

# 同倫類型論

**JoJo**

jojoid@duck.com

# 目录

1 $\lambda$ 演算	4
1.1 項	4
1.2 自由和綁定變量	4
1.3 $\alpha$ 等價	5
1.4 代入	5
2 類型論	7
2.1 項	7
2.2 語境	7
2.3 結構規則	7
2.4 類型宇宙	7
2.5 依賴函數類型 ( $\Pi$ -類型)	8
2.6 依賴序偶類型 ( $\Sigma$ -類型)	8
2.7 餘積類型	9
2.8 空類型 $0$	10
2.9 單元類型 $1$	10
2.10 <b>boolean</b> 類型	10
2.11 自然數類型	10
2.12 恆等類型	11
2.13 定義	11
3 同倫類型論	12
3.1 類型是高維羣胚	12
3.2 函數是函子	14
3.3 類型族是纖維化	15
3.4 同倫和等價	16
3.5 $\Sigma$ -類型	17
3.6 單元類型	17
3.7 $\Pi$ -類型	18
3.8 宇宙和泛等公理	18
3.9 恆等類型	19
3.10 自然數	19
3.11 泛性質	20
4 集合和邏輯	22
4.1 集合和 $n$ -類型	22
4.2 命題	22
4.3 子集	22
4.4 命題截斷	23
4.5 可縮性	23

5 等價 .....	25
5.1 半伴隨等價 .....	25
5.2 雙可逆映射 .....	27
5.3 可縮纖維 .....	28
5.4 閉包性質 .....	28
5.5 對象分類器 .....	30
5.6 函數外延性 .....	30
6 範疇論 .....	33
6.1 範疇和預範疇 .....	33

# 1 $\lambda$ 演算

## 1.1 項

### 定義 1.1 項

所有項的集合  $\Lambda$  的遞歸定義如下

1. (變量)  $\Lambda$  中有無窮個變量;
2. (抽象) 如果  $u$  是一個變量且  $M \in \Lambda$ , 則  $(u.M) \in \Lambda$ ;
3. (應用) 如果  $M, N \in \Lambda$ , 則  $(MN) \in \Lambda$ .

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中  $V$  是變量集.

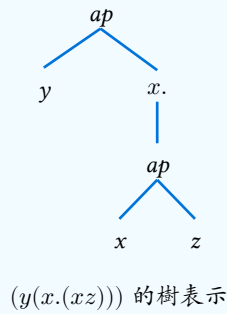
### 定義 1.2 子項

項  $M$  的所有子項的集合定義為  $Sub(M)$ ,  $Sub$  的遞歸定義如下

1. (基礎) 對於任何變量  $x$ ,  $Sub(x) := \{x\}$ ;
2. (抽象)  $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$ ;
3. (應用)  $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$ .

- 引理 1.1
1. (自反性) 對於任何項  $M$ , 有  $M \in Sub(M)$ ;
  2. (傳遞性) 如果  $L \in Sub(M)$  且  $M \in Sub(N)$ , 則  $L \in Sub(N)$ .

引理 1.2 項可以以樹表示給出, 如下圖中的例子



項的子項對應於項的樹表示的子樹.

- 慣例 1.1
1. 最外層括號可以省略;
  2. (抽象是右結合的)  $x.y.M$  是  $x.(y.M)$  的一個縮寫;
  3. (應用是左結合的)  $MNL$  是  $((MN)L)$  的一個縮寫;
  4. (應用優先於抽象)  $x.MN$  是  $x.(MN)$  的一個縮寫.

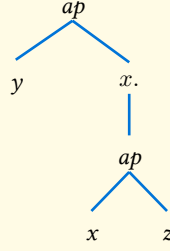
## 1.2 自由和綁定變量

### 定義 1.3 自由變量

項  $M$  的所有自由變量的集合定義為  $FV(M)$ ， $FV$  的遞歸定義如下

1. (變量)  $FV(x) := \{x\}$ ;
2. (抽象)  $FV(\lambda x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$ ;
3. (應用)  $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$ .

例子 1.1  $(y(x.(xz)))$  的樹表示如下圖所示



$$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}.$$

### 定義 1.4 閉項

一個項  $M$  是閉的  $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$ .

所有閉項的集合記為  $\Lambda^0$ .

## 1.3 $\alpha$ 等價

### 定義 1.5 重命名

將項  $M$  中  $x$  的每個自由出現都替換為  $y$ ，結果記為  $M^{x \rightarrow y}$ .

### 定義 1.6 $\alpha$ 等價

定義  $\alpha$  等價  $=_\alpha$  為符合如下性質的關係

1. (重命名) 如果  $y$  不在  $M$  中出現，則  $x.M =_\alpha y.M^{x \rightarrow y}$ ;
2. (兼容性) 如果  $M =_\alpha N$ ，則  $ML =_\alpha NL$ ， $LM =_\alpha LN$  且對於任何變量  $z$  有  $z.M =_\alpha z.N$ ;
3. (自反性)  $M =_\alpha M$ ;
4. (對稱性) 如果  $M =_\alpha N$ ，則  $N =_\alpha M$ ;
5. (傳遞性) 如果  $L =_\alpha M$  且  $M =_\alpha N$ ，則  $L =_\alpha N$ .

## 1.4 代入

### 定義 1.7 代入

- (1a)  $x[N/x] := N$ ;
- (1b) 如果  $x \neq y$ ，則  $y[N/x] := y$ ;
- (2)  $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$ ;
- (3) 如果  $z.P^{y \rightarrow z} =_\alpha y.P$  且  $z \notin FV(N)$ ，則  $(y.P)[N/x] := z.(P^{y \rightarrow z}[N/x])$ .

引理 1.3 設  $x \neq y$  且  $x \notin FV(N)$ ，則  $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$ .

**定義 1.8** 同時代人

$M[N_1, \dots, N_n / x_1, \dots, x_n]$  表示把項  $N_1, \dots, N_n$  同時代入到變量  $x_1, \dots, x_n$ .

## 2 類型論

### 2.1 項

#### 定義 2.1 項

比  $\lambda$  演算多了一些常量以及新的構造.

### 2.2 語境

#### 定義 2.2 語境

一個語境是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$$

其中  $x_1, \dots, x_n$  是不同的變量，它們分別擁有類型  $A_1, \dots, A_n$ . 我們用  $\Gamma, \Delta$  等字母來縮寫語境.

#### 定義 2.3 語境規則

$\Gamma \text{ ctx}$  是一個判斷，表示“ $\Gamma$  是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{ ctx-EMP}$$
$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}} \text{ ctx-EXT}$$

其中，變量  $x_n$  與變量  $x_1, \dots, x_{n-1}$  中的任何一個都不同.

### 2.3 結構規則

#### 定義 2.4 Vble 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \text{ Vble}$$

#### 定義 2.5 判斷相等

如果  $a =_\alpha b$ ，則  $a \equiv b$ .

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

### 2.4 類型宇宙

## 定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL}$$

## 2.5 依賴函數類型（ $\Pi$ -類型）

### 定義 2.7 依賴函數類型（ $\Pi$ -類型）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \rightarrow B : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \rightarrow B_1 \equiv (x : A_2) \rightarrow B_2 : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-INTRO-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM-EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]} \Pi\text{-COMP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \rightarrow B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \rightarrow B} \Pi\text{-UNIQ}$$

### 定義 2.8 函數類型

設  $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \rightarrow \mathcal{U}$ . 我們定義函數類型

$$A \rightarrow B \equiv (x : A) \rightarrow B.$$

## 2.6 依賴序偶類型（ $\Sigma$ -類型）



### 定義 2.9 依賴序偶類型 ( $\Sigma$ -類型 )

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i} \Sigma\text{-FORM-EQ}$$

構造子 ( 引入規則 ):  $\langle \_, \_ \rangle : \{B : A \rightarrow \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow b : B(a) \rightarrow (x : A) \times B$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B} \Sigma\text{-INTRO-EQ}$$

消除器 ( 消除規則 ):  $ind_{(x:A) \times B} : [C : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow (b : B(a)) \rightarrow C(\langle a, b \rangle)] \rightarrow [p : (x : A) \times B(x)] \rightarrow C(p)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A) \times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]} \Sigma\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則:  $ind_{(x:A) \times B}(C, g, \langle a, b \rangle) \equiv g(a)(b)$

### 定義 2.10 **cartesian** 類型

設  $B : \mathcal{U}, x \mapsto B : A \rightarrow \mathcal{U}$ . 我們定義 **cartesian** 類型

$$A \times B \equiv (x : A) \times B.$$

### 引理 2.1 投影函數

對於任何  $\Sigma$ -類型  $(x : A) \times B(x)$ , 我們有函數

$$\mathbf{pr}_1 : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow A, \mathbf{pr}_1(\langle a, b \rangle) \equiv a$$

