

同倫類型論

JoJo

jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算	3
1.1 項	3
1.2 自由和綁定變量	3
1.3 α 等價	4
1.4 代入	4
2 類型論	6
2.1 項	6
2.2 語境	6
2.3 結構規則	6
2.4 類型宇宙	6
2.5 依賴函數類型	7
2.6 依賴序偶類型	7
2.7 餘積類型	8
2.8 空類型 0	8
2.9 單元類型 1	8
2.10 自然數類型	9
2.11 恆等類型	9
2.12 定義	9
3 同倫類型論	10
3.1 類型是高維羣胚	10

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有項的集合 Λ 的遞歸定義如下

1. (變量) Λ 中有無窮個變量;
2. (抽象) 如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$, 則 $(u.M) \in \Lambda$;
3. (應用) 如果 $M, N \in \Lambda$, 則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

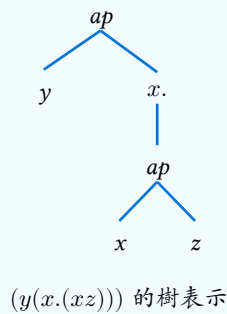
定義 1.2 子項

項 M 的所有子項的集合定義為 $Sub(M)$, Sub 的遞歸定義如下

1. (基礎) 對於任何變量 x , $Sub(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$;
3. (應用) $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

- 引理 1.1
1. (自反性) 對於任何項 M , 有 $M \in Sub(M)$;
 2. (傳遞性) 如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$, 則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出, 如下圖中的例子



項的子項對應於項的樹表示的子樹.

- 約定 1.1
1. 最外層括號可以省略;
 2. (抽象是右結合的) $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫;
 3. (應用是左結合的) MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫;
 4. (應用優先於抽象) $x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 自由變量

項 M 的所有自由變量的集合定義為 $FV(M)$ ， FV 的遞歸定義如下

1. (變量) $FV(x) := \{x\}$;
2. (抽象) $FV(\lambda x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$;
3. (應用) $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}.$$

定義 1.4 閉項

一個項 M 是閉的 $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記為 Λ^0 .

1.3 α 等價

定義 1.5 重命名

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換為 y ，結果記為 $M^{x \rightarrow y}$.

定義 1.6 α 等價

定義 α 等價 $=_\alpha$ 為符合如下性質的關係

1. (重命名) 如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x \rightarrow y}$;
2. (兼容性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $ML =_\alpha NL$ ， $LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$;
3. (自反性) $M =_\alpha M$;
4. (對稱性) 如果 $M =_\alpha N$ ，則 $N =_\alpha M$;
5. (傳遞性) 如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$ ，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 代入

- (1a) $x[N/x] := N$;
- (1b) 如果 $x \neq y$ ，則 $y[N/x] := y$;
- (2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$;
- (3) 如果 $z.P^{y \rightarrow z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$ ，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y \rightarrow z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$ ，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 **同時代人**

$M[N_1, \dots, N_n / x_1, \dots, x_n]$ 表示把項 N_1, \dots, N_n **同時代人**到變量 x_1, \dots, x_n .

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個語境是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$$

其中 x_1, \dots, x_n 是不同的變量，它們分別擁有類型 A_1, \dots, A_n . 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\Gamma \text{ ctx}$ 是一個判斷，表示“ Γ 是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{ ctx-EMP}$$
$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}} \text{ ctx-EXT}$$

其中，變量 x_n 與變量 x_1, \dots, x_n 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 Vble 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \text{ Vble}$$

定義 2.5 判斷相等

如果 $a =_\alpha b$ ，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL}$$

2.5 依賴函數類型

定義 2.7 依賴函數類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \rightarrow B : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \rightarrow B_1 \equiv (x : A_2) \rightarrow B_2 : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]} \Pi\text{-COMP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-UNIQ}$$

2.6 依賴序偶類型

定義 2.8 依賴序偶類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p) : C[p/z]} \Sigma\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv \text{ind}_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]} \Sigma\text{-ELIM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, (a, b)) \equiv g[a, b/x, y] : C[p/z]} \Sigma\text{-COMP}$$

2.7 餘積類型

定義 2.9 餘積類型

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \text{+-FORM} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} \text{+-FORM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{inl}(a) : A + B} \text{+-INTRO}_1 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \text{inr}(b) : A + B} \text{+-INTRO}_2 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{inl}(a_1) \equiv \text{inl}(a_2) : A + B} \text{+-INTRO}_1\text{-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash \text{inr}(b_1) \equiv \text{inr}(b_2) : A + B} \text{+-INTRO}_2\text{-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e : (A + B)}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) : C[e/z]} \text{+-ELIM} \\
\\
\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} \text{+-ELIM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \text{inl}(a)) \equiv c[a/x] : C[\text{inl}(a)/z]} \text{+-COMP}_1 \\
\\
\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\text{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\text{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \text{inr}(b)) \equiv d[b/y] : C[\text{inr}(b)/z]} \text{+-COMP}_2
\end{array}$$

2.8 空類型 0

定義 2.10 空類型 0

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0}\text{-FORM} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a) : C[a/x]} \mathbf{0}\text{-ELIM} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_1) \equiv \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{0}\text{-ELIM-EQ}
\end{array}$$

2.9 單元類型 1

定義 2.11 單元類型 1

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \mathbf{1}\text{-FORM} \\
\\
\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \mathbf{1}\text{-INTRO} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a) : C[a/x]} \mathbf{1}\text{-ELIM} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_1) \equiv \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{1}\text{-ELIM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, \star) \equiv c : C[\star/x]} \mathbf{1}\text{-COMP}
\end{array}$$

