

同倫類型論

JoJo

jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算	4
1.1 項	4
1.2 自由和綁定變量	4
1.3 α 等價	5
1.4 代入	5
2 類型論	7
2.1 項	7
2.2 語境	7
2.3 結構規則	7
2.4 類型宇宙	7
2.5 依賴函數類型 (Π -類型)	8
2.6 依賴序偶類型 (Σ -類型)	8
2.7 餘積類型	9
2.8 空類型 0	10
2.9 單元類型 1	10
2.10 boolean 類型	10
2.11 自然數類型	10
2.12 恆等類型	11
2.13 定義	11
3 同倫類型論	12
3.1 類型是高維羣胚	12
3.2 函數是函子	14
3.3 類型族是纖維化	15
3.4 同倫和等價	16
3.5 Σ -類型	17
3.6 單元類型	17
3.7 Π -類型	18
3.8 宇宙和泛等公理	18
3.9 恆等類型	19
3.10 餘積	19
3.11 自然數	21
3.12 泛性質	22
4 集合和邏輯	23
4.1 集合和 n -類型	23
4.2 命題	23
4.3 子集	24
4.4 命題截斷	24

4.5 可縮性	25
5 等價	27
5.1 半伴隨等價	27
5.2 雙可逆映射	29
5.3 可縮纖維	30
5.4 閉包性質	30
5.5 對象分類器	32
5.6 函數外延性	32
6 範疇論	35
6.1 範疇和預範疇	35

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有項的集合 Λ 的遞歸定義如下

1. (變量) Λ 中有無窮個變量;
2. (抽象) 如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$, 則 $(u.M) \in \Lambda$;
3. (應用) 如果 $M, N \in \Lambda$, 則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

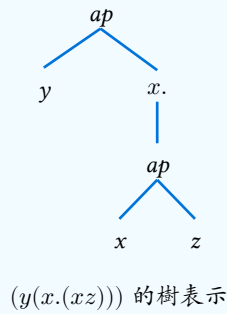
定義 1.2 子項

項 M 的所有子項的集合定義為 $Sub(M)$, Sub 的遞歸定義如下

1. (基礎) 對於任何變量 x , $Sub(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$;
3. (應用) $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

- 引理 1.1
1. (自反性) 對於任何項 M , 有 $M \in Sub(M)$;
 2. (傳遞性) 如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$, 則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出, 如下圖中的例子



項的子項對應於項的樹表示的子樹.

- 慣例 1.1
1. 最外層括號可以省略;
 2. (抽象是右結合的) $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫;
 3. (應用是左結合的) MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫;
 4. (應用優先於抽象) $x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

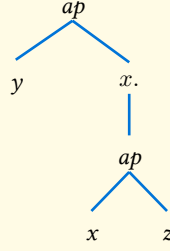
1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 自由變量

項 M 的所有自由變量的集合定義為 $FV(M)$ ， FV 的遞歸定義如下

1. (變量) $FV(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $FV(\lambda x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$;
3. (應用) $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}.$$

定義 1.4 閉項

一個項 M 是閉的 $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記為 Λ^0 .

1.3 α 等價

定義 1.5 重命名

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換為 y ，結果記為 $M^{x \rightarrow y}$.

定義 1.6 α 等價

定義 α 等價 $=_\alpha$ 為符合如下性質的關係

1. (重命名) 如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x \rightarrow y}$;
2. (兼容性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $ML =_\alpha NL$ ， $LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$;
3. (自反性) $M =_\alpha M$;
4. (對稱性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $N =_\alpha M$;
5. (傳遞性) 如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$ ，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 代入

- (1a) $x[N/x] := N$;
- (1b) 如果 $x \neq y$ ，則 $y[N/x] := y$;
- (2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$;
- (3) 如果 $z.P^{y \rightarrow z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$ ，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y \rightarrow z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$ ，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 同時代人

$M[N_1, \dots, N_n / x_1, \dots, x_n]$ 表示把項 N_1, \dots, N_n 同時代入到變量 x_1, \dots, x_n .

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個語境是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$$

其中 x_1, \dots, x_n 是不同的變量，它們分別擁有類型 A_1, \dots, A_n . 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\Gamma \text{ ctx}$ 是一個判斷，表示“ Γ 是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{ ctx-EMP}$$
$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}} \text{ ctx-EXT}$$

其中，變量 x_n 與變量 x_1, \dots, x_n 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 Vble 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \text{ Vble}$$

定義 2.5 判斷相等

如果 $a =_{\alpha} b$ ，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL}$$

2.5 依賴函數類型（ Π -類型）

定義 2.7 依賴函數類型（ Π -類型）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \rightarrow B : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \rightarrow B_1 \equiv (x : A_2) \rightarrow B_2 : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]} \Pi\text{-COMP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-UNIQ}$$

定義 2.8 函數類型

設 $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \rightarrow \mathcal{U}$. 我們定義函數類型

$$A \rightarrow B \equiv (x : A) \rightarrow B.$$

2.6 依賴序偶類型（ Σ -類型）

定義 2.9 依賴序偶類型 (Σ -類型)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM-EQ}$$

構造子 (引入規則): $\langle _, _ \rangle : \{B : A \rightarrow \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow b : B(a) \rightarrow (x : A) \times B$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO-EQ}$$

消除器 (消除規則): $ind_{(x:A) \times B} : [C : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow (b : B(a)) \rightarrow C(\langle a, b \rangle)] \rightarrow [p : (x : A) \times B(x)] \rightarrow C(p)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]} \Sigma\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則: $ind_{(x:A) \times B}(C, g, \langle a, b \rangle) \equiv g(a)(b)$

定義 2.10 **cartesian** 類型

設 $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \rightarrow \mathcal{U}$. 我們定義 **cartesian** 類型

$$A \times B \equiv (x : A) \times B.$$

引理 2.1 投影函數

對於任何 Σ -類型 $(x : A) \times B(x)$, 我們有函數

$$\mathbf{pr}_1 : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow A, \mathbf{pr}_1(\langle a, b \rangle) \equiv a$$

和

$$\mathbf{pr}_2 : (p : (x : A) \times B(x)) \rightarrow B(\mathbf{pr}_1(p)), \mathbf{pr}_2(\langle a, b \rangle) \equiv b.$$

Proof. 略. □

2.7 餘積類型

定義 2.11 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} +\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} +\text{-FORM-EQ}$$

構造子 1: $inl : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow A \rightarrow A + B$

構造子 2: $inr : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow B \rightarrow A + B$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash inl(a_1) \equiv inl(a_2) : A + B} +\text{-INTRO}_1\text{-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash inr(b_1) \equiv inr(b_2) : A + B} +\text{-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器: $ind_{A+B} : [C : (A + B) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow C(inl(a))] \rightarrow [(b : B) \rightarrow C(inr(b))] \rightarrow (e : A + B) \rightarrow C(e)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} +\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則 1: $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inl(a)) \equiv g_0(a)$

計算規則 2: $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inr(b)) \equiv g_1(b)$

2.8 空類型 0

定義 2.12 空類型 0

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0-FORM}$$

消除器: $ind_0 : (C : \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (a : \mathbf{0}) \rightarrow C(a)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash ind_0(x.C, a_1) \equiv ind_0(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{0-ELIM-EQ}$$

2.9 單元類型 1

定義 2.13 單元類型 1

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \mathbf{1-FORM}$$

構造子: $\star : \mathbf{1}$

消除器: $ind_1 : (C : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(\star) \rightarrow (x : \mathbf{1}) \rightarrow C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_1(x.C, c, a_1) \equiv ind_1(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{1-ELIM-EQ}$$

計算規則: $ind_1(C, c, \star) \equiv c$

2.10 boolean 類型

定義 2.14 boolean 類型

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{2} : \mathcal{U}_i} \mathbf{2-FORM}$$

構造子 1: $0_2 : \mathbf{2}$

構造子 2: $1_2 : \mathbf{2}$

消除器: $ind_2 : (C : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(0_2) \rightarrow C(1_2) \rightarrow (x : \mathbf{2}) \rightarrow C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0_2/x] \quad \Gamma \vdash c_1 : C[1_2/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{2}}{\Gamma \vdash ind_2(x.C, c_0, c_1, a_1) \equiv ind_2(x.C, c_0, c_1, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{2-ELIM-EQ}$$

計算規則 1: $ind_2(C, c_0, c_1, 0_2) \equiv c_0$

計算規則 2: $ind_2(C, c_0, c_1, 1_2) \equiv c_1$

2.11 自然數類型

定義 2.15 自然數類型

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i} \text{N-FORM}$$

構造子 1: $0 : \mathbb{N}$

構造子 2: $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{succ}(n_1) \equiv \text{succ}(n_2) : \mathbb{N}} \text{N-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器: $\text{ind}_{\mathbb{N}} : (C : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(0) \rightarrow [(n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n) \rightarrow C(\text{succ}(n))] \rightarrow (n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]} \text{N-ELIM-EQ}$$

計算規則 1: $\text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) \equiv c_0$

計算規則 2: $\text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, \text{succ}(n)) \equiv c_s(n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n))$

2.12 恆等類型

定義 2.16 恆等類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM-EQ}$$

構造子: $\text{refl} : \{A : \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow (a = a)$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_{a_1} \equiv \text{refl}_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2} =\text{-INTRO-EQ}$$

消除器: $\text{ind}_{=_A} : [C : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(x : A) \rightarrow C(x, x, \text{refl}_x)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow C(x, y, p)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]} =\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則: $\text{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \text{refl}_x) \equiv c(x)$

恆等類型的項稱為**道路**；恆等類型的消除規則稱為**道路歸納**。

2.13 定義

例子 2.1 函數的合成

$\circ := (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \rightarrow C) \mapsto (f : A \rightarrow B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x)).$

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$ ，都能構造一個函數 $_-^{-1} : (x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$ 使得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

p^{-1} 稱為 p 的逆.