和

$$\mathbf{pr}_2 : (p : (x : A) \times B(x)) \rightarrow B(\mathbf{pr}_1(p)), \mathbf{pr}_2(\langle a, b \rangle) \equiv b.$$

*Proof.* 略. □

## 2.7 餘積類型

### 定義 2.11 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} +\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} +\text{-FORM-EQ}$$

構造子 1:  $inl : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow A \rightarrow A + B$

構造子 2:  $inr : \{A, B : \mathcal{U}\} \rightarrow B \rightarrow A + B$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash inl(a_1) \equiv inl(a_2) : A + B} +\text{-INTRO}_1\text{-EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash inr(b_1) \equiv inr(b_2) : A + B} +\text{-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器:  $ind_{A+B} : [C : (A + B) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(a : A) \rightarrow C(inl(a))] \rightarrow [(b : B) \rightarrow C(inr(b))] \rightarrow (e : A + B) \rightarrow C(e)$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[inl(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[inr(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv ind_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} +\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則 1:  $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inl(a)) \equiv g_0(a)$

計算規則 2:  $ind_{A+B}(C, g_0, g_1, inr(b)) \equiv g_1(b)$

## 2.8 空類型 0

定義 2.12 空類型 0

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0-FORM}$$

消除器:  $ind_0 : (C : \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (a : \mathbf{0}) \rightarrow C(a)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash ind_0(x.C, a_1) \equiv ind_0(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{0-ELIM-EQ}$$

## 2.9 單元類型 1

定義 2.13 單元類型 1

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \mathbf{1-FORM}$$

構造子:  $\star : \mathbf{1}$

消除器:  $ind_1 : (C : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(\star) \rightarrow (x : \mathbf{1}) \rightarrow C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_1(x.C, c, a_1) \equiv ind_1(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{1-ELIM-EQ}$$

計算規則:  $ind_1(C, c, \star) \equiv c$

## 2.10 boolean 類型

定義 2.14 boolean 類型

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{2} : \mathcal{U}_i} \mathbf{2-FORM}$$

構造子 1:  $0_2 : \mathbf{2}$

構造子 2:  $1_2 : \mathbf{2}$

消除器:  $ind_2 : (C : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(0_2) \rightarrow C(1_2) \rightarrow (x : \mathbf{2}) \rightarrow C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0_2/x] \quad \Gamma \vdash c_1 : C[1_2/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{2}}{\Gamma \vdash ind_2(x.C, c_0, c_1, a_1) \equiv ind_2(x.C, c_0, c_1, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \mathbf{2-ELIM-EQ}$$

計算規則 1:  $ind_2(C, c_0, c_1, 0_2) \equiv c_0$

計算規則 2:  $ind_2(C, c_0, c_1, 1_2) \equiv c_1$

## 2.11 自然數類型

### 定義 2.15 自然數類型

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i} \text{N-FORM}$$

構造子 1:  $0 : \mathbb{N}$

構造子 2:  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{succ}(n_1) \equiv \text{succ}(n_2) : \mathbb{N}} \text{N-INTRO}_2\text{-EQ}$$

消除器:  $\text{ind}_{\mathbb{N}} : (C : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow C(0) \rightarrow [(n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n) \rightarrow C(\text{succ}(n))] \rightarrow (n : \mathbb{N}) \rightarrow C(n)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[\text{succ}(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]} \text{N-ELIM-EQ}$$

計算規則 1:  $\text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) \equiv c_0$

計算規則 2:  $\text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, \text{succ}(n)) \equiv c_s(n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n))$

## 2.12 恆等類型

### 定義 2.16 恆等類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i} =\text{-FORM-EQ}$$

構造子:  $\text{refl} : \{A : \mathcal{U}\} \rightarrow (a : A) \rightarrow (a = a)$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_{a_1} \equiv \text{refl}_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2} =\text{-INTRO-EQ}$$

消除器:  $\text{ind}_{=_A} : [C : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}] \rightarrow [(x : A) \rightarrow C(x, x, \text{refl}_x)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow C(x, y, p)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, \text{refl}_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv \text{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]} =\text{-ELIM-EQ}$$

計算規則:  $\text{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \text{refl}_x) \equiv c(x)$

恆等類型的項稱為**道路**；恆等類型的消除規則稱為**道路歸納**。

## 2.13 定義

### 例子 2.1 函數的合成

$\circ := (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \rightarrow C) \mapsto (f : A \rightarrow B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x)).$

### 3 同倫類型論

#### 3.1 類型是高維羣胚

**引理 3.1** 對於任何  $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$ ，都能構造一個函數  $_-^{-1} : (x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$  使得  $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$ .

$p^{-1}$  稱為  $p$  的逆.

*Proof.* 第一種證明

設  $A : \mathcal{U}_i, D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (y =_A x)$ .

隨即我們就能構造一個函數  $d := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ .

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何  $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項  $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$ .

現在對於任何  $x, y : A$  我們可以定義期望得到的函數  $_-^{-1} := p \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$ .

由恆等類型的計算規則，得  $(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_x$ . □

*Proof.* 第二種證明

對於每個  $x, y : A$  和  $p : x = y$ ，我們想要構造一個項  $p^{-1} : y = x$ . 根據  $p$  的道路歸納，我們只需要給出  $y$  是  $x$  且  $p$  是  $\text{refl}_x$  時的構造. 在該情況下， $\text{refl}_x$  和  $\text{refl}_x^{-1}$  的類型都是  $x = x$ . 因此我們可以簡單地定義  $\text{refl}_x^{-1} := \text{refl}_x$ . 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

**引理 3.2** 對於任何  $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$ ，都能構造一個函數  $\cdot : (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$  使得  $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ .

$p \cdot q$  稱為  $p$  和  $q$  的連接.

*Proof.* 第一種證明

期望得到的函數擁有類型  $(x, y, z : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

我們將改為定義一個函數，擁有和預期等價的類型  $(x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ ，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設  $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_i, D(x, y, p) := (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

然後，為了對  $D$  應用恆等類型的消除規則，我們需要類型為  $(x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$  的函數，也就是類型為  $(x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

現在設  $E : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow \mathcal{U}_i, E(x, z, q) := (x =_A z)$ .

隨即我們能構造函數  $e := x \mapsto \text{refl}_x : (x : A) \rightarrow E(x, x, \text{refl}_x)$ .

對  $E$  應用恆等類型的消除規則，我們得到函數  $d : (x, z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$ .

因為  $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$ ，所以  $d : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ .

然後對  $D$  應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何  $x, y : A, p : (x =_A y)$ ，可以構造項  $\text{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p) : \\ (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$$

現在對於任何  $a, b, c : A$  我們可以定義期望得到的函數

$$\cdot := (p : a =_A b) \mapsto \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p) : \\ (a, b, c : A) \rightarrow (a =_A b) \rightarrow (b =_A c) \rightarrow (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{ind}_{=_A}(D, (x : A) \mapsto \text{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \text{refl}_a), a, a, \text{refl}_a) \equiv \text{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \text{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \text{refl}_a.$$

□

*Proof.* 第二種證明

對於每個  $x, y, z : A$ ,  $p : x = y$  和  $q : y = z$ , 我們想要構造一個項  $p \bullet q : x = z$ . 根據  $p$  的道路歸納, 我們只需要給出  $y$  是  $x$  且  $p$  是  $\text{refl}_x$  時的構造, 即對於每個  $x, z : A$  和  $q : x = z$ , 構造一個項  $\text{refl}_x \bullet q : x = z$ . 根據  $q$  的道路歸納, 只需給出  $z$  是  $x$  且  $q$  是  $\text{refl}_x$  時的構造, 即對於每個  $x : A$ , 構造一個項  $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x : x = x$ . 因此我們可以簡單地定義  $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ . 於是根據道路歸納, 我們完成了構造.  $\square$

**引理 3.3** 設  $A : \mathcal{U}_i$ ,  $x, y, z, w : A$ ,  $p : x = y$ ,  $q : y = z$  且  $r : z = w$ . 我們有以下結論:

1.  $p = p \bullet \text{refl}_y$  且  $p = \text{refl}_x \bullet p$ ;
2.  $p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$  且  $p^{-1} \bullet p = \text{refl}_y$ ;
3.  $(p^{-1})^{-1} = p$ ;
4.  $p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r$ .

*Proof.* 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明: 設  $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p = p \bullet \text{refl}_y)$ . 那麼  $D(x, x, \text{refl}_x)$  是  $\text{refl}_x = \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x$ . 因為  $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ , 我們有  $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$ . 因此可以構造函數  $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ . 根據道路歸納, 對於每個  $x, y : A$  和  $p : x = y$ , 我們有項  $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p = p \bullet \text{refl}_y$ .

本書後面將把  $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = p \bullet \text{refl}_y), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$  記為  $\mathbf{ru}_p$ , 把  $\text{ind}_{=A}((x, y, p) \mapsto (p = \text{refl}_y \bullet p), x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x}, x, y, p)$  記為  $\mathbf{lu}_p$ .

