 B^A 是一個範疇.

Proof. 略. □

引理 6.11 設 B^A 是一個範疇. 如果 B^A 中的兩個對象 F, G 是自然同構的，則 $F = G$.

Proof. 略. □

定義 6.7 **函子範疇**

設 B^A 是一個函子預範疇. 稱 $\boldsymbol{B^A}$ 是一個**函子範疇**，如果 A 和 B 是範疇.

定義 6.8 **函子的合成**

給定函子 $F : A \to B$ 和 $G : B \to C$，它們的**合成**是函子 $\boldsymbol{G \circ F} : A \to C$，定義爲如下資料：

1. $\left(\boldsymbol{G \circ F}\right)_{\boldsymbol{0}} : A_0 \to C_0$ 定義爲 $G_0 \circ F_0 : A_0 \to C_0$；
2. $\left(\boldsymbol{G \circ F}\right)_{\boldsymbol{a,b}} : hom_A(a, b) \to hom_C(G_0\, F_0\, a, G_0\, F_0\, b)$ 定義爲 $\left(G_{F_0\, a, F_0\, b} \circ F_{a,b}\right) : hom_A(a, b) \to hom_C(G_0\, F_0\, a, G_0\, F_0\, b)$.

定義 6.9 **函子和自然映射的合成**

給定函子 $F : A \to B$ 和 $G, H : B \to C$ 和自然變換 $\gamma : G \to H$，如下如所示：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "F"] && B \arrow[rr, bend left=60, "G"] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma"] && C
\end{tikzcd}
$$

F 和 γ 的**合成**是自然變換 $\boldsymbol{\gamma\,F} : G\,F \to H\,F$，定義爲如下資料：

對於每個 $a : A$，一個態射 $(\boldsymbol{\gamma\,F})_{\boldsymbol{a}} : hom_C(G_0\,F_0\,a, H_0\,F_0\,a)$，定義爲 $\gamma_{F_0\,a} : hom_C(G_0\,F_0\,a, H_0\,F_0\,a)$.

定義 6.10 **自然映射和函子的合成**

給定函子 $F, G : A \to B$ 和 $H : B \to C$ 和自然變換 $\gamma : F \to G$，如下如所示：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, bend right=60, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma"] && B \arrow[rr, "H"] && C
\end{tikzcd}
$$

γ 和 H 的**合成**是自然變換 $\boldsymbol{H\,\gamma} : H\,F \to H\,G$，定義爲如下資料：

對於每個 $a : A$，一個態射 $(\boldsymbol{H\,\gamma})_{\boldsymbol{a}} : hom_C\big(H_{F_0\,a, G_0\,a}\,F_0\,a, H_{F_0\,a, G_0\,a}\,G_0\,a\big)$，定義爲 $H\,\gamma_a : hom_C\big(H_{F_0\,a, G_0\,a}\,F_0\,a, H_{F_0\,a, G_0\,a}\,G_0\,a\big)$.

引理 6.12 給定函子 $F, G : A \to B$ 和 $H, K : B \to C$ 和自然變換 $\gamma : F \to G$ 和 $\delta : H \to K$，如下圖所示：

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] A \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=60, "G"'{name=G}] & B \arrow[r, bend left=60, "H"{name=H}] \arrow[r, bend right=60, "K"'{name=K}] & C \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[from=H, to=K, Rightarrow, "\delta"] \end{tikzcd}$$

那麼我們有 $(\delta\, G)(H\, \gamma) = (K\, \gamma)(\delta\, F)$.

Proof. 略. □

引理 6.13 函子的合成是結合的：$H\,(G\,F) = (H\,G)\,F$.

Proof. 略. □

6.3 伴隨

定義 6.11 左伴隨

一個函子 $F : A \to B$ 是一個**左伴隨**，如果有如下資料：

1. 一個函子 $G : B \to A$；
2. （**單位**）一個自然變換 $\eta : 1_A \to G\,F$；
3. （**餘單位**）一個自然變換 $\varepsilon : F\,G \to 1_B$；
4. $(\varepsilon\, F)(F\, \eta) = 1_F$；
5. $(G\, \varepsilon)(\eta\, G) = 1_G$.