Proof. 第一種證明

設 $A : \mathcal{U}_i, D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (y =_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$.

現在對於任何 $x, y : A$ 我們可以定義期望得到的函數 $_-^{-1} := p \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$ ，我們想要構造一個項 $p^{-1} : y = x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下， refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x^{-1} := \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$ ，都能構造一個函數 $\cdot : (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ 使得 $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$.

$p \cdot q$ 稱為 p 和 q 的連接.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x, y, z : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

我們將改為定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ ，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

然後，為了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型為 $(x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ 的函數，也就是類型為 $(x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

現在設 $E : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow \mathcal{U}_i, E(x, z, q) := (x =_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow E(x, x, \text{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$.

因為 $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$ ，所以 $d : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : \\ (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$$

現在對於任何 $a, b, c : A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\cdot := (p : a =_A b) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p) : \\ (a, b, c : A) \rightarrow (a =_A b) \rightarrow (b =_A c) \rightarrow (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \text{refl}_a), a, a, \text{refl}_a) \equiv \text{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \text{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \text{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$, $p : x = y$ 和 $q : y = z$, 我們想要構造一個項 $p \bullet q : x = z$. 根據 p 的道路歸納, 我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet q : x = z$. 根據 q 的道路歸納, 只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x : A$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納, 我們完成了構造. \square

引理 3.3 設 $A : \mathcal{U}_i$, $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ 且 $r : z = w$. 我們有以下結論:

1. $p = p \bullet \text{refl}_y$ 且 $p = \text{refl}_x \bullet p$;
2. $p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$ 且 $p^{-1} \bullet p = \text{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1} = p$;
4. $p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p = p \bullet \text{refl}_y)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x = \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p = p \bullet \text{refl}_y$.

本書後面將把 $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = p \bullet \text{refl}_y), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$ 記為 \mathbf{ru}_p , 把 $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = \text{refl}_y \bullet p), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$ 記為 \mathbf{lu}_p .

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet \text{refl}_y \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 因此只需證明 $\text{refl}_x = \text{refl}_x$, 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x} : \text{refl}_x = \text{refl}_x$.

2. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ 且 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet p^{-1} \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

3. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p^{-1})^{-1} = p$. 那麼 $D(x, x, p)$ 是 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 所以 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $(p^{-1})^{-1} \equiv (\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x, y, z, w : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$, 我們改為證明 $(x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$.

設 $D_1 : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D_1(x, y, p) \equiv (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$. 根據 p 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_1(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_2 : (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow \mathcal{U}, D_2(x, z, q) \equiv (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$. 根據 q 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_2(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_3 : (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow \mathcal{U}, D_3(x, w, r) \equiv (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$. 根據 r 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_3(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow \text{refl}_x = \text{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x}$.

因此, 應用 3 此道路歸納, 我們就得到了想要的類型的函數. \square

引理 3.4 加贅

1. 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b$, 我們可以構造函數 $_ \bullet _ : (p = q) \rightarrow (r : b = c) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet r), \alpha \bullet_r \text{refl}_b \equiv ru_p^{-1} \bullet \alpha \bullet ru_q$;
2. 對於任何 $a, b, c : A, r, s : b = c$, 我們可以構造函數 $_ \bullet _ : (p : a = b) \rightarrow (r = s) \rightarrow (p \bullet r = p \bullet s), \text{refl}_b \bullet_l \beta \equiv lu_r^{-1} \bullet \beta \bullet lu_s$.

Proof. 略. \square

引理 3.5 橫合成

對於任何 $a, b, c : A$, $p, q : a = b$, $r, s : b = c$, 我們可以構造函數 $_ \bullet _ : (p = q) \rightarrow (r = s) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet s)$.

Proof. 略. □

引理 3.6 剪鬚

1. 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b$, 我們可以構造函數 $(r : b = c) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet r) \rightarrow (p = q)$;
2. 對於任何 $a, b, c : A, r, s : b = c$, 我們可以構造函數 $(p : a = b) \rightarrow (p \bullet r = p \bullet s) \rightarrow (r = s)$.

Proof. 略. □

引理 3.7 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b, r, s : b = c, \alpha : p = q, \beta : r = s$, 我們有 $(\alpha \bullet_r r) \bullet (q \bullet_l \beta) = (p \bullet_l \beta) \bullet (\alpha \bullet_r s)$.

Proof. 略. □

定理 3.1 Eckmann–Hilton

$$(\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)) \rightarrow (\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha)$$

Proof. 略. □

定義 3.1 有點類型

設 $A : \mathcal{U}, a : A$. 序偶 $(A, a) : (A : \mathcal{U}) \times A$ 稱爲一個**有點類型**, a 稱爲它的**基點**. 類型 $(A : \mathcal{U}) \times A$ 記爲 \mathcal{U}_\bullet .

定義 3.2 迴路空間

對於 $n : \mathbb{N}$, 一個有點類型 (A, a) 的 n 重迭代迴路空間 $\Omega^n(A, a)$ 遞歸地定義爲

$$\Omega^0(A, a) \equiv (A, a),$$

$$\Omega^1(A, a) \equiv ((a =_A a), \text{refl}_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A, a) \equiv \Omega^n(\Omega(A, a)),$$

它的一個項稱爲點 a 的一個 n 維迴路.

慣例 3.1 設 $\Omega^n(A, a) \equiv (B, b)$. 則 $x : \Omega^n(A, a)$ 表示 $x : B$.

3.2 函數是函子

引理 3.8 對於任何 $A, B : \mathcal{U}, f : A \rightarrow B, x, y : A$, 都能構造函數 $\text{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$, $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (f(x) =_B f(y))$. 那麼我們有 $d \equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : (x : A) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$. 根據 p 的道路歸納, 我們得到函數 $\text{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$. 根據恆等類型的計算規則, 對於任何 $x : A$, 有 $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$.

第二種證明: 爲了對任何 $p : x = y$ 定義 $\text{ap}_f(p)$, 根據 p 的道路歸納, 只需要構造 p 是 refl_x 的情況. 在該情況下, 我們定義 $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$. □

慣例 3.2 我們將經常將 $\text{ap}_f(p)$ 簡寫爲 $f(p)$.

引理 3.9 對於任何函數 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ 和道路 $p : x =_A y, q : y =_A z$ ，我們有：

1. $ap_f(p \bullet q) = ap_f(p) \bullet ap_f(q)$;
2. $ap_f(p^{-1}) = (ap_f(p))^{-1}$;
3. $ap_g(ap_f(p)) = ap_{g \circ f}(p)$;
4. $ap_{id_A}(p) = p$.

Proof. 1. 根據的道路歸納，只需要證明 $ap_f(\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = ap_f(\text{refl}_x) \bullet ap_f(\text{refl}_x)$ ，這太簡單，遂略。

2. 根據道路歸納，只需要證明 $ap_f(\text{refl}_x^{-1}) = (ap_f(\text{refl}_x))^{-1}$ ，略。

3. 根據道路歸納，只需證明 $ap_g(ap_f(\text{refl}_x)) = ap_{g \circ f}(\text{refl}_x)$ ，即 $ap_g(\text{refl}_{f(x)}) = \text{refl}_{g \circ f}$ ，略。

4. 根據道路歸納，只需證明 $ap_{id_A}(\text{refl}_x) = \text{refl}_x$ ，略。 □

3.3 類型族是纖維化

定義 3.3 纖維化

我們把類型族 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ 視為一個**纖維化**， A 稱為它的**底空間**， $P(x)$ 稱為 x 上的**纖維**， $(x : A) \times P(x)$ 稱為它的**全空間**，如果存在函數 $f : (x : A) \rightarrow P(x)$ ，則稱該函數為 P 的一個**截面**。

有時也稱全空間為 A 上的**纖維化**。

引理 3.10 傳送

設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$ ，則存在函數 $\text{transport}^B(., .) : (x =_A y) \rightarrow B(x) \rightarrow B(y)$ ， $\text{transport}^B(\text{refl}_x, .) \equiv id_{B(x)}$ 。

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv B(x) \rightarrow B(y)$ 。那麼我們有函數 $d \equiv (x : A) \mapsto id_{B(x)} : D(x, x, \text{refl}_x)$ 。根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : B(x) \rightarrow B(y)$ 。於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$ ，函數 $\text{transport}^B(p, .) \equiv \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$ 。根據計算規則， $\text{transport}^B(\text{refl}_x, .) \equiv id_{B(x)}$ 。

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x 。在該情況下，對於任何 $b : B(x)$ ，我們定義 $\text{transport}^B(\text{refl}_x, b) \equiv b$ 。 □

引理 3.11 道路提升

設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$ 。則對於任何 $u : P(x), p : x = y$ ，我們有 $\text{lift}(u, p) : (x, u) =_{(x:A) \times P(x)} (y, \text{transport}^P(p, u))$ ， $\text{lift}(u, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{(x,u)}$ 。

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(x, u) = (x, id_{P(x)}(u))$ ，略。 □

引理 3.12 依賴映射

設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, f : (x : A) \rightarrow B(x), x, y : A$ 。我們有映射 $\text{apd}_f : (p : x =_A y) \rightarrow (\text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y))$ ， $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ 。

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$ 。於是我們有函數 $d \equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ 。根據道路歸納，對於任何 $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$ 。於是我們可以定義，對於任何 $p : x = y$ ，函數 $\text{apd}_f(p) \equiv \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$ 。根據計算規則， $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ 。

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x 。在該情況下，我們定義 $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : \text{transport}^B(\text{refl}_x, f(x)) =_{B(x)} f(x)$ 。 □

引理 3.13 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}, B(x) \equiv B, x, y : A$ 。則能構造函數 $\text{transportconst}^B(., .) : (p : x = y) \rightarrow b : B \rightarrow b = \text{transport}^B(p, b)$ 。

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(b : B) \rightarrow b = \text{transport}^B(\text{refl}_x, b)$ ，即 $(b : B) \rightarrow b = b$ 。顯然只需定義 $\text{transportconst}^B(\text{refl}_x, b) \equiv \text{refl}_b$ 。 □

引理 3.14 設 $f : A \rightarrow B, x, y : A$ 。則對於任何道路 $p : x = y$ ，我們有類型為 $ap_f(p) = \text{transportconst}^B(p, f(x)) \bullet \text{apd}_f(p)$ 的道路。

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $ap_f(\text{refl}_x) = \text{transportconst}^B(\text{refl}_x, f(x)) \bullet \text{apd}_f(\text{refl}_x)$ ，即 $\text{refl}_{f(x)} = \text{refl}_{f(x)} \bullet \text{refl}_{f(x)}$ ，這是顯然的。 □

引理 3.15 $(P : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^P(q, \text{transport}^P(p, u)) = \text{transport}^P(p \cdot q, u)$.