第二種證明: 根據  $p$  的道路歸納, 只需要假設  $y$  是  $x$  且  $p$  是  $\text{refl}_x$ . 在該情況下,  $p \bullet \text{refl}_y \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ . 因此只需證明  $\text{refl}_x = \text{refl}_x$ , 這是簡單的, 即  $\text{refl}_{\text{refl}_x} : \text{refl}_x = \text{refl}_x$ .

2. 第一種證明: 設  $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x)$ . 那麼  $D(x, x, \text{refl}_x)$  是  $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} = \text{refl}_x$ . 因為  $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$  且  $\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ , 我們有  $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$ . 因此可以構造函數  $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ . 根據道路歸納, 對於每個  $x, y : A$  和  $p : x = y$ , 我們有項  $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : p \bullet p^{-1} = \text{refl}_x$ .

第二種證明: 根據  $p$  的道路歸納, 只需要假設  $y$  是  $x$  且  $p$  是  $\text{refl}_x$ . 在該情況下,  $p \bullet p^{-1} \equiv \text{refl}_x \bullet \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ .

3. 第一種證明: 設  $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (p^{-1})^{-1} = p$ . 那麼  $D(x, x, p)$  是  $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} = \text{refl}_x$ . 因為  $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ , 所以  $(\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ , 那麼  $D(x, x, \text{refl}_x) \equiv (\text{refl}_x = \text{refl}_x)$ . 因此我們能構造函數  $d \equiv x \mapsto \text{refl}_{\text{refl}_x} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ . 根據道路歸納, 對於每個  $x, y : A$  和  $p : x = y$ , 我們有項  $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$ .

第二種證明: 根據  $p$  的道路歸納, 只需要假設  $y$  是  $x$  且  $p$  是  $\text{refl}_x$ . 在該情況下,  $(p^{-1})^{-1} \equiv (\text{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \text{refl}_x$ .

4. 我們想要構造的函數的類型是  $(x, y, z, w : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$ , 我們改為證明  $(x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$ .

設  $D_1 : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D_1(x, y, p) \equiv (z : A) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (p \bullet (q \bullet r) = (p \bullet q) \bullet r)$ . 根據  $p$  的道路歸納, 只需要構造類型為  $(x : A) \rightarrow D_1(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$  的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設  $D_2 : (x, z : A) \rightarrow (q : x = z) \rightarrow \mathcal{U}, D_2(x, z, q) \equiv (w : A) \rightarrow (r : z = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (q \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet q) \bullet r)$ . 根據  $q$  的道路歸納, 只需要構造類型為  $(x : A) \rightarrow D_2(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$  的函數.

為了構造這個類型的函數, 我們設  $D_3 : (x, w : A) \rightarrow (r : x = w) \rightarrow \mathcal{U}, D_3(x, w, r) \equiv (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet r) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet r)$ . 根據  $r$  的道路歸納, 只需要構造類型為  $(x : A) \rightarrow D_3(x, x, \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow (\text{refl}_x \bullet (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = (\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) \bullet \text{refl}_x) \equiv (x : A) \rightarrow \text{refl}_x = \text{refl}_x$  的函數. 這是簡單的, 即  $\text{refl}_{\text{refl}_x}$ .

因此, 應用 3 此道路歸納, 我們就得到了想要的類型的函數.  $\square$

**引理 3.4** 加贅

1. 對於任何  $a, b, c : A, p, q : a = b$ , 我們可以構造函數  $_{\mathbf{r}} \cdot (p = q) \rightarrow (r : b = c) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet r), \alpha \cdot_r \text{refl}_b \equiv ru_p^{-1} \bullet \alpha \bullet ru_q$ ;
2. 對於任何  $a, b, c : A, r, s : b = c$ , 我們可以構造函數  $_{\mathbf{l}} \cdot (p : a = b) \rightarrow (r = s) \rightarrow (p \bullet r = p \bullet s), \text{refl}_b \cdot_l \beta \equiv lu_r^{-1} \bullet \beta \bullet lu_s$ .

*Proof.* 略.  $\square$

### 引理 3.5 橫合成

對於任何  $a, b, c : A$ ,  $p, q : a = b$ ,  $r, s : b = c$ , 我們可以構造函數  $\_ \bullet \_ : (p = q) \rightarrow (r = s) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet s)$ .

*Proof.* 略. □

### 引理 3.6 剪鬚

1. 對於任何  $a, b, c : A, p, q : a = b$ , 我們可以構造函數  $(r : b = c) \rightarrow (p \bullet r = q \bullet r) \rightarrow (p = q)$ ;
2. 對於任何  $a, b, c : A, r, s : b = c$ , 我們可以構造函數  $(p : a = b) \rightarrow (p \bullet r = p \bullet s) \rightarrow (r = s)$ .

*Proof.* 略. □

引理 3.7 對於任何  $a, b, c : A, p, q : a = b, r, s : b = c, \alpha : p = q, \beta : r = s$ , 我們有  $(\alpha \bullet_r r) \bullet (q \bullet_l \beta) = (p \bullet_l \beta) \bullet (\alpha \bullet_r s)$ .

*Proof.* 略. □

### 定理 3.1 Eckmann–Hilton

$$(\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)) \rightarrow (\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha)$$

*Proof.* 略. □

### 定義 3.1 有點類型

設  $A : \mathcal{U}, a : A$ . 序偶  $(A, a) : (A : \mathcal{U}) \times A$  稱爲一個**有點類型**,  $a$  稱爲它的**基點**. 類型  $(A : \mathcal{U}) \times A$  記爲  $\mathcal{U}_\bullet$ .

### 定義 3.2 迴路空間

對於  $n : \mathbb{N}$ , 一個有點類型  $(A, a)$  的  $n$  重迭代迴路空間  $\Omega^n(A, a)$  遞歸地定義爲

$$\Omega^0(A, a) \equiv (A, a),$$

$$\Omega^1(A, a) \equiv ((a =_A a), \text{refl}_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A, a) \equiv \Omega^n(\Omega(A, a)),$$

它的一個項稱爲點  $a$  的一個  $n$  維迴路.

慣例 3.1 設  $\Omega^n(A, a) \equiv (B, b)$ . 則  $x : \Omega^n(A, a)$  表示  $x : B$ .

## 3.2 函數是函子

引理 3.8 對於任何  $A, B : \mathcal{U}, f : A \rightarrow B, x, y : A$ , 都能構造函數  $\text{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$ ,  $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ .

*Proof.* 第一種證明: 設  $D : (x, y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv (f(x) =_B f(y))$ . 那麼我們有  $d \equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : (x : A) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$ . 根據  $p$  的道路歸納, 我們得到函數  $\text{ap}_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$ . 根據恆等類型的計算規則, 對於任何  $x : A$ , 有  $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ .

第二種證明: 爲了對任何  $p : x = y$  定義  $\text{ap}_f(p)$ , 根據  $p$  的道路歸納, 只需要構造  $p$  是  $\text{refl}_x$  的情況. 在該情況下, 我們定義  $\text{ap}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$ . □

慣例 3.2 我們將經常將  $\text{ap}_f(p)$  簡寫爲  $f(p)$ .

**引理 3.9** 對於任何函數  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  和道路  $p : x =_A y, q : y =_A z$ ，我們有：

1.  $ap_f(p \bullet q) = ap_f(p) \bullet ap_f(q)$ ;
2.  $ap_f(p^{-1}) = (ap_f(p))^{-1}$ ;
3.  $ap_g(ap_f(p)) = ap_{g \circ f}(p)$ ;
4.  $ap_{id_A}(p) = p$ .