2.10 自然數類型

定義 2.12 自然數類型

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i} \text{N-FORM} \\
\\
\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}} \text{N-INTRO}_1 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{succ}(n) : \mathbb{N}} \text{N-INTRO}_2 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{succ}(n_1) \equiv \text{succ}(n_2) : \mathbb{N}} \text{N-INTRO}_2\text{-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n) : C[n/x]} \text{N-ELIM} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]} \text{N-ELIM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, 0) \equiv c_0 : C[0/x]} \text{N-COMP}_1 \\
\\
\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, \text{succ}(n)) \equiv c_s[n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n)/x, y] : C[\text{succ}(n)/x]} \text{N-COMP}_2
\end{array}$$

2.11 恆等類型

定義 2.13 恆等類型

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_a : a =_A a} =\text{-INTRO} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_{a_1} \equiv \text{refl}_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2} =\text{-INTRO-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q) : C[a, b, q/x, y, p]} =\text{-ELIM} \\
\\
\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]} =\text{-ELIM-EQ} \\
\\
\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, \text{refl}_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, \text{refl}_a/x, y, p]} =\text{-COMP}
\end{array}$$

恆等類型的項稱為**道路**；恆等類型的消除規則稱為**道路歸納**。

2.12 定義

例子 2.1 $\circ := (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \rightarrow C) \mapsto (f : A \rightarrow B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x)).$

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$ ，都能構造一個函數 $_^{-1} : (x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$ 使得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

p^{-1} 稱為 p 的逆.

Proof. 第一種證明

設 $A : \mathcal{U}_i, D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (y =_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$.

現在對於任何 $x, y : A$ 我們可以定義期望得到的函數 $_^{-1} := p \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$ ，我們想要構造一個項 $p^{-1} : y = x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下， refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x^{-1} := \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$ ，都能構造一個函數 $\cdot : (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ 使得 $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$.

$p \cdot q$ 稱為 p 和 q 的連接.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x, y, z : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

我們將改為定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ ，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

然後，為了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型為 $(x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ 的函數，也就是類型為 $(x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

現在設 $E : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow \mathcal{U}_i, E(x, z, q) := (x =_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow E(x, x, \text{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$.

因為 $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$ ，所以 $d : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項 $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$.

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : \\ (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$$

現在對於任何 $a, b, c : A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\cdot := (p : a =_A b) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p) : \\ (a, b, c : A) \rightarrow (a =_A b) \rightarrow (b =_A c) \rightarrow (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \text{refl}_a), a, a, \text{refl}_a) \equiv \text{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \text{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \text{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$, $p : x = y$ 和 $q : y = z$, 我們想要構造一個項 $p \bullet q : x = z$. 根據 p 的道路歸納, 我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet q : x = z$. 根據 q 的道路歸納, 只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造, 即對於每個 $x : A$, 構造一個項 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 於是根據道路歸納, 我們完成了構造. \square

引理 3.3 設 $A : \mathcal{U}_i$, $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ 且 $r : z = w$. 我們有以下結論:

1. $p = p \bullet \text{refl}_y$ 且 $p = \text{refl}_x \bullet p$;
2. $p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$ 且 $p^{-1} \bullet p = \text{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1} = p$;
4. $p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p = p \bullet \text{refl}_y)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x = \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p = p \bullet \text{refl}_y$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet \text{refl}_y \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$. 因此只需證明 $\text{refl}_x = \text{refl}_x$, 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x} : \text{refl}_x = \text{refl}_x$.

2. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x)$. 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x)$ 是 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ 且 $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$, 我們有 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $p \bullet p^{-1} \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

3. 第一種證明: 設 $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p^{-1})^{-1} = p$. 那麼 $D(x, x, p)$ 是 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} = \text{refl}_x$. 因為 $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 所以 $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, 那麼 $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$. 根據道路歸納, 對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$, 我們有項 $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$.

第二種證明: 根據 p 的道路歸納, 只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x . 在該情況下, $(p^{-1})^{-1} \equiv (\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x, y, z, w : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$, 我們改為證明 $(x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$.

設 $D_1 : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D_1(x, y, p) \equiv (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$. 根據 p 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_1(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_2 : (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow \mathcal{U}, D_2(x, z, q) \equiv (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$. 根據 q 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_2(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$ 的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設 $D_3 : (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow \mathcal{U}, D_3(x, w, r) \equiv (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$. 根據 r 的道路歸納, 只需要構造類型為 $(x : A) \rightarrow D_3(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow \text{refl}_x = \text{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的, 即 $\text{refl}_{\text{refl}_x}$.

因此, 應用 3 此道路歸納, 我們就得到了想要的類型的函數. \square

定義 3.1 迴路空間

給定一個類型 A 和一個點 $a : A$, 定義它們的迴路空間 $\Omega(A, a)$ 為類型 $a =_A a$. 如果上下文中點 a 是清楚的, 有時可以簡單地簡寫為 ΩA . 迴路空間的項稱為迴路.

還可以定義迴路空間的迴路空間 $\Omega^2(A, a) \equiv \Omega(\Omega(A, a), \text{refl}_a) \equiv \Omega(a =_A a, \text{refl}_a) \equiv (\text{refl}_a =_{a=_A a} \text{refl}_a)$, 它的項稱為 2 維迴路.