Proof. 略. □

引理 3.16 $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (P : B \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(f(x))) \rightarrow \text{transport}^{P \circ f}(p, u) = \text{transport}^P(\text{ap}_f(p), u)$.

Proof. 略. □

引理 3.17

$(P, Q : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^Q(p, f_x(u)) =_{Q(y)} f_y(\text{transport}^P(p, u))$.

Proof. 略. □

3.4 同倫和等價

定義 3.4 同倫

設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}, f, g : (x : A) \rightarrow P(x)$. 從 f 到 g 的一個同倫定義為一個類型為 $(f \sim g) := (x : A) \rightarrow f(x) = g(x)$ 的函數.

引理 3.18 設 $f : A \rightarrow B$. 則 $(x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : f \sim f$.

Proof. 略. □

引理 3.19 設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$. 我們有:

1. $(f : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim f)$;
2. $(f, g : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim f)$;
3. $(f, g, h : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim h) \rightarrow (f \sim h)$.

Proof. 略. □

引理 3.20 設 $f, g : A \rightarrow B, H : f \sim g$. 則對於任何 $x, y : A, p : x = y$ 我們有 $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$, 即下圖交換

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(p)} & f(y) \\ \downarrow H(x) & & \downarrow H(y) \\ g(x) & \xrightarrow{g(p)} & g(y) \end{array}$$

Proof. 略. □

推論 3.1 設 $f : A \rightarrow A, H : f \sim \text{id}_A$. 則對於任何 $x : A$ 我們有 $H(f(x)) = f(H(x))$.

Proof. 根據 H 的自然性, 我們有 $f(H(x)) \cdot H(x) = H(f(x)) \cdot H(x)$, 即下圖交換

$$\begin{array}{ccc}
f f x & \xrightarrow{f(H x)} & f x \\
H(f x) \downarrow & & \downarrow H x \\
f x & \xrightarrow{H x} & x
\end{array}$$

我們可以用 $(H x)^{-1}$ 加鬚來消除 $H x$, 得到 $f(H x) = f(H x) \cdot H x \cdot (H x)^{-1} = H(f x) \cdot H x \cdot (H x)^{-1} = H(f x)$. □

定義 3.5 擬逆

對於一個函數 $f : A \rightarrow B$, 它的一個**擬逆**是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \mathbf{qinv}(f) := (g : B \rightarrow A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$.

定義 3.6 等價

對於任何函數 $f : A \rightarrow B$, 定義 $\mathbf{isequiv}(f) := [(g : B \rightarrow A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (f \circ h \sim id_B)]$, $(A \simeq B) := (f : A \rightarrow B) \times \mathbf{isequiv}(f)$.

引理 3.21 1. 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 存在函數 $\mathbf{qinv}(f) \rightarrow \mathbf{isequiv}(f)$;

2. 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 存在函數 $\mathbf{isequiv}(f) \rightarrow \mathbf{qinv}(f)$.

Proof. 1. 略.

2. 給定四元組 $(g, \alpha, h, \beta) : \mathbf{isequiv}(f)$, 我們有 $\alpha : (x : A) \rightarrow (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \rightarrow (f \circ h)(y) = y$, 那麼我們有同倫 $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \rightarrow g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$ 和 $\alpha \circ h : (y : B) \rightarrow (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$. 於是我們可以定義同倫 $\gamma := (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \rightarrow g(y) = h(y)$. 那麼 $f \circ \gamma : (y : B) \rightarrow (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$. 於是 $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim id_B$. 所以有 $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathbf{qinv}(f)$. □

引理 3.22 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$, 我們有 $\mathbf{isequiv}(id_A)$, 即 $A \simeq A$;

2. 對於任何函數 $f : A \rightarrow B$ 使得 $\mathbf{isequiv}(f)$, 即 $A \simeq B$, 我們有一個函數 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 使得 $\mathbf{isequiv}(f^{-1})$, 即 $B \simeq A$;

3. 對於任何函數 $f : A \rightarrow B$ 使得 $\mathbf{isequiv}(f)$ (即 $A \simeq B$) 和 $g : B \rightarrow C$ 使得 $\mathbf{isequiv}(g)$ (即 $B \simeq C$), 我們有 $\mathbf{isequiv}(g \circ f)$ (即 $A \simeq C$).

Proof. 1. 我們要證明對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ 有 $[(g : B \rightarrow A) \times (g \circ id_A \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (id_A \circ h \sim id_B)]$, 略.

2. f 的擬逆.

3. $f^{-1} \circ g^{-1}$ 是 $g \circ f$ 的一個擬逆. □

3.5 Σ -類型

定理 3.2 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $w, w' : (x : A) \times B(x)$.

則我們有一個等價 $(w = w') \simeq (p : pr_1(w) = pr_1(w')) \times (transport^B(p, pr_2(w)) = pr_2(w'))$.

Proof. 略. □

推論 3.2 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$. 則對於任何 $w : (x : A) \times B(x)$, 我們有 $w = \langle pr_1(w), pr_2(w) \rangle$.

Proof. 略. □

引理 3.23 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $C : (x : A) \times (B(x) \rightarrow \mathcal{U})$. 則我們有 $[(x : A) \times (y : B(x)) \times C(\langle x, y \rangle)] \simeq [(p : (x : A) \times B(x)) \times C(p)]$.

Proof. 略. □

3.6 單元類型

定理 3.3

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow ((x = y) \simeq \mathbf{1}).$$

Proof. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$. 設函數 $f : (\star = \star) \rightarrow \mathbf{1}, x \mapsto \star$ 和 $g : \mathbf{1} \rightarrow (\star = \star), x \mapsto \text{refl}_\star$. 那麼我們只需證明對於任何 $x : \star = \star$ 有 $(g \circ f)(x) = \text{id}_{\star=\star}(x)$ 和對於任何 $x : \mathbf{1}$ 有 $(f \circ g)(x) = \text{id}_\mathbf{1}(x)$. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(g \circ f)(\text{refl}_\star) = \text{id}_{\star=\star}(\text{refl}_\star)$ 和 $(f \circ g)(\star) = \text{id}_\mathbf{1}(\star)$ ，略。 \square

定理 3.4

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow (x = y).$$

Proof. 略。 \square

3.7 Π -類型

引理 3.24 *happly*

對於任何函數 $f, g : (x : A) \rightarrow B(x)$ ，我們有函數

$$\begin{aligned} \mathbf{happly}(f, g) &: (f = g) \rightarrow (x : A) \rightarrow (f(x) = g(x)), \\ \mathbf{happly}(f, g, \text{refl}_f) &\equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)}. \end{aligned}$$

Proof. 略。 \square

引理 3.25 給定類型 X ，一個路徑 $p : x_1 =_X x_2$ ，類型族 $A, B : X \rightarrow \mathcal{U}$ ，一個函數 $f : A(x_1) \rightarrow B(x_1)$. 則我們有：

$$\text{transport}^{A \rightarrow B}(p, f) =_{A(x_2) \rightarrow B(x_2)} x \mapsto \text{transport}^B(p, f(\text{transport}^A(p^{-1}, x))).$$

Proof. 根據 p 的道路歸納，我們只需證明 $\text{transport}^{A \rightarrow B}(\text{refl}_{x_1}, f) =_{A(x_1) \rightarrow B(x_1)} x \mapsto \text{transport}^B(\text{refl}_{x_1}, f(\text{transport}^A(\text{refl}_{x_1}, x)))$ ，即 $f =_{A(x_1) \rightarrow B(x_1)} x \mapsto f(x)$ ，證畢。 \square

3.8 宇宙和泛等公理

引理 3.26 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$ ，我們有一個函數 $\mathbf{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$.

Proof. 函數 $\text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(_, _) : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow A \rightarrow B$. 我們要證明 $(p : A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow \text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(p, _))$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(\text{refl}_A, _))$ ，即證明 $\text{isequiv}(\text{id}_A)$ ，略。

定義 $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p) \equiv (\text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(p, _), a) : A \simeq B$ ，其中 $a : \text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(p, _))$. \square

引理 3.27 $(\text{id}_A, a) = \mathbf{idtoeqv}_{A,B}(\text{refl}_A)$ ，其中 $a : \text{isequiv}(\text{id}_A)$.

Proof. 略。 \square

引理 3.28 對於任何 $x, y : A, p : x = y, B : A \rightarrow \mathcal{U}, u : B(x)$ ，我們有 $\text{transport}^B(p, u) = \text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(\text{ap}_B(p), u) = \text{pr}_1(\mathbf{idtoeqv}(\text{ap}_B(p)))(u)$.