*Proof.* 1. 根據的道路歸納，只需要證明  $ap_f(\text{refl}_x \bullet \text{refl}_x) = ap_f(\text{refl}_x) \bullet ap_f(\text{refl}_x)$ ，這太簡單，遂略。

2. 根據道路歸納，只需要證明  $ap_f(\text{refl}_x^{-1}) = (ap_f(\text{refl}_x))^{-1}$ ，略。

3. 根據道路歸納，只需證明  $ap_g(ap_f(\text{refl}_x)) = ap_{g \circ f}(\text{refl}_x)$ ，即  $ap_g(\text{refl}_{f(x)}) = \text{refl}_{g \circ f}$ ，略。

4. 根據道路歸納，只需證明  $ap_{id_A}(\text{refl}_x) = \text{refl}_x$ ，略。 □

### 3.3 類型族是纖維化

#### 定義 3.3 纖維化

我們把類型族  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  視為一個**纖維化**， $A$  稱為它的**底空間**， $P(x)$  稱為  $x$  上的**纖維**， $(x : A) \times P(x)$  稱為它的**全空間**，如果存在函數  $f : (x : A) \rightarrow P(x)$ ，則稱該函數為  $P$  的一個**截面**。

有時也稱全空間為  $A$  上的**纖維化**。

#### 引理 3.10 傳送

設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$ ，則存在函數  $\text{transport}^B(., .) : (x =_A y) \rightarrow B(x) \rightarrow B(y)$ ， $\text{transport}^B(\text{refl}_x, .) \equiv id_{B(x)}$ 。

*Proof.* 第一種證明：設  $D : (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv B(x) \rightarrow B(y)$ 。那麼我們有函數  $d \equiv (x : A) \mapsto id_{B(x)} : D(x, x, \text{refl}_x)$ 。根據道路歸納，對於任何  $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數  $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : B(x) \rightarrow B(y)$ 。於是我們可以定義，對於任何  $p : x = y$ ，函數  $\text{transport}^B(p, .) \equiv \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$ 。根據計算規則， $\text{transport}^B(\text{refl}_x, .) \equiv id_{B(x)}$ 。

第二種證明：根據道路歸納，只需假設  $p$  是  $\text{refl}_x$ 。在該情況下，對於任何  $b : B(x)$ ，我們定義  $\text{transport}^B(\text{refl}_x, b) \equiv b$ 。 □

#### 引理 3.11 道路提升

設  $P : A \rightarrow \mathcal{U}, x, y : A$ 。則對於任何  $u : P(x), p : x = y$ ，我們有  $\text{lift}(u, p) : (x, u) =_{(x:A) \times P(x)} (y, \text{transport}^P(p, u))$ ， $\text{lift}(u, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{(x,u)}$ 。

*Proof.* 根據道路歸納，只需證明  $(x, u) = (x, id_{P(x)}(u))$ ，略。 □

#### 引理 3.12 依賴映射

設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}, f : (x : A) \rightarrow B(x), x, y : A$ 。我們有映射  $\text{apd}_f : (p : x =_A y) \rightarrow (\text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y))$ ， $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ 。

*Proof.* 第一種證明：設  $D : (x, y : A) \rightarrow (x = y) \rightarrow \mathcal{U}, D(x, y, p) \equiv \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$ 。於是我們有函數  $d \equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : (x : A) \rightarrow D(x, x, \text{refl}_x)$ 。根據道路歸納，對於任何  $x, y : A, p : x = y$ ，我們有函數  $\text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p) : \text{transport}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)$ 。於是我們可以定義，對於任何  $p : x = y$ ，函數  $\text{apd}_f(p) \equiv \text{ind}_{=A}(D, d, x, y, p)$ 。根據計算規則， $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ 。

第二種證明：根據道路歸納，只需假設  $p$  是  $\text{refl}_x$ 。在該情況下，我們定義  $\text{apd}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)} : \text{transport}^B(\text{refl}_x, f(x)) =_{B(x)} f(x)$ 。 □

**引理 3.13** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}, B(x) \equiv B, x, y : A$ 。則能構造函數  $\text{transportconst}^B(., .) : (p : x = y) \rightarrow b : B \rightarrow b = \text{transport}^B(p, b)$ 。

*Proof.* 根據道路歸納，只需證明  $(b : B) \rightarrow b = \text{transport}^B(\text{refl}_x, b)$ ，即  $(b : B) \rightarrow b = b$ 。顯然只需定義  $\text{transportconst}^B(\text{refl}_x, b) \equiv \text{refl}_b$ 。 □

**引理 3.14** 設  $f : A \rightarrow B, x, y : A$ 。則對於任何道路  $p : x = y$ ，我們有類型為  $ap_f(p) = \text{transportconst}^B(p, f(x)) \bullet \text{apd}_f(p)$  的道路。

*Proof.* 根據道路歸納，只需證明  $ap_f(\text{refl}_x) = \text{transportconst}^B(\text{refl}_x, f(x)) \bullet \text{apd}_f(\text{refl}_x)$ ，即  $\text{refl}_{f(x)} = \text{refl}_{f(x)} \bullet \text{refl}_{f(x)}$ ，這是顯然的。 □

**引理 3.15**  $(P : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (q : y = z) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^P(q, \text{transport}^P(p, u)) = \text{transport}^P(p \cdot q, u).$

*Proof.* 略. □

**引理 3.16**  $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (P : B \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(f(x))) \rightarrow \text{transport}^{P \circ f}(p, u) = \text{transport}^P(\text{ap}_f(p), u).$

*Proof.* 略. □

**引理 3.17**

$(P, Q : A \rightarrow \mathcal{U}) \rightarrow (f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p : x = y) \rightarrow (u : P(x)) \rightarrow \text{transport}^Q(p, f_x(u)) =_{Q(y)} f_y(\text{transport}^P(p, u)).$

*Proof.* 略. □

### 3.4 同倫和等價

**定義 3.4** **同倫**

設  $P : A \rightarrow \mathcal{U}, f, g : (x : A) \rightarrow P(x)$ . 從  $f$  到  $g$  的一個**同倫**定義為一個類型為  $(f \sim g) := (x : A) \rightarrow f(x) = g(x)$  的函數.

**引理 3.18** 設  $f : A \rightarrow B$ . 則  $(x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)} : f \sim f$ .

*Proof.* 略. □

**引理 3.19** 設  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ . 我們有:

1.  $(f : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim f)$ ;
2.  $(f, g : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim f)$ ;
3.  $(f, g, h : (x : A) \rightarrow P(x)) \rightarrow (f \sim g) \rightarrow (g \sim h) \rightarrow (f \sim h).$

*Proof.* 略. □

**引理 3.20** 設  $f, g : A \rightarrow B, H : f \sim g$ . 則對於任何  $x, y : A, p : x = y$  我們有  $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$ , 即下圖交換

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(p)} & f(y) \\ \downarrow H(x) & & \downarrow H(y) \\ g(x) & \xrightarrow{g(p)} & g(y) \end{array}$$

*Proof.* 略. □

**推論 3.1** 設  $f : A \rightarrow A, H : f \sim \text{id}_A$ . 則對於任何  $x : A$  我們有  $H(f(x)) = f(H(x))$ .

*Proof.* 根據  $H$  的自然性, 我們有  $f(H(x)) \cdot H(x) = H(f(x)) \cdot H(x)$ , 即下圖交換



$$\begin{array}{ccc}
f f x & \xrightarrow{f(H x)} & f x \\
H(f x) \downarrow & & \downarrow H x \\
f x & \xrightarrow{H x} & x
\end{array}$$

我們可以用  $(H x)^{-1}$  加鬚來消除  $H x$ , 得到  $f(H x) = f(H x) \cdot H x \cdot (H x)^{-1} = H(f x) \cdot H x \cdot (H x)^{-1} = H(f x)$ . □

### 定義 3.5 擬逆

對於一個函數  $f : A \rightarrow B$ , 它的一個**擬逆**是一個三元組  $(g, \alpha, \beta) : \mathbf{qinv}(f) := (g : B \rightarrow A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$ .

### 定義 3.6 等價

對於任何函數  $f : A \rightarrow B$ , 定義  $\mathbf{isequiv}(f) := [(g : B \rightarrow A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (f \circ h \sim id_B)]$ ,  $(A \simeq B) := (f : A \rightarrow B) \times \mathbf{isequiv}(f)$ .

**引理 3.21** 1. 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 存在函數  $\mathbf{qinv}(f) \rightarrow \mathbf{isequiv}(f)$ ;

2. 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 存在函數  $\mathbf{isequiv}(f) \rightarrow \mathbf{qinv}(f)$ .

*Proof.* 1. 略.

2. 給定四元組  $(g, \alpha, h, \beta) : \mathbf{isequiv}(f)$ , 我們有  $\alpha : (x : A) \rightarrow (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \rightarrow (f \circ h)(y) = y$ , 那麼我們有同倫  $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \rightarrow g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$  和  $\alpha \circ h : (y : B) \rightarrow (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$ . 於是我們可以定義同倫  $\gamma := (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \rightarrow g(y) = h(y)$ . 那麼  $f \circ \gamma : (y : B) \rightarrow (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$ . 於是  $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim id_B$ . 所以有  $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathbf{qinv}(f)$ . □

**引理 3.22** 1. 對於任何類型  $A : \mathcal{U}$ , 我們有  $\mathbf{isequiv}(id_A)$ , 即  $A \simeq A$ ;

2. 對於任何函數  $f : A \rightarrow B$  使得  $\mathbf{isequiv}(f)$ , 即  $A \simeq B$ , 我們有一個函數  $f^{-1} : B \rightarrow A$  使得  $\mathbf{isequiv}(f^{-1})$ , 即  $B \simeq A$ ;

3. 對於任何函數  $f : A \rightarrow B$  使得  $\mathbf{isequiv}(f)$  (即  $A \simeq B$ ) 和  $g : B \rightarrow C$  使得  $\mathbf{isequiv}(g)$  (即  $B \simeq C$ ), 我們有  $\mathbf{isequiv}(g \circ f)$  (即  $A \simeq C$ ).

*Proof.* 1. 我們要證明對於任何類型  $A : \mathcal{U}$  有  $[(g : B \rightarrow A) \times (g \circ id_A \sim id_A)] \times [(h : B \rightarrow A) \times (id_A \circ h \sim id_B)]$ , 略.

2.  $f$  的擬逆.

3.  $f^{-1} \circ g^{-1}$  是  $g \circ f$  的一個擬逆. □

## 3.5 $\Sigma$ -類型

**定理 3.2** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $w, w' : (x : A) \times B(x)$ .

則我們有一個等價  $(w = w') \simeq (p : pr_1(w) = pr_1(w')) \times (transport^B(p, pr_2(w)) = pr_2(w'))$ .

*Proof.* 略. □

**推論 3.2** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ . 則對於任何  $w : (x : A) \times B(x)$ , 我們有  $w = \langle pr_1(w), pr_2(w) \rangle$ .

*Proof.* 略. □

**引理 3.23** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $C : (x : A) \times (B(x) \rightarrow \mathcal{U})$ . 則我們有  $[(x : A) \times (y : B(x)) \times C(\langle x, y \rangle)] \simeq [(p : (x : A) \times B(x)) \times C(p)]$ .

*Proof.* 略. □

## 3.6 單元類型

### 定理 3.3

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow ((x = y) \simeq \mathbf{1}).$$

*Proof.* 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明  $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$ . 設函數  $f : (\star = \star) \rightarrow \mathbf{1}, x \mapsto \star$  和  $g : \mathbf{1} \rightarrow (\star = \star), x \mapsto \text{refl}_\star$ . 那麼我們只需證明對於任何  $x : \star = \star$  有  $(g \circ f)(x) = \text{id}_{\star=\star}(x)$  和對於任何  $x : \mathbf{1}$  有  $(f \circ g)(x) = \text{id}_\mathbf{1}(x)$ . 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明  $(g \circ f)(\text{refl}_\star) = \text{id}_{\star=\star}(\text{refl}_\star)$  和  $(f \circ g)(\star) = \text{id}_\mathbf{1}(\star)$ , 略.  $\square$

### 定理 3.4

$$(x, y : \mathbf{1}) \rightarrow (x = y).$$

*Proof.* 略.  $\square$

## 3.7 $\Pi$ -類型

### 引理 3.24 *happly*

對於任何函數  $f, g : (x : A) \rightarrow B(x)$ , 我們有函數

$$\begin{aligned} \mathbf{happly}(f, g) &: (f = g) \rightarrow (x : A) \rightarrow (f(x) = g(x)), \\ \mathbf{happly}(f, g, \text{refl}_f) &\equiv (x : A) \mapsto \text{refl}_{f(x)}. \end{aligned}$$

*Proof.* 略.  $\square$

## 3.8 宇宙和泛等公理

引理 3.25 對於任何類型  $A, B : \mathcal{U}$ , 我們有一個函數  $\mathbf{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$ .

*Proof.* 函數  $\text{transport}^{\text{id}_u}(\_, \_) : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow A \rightarrow B$ . 我們要證明  $(p : A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow \text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_u}(p, \_))$ . 根據  $p$  的道路歸納, 只需證明  $\text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_u}(\text{refl}_A, \_))$ , 即證明  $\text{isequiv}(\text{id}_A)$ , 略.

定義  $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p) \equiv (\text{transport}^{\text{id}_u}(p, \_), a) : A \simeq B$ , 其中  $a : \text{isequiv}(\text{transport}^{\text{id}_u}(p, \_))$ .  $\square$

引理 3.26  $(\text{id}_A, a) = \mathbf{idtoeqv}_{A,B}(\text{refl}_A)$ , 其中  $a : \text{isequiv}(\text{id}_A)$ .

*Proof.* 略.  $\square$

引理 3.27 對於任何  $x, y : A, p : x = y, B : A \rightarrow \mathcal{U}, u : B(x)$ , 我們有  $\text{transport}^B(p, u) = \text{transport}^{\text{id}_u}(\text{ap}_B(p), u) = \text{pr}_1(\mathbf{idtoeqv}(\text{ap}_B(p)))(u)$ .

*Proof.* 根據歸納原理, 只需證明  $\text{transport}^B(\text{refl}_x, u) = \text{transport}^{\text{id}_u}(\text{ap}_B(\text{refl}_x), u) = \text{pr}_1(\mathbf{idtoeqv}(\text{ap}_B(\text{refl}_x)))(u)$ , 略.  $\square$

### 定義 3.7 泛等公理 (不常用)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \mathbf{univalence}(A, B) : \text{isequiv}(\mathbf{idtoeqv}_{A,B})} \mathcal{U}_i\text{-UNIV}$$

引理 3.28  $(\mathbf{idtoeqv}_{A,B}, \mathbf{univalence}(A, B)) : (A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$ .

*Proof.* 略.  $\square$

### 定義 3.8 泛等公理 (常用)

- 對於任何類型  $A, B : \mathcal{U}$ , 我們有一個函數  $\mathbf{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B)$ ;
- 對於任何  $(f, a) : A \simeq B$ , 我們有  $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(\mathbf{ua}(f, a)) = (f, a)$ ;
- 對於任何  $p : A =_{\mathcal{U}} B$ , 我們有  $p = \mathbf{ua}(\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p))$ .

- 引理 3.29** 1. 對於任何類型  $A : \mathcal{U}$ ，我們有  $refl_A = ua(id_A, a)$ ，其中  $a : isequiv(id_A)$ ；
2. 對於任何  $(f, a) : A \simeq B, (g, b) : B \simeq C$ ，我們有  $ua(f, a) \bullet ua(g, b) = ua(g \circ f, c)$ 。
3. 對於任何  $(f, a) : A \simeq B$  和它的一個擬逆  $(f^{-1}, b)$ ，我們有  $(ua(f, a))^{-1} = ua(f^{-1}, b)$ 。

*Proof.* 略。 □

### 3.9 恆等類型

**定理 3.5** 如果  $(f, a) : A \simeq B$ ，則對於任何  $x, x' : A$ ，函數  $ap_f : (x = x') \rightarrow (f(x) = f(x'))$  也是一個等價。

*Proof.* 我們想要構造一個四元組  $(g, \gamma, h, \delta) : isequiv(ap_f)$ ，即  $g : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \gamma : (p : x = x') \rightarrow (g(ap_f(p)) = p), h : (f(x) = f(x')) \rightarrow (x = x'), \delta : (q : f(x) = f(x')) \rightarrow (ap_f(g(q)))$ 。

設  $(f^{-1}, \alpha, \beta) : qinv(f)$ ，即  $f^{-1} : B \rightarrow A, \alpha : (x : A) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = x), \beta : (y : B) \rightarrow (f(f^{-1}(y)) = y)$ 。

那麼對於任何  $x, x' : A$ ，我們有  $ap_{f^{-1}} : (f(x) = f(x')) \rightarrow (f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')))$ 。

於是對於任何  $p : x = x'$ ，我們有

$$\begin{aligned} & \alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1}}(ap_f(p)) \bullet \alpha_{x'} \\ &= \alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1} \circ f}(p) \bullet \alpha_{x'} \\ &= ap_{id_A}(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

且對於任何  $q : f(x) = f(x')$ ，我們有

$$\begin{aligned} & ap_f(\alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \bullet ap_f(\alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}) \bullet \beta_{f(x')}^{-1} \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet ap_f(ap_f^{-1}(ap_f(\alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'}))) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet ap_f(\alpha_x \bullet \alpha_x^{-1} \bullet ap_{f^{-1}}(q) \bullet \alpha_{x'} \bullet \alpha_{x'}^{-1}) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= \beta_{f(x)}^{-1} \bullet ap_f(ap_{f^{-1}}(q)) \bullet \beta_{f(x')} \\ &= q. \end{aligned}$$

□

**引理 3.30** 對於任何  $a, x_1, x_2 : A$  和  $p : x_1 = x_2$ ，我們有

1.  $(q : a = x_1) \rightarrow transport^{x \mapsto (a=x)}(p, q) = q \bullet p$ ;
2.  $(q : x_1 = a) \rightarrow transport^{x \mapsto (x=a)}(p, q) = p^{-1} \bullet q$ ;
3.  $(q : x_1 = x_2) \rightarrow transport^{x \mapsto (x=x)}(p, q) = p^{-1} \bullet q \bullet p$ 。