Proof. 根據歸納原理，只需證明 $\text{transport}^B(\text{refl}_x, u) = \text{transport}^{\text{id}_{\mathcal{U}}}(\text{ap}_B(\text{refl}_x), u) = \text{pr}_1(\mathbf{idtoeqv}(\text{ap}_B(\text{refl}_x)))(u)$ ，略。 \square

定義 3.7 泛等公理（不常用）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \mathbf{univalence}(A, B) : \text{isequiv}(\mathbf{idtoeqv}_{A,B})} \mathcal{U}_i\text{-UNIV}$$

引理 3.29 $(\mathbf{idtoeqv}_{A,B}, \mathbf{univalence}(A, B)) : (A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$.

Proof. 略。 \square

定義 3.8 泛等公理 (常用)

1. 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$ ，我們有一個函數 $\mathbf{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B)$;
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ ，我們有 $\text{idtoeqv}_{A,B}(\mathbf{ua}(f, a)) = (f, a)$;
3. 對於任何 $p : A =_{\mathcal{U}} B$ ，我們有 $p = \mathbf{ua}(\text{idtoeqv}_{A,B}(p))$.

- 引理 3.30** 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ ，我們有 $\text{refl}_A = \mathbf{ua}(\text{id}_A, a)$ ，其中 $a : \text{isequiv}(\text{id}_A)$;
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B, (g, b) : B \simeq C$ ，我們有 $\mathbf{ua}(f, a) \bullet \mathbf{ua}(g, b) = \mathbf{ua}(g \circ f, c)$.
 3. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ 和它的一個擬逆 (f^{-1}, b) ，我們有 $(\mathbf{ua}(f, a))^{-1} = \mathbf{ua}(f^{-1}, b)$.

Proof. 略. □

3.9 恆等類型

定理 3.5 如果 $(f, a) : A \simeq B$ ，則對於任何 $x, x' : A$ ，函數 $\text{ap}_f : (x = x') \rightarrow (f(x) = f(x'))$ 也是一個等價。

Proof. 我們想要構造一個四元組 $(g, \gamma, h, \delta) : \text{isequiv}(\text{ap}_f)$ ，即 $g : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \gamma : (p : x = x') \rightarrow (g(\text{ap}_f(p)) = p), h : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \delta : (q : f(x) = f(x')) \rightarrow (\text{ap}_f(g(q)))$.

設 $(f^{-1}, \alpha, \beta) : \text{qinv}(f)$ ，即 $f^{-1} : B \rightarrow A, \alpha : (x : A) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = x), \beta : (y : B) \rightarrow (f(f^{-1}(y)) = y)$.

那麼對於任何 $x, x' : A$ ，我們有 $\text{ap}_{f^{-1}} : (f(x) = f(x')) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')))$.

於是對於任何 $p : x = x'$ ，我們有

$$\begin{aligned} & \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(\text{ap}_f(p)) \bullet \alpha_{x'} \\ &= \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1} \circ f}(p) \bullet \alpha_{x'} \\ &= \text{ap}_{\text{id}_A}(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

且對於任何 $q : f(x) = f(x')$ ，我們有

$$\begin{aligned} & \text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \bullet \text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \bullet \beta_{f(x')}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\text{ap}_f^{-1}(\text{ap}_f(\alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}))) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\alpha_x \bullet \alpha_x^{-1} \bullet \text{ap}_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'} \bullet \alpha_{x'}^{-1}) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \text{ap}_f(\text{ap}_{f^{-1}}(q)) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= q. \end{aligned}$$

□

引理 3.31 對於任何 $a, x_1, x_2 : A$ 和 $p : x_1 = x_2$ ，我們有

1. $(q : a = x_1) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (a=x)}(p, q) = q \bullet p$;
2. $(q : x_1 = a) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (x=a)}(p, q) = p^{-1} \bullet q$;
3. $(q : x_1 = x_2) \rightarrow \text{transport}^{x \mapsto (x=x)}(p, q) = p^{-1} \bullet q \bullet p$.

Proof. 略. □

3.10 餘積

定義 3.9 \mathbf{code} (“固定 $a_0 : A$ ”的版本)

給定 $A, B : \mathcal{U}$, $a_0 : A$.

定義函數

$$\mathbf{code} : A + B \rightarrow \mathcal{U},$$

模式匹配

$$\mathbf{code}(\mathbf{inl}(_)) \equiv a_0 = _ : A \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\mathbf{code}(\mathbf{inr}(_)) \equiv b \mapsto \mathbf{0} : B \rightarrow \mathcal{U}.$$

定理 3.6 對於任何 $x : A + B$, 我們有 $(\mathbf{inl}(a_0) = x) \simeq \mathbf{code}(x)$.

Proof. 定義函數

$$\mathbf{encode} : (x : A + B) \rightarrow (\mathbf{inl}(a_0) = x) \rightarrow \mathbf{code}(x),$$

$$\mathbf{encode}(x, p) \equiv \mathbf{transport}^{\mathbf{code}}(p, \mathbf{refl}_{a_0}).$$

和函數

$$\mathbf{decode} : (x : A + B) \rightarrow \mathbf{code}(x) \rightarrow (\mathbf{inl}(a_0) = x),$$

模式匹配

$$\mathbf{decode}(\mathbf{inl}(a), c) \equiv \mathbf{ap}_{\mathbf{inl}}(c)$$

$$\mathbf{decode}(\mathbf{inr}(b), c) \equiv \mathbf{ind}_0((x : \mathbf{0}) \mapsto (\mathbf{inl}(a_0) = \mathbf{inr}(b)), c)$$

接下來我們需要證明對於任何 $x : A + B$ 有 $\mathbf{encode}(x, _)$ 和 $\mathbf{decode}(x, _)$ 互為擬逆。

在其中一個方向, 我們要證明對於任何 $p : \mathbf{inl}(a_0) = x$ 有 $\mathbf{decode}(x, \mathbf{encode}(x, p)) = p$. 根據 p 的道路歸納, 我們只需證明 $x \equiv \mathbf{inl}(a_0)$, $p \equiv \mathbf{refl}_{\mathbf{inl}(a_0)}$ 的情況:

$$\begin{aligned} & \mathbf{decode}(\mathbf{inl}(a_0), \mathbf{encode}(\mathbf{inl}(a_0), \mathbf{refl}_{\mathbf{inl}(a_0)})) \\ & \equiv \mathbf{decode}(\mathbf{inl}(a_0), \mathbf{transport}^{\mathbf{code}}(\mathbf{refl}_{\mathbf{inl}(a_0)}, \mathbf{refl}_{a_0})) \\ & \equiv \mathbf{decode}(\mathbf{inl}(a_0), \mathbf{refl}_{a_0}) \\ & \equiv \mathbf{ap}_{\mathbf{inl}}(\mathbf{refl}_{a_0}) \\ & \equiv \mathbf{refl}_{\mathbf{inl}(a_0)} \\ & \equiv p. \end{aligned}$$

在另一個方向, 我們要證明對於任何 $c : \mathbf{code}(x)$ 有 $\mathbf{encode}(x, \mathbf{decode}(x, c)) = c$:

當 $x \equiv \mathbf{inl}(a)$ 時, $c : a_0 = a$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{encode}(\mathbf{inl}(a), \mathbf{decode}(\mathbf{inl}(a), c)) \\ & \equiv \mathbf{encode}(\mathbf{inl}(a), \mathbf{ap}_{\mathbf{inl}}(c)) \\ & \equiv \mathbf{transport}^{\mathbf{code}}(\mathbf{ap}_{\mathbf{inl}}(c), \mathbf{refl}_{a_0}) \\ & \equiv \mathbf{transport}^{a \mapsto (a_0 = a)}(c, \mathbf{refl}_{a_0}) \\ & \equiv \mathbf{refl}_{a_0} \bullet c \\ & \equiv c. \end{aligned}$$

當 $x \equiv \mathbf{inr}(b)$ 時, $c : \mathbf{0}$, 略.

□

推論 3.3

$$\begin{aligned} \text{encode}(\text{inl}(a), _) : (\text{inl}(a_0) = \text{inl}(a)) &\rightarrow (a_0 = a); \\ \text{encode}(\text{inr}(b), _) : (\text{inl}(a_0) = \text{inr}(b)) &\rightarrow \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Proof. 略. □**引理 3.32** $\mathbf{2} \simeq \mathbf{1} + \mathbf{1}$.*Proof.* 略. □**推論 3.4** $0_2 \neq 1_2$.*Proof.* 略. □**定義 3.10** $(A + B)$ 給定一個類型 X ，類型族 $A, B : X \rightarrow \mathcal{U}$ ，定義類型族：

$$(A + B) : X \rightarrow \mathcal{U}, (A + B)(x) := A(x) + B(x).$$

引理 3.33 給定一個類型 X ，一個道路 $p : x_1 =_X x_2$ ，類型族 $A, B : X \rightarrow \mathcal{U}$ ，則我們有：

$$\begin{aligned} \text{transport}^{A+B}(p, \text{inl}(a)) &= \text{inl}(\text{transport}^A(p, a)); \\ \text{transport}^{A+B}(p, \text{inr}(b)) &= \text{inr}(\text{transport}^A(p, b)). \end{aligned}$$

Proof. 略. □**3.11 自然數****定義 3.11** code

定義函數

$$\text{code} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U},$$

模式匹配

$$\text{code}(0, 0) := \mathbf{1}$$

$$\text{code}(\text{succ}(m), 0) := \mathbf{0}$$

$$\text{code}(0, \text{succ}(n)) := \mathbf{0}$$

$$\text{code}(\text{succ}(m), \text{succ}(n)) := \text{code}(m, n).$$

定義 3.12 r

定義函數

$$r : (n : \mathbb{N}) \rightarrow \text{code}(n, n)$$

模式匹配

$$r(0) := \star$$

$$r(\text{succ}(n)) := r(n).$$

定理 3.7 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 我們有 $(m = n) \simeq \text{code}(m, n)$.*Proof.* 定義函數

$$\begin{aligned}\text{encode} &: (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow (m = n) \rightarrow \text{code}(m, n), \\ \text{encode}(m, n, p) &:= \text{transport}^{\text{code}(m, \cdot)}(p, r(m)),\end{aligned}$$

和函數

$$\text{decode} : (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow \text{code}(m, n) \rightarrow (m = n),$$

模式匹配

$$\begin{aligned}\text{decode}(0, 0, \star) &:= \text{refl}_0 \\ \text{decode}(\text{succ}(m), 0, c) &:= \text{ind}_0((x : 0) \mapsto (m = n), c) \\ \text{decode}(0, \text{succ}(n), c) &:= \text{ind}_0((x : 0) \mapsto (m = n), c) \\ \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), c) &:= \text{ap}_{\text{succ}} \circ \text{decode}(m, n, c).\end{aligned}$$

接下來我們要證明對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 有 $\text{encode}(m, n, _)$ 和 $\text{decode}(m, n, _)$ 互為擬逆。

我們先證明對於任何 $p : m = n$ 有 $\text{decode}(m, n, \text{encode}(m, n, p)) = p$ 。根據 p 的道路歸納，只需證明 $\text{decode}(m, m, \text{encode}(m, m, \text{refl}_m)) = \text{refl}_m$ ，即 $\text{decode}(m, m, r(m)) = \text{refl}_m$ 。對 m 使用歸納法，如果 $m \equiv 0$ ，那麼 $\text{decode}(0, 0, r(0)) = \text{decode}(0, 0, \star) = \text{refl}_0$ ；設 $x : \mathbb{N}, y : \text{decode}(x, x, r(x)) = \text{refl}_x$ ，則 $\text{decode}(\text{succ}(x), \text{succ}(x), r(\text{succ}(x))) = \text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(x, x, r(x))) = \text{ap}_{\text{succ}}(\text{refl}_x) = \text{refl}_{\text{succ}(x)}$ 。

然後我們證明對於任何 $c : \text{code}(m, n)$ 有 $\text{encode}(m, n, \text{decode}(m, n, c)) = c$ 。我們對 m, n 進行雙歸納。如果都是 0，那麼 $\text{encode}(0, 0, \text{decode}(0, 0, c)) = \text{encode}(0, 0, \text{decode}(0, 0, \star)) = \text{encode}(0, 0, \text{refl}_0) = r(0) = \star = c$ ；如果 m 是 0 且 n 是一個後繼，或反之，那麼有 $c : 0$ ；最後是兩個後繼的情況，根據歸納假設我們有

$$\begin{aligned}& \text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), c)) \\ &= \text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(m, n, c))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(\text{succ}(m), \cdot)}(\text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(m, n, c)), r(\text{succ}(m))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(\text{succ}(m), \text{succ}(\cdot))}(\text{decode}(m, n, c), r(\text{succ}(m))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(m, \cdot)}(\text{decode}(m, n, c), r(m)) \\ &= \text{encode}(m, n, \text{decode}(m, n, c)) \\ &= c\end{aligned}$$

□

推論 3.5 1. 對於任何 $m : \mathbb{N}$ ，我們有 $\text{encode}(\text{succ}(m), 0, _) : (\text{succ}(m) = 0) \rightarrow 0$ ；

2. 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ ，我們有 $\text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), _)) : (\text{succ}(m) = \text{succ}(n)) \rightarrow (m = n)$ 。

Proof. 略。

□

3.12 泛性質

定理 3.8 設 $A : X \rightarrow \mathcal{U}$ ， $P : (x : X) \rightarrow A(x) \rightarrow \mathcal{U}$ 。則有等價：

$$[(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)] \simeq [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))]$$

Proof. 定義函數 $\varphi : [(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)] \rightarrow [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))]$ ， $\varphi(f) := \langle x \mapsto \text{pr}_1(f(x)), x \mapsto \text{pr}_2(f(x)) \rangle$ 和 $\psi : [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))] \rightarrow [(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)]$ ， $\psi(\langle g, h \rangle) := x \mapsto \langle g(x), h(x) \rangle$ 。

剩餘證明略。

□

4 集合和邏輯

4.1 集合和 n -類型

定義 4.1 集合 (0-類型)

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\mathbf{isSet}(A) := (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q).$$

例子 4.1 類型 **1** 是一個集合.

例子 4.2 類型 **0** 是一個集合.

例子 4.3 自然數類型 \mathbb{N} 是一個集合.

定義 4.2 1-類型

一個類型 A 是一個 **1-類型** 如果 $(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$.

引理 4.1 如果 A 是一個集合, 則 A 是一個 1-類型.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$.

設 $f : \mathbf{isSet}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 和 $p, q : x = y$ 我們有 $p = q$. 給定 x, y 和 p , 定義 $g : (q : x = y) \rightarrow (p = q), g := f(x, y, p, _)$. 那麼對於任何 $q, q' : x = y$ 和 $\alpha : q = q'$, 我們有 $\text{apd}_g(\alpha) : \text{transport}^{q \rightarrow (p=q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$, 也就有 $g(q) \cdot \alpha = g(q')$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$, 我們有 $g(p) \cdot \alpha = g(q)$ 且 $g(p) \cdot \beta = g(q)$, 也就有 $g(p) \cdot \alpha = g(p) \cdot \beta$, 也就有 $\alpha = \beta$. \square

例子 4.4 宇宙 \mathcal{U} 不是一個集合.

Proof. 設 $f : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}, f(0_2) := 0_2, f(1_2) := 0_2$. 顯然 f 是一個等價. 因此, 根據泛等, 由 f 可以導出一個道路 $p : A = A$.

如果 $p = \text{refl}_A$, 那麼有 $f = \text{id}_A$, 矛盾, 證畢. \square

4.2 命題

定義 4.3 命題 (-1 -類型)

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\mathbf{isProp}(A) := (x, y : A) \rightarrow (x = y).$$

引理 4.2 如果 P 是一個命題且 $x_0 : P$, 則 $P \simeq \mathbf{1}$.

Proof. 略. \square

引理 4.3 如果 P 和 Q 是命題, 且有 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$, 則我們有 $P \simeq Q$.

Proof. 設 $f : P \rightarrow Q, g : Q \rightarrow P$. 那麼由於 P 是命題, 則對於任何 $x : P$ 我們有 $g(f(x)) = x$. 同理, 對於任何 $y : Q$ 我們有 $f(g(y)) = y$. 因此 f 和 g 互為擬逆. \square

引理 4.4 每個命題都是一個集合.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \rightarrow (x = y)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)$.

設 $f : \mathbf{isProp}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 我們有 $f(x, y) : x = y$. 給定 x , 定義 $g : (y : A) \rightarrow x = y, g := f(x, _)$. 那麼對於任何 $y, z : A$ 和 $p : y = z$, 我們有 $\text{apd}_g(p) : \text{transport}^{y \rightarrow x=y}(p, g(y)) = g(z)$, 也就有 $g(y) \cdot p = g(z)$, 也就有 $p = (g(y))^{-1} \cdot g(z)$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y$, 我們有 $p = (g(x))^{-1} \cdot g(y) = q$. \square

4.3 子集

引理 4.5 設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$, $P(x)$ 是一個命題. 則對於任何 $u, v : (x : A) \times P(x)$, 若 $pr_1(u) = pr_1(v)$, 則有 $u = v$.

Proof. 設 $p : pr_1(u) = pr_1(v)$. 則爲了證明 $u = v$, 我們只需證明 $\text{transport}^P(p, pr_2(u)) = pr_2(v)$. 因爲 $\text{transport}^P(p, pr_2(u)) : P(pr_1(v))$ 且該類型是一個命題, 所以證畢. \square

定義 4.4 子類型, 子集

設 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ 是一個命題族 (即每個 $P(x)$ 是一個命題).

$$\{x : A \mid P(x)\} \equiv (x : A) \times P(x);$$

$$a \in \{x : A \mid P(x)\} \equiv P(a).$$

$\{x : A \mid P(x)\}$ 稱爲 A 的一個子類型; 如果 A 是集合, 則 $\{x : A \mid P(x)\}$ 稱爲 A 的一個子集.

定義 4.5 $Set_{\mathcal{U}}$

定義 \mathcal{U} 的一個“子宇宙”:

$$Set_{\mathcal{U}} \equiv \{A : \mathcal{U} \mid isSet(A)\}.$$

4.4 命題截斷

定義 4.6 命題截斷 (—1-截斷)

命題截斷系如下資料:

1. 類型形成器: $\| _ \| : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$;
2. 構造子 1: $| _ | : A \rightarrow \|A\|$;
3. 構造子 2: 對於任何 $x, y : \|A\|$, 我們有 $x = y$;
4. 消除器: 如果有 $isProp(B)$, 則有 $rec_{\| _ \|} : (A \rightarrow B) \rightarrow \|A\| \rightarrow B$;
5. 計算規則: $rec_{\| _ \|}(f)(|a|) \equiv f(a)$

定義 4.7 傳統邏輯記號

給定類型 A 和 B .

$$A \text{ 和 } B \text{ 是邏輯等價的 } (A \text{ iff } B) := (A \rightarrow B) \times (B \rightarrow A)$$

給定命題 P 和 Q .

$$\top := \mathbf{1}$$

$$\perp := \mathbf{0}$$

$$P \wedge Q := P \times Q$$

$$P \Rightarrow Q := P \rightarrow Q$$

$$P \Leftrightarrow Q := P = Q$$

$$\neg P := P \rightarrow \mathbf{0}$$

$$P \vee Q := \|P + Q\|$$

$$\forall (x : A). P(x) := (x : A) \rightarrow P(x)$$

$$\exists (x : A). P(x) := \|(x : A) \times P(x)\|$$

$$\{x : A \mid P(x)\} \cap \{x : A \mid Q(x)\} := \{x : A \mid P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$\{x : A \mid P(x)\} \cup \{x : A \mid Q(x)\} := \{x : A \mid P(x) \vee Q(x)\}$$

$$A \setminus \{x : A \mid P(x)\} := \{x : A \mid \neg P(x)\}$$

4.5 可縮性

定義 4.8 可縮的

$$isContr(A) := (a : A) \times ((x : A) \rightarrow (a = x)).$$

引理 4.6 對於任何類型 A ，以下類型是邏輯等價的：

1. $isContr(A)$;
2. $A \times isProp(A)$;
3. $A \simeq \mathbf{1}$.