*Proof.* 略。 □

### 3.10 自然數

**定義 3.9** *code*

定義函數

$$code : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U},$$

模式匹配

$$code(0, 0) \equiv 1$$

$$code(succ(m), 0) \equiv 0$$

$$code(0, succ(n)) \equiv 0$$

$$code(succ(m), succ(n)) \equiv code(m, n).$$

**定義 3.10**  $r$ 

定義函數

$$r : (n : \mathbb{N}) \rightarrow \text{code}(n, n)$$

模式匹配

$$r(0) \equiv \star$$

$$r(\text{succ}(n)) \equiv r(n).$$

**定理 3.6** 對於任何  $m, n : \mathbb{N}$  我們有  $(m = n) \simeq \text{code}(m, n)$ .*Proof.* 定義函數

$$\text{encode} : (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow (m = n) \rightarrow \text{code}(m, n),$$

$$\text{encode}(m, n, p) \equiv \text{transport}^{\text{code}(m, \_)}(p, r(m)),$$

和函數

$$\text{decode} : (m, n : \mathbb{N}) \rightarrow \text{code}(m, n) \rightarrow (m = n),$$

模式匹配

$$\text{decode}(0, 0, \star) \equiv \text{refl}_0$$

$$\text{decode}(\text{succ}(m), 0, \_) \equiv \text{ind}_0((x : 0) \mapsto (m = n), \_)$$

$$\text{decode}(0, \text{succ}(n), \_) \equiv \text{ind}_0((x : 0) \mapsto (m = n), \_)$$

$$\text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \_) \equiv \text{ap}_{\text{succ}} \circ \text{decode}(m, n, \_).$$

接下來我們要證明對於任何  $m, n : \mathbb{N}$  有  $\text{encode}(m, n, \_)$  和  $\text{decode}(m, n, \_)$  互為擬逆。

我們先證明對於任何  $p : m = n$  有  $\text{decode}(m, n, \text{encode}(m, n, p)) = p$ . 根據  $p$  的道路歸納, 只需證明  $\text{decode}(m, m, \text{encode}(m, m, \text{refl}_m)) = \text{refl}_m$ , 即  $\text{decode}(m, m, r(m)) = \text{refl}_m$ . 對  $m$  使用歸納法, 如果  $m \equiv 0$ , 那麼  $\text{decode}(0, 0, r(0)) = \text{decode}(0, 0, \star) = \text{refl}_0$ ; 設  $x : \mathbb{N}, y : \text{decode}(x, x, r(x)) = \text{refl}_x$ , 則  $\text{decode}(\text{succ}(x), \text{succ}(x), r(\text{succ}(x))) = \text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(x, x, r(x))) = \text{ap}_{\text{succ}}(\text{refl}_x) = \text{refl}_{\text{succ}(x)}$ .

然後我們證明對於任何  $c : \text{code}(m, n)$  有  $\text{encode}(m, n, \text{decode}(m, n, c)) = c$ . 我們對  $m, n$  進行雙歸納. 如果都是 0, 那麼  $\text{encode}(0, 0, \text{decode}(0, 0, c)) = \text{encode}(0, 0, \text{decode}(0, 0, \star)) = \text{encode}(0, 0, \text{refl}_0) = r(0) = \star = c$ ; 如果  $m$  是 0 且  $n$  是一個後繼, 或反之, 那麼有  $c : 0$ ; 最後是兩個後繼的情況, 根據歸納假設我們有

$$\begin{aligned} & \text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), c)) \\ &= \text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(m, n, c))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(\text{succ}(m), \_)}(\text{ap}_{\text{succ}}(\text{decode}(m, n, c)), r(\text{succ}(m))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(\text{succ}(m), \text{succ}(\_))}(\text{decode}(m, n, c), r(\text{succ}(m))) \\ &= \text{transport}^{\text{code}(m, \_)}(\text{decode}(m, n, c), r(m)) \\ &= \text{encode}(m, n, \text{decode}(m, n, c)) \\ &= c \end{aligned}$$

□

**推論 3.3** 1. 對於任何  $m : \mathbb{N}$ , 我們有  $\text{encode}(\text{succ}(m), 0, \_) : (\text{succ}(m) = 0) \rightarrow 0$ ;2. 對於任何  $m, n : \mathbb{N}$ , 我們有  $\text{encode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \text{decode}(\text{succ}(m), \text{succ}(n), \_)) : (\text{succ}(m) = \text{succ}(n)) \rightarrow (m = n)$ .*Proof.* 略.

□

**3.11 泛性質**

**定理 3.7** 設  $A : X \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $P : (x : X) \rightarrow A(x) \rightarrow \mathcal{U}$ . 則有等價：

$$[(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)] \simeq [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))]$$

*Proof.* 定義函數  $\varphi : [(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)] \rightarrow [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))]$ ,  $\varphi(f) := \langle x \mapsto \text{pr}_1(f(x)), x \mapsto \text{pr}_2(f(x)) \rangle$  和  $\psi : [(g : (x : X) \rightarrow A(x)) \times ((x : X) \rightarrow P(x, g(x)))] \rightarrow [(x : X) \rightarrow (a : A(x)) \times P(x, a)]$ ,  $\psi(\langle g, h \rangle) := x \mapsto \langle g(x), h(x) \rangle$ .

剩餘證明略. □

## 4 集合和邏輯

### 4.1 集合和 $n$ -類型

#### 定義 4.1 集合 (0-類型)

設  $A : \mathcal{U}$ .

$$\mathit{isSet}(A) := (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q).$$

#### 定義 4.2 1-類型

一個類型  $A$  是一個 **1-類型** 如果  $(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$ .

引理 4.1 如果  $A$  是一個集合, 則  $A$  是一個 1-類型.

*Proof.* 我們想證明  $[(x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (\alpha, \beta : p = q) \rightarrow (\alpha = \beta)$ .

設  $f : \mathit{isSet}(A)$ . 那麼對於任何  $x, y : A$  和  $p, q : x = y$  我們有  $p = q$ . 給定  $x, y$  和  $p$ , 定義  $g : (q : x = y) \rightarrow (p = q), g := f(x, y, p, \_)$ . 那麼對於任何  $q, q' : x = y$  和  $\alpha : q = q'$ , 我們有  $\mathit{apd}_g(\alpha) : \mathit{transport}^{g \mapsto (p=q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$ , 也就有  $g(q) \cdot \alpha = g(q')$ .

因此對於任何  $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$ , 我們有  $g(p) \cdot \alpha = g(q)$  且  $g(p) \cdot \beta = g(q)$ , 也就有  $g(p) \cdot \alpha = g(p) \cdot \beta$ , 也就有  $\alpha = \beta$ .  $\square$

### 4.2 命題

#### 定義 4.3 命題 (−1-類型)

設  $A : \mathcal{U}$ .

$$\mathit{isProp}(A) := (x, y : A) \rightarrow (x = y).$$

引理 4.2 如果  $P$  是一個命題且  $x_0 : P$ , 則  $P \simeq \mathbf{1}$ .

*Proof.* 略.  $\square$

引理 4.3 如果  $P$  和  $Q$  是命題, 且有  $P \rightarrow Q$  和  $Q \rightarrow P$ , 則我們有  $P \simeq Q$ .

*Proof.* 設  $f : P \rightarrow Q, g : Q \rightarrow P$ . 那麼由於  $P$  是命題, 則對於任何  $x : P$  我們有  $g(f(x)) = x$ . 同理, 對於任何  $y : Q$  我們有  $f(g(y)) = y$ . 因此  $f$  和  $g$  互為擬逆.  $\square$

引理 4.4 每個命題都是一個集合.

*Proof.* 我們想證明  $[(x, y : A) \rightarrow (x = y)] \rightarrow (x, y : A) \rightarrow (p, q : x = y) \rightarrow (p = q)$ .

設  $f : \mathit{isProp}(A)$ . 那麼對於任何  $x, y : A$  我們有  $f(x, y) : x = y$ . 給定  $x$ , 定義  $g : (y : A) \rightarrow x = y, g := f(x, \_)$ . 那麼對於任何  $y, z : A$  和  $p : y = z$ , 我們有  $\mathit{apd}_g(p) : \mathit{transport}^{y \mapsto x=y}(p, g(y)) = g(z)$ , 也就有  $g(y) \cdot p = g(z)$ , 也就有  $p = (g(y))^{-1} \cdot g(z)$ .

因此對於任何  $x, y : A, p, q : x = y$ , 我們有  $p = (g(x))^{-1} \cdot g(y) = q$ .  $\square$

### 4.3 子集

引理 4.5 設  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  且對於任何  $x : A$ ,  $P(x)$  是一個命題. 則對於任何  $u, v : (x : A) \times P(x)$ , 若  $\mathit{pr}_1(u) = \mathit{pr}_1(v)$ , 則有  $u = v$ .