Proof. 略. □

引理 4.7 對於任何類型 A ，類型 $isContr(A)$ 是命題.

Proof. 略. □

引理 4.8 如果類型 A 等價於 B 且 A 可縮，則 B 可縮.

Proof. 略. □

定義 4.9 收縮，截面，收縮核

稱函數 $r : A \rightarrow B$ 是一個收縮，如果存在一個函數 $s : B \rightarrow A$ ，稱為它的一個截面，和一個同倫 $r \circ s \sim id_B$. 我們稱 B 為 A 的一個收縮核.

引理 4.9 如果 B 是 A 的一個收縮核，且 A 是可縮的，則 B 是可縮的.

Proof. 令 $r : A \rightarrow B$ 是一個收縮， $s : B \rightarrow A$ 是它的一個截面， $\varepsilon : r \circ s \sim id_B$ ， $a_0 : A$ ， $contr_{s(b)} : a_0 = s(b)$ ， $b_0 := r(a_0)$ ， $b : B$.

那麼我們有 $r(contr_{s(b)}) \cdot \varepsilon(b) : b_0 = b$ ，證畢. □

引理 4.10 對於任何類型 A 和 $a : A$ ，類型 $(x : A) \times (a = x)$ 是可縮的。

Proof. 我們要證明 $(\langle x, p \rangle : (x : A) \times (a = x)) \rightarrow \langle a, \text{refl}_a \rangle = \langle x, p \rangle$ ，略。

□

引理 4.11 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ 。則有：

1. $[(x : A) \rightarrow \text{isContr}(B(x))] \rightarrow [((x : A) \times B(x)) \simeq A]$;
2. $(a : A) \times [((x : A) \rightarrow (a = x)) \rightarrow (((x : A) \times B(x)) \simeq B(a))]$.

Proof. 略。

□

5 等價

5.1 半伴隨等價

回顧 5.1 對於任何函數 $f: A \rightarrow B$ ，定義 $isequiv(f) \equiv [(g: B \rightarrow A) \times (gf \sim id_A)] \times [(h: B \rightarrow A) \times (fh \sim id_B)]$ ， $(A \simeq B) \equiv (f: A \rightarrow B) \times isequiv(f)$.

對於一個函數 $f: A \rightarrow B$ ，它的一個擬逆是一個三元組 $(g, \alpha, \beta): qinv(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (gf \sim id_A) \times (fg \sim id_B)$.

定義 5.1 半伴隨等價

$$ishae(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (\eta: gf \sim id_A) \times (\varepsilon: fg \sim id_B) \times (f\eta \sim \varepsilon f);$$

$$ishae'(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (\eta: gf \sim id_A) \times (\varepsilon: fg \sim id_B) \times (g\varepsilon \sim \eta g).$$

引理 5.1 $ishae(f)$ 和 $ishae'(f)$ 是邏輯等價的.

Proof. 我們先證明 $ishae(f) \rightarrow ishae'(f)$.

設 $(g, \eta, \varepsilon, \tau): ishae(f)$. 我們要構造一個四元組 $(g', \eta', \varepsilon', \tau'): ishae'(f)$. 設 $g' \equiv g$, $\eta' \equiv \eta$, $\varepsilon' \equiv \varepsilon$.

由 $g\varepsilon$ 的自然性，我們有路徑的交換圖如下：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow g \varepsilon f g y & & \downarrow g \varepsilon y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

從而有：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow gf \eta g y & & \downarrow g \varepsilon y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

從而有：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow \eta g f g y & & \downarrow \eta g y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

根據 η 的自然性，我們有：

$$\begin{array}{ccc}
g f g f g y & \xrightarrow{g f g \varepsilon y} & g f g y \\
\eta g f g y \downarrow & & \downarrow g \varepsilon y \\
g f g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y
\end{array}$$

所以我們有 $g \varepsilon y = \eta g y$ ，證畢。

反方向類似，略。 □

定理 5.1 對於任何 $f: A \rightarrow B$ ，我們有 $\text{ishae}(f)$ iff $\text{qinv}(f)$.

Proof. 正方向顯然，我們來證明反方向。

設 $(g, \eta, \varepsilon) : \text{qinv}(f)$. 我們要構造一個四元組 $(g', \eta', \varepsilon', \tau) : \text{ishae}(f)$. 設 $g' \equiv g$, $\eta' \equiv \eta$. 我們要構造合適的 ε' 的定義，使得對於任何 $a: A$ 有 $f \eta a = \varepsilon' f a$.

根據 ε 的自然性，我們有如下交換圖：

$$\begin{array}{ccc}
f g f g f a & \xrightarrow{f g f \eta a} & f g f a \\
\varepsilon f g f a \downarrow & & \downarrow \varepsilon f a \\
f g f a & \xrightarrow{f \eta a} & f a
\end{array}$$

所以有 $(f g f \eta a) \bullet (\varepsilon f a) = (\varepsilon f g f a) \bullet (f \eta a)$ ，於是有 $(\varepsilon f g f a)^{-1} \bullet (f g f \eta a) \bullet (\varepsilon f a) = f \eta a$.

於是我們可以定義 $\varepsilon' b \equiv (\varepsilon f g b)^{-1} \bullet (f \eta g b) \bullet (\varepsilon b)$ ，證畢。 □

定義 5.2 同倫纖維

一個函數 $f: A \rightarrow B$ 在一個點 $y: B$ 的一個同倫纖維定義為：

$$\text{fib}_f(y) \equiv (x: A) \times (f(x) = y).$$

引理 5.2 對於任何 $f: A \rightarrow B, y: B$ 和 $(x, p), (x', p'): \text{fib}_y$ ，我們有 $((x, p) = (x', p')) \simeq ((\gamma: x = x') \times (p = f(\gamma) \bullet p'))$.

Proof. 略。 □

定理 5.2 如果 $f: A \rightarrow B$ 是一個半伴隨等價，則對於任何 $y: B$ ，同倫纖維 $\text{fib}_f(y)$ 是可縮的。

Proof. 設 $(g, \eta, \varepsilon, \tau) : \text{ishae}(f)$, $y: B$. 那麼有 $(g y, \varepsilon y) : \text{fib}_f(y)$. 設 $(x, p) : \text{fib}_f$ ，我們要構造從 $(g y, \varepsilon y)$ 到 (x, p) 的一條道路。我們只需給出路徑 $\gamma: g y = x$ 使得 $\varepsilon y = f(\gamma) \bullet p$.

根據 ε 的自然性，我們有：

$$\begin{array}{ccc}
f g f x & \xrightarrow{f g p} & f g y \\
\varepsilon f x \downarrow & & \downarrow \varepsilon y \\
f x & \xrightarrow{p} & y
\end{array}$$

也就有：

$$\begin{array}{ccc}
f g f x & \xrightarrow{f g p} & f g y \\
f \eta x \downarrow & & \downarrow \varepsilon y \\
f x & \xrightarrow{p} & y
\end{array}$$

令 $\gamma \equiv (g p)^{-1}$ ，證畢。 □

定義 5.3 左逆和右逆

給定 $f : A \rightarrow B$ ，我們定義 f 的左逆和右逆的類型為

$$\mathbf{linv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times (g f \sim id_A);$$

$$\mathbf{rinv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times (f g \sim id_B).$$

引理 5.3 如果 $f : A \rightarrow B$ 有一個擬逆 $g : B \rightarrow A$ ，那麼函數 $(f \circ _) : (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ 和 $(_ \circ f) : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 也有擬逆。

Proof. $(g \circ _) : (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)$; $(_ \circ g) : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$.

$$(f \circ _) \circ (g \circ _) \equiv f \circ g \circ _ ; (_ \circ g) \circ (_ \circ f) \equiv _ \circ f \circ g.$$
□

定義 5.4 給定 $f : A \rightarrow B$ ， $\langle g, \eta \rangle : \mathbf{linv}(f)$ ， $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ 。我們定義：

$$\mathbf{lcoh}_f(\langle g, \eta \rangle) \equiv (\varepsilon : f \circ g \sim id_B) \times (g \varepsilon \sim \eta g);$$

$$\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle) \equiv (\eta : g \circ f \sim id_A) \times (f \eta \sim \varepsilon f).$$

引理 5.4 對於任何 $f : A \rightarrow B$ ， $\langle g, \eta \rangle : \mathbf{linv}(f)$ ， $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ ，我們有：

$$\mathbf{lcoh}_f(\langle g, \eta \rangle) \simeq (y : B) \rightarrow [f g y, \eta g y] = \langle y, \mathbf{refl}_{g y} \rangle;$$

$$\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle) \simeq (x : A) \rightarrow [g f x, \varepsilon f x] = \langle x, \mathbf{refl}_{f x} \rangle.$$

Proof. 略。 □

引理 5.5 如果 $f : A \rightarrow B$ 是一個半伴隨等價，則對於任何 $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ ，我們有 $\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle)$ 是可縮的。

Proof. 我們只需證明對於任何 $x : A$ ， $\langle g f x, \varepsilon f x \rangle = \langle x, \mathbf{refl}_{f x} \rangle$ 是可縮的。

我們已經知道 $\mathbf{fib}_f(f x)$ 是可縮的，又因為可縮空間的道路空間是可縮的，證畢。 □

5.2 雙可逆映射

定義 5.5 雙可逆映射

我們將之前定義的 $isequiv$ 重命名為 $biinv$:

$$biinv(f) := linv \times rinu.$$

定理 5.3 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 我們有 $biinv(f) \text{ iff } ishae(f)$.

Proof. 略. □

5.3 可縮纖維

定義 5.6 可縮映射

設 $f : A \rightarrow B$. 我們定義:

$$isContr(f) := (y : B) \rightarrow isContr(fib_f(y)).$$

定理 5.4 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 我們有 $ishae(f) \text{ iff } isContr(f)$.

Proof. 正方向我們已經證明過了, 現在我們來證明反方向.

設 $P : isContr(f) \equiv (y : B) \rightarrow isContr(fib_f(y)) \equiv (y : B) \rightarrow [a : fib_f(y)] \times [(b : fib_f(y)) \rightarrow (a = b)] \equiv (y : B) \rightarrow [a : (x : A) \times (f(x) = y)] \times [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \rightarrow (a = b)]$. 設函數 $g : B \rightarrow A, g y := pr_1 pr_1 P y$, 函數 $\varepsilon : f g \sim id_B, \varepsilon y := pr_2 pr_1 P y$, 函數 $\alpha : (y : B) \rightarrow [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \rightarrow ((pr_1 P y) = b)], \alpha y := pr_2 P y$.

我們要構造四元組 $\langle g', \varepsilon', \eta, \tau \rangle : ishae(f)$. 令 $g' := g, \varepsilon' := \varepsilon$.

還剩 η 和 τ 需要構造, 這其實相當於構造 $rcoh_f(g, \varepsilon)$ 的一個項, 也就相當於構造 $(x : A) \rightarrow [\langle g f x, \varepsilon f x \rangle = \langle x, refl_{f x} \rangle]$ 的一個項, 略. □

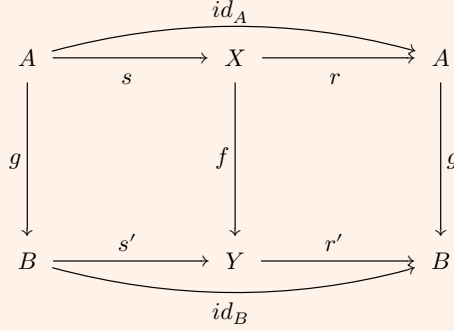
定理 5.5 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 我們有 $qinv(f) \text{ iff } isContr(f) \text{ iff } ishae(f) \text{ iff } biinv(f)$.

5.4 閉包性質

定義 5.7 收縮核

稱函數 $g: A \rightarrow B$ 是函數 $f: X \rightarrow Y$ 的一個**收縮核**，如果：

1. 存在如下一個圖：



使得有如下存在：

- (i) 一個同倫 $R: r \circ s \sim id_A$;
- (ii) 一個同倫 $R': r' \circ s' \sim id_B$;
- (iii) 一個同倫 $L: f \circ s \sim s' \circ g$;
- (iv) 一個同倫 $K: g \circ r \sim r' \circ f$.

2. 對於任何 $a: A$ ，我們有一條道路 $H(a)$ 見證下圖的交換：

$$\begin{array}{ccc}
 g r s a & \xRightarrow{K s a} & r' f s a \\
 \parallel & & \parallel \\
 g R a & & r' L a \\
 \parallel & & \parallel \\
 g a & \xRightarrow{(R' g a)^{-1}} & r' s' g a
 \end{array}$$

回顧 5.2 纖維化

我們把類型族 $P: A \rightarrow \mathcal{U}$ 視為一個**纖維化**， A 稱為它的**底空間**， $P(x)$ 稱為 x 上的**纖維**， $(x: A) \times P(x)$ 稱為它的**全空間**，如果存在函數 $f: (x: A) \rightarrow P(x)$ ，則稱該函數為 P 的一個**截面**。

有時也稱全空間為 A 上的**纖維化**。

定義 5.8 逐纖維變換

給定 $P, Q: A \rightarrow \mathcal{U}$ ，我們稱一個函數 $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ 為一個**逐纖維變換**。

定義 5.9 total

給定 $P, Q: A \rightarrow \mathcal{U}$ 和一個逐纖維變換 $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ ，我們定義函數

$$total(f) := (w: (x: A) \times P(x)) \mapsto \langle pr_1 w, f(pr_1 w, pr_2 w) \rangle : [(x: A) \times P(x)] \rightarrow (x: A) \times Q(x).$$

定理 5.6 設 $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ 是一個逐纖維變換， $x: A$ ， $v: Q(x)$ 。那麼我們有一個雙可逆映射

$$fib_{total(f)}(\langle x, v \rangle) \simeq fib_{f(x)}(v).$$

Proof. 略。

□

定義 5.10 逐纖維等價

我們稱一個逐纖維變換 $f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ 是一個**逐纖維等價**，如果 $(x : A) \rightarrow \text{ishae}(f(x))$.

定理 5.7 設 $f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ 是一個逐纖維變換. 那麼, “ f 是一個逐纖維等價” iff “ $\text{total}(f)$ 是一個雙可逆映射”.

Proof. f 是一個逐纖維等價

iff $(x : A) \rightarrow \text{ishae}(f(x))$

iff $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(f(x))$

iff $(x : A) \rightarrow (v : Q(x)) \rightarrow \text{isContr}(\text{fib}_{f(x)}(v))$

iff $(w : (x : A) \times Q(x)) \rightarrow \text{isContr}(\text{fib}_{\text{total}(f)}(w))$

iff $\text{isContr}(\text{total}(f))$

iff $\text{total}(f)$ 是一個雙可逆映射. □

5.5 對象分類器

引理 5.6 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $a : A$, $\text{pr}_1 : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow A$ 是投影函數. 則我們有一個雙可逆映射 $\text{fib}_{\text{pr}_1}(a) \simeq B(a)$.

Proof. 略. □

5.6 函數外延性

定義 5.11 弱函數外延性原理 (WFE)

弱函數外延性原理斷言: 對於任何 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$, 存在一個函數

$$[(x : A) \rightarrow \text{isContr}(P(x))] \rightarrow \text{isContr}[(x : A) \rightarrow P(x)].$$

引理 5.7 設有類型 $A, B, X : \mathcal{U}$ 和一個雙可逆映射 $e \equiv \langle f_e, \alpha \rangle : A \simeq B$. 那麼存在一個雙可逆映射 $f_e \circ_- : (X \rightarrow A) \simeq (X \rightarrow B)$.

Proof. 根據泛等, 我們可以令 $e = \text{idtoeqv}(p)$ 其中 $p : A = B$. 根據 p 的道路歸納, 我們只需假設 $p \equiv \text{refl}_A$, 那麼我們有 $e = \text{id}_A$. 剩餘證明略. □

推論 5.1 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(B(x))$. 那麼我們有:

1. 投影 $\text{pr}_1 : ((x : A) \rightarrow B(x)) \rightarrow A$ 是一個雙可逆映射;
2. 存在一個雙可逆映射 $\text{pr}_1 \circ_- : [A \rightarrow ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \rightarrow A)$.

Proof. 1. 對於任何 $x : A$, 我們有一個雙可逆映射 $\text{fib}_{\text{pr}_1}(x) \simeq B(x)$. 因為 $B(x)$ 是可縮的, 所以 $\text{fib}_{\text{pr}_1}(x)$ 是可縮的, 所以 pr_1 是可縮的, 所以 pr_1 是一個雙可逆映射.

2. 略. □

定理 5.8 設 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(B(x))$, $\alpha \equiv \text{pr}_1 \circ_- : [A \rightarrow ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \rightarrow A)$. 那麼我們有:

1. $(x : A) \rightarrow B(x)$ 是 $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$ 的一個收縮核;
2. $(x : A) \rightarrow B(x)$ 是可縮的 (弱函數外延性原理).

Proof. 1. 定義函數 $\varphi : [(x : A) \rightarrow B(x)] \rightarrow \text{fib}_\alpha(\text{id}_A) \equiv [(x : A) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(g : A \rightarrow ((x : A) \times B(x))) \times (\text{pr}_1 g = \text{id}_A)]$, $\varphi(f) \equiv \langle x \mapsto \langle x, f(x) \rangle, \text{refl}_{\text{id}_A} \rangle$ 和 $\psi : \text{fib}_\alpha(\text{id}_A) \rightarrow (x : A) \rightarrow B(x) \equiv [(g : A \rightarrow ((x : A) \times B(x))) \times (\text{pr}_1 g = \text{id}_A)] \rightarrow (x : A) \rightarrow B(x)$, $\psi(\langle g, p \rangle) \equiv (x : A) \mapsto \text{transport}^B(\text{happy}(p, x), \text{pr}_2 g x)$.

顯然, $\psi \varphi \sim \text{id}_{(x : A) \rightarrow B(x)}$.

2. 我們只需證明 $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$ 是可縮的, 而這可以通過證明 α 是可縮的來證明, 略. □

引理 5.8 設 $f : A \rightarrow B$. 如果 A, B 是可縮的, 那麼 f 是一個雙可逆映射.

Proof. 設 $\alpha : \text{isContr}(A)$, $\beta : \text{isContr}(B)$, $a \equiv \text{pr}_1(\alpha)$, $b \equiv \text{pr}_1(\beta)$.

那麼有 $p : b = f(a)$, 對於任何 $y : B$ 有 $q_y \equiv (\text{pr}_2 \beta) y : b = y$

我們要證明對於任何 $y : B$, $\text{fib}_f(y)$ 是可縮的.

現在讓我們固定 $y : B$. 定義 $p_y \equiv p^{-1} \cdot q_y : f(a) = y$. 因此 $\langle a, p_y \rangle : \text{fib}_f(y)$.

我們只需證明對於任何 $\langle a', p' \rangle : \text{fib}_f(y)$ 有 $k : a = a'$ 和 $\text{transport}^{\text{fib}_f(y)}(k, p_y) = p'$.

我們有 $(\text{pr}_2 \alpha) a' : a = a'$.