*Proof.* 設  $p : \mathit{pr}_1(u) = \mathit{pr}_1(v)$ . 則為了證明  $u = v$ , 我們只需證明  $\mathit{transport}^P(p, \mathit{pr}_2(u)) = \mathit{pr}_2(v)$ . 因為  $\mathit{transport}^P(p, \mathit{pr}_2(u)), \mathit{pr}_2(v) : P(\mathit{pr}_1(v))$  且該類型是一個命題, 所以證畢.  $\square$

#### 定義 4.4 子類型，子集

設  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  是一個命題族（即每個  $P(x)$  是一個命題）。

$$\{x : A \mid P(x)\} \equiv (x : A) \times P(x);$$

$$a \in \{x : A \mid P(x)\} \equiv P(a).$$

$\{x : A \mid P(x)\}$  稱為  $A$  的一個子類型；如果  $A$  是集合，則  $\{x : A \mid P(x)\}$  稱為  $A$  的一個子集。

#### 定義 4.5 $Set_{\mathcal{U}}$

定義  $\mathcal{U}$  的一個“子宇宙”：

$$Set_{\mathcal{U}} \equiv \{A : \mathcal{U} \mid isSet(A)\}.$$

### 4.4 命題截斷

#### 定義 4.6 命題截斷（ $-1$ -截斷）

命題截斷系如下資料：

1. 類型形成器： $\| \_ \| : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ；
2. 構造子 1： $| \_ | : A \rightarrow \|A\|$ ；
3. 構造子 2：對於任何  $x, y : \|A\|$ ，我們有  $x = y$ ；
4. 消除器：如果有  $isProp(B)$ ，則有  $rec_{\| \_ \|} : (A \rightarrow B) \rightarrow \|A\| \rightarrow B$ ；
5. 計算規則： $rec_{\| \_ \|}(f)(|a|) \equiv f(a)$

#### 定義 4.7 傳統邏輯記號

給定類型  $A$  和  $B$ 。

$$A \text{ 和 } B \text{ 是邏輯等價的 } (A \text{ iff } B) \equiv (A \rightarrow B) \times (B \rightarrow A)$$

給定命題  $P$  和  $Q$ 。

$$\top \equiv \mathbf{1}$$

$$\perp \equiv \mathbf{0}$$

$$P \wedge Q \equiv P \times Q$$

$$P \Rightarrow Q \equiv P \rightarrow Q$$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv P = Q$$

$$\neg P \equiv P \rightarrow \mathbf{0}$$

$$P \vee Q \equiv \|P + Q\|$$

$$\forall (x : A). P(x) \equiv (x : A) \rightarrow P(x)$$

$$\exists (x : A). P(x) \equiv \|(x : A) \times P(x)\|$$

$$\{x : A \mid P(x)\} \cap \{x : A \mid Q(x)\} \equiv \{x : A \mid P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$\{x : A \mid P(x)\} \cup \{x : A \mid Q(x)\} \equiv \{x : A \mid P(x) \vee Q(x)\}$$

$$A \setminus \{x : A \mid P(x)\} \equiv \{x : A \mid \neg P(x)\}$$

### 4.5 可縮性

**定義 4.8** 可縮的

$$isContr(A) := (a : A) \times ((x : A) \rightarrow (a = x)).$$

引理 4.6 對於任何類型  $A$ ，以下類型是邏輯等價的：

1.  $isContr(A)$ ;
2.  $A \times isProp(A)$ ;
3.  $A \simeq \mathbf{1}$ .

*Proof.* 略. □

引理 4.7 對於任何類型  $A$ ，類型  $isContr(A)$  是命題.

*Proof.* 略. □

引理 4.8 如果類型  $A$  等價於  $B$  且  $A$  可縮，則  $B$  可縮.

*Proof.* 略. □

**定義 4.9** 收縮，截面，收縮核

稱函數  $r : A \rightarrow B$  是一個**收縮**，如果存在一個函數  $s : B \rightarrow A$ ，稱為它的一個**截面**，和一個同倫  $r \circ s \sim id_B$ . 我們稱  $B$  為  $A$  的一個**收縮核**.

引理 4.9 如果  $B$  是  $A$  的一個收縮核，且  $A$  是可縮的，則  $B$  是可縮的.

*Proof.* 令  $r : A \rightarrow B$  是一個收縮， $s : B \rightarrow A$  是它的一個截面， $\varepsilon : r \circ s \sim id_B$ ， $a_0 : A$ ， $contr_{s(b)} : a_0 = s(b)$ ， $b_0 := r(a_0), b : B$ .  
那麼我們有  $r(contr_{s(b)}) \cdot \varepsilon(b) : b_0 = b$ ，證畢. □

引理 4.10 對於任何類型  $A$  和  $a : A$ ，類型  $(x : A) \times (a = x)$  是可縮的.

*Proof.* 我們要證明  $(\langle x, p \rangle : (x : A) \times (a = x)) \rightarrow \langle a, refl_a \rangle = \langle x, p \rangle$ ，略. □

引理 4.11 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ . 則有：

1.  $[(x : A) \rightarrow isContr(B(x))] \rightarrow [(x : A) \times B(x) \simeq A]$ ;
2.  $(a : A) \times [(x : A) \rightarrow (a = x)] \rightarrow (((x : A) \times B(x)) \simeq B(a))$ .

*Proof.* 略. □



## 5 等價

### 5.1 半伴隨等價

**回顧 5.1** 對於任何函數  $f: A \rightarrow B$ ，定義  $isequiv(f) \equiv [(g: B \rightarrow A) \times (gf \sim id_A)] \times [(h: B \rightarrow A) \times (fh \sim id_B)]$ ， $(A \simeq B) \equiv (f: A \rightarrow B) \times isequiv(f)$ .

對於一個函數  $f: A \rightarrow B$ ，它的一個擬逆是一個三元組  $(g, \alpha, \beta): qinv(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (gf \sim id_A) \times (fg \sim id_B)$ .

#### 定義 5.1 半伴隨等價

$$ishae(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (\eta: gf \sim id_A) \times (\varepsilon: fg \sim id_B) \times (f\eta \sim \varepsilon f);$$

$$ishae'(f) \equiv (g: B \rightarrow A) \times (\eta: gf \sim id_A) \times (\varepsilon: fg \sim id_B) \times (g\varepsilon \sim \eta g).$$

**引理 5.1**  $ishae(f)$  和  $ishae'(f)$  是邏輯等價的.

*Proof.* 我們先證明  $ishae(f) \rightarrow ishae'(f)$ .

設  $(g, \eta, \varepsilon, \tau): ishae(f)$ . 我們要構造一個四元組  $(g', \eta', \varepsilon', \tau'): ishae'(f)$ . 設  $g' \equiv g$ ,  $\eta' \equiv \eta$ ,  $\varepsilon' \equiv \varepsilon$ .

由  $g\varepsilon$  的自然性，我們有路徑的交換圖如下：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow g \varepsilon f g y & & \downarrow g \varepsilon y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

從而有：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow gf \eta g y & & \downarrow g \varepsilon y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

從而有：

$$\begin{array}{ccc} gf g f g y & \xrightarrow{gf g \varepsilon y} & gf g y \\ \downarrow \eta g f g y & & \downarrow \eta g y \\ gf g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y \end{array}$$

根據  $\eta$  的自然性，我們有：

$$\begin{array}{ccc}
g f g f g y & \xrightarrow{g f g \varepsilon y} & g f g y \\
\eta g f g y \downarrow & & \downarrow g \varepsilon y \\
g f g y & \xrightarrow{g \varepsilon y} & g y
\end{array}$$

所以我們有  $g \varepsilon y = \eta g y$ ，證畢。

反方向類似，略。 □

**定理 5.1** 對於任何  $f: A \rightarrow B$ ，我們有  $\text{ishae}(f)$  iff  $\text{qinv}(f)$ .

*Proof.* 正方向顯然，我們來證明反方向。

設  $(g, \eta, \varepsilon) : \text{qinv}(f)$ . 我們要構造一個四元組  $(g', \eta', \varepsilon', \tau) : \text{ishae}(f)$ . 設  $g' \equiv g$ ,  $\eta' \equiv \eta$ . 我們要構造合適的  $\varepsilon'$  的定義，使得對於任何  $a: A$  有  $f \eta a = \varepsilon' f a$ .

根據  $\varepsilon$  的自然性，我們有如下交換圖：

$$\begin{array}{ccc}
f g f g f a & \xrightarrow{f g f \eta a} & f g f a \\
\varepsilon f g f a \downarrow & & \downarrow \varepsilon f a \\
f g f a & \xrightarrow{f \eta a} & f a
\end{array}$$

所以有  $(f g f \eta a) \bullet (\varepsilon f a) = (\varepsilon f g f a) \bullet (f \eta a)$ ，於是有  $(\varepsilon f g f a)^{-1} \bullet (f g f \eta a) \bullet (\varepsilon f a) = f \eta a$ .

於是我們可以定義  $\varepsilon' b \equiv (\varepsilon f g b)^{-1} \bullet (f \eta g b) \bullet (\varepsilon b)$ ，證畢。 □

## 定義 5.2 同倫纖維

一個函數  $f: A \rightarrow B$  在一個點  $y: B$  的一個同倫纖維定義為：

$$\text{fib}_f(y) \equiv (x: A) \times (f(x) = y).$$

**引理 5.2** 對於任何  $f: A \rightarrow B, y: B$  和  $(x, p), (x', p'): \text{fib}_y$ ，我們有  $((x, p) = (x', p')) \simeq ((\gamma: x = x') \times (p = f(\gamma) \bullet p'))$ .