根據道路歸納, 我們只需要證明 $\text{transport}^{\text{fib}_f(y)}(\text{refl}_a, p_y) = p'$, 即 $p_y = p'$.

根據道路歸納, 只需證明 $p_{f(a)} = p'$, 即 $\text{refl}_{f(a)} = \text{refl}_{f(a)}$. □

定理 5.9 函數外延性原理

對於任何 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $f : (x : A) \rightarrow B(x)$, $g : (x : A) \rightarrow B(x)$, 我們有如下結論:

函數

$$\text{happly}(f, g) : (f = g) \rightarrow [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)]$$

是一個雙可逆映射.

Proof. 我們只需證明 $\text{happly}(f, _) : (g : (x : A) \rightarrow B(x)) \rightarrow (f = g) \rightarrow (f \sim g)$ 是一個逐纖維等價, 而這只需要證明 $\text{total}(\text{happly}(f, _)) : [(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f = g)] \rightarrow (g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$ 是一個雙可逆映射. 我們已經知道 $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f = g)$ 是可縮的, 所以只需要證明 $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$ 是可縮的.

我們有 $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$ 是 $(x : A) \rightarrow (u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 的一個收縮核, 所以只需證明 $(x : A) \rightarrow (u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 是可縮的.

根據 WFE, 我們只需證明對於任何 $x : A$ 有 $(u : B(x)) \times (f(x) = u)$ 是可縮的, 證畢. □

推論 5.2 funext

對於任何 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$, $f : (x : A) \rightarrow B(x)$, $g : (x : A) \rightarrow B(x)$, 函數 $\text{happly}(f, g) : (f = g) \rightarrow [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)]$ 有一個擬逆:

$$\text{funext} : [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)] \rightarrow (f = g).$$

Proof. 略. □

引理 5.9 對於任何類型 A , 我們有 $\text{isProp}(A)$ 和 $\text{isSet}(A)$ 是命題.

Proof. funext. □

引理 5.10 $\text{isProp}(A) \simeq (A \rightarrow \text{isContr}(A))$.

Proof. 我們只需證明 $\text{isProp}(A)$ iff $(A \rightarrow \text{isContr}(A))$, 略. □

引理 5.11 如果 $f : A \rightarrow B$ 有一個擬逆, 那麼 $\text{linv}(f)$ 和 $\text{rinv}(f)$ 是可縮的.

Proof. 根據函數外延性, 我們有 $\text{linv}(f) \simeq (g : B \rightarrow A) \times (g f = \text{id}_A)$, 即 $\text{linv}(f) \simeq \text{fib}_{\circ f}(\text{id}_A)$. 因為 $\text{fib}_{\circ f}(\text{id}_A)$ 是可縮的, 所以 $\text{linv}(f)$ 是可縮的. 類似地, 可以證明 $\text{rinv}(f)$ 是可縮的. □

定理 5.10 對於任何 $f : A \rightarrow B$, $\text{ishae}(f)$ 是一個命題.

Proof. 我們只需假設 f 是一個半伴隨等價, 並證明 $\text{ishae}(f)$ 是可縮的, 即證明 $(g : B \rightarrow A) \times (\varepsilon : f g \sim \text{id}_B) \times (\eta : g f \sim \text{id}_A) \times (f \eta \sim \varepsilon f)$ 是可縮的, 即證明 $(u : (g : B \rightarrow A) \times (f g \sim \text{id}_B)) \times (\eta : (\text{pr}_1 u) f \sim \text{id}_A) \times (f \eta \sim (\text{pr}_2 u) f)$ 是可縮的, 即證明 $(u : \text{rinv}(f)) \times \text{rcoh}(\langle \text{pr}_1(u), \text{pr}_2(u) \rangle)$ 是可縮的. 剩餘證明略. □

定理 5.11 對於任何 $f : A \rightarrow B$, $biinv(f)$ 是一個命題。

Proof. 略。 □

引理 5.12 設 A 是類型, $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$ 有 $B(x)$ 是一個命題。則 $(x : A) \rightarrow B(x)$ 是一個命題。

Proof. funext. □

定理 5.12 對於任何 $f : A \rightarrow B$, $isContr(f)$ 是一個命題。

Proof. 略。 □

定理 5.13 對於任何 $f : A \rightarrow B$, 我們有 $isContr(f) \simeq ishae(f) \simeq biinv(f)$ 。

Proof. 略。 □

回顧 5.3 半伴隨等價

$$ishae(f) := (g : B \rightarrow A) \times (\eta : g f \sim id_A) \times (\varepsilon : f g \sim id_B) \times (f \eta \sim \varepsilon f).$$

慣例 5.1 等價

對於任何函數 $f : A \rightarrow B$, 我們定義 $isequiv(f) := ishae(f)$ 。

引理 5.13 對於任何函數 $f, g : A \rightarrow B$, 有 $(f = g) \rightarrow (isequiv(f) = equiv(g))$ 。

Proof. 略。 □

慣例 5.2 對於任何等價 f , 以後如無必要, 我們不區分 f 和 $\langle f, e \rangle$ (其中 $e : isequiv(f)$)。

定義 5.12 $(A \rightarrow B)$

給定類型 X , 類型族 $A, B : X \rightarrow \mathcal{U}$. 定義函數:

$$(A \rightarrow B) : X \rightarrow \mathcal{U}, (A \rightarrow B)(x) := A(x) \rightarrow B(x).$$

定理 5.14 $\neg DNE_\infty$

$$\neg((A : \mathcal{U}) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A)$$

Proof. 我們只需假設 $f : (A : \mathcal{U}) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$, 並構造 $\mathbf{0}$ 的一個項。

設 $e : \mathbf{2} \simeq \mathbf{2}, e(1_2) := 0_2, e(0_2) := 1_2$ 是一個等價。設 $p := \text{ua}(e) : \mathbf{2} = \mathbf{2}$ 。

那麼我們有 $f(\mathbf{2}) : \neg\neg\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$ 和

$$\text{apd}_f(p) : \text{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \rightarrow A}(p, f(\mathbf{2})) = f(\mathbf{2}).$$

因此對於任何 $u : \neg\neg\mathbf{2}$, 我們有 $\text{happly}(\text{apd}_f(p), u) : \text{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \rightarrow A}(p, f(\mathbf{2}))(u) = f(\mathbf{2})(u)$ 。

那麼對於任何 $u : \neg\neg\mathbf{2}$, 我們有 $\text{transport}^{A \mapsto \neg\neg A \rightarrow A}(p, f(\mathbf{2}))(u) = \text{transport}^{\text{id}_u}(p, f(\mathbf{2}))(\text{transport}^{A \mapsto \neg\neg A}(p^{-1}, u))$ 。

根據 funext, 對於任何 $u, v : \neg\neg\mathbf{2}$ 有 $u = v$. 因此我們有 $\text{transport}^{A \mapsto \neg\neg A}(p^{-1}, u) = u$. 所以我們有 $\text{transport}^{\text{id}_u}(\text{ua}(e), f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u)$ 。

根據泛等, 我們有

$$e(f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u).$$

又因為我們可以證明 $(x : \mathbf{2}) \rightarrow \neg(e(x) = x)$, 所以推出矛盾, 證畢。 □

6 範疇論

6.1 範疇和預範疇

定義 6.1 預範疇

一個預範疇 A 系如下資料:

1. 一個類型 A_0 , 它的項稱為對象;
2. 一個函數 $hom_A : A_0 \rightarrow A_0 \rightarrow Set$, 集合 $hom_A(a, b)$ 的元素稱為態射;
3. 一個函數 $1 : (a : A_0) \rightarrow hom_A(a, a)$, 1_a 稱為恆等態射;
4. 一個函數 $_ \circ _ : hom_A(b, c) \rightarrow hom_A(a, b) \rightarrow hom_A(a, c)$ 稱為合成;
5. 對於任何 $a, b : A_0$ 和 $f : hom_A(a, b)$, 我們有 $f = 1_b \circ f$ 且 $f = f \circ 1_a$;
6. 對於任何 $a, b, c, d : A$ 和 $f : hom_A(a, b), g : hom_A(b, c), h : hom_A(c, d)$, 我們有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

定義 6.2 同構

一個態射 $f : hom_A(a, b)$ 是一個同構, 如果存在一個態射 $g : hom_A(b, a)$ 使得 $g \circ f = 1_a$ 且 $f \circ g = 1_b$.

$$isIso(f) := (g : hom_A(b, a)) \times (g \circ f = 1_a) \times (f \circ g = 1_b),$$

$$a \cong b := (f : hom_A(a, b)) \times isIso(f).$$

引理 6.1 對於任何態射 $f : hom_A(a, b)$, $isIso(f)$ 是一個命題. 因此 $a \cong b$ 是一個集合.

Proof. 只需證明 $g = g'$, 略.

我們以後將同構 $f : a \cong b$ 的逆記作 f^{-1} . □

引理 6.2 $idtoiso$

如果 A 是一個預範疇且 a, b 是它的對象, 則有 $idtoiso_{a,b} : (a = b) \rightarrow (a \cong b)$.

Proof. 略. □

引理 6.3 設 A 是類型, $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$ 有 $B(x)$ 是一個集合. 則 $(x : A) \rightarrow B(x)$ 是一個集合.

Proof. funext. □

例子 6.1 預範疇 Set

1. 對象類型為 Set ;
2. $hom_{Set}(a, b) := a \rightarrow b$;
3. $1_a := id_a$;
4. 態射合成定義為函數的合成.

定義 6.3 範疇

稱一個預範疇 A 是一個範疇, 如果對於它的任何對象 a, b 有 $idtoiso_{a,b}$ 是一個等價.

例子 6.2 Set 是一個範疇.

Proof. ua. □

引理 6.4 在一個範疇中, 所有對象組成的類型是一個 1-類型.

Proof. 只需證明 $a = b$ 是集合，略。

□