*Proof.* 略。 □

**定理 5.2** 如果  $f: A \rightarrow B$  是一個半伴隨等價，則對於任何  $y: B$ ，同倫纖維  $\text{fib}_f(y)$  是可縮的。

*Proof.* 設  $(g, \eta, \varepsilon, \tau) : \text{ishae}(f)$ ,  $y: B$ . 那麼有  $(g y, \varepsilon y) : \text{fib}_f(y)$ . 設  $(x, p) : \text{fib}_f$ ，我們要構造從  $(g y, \varepsilon y)$  到  $(x, p)$  的一條道路。我們只需給出路徑  $\gamma: g y = x$  使得  $\varepsilon y = f(\gamma) \bullet p$ .

根據  $\varepsilon$  的自然性，我們有：

$$\begin{array}{ccc}
f g f x & \xrightarrow{f g p} & f g y \\
\varepsilon f x \downarrow & & \downarrow \varepsilon y \\
f x & \xrightarrow{p} & y
\end{array}$$

也就有：

$$\begin{array}{ccc}
f g f x & \xrightarrow{f g p} & f g y \\
f \eta x \downarrow & & \downarrow \varepsilon y \\
f x & \xrightarrow{p} & y
\end{array}$$

令  $\gamma \equiv (g p)^{-1}$ ，證畢。 □

### 定義 5.3 左逆和右逆

給定  $f : A \rightarrow B$ ，我們定義  $f$  的左逆和右逆的類型為

$$\mathbf{linv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times (g f \sim id_A);$$

$$\mathbf{rinv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times (f g \sim id_B).$$

引理 5.3 如果  $f : A \rightarrow B$  有一個擬逆  $g : B \rightarrow A$ ，那麼函數  $(f \circ \_) : (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$  和  $(\_ \circ f) : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$  也有擬逆。

*Proof.*  $(g \circ \_) : (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)$ ;  $(\_ \circ g) : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$ .

$$(f \circ \_) \circ (g \circ \_) \equiv f \circ g \circ \_; (\_ \circ g) \circ (\_ \circ f) \equiv \_ \circ f \circ g.$$
□

定義 5.4 給定  $f : A \rightarrow B$ ， $\langle g, \eta \rangle : \mathbf{linv}(f)$ ， $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ 。我們定義：

$$\mathbf{lcoh}_f(\langle g, \eta \rangle) \equiv (\varepsilon : f \circ g \sim id_B) \times (g \varepsilon \sim \eta g);$$

$$\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle) \equiv (\eta : g \circ f \sim id_A) \times (f \eta \sim \varepsilon f).$$

引理 5.4 對於任何  $f : A \rightarrow B$ ， $\langle g, \eta \rangle : \mathbf{linv}(f)$ ， $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ ，我們有：

$$\mathbf{lcoh}_f(\langle g, \eta \rangle) \simeq (y : B) \rightarrow [\langle f g y, \eta g y \rangle = \langle y, refl_{gy} \rangle];$$

$$\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle) \simeq (x : A) \rightarrow [\langle g f x, \varepsilon f x \rangle = \langle x, refl_{fx} \rangle].$$

*Proof.* 略。 □

引理 5.5 如果  $f : A \rightarrow B$  是一個半伴隨等價，則對於任何  $\langle g, \varepsilon \rangle : \mathbf{rinv}(f)$ ，我們有  $\mathbf{rcoh}_f(\langle g, \varepsilon \rangle)$  是可縮的。

*Proof.* 我們只需證明對於任何  $x : A$ ， $\langle g f x, \varepsilon f x \rangle = \langle x, refl_{fx} \rangle$  是可縮的。

我們已經知道  $\mathbf{fib}_f(f x)$  是可縮的，又因為可縮空間的道路空間是可縮的，證畢。 □

## 5.2 雙可逆映射

### 定義 5.5 雙可逆映射

我們將之前定義的  $isequiv$  重命名為  $biinv$ :

$$biinv(f) := linv \times rinu.$$

定理 5.3 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 我們有  $biinv(f)$  iff  $ishae(f)$ .

Proof. 略. □

## 5.3 可縮纖維

### 定義 5.6 可縮映射

設  $f : A \rightarrow B$ . 我們定義:

$$isContr(f) := (y : B) \rightarrow isContr(fib_f(y)).$$

定理 5.4 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 我們有  $ishae(f)$  iff  $isContr(f)$ .

Proof. 正方向我們已經證明過了, 現在我們來證明反方向.

設  $P : isContr(f) \equiv (y : B) \rightarrow isContr(fib_f(y)) \equiv (y : B) \rightarrow [a : fib_f(y)] \times [(b : fib_f(y)) \rightarrow (a = b)] \equiv (y : B) \rightarrow [a : (x : A) \times (f(x) = y)] \times [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \rightarrow (a = b)]$ . 設函數  $g : B \rightarrow A, g y := pr_1 pr_1 P y$ , 函數  $\varepsilon : f g \sim id_B, \varepsilon y := pr_2 pr_1 P y$ , 函數  $\alpha : (y : B) \rightarrow [(b : (x : A) \times (f(x) = y)) \rightarrow ((pr_1 P y) = b)], \alpha y := pr_2 P y$ .

我們要構造四元組  $\langle g', \varepsilon', \eta, \tau \rangle : ishae(f)$ . 令  $g' := g, \varepsilon' := \varepsilon$ .

還剩  $\eta$  和  $\tau$  需要構造, 這其實相當於構造  $rcoh_f(g, \varepsilon)$  的一個項, 也就相當於構造  $(x : A) \rightarrow [\langle g f x, \varepsilon f x \rangle = \langle x, refl_{f x} \rangle]$  的一個項, 略. □

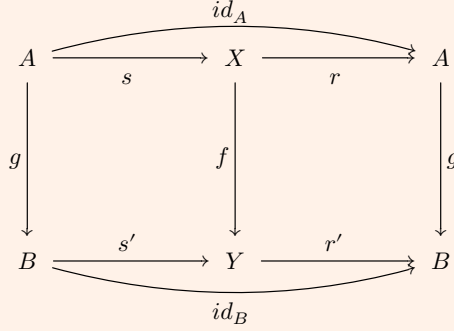
定理 5.5 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 我們有  $qinv(f)$  iff  $isContr(f)$  iff  $ishae(f)$  iff  $biinv(f)$ .

## 5.4 閉包性質

### 定義 5.7 收縮核

稱函數  $g: A \rightarrow B$  是函數  $f: X \rightarrow Y$  的一個**收縮核**，如果：

1. 存在如下一個圖：



使得有如下存在：

- (i) 一個同倫  $R: r \circ s \sim id_A$ ;
- (ii) 一個同倫  $R': r' \circ s' \sim id_B$ ;
- (iii) 一個同倫  $L: f \circ s \sim s' \circ g$ ;
- (iv) 一個同倫  $K: g \circ r \sim r' \circ f$ .

2. 對於任何  $a: A$ ，我們有一條道路  $H(a)$  見證下圖的交換：

$$\begin{array}{ccc}
 g r s a & \xRightarrow{K s a} & r' f s a \\
 \parallel & & \parallel \\
 g R a & & r' L a \\
 \parallel & & \parallel \\
 g a & \xRightarrow{(R' g a)^{-1}} & r' s' g a
 \end{array}$$

### 回顧 5.2 纖維化

我們把類型族  $P: A \rightarrow \mathcal{U}$  視為一個**纖維化**， $A$  稱為它的**底空間**， $P(x)$  稱為  $x$  上的**纖維**， $(x: A) \times P(x)$  稱為它的**全空間**，如果存在函數  $f: (x: A) \rightarrow P(x)$ ，則稱該函數為  $P$  的一個**截面**。

有時也稱全空間為  $A$  上的**纖維化**。

### 定義 5.8 逐纖維變換

給定  $P, Q: A \rightarrow \mathcal{U}$ ，我們稱一個函數  $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$  為一個**逐纖維變換**。

### 定義 5.9 total

給定  $P, Q: A \rightarrow \mathcal{U}$  和一個逐纖維變換  $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$ ，我們定義函數

$$total(f) := (w: (x: A) \times P(x)) \mapsto \langle pr_1 w, f(pr_1 w, pr_2 w) \rangle : [(x: A) \times P(x)] \rightarrow (x: A) \times Q(x).$$

**定理 5.6** 設  $f: (x: A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$  是一個逐纖維變換， $x: A$ ， $v: Q(x)$ 。那麼我們有一個雙可逆映射

$$fib_{total(f)}(\langle x, v \rangle) \simeq fib_{f(x)}(v).$$

*Proof.* 略。

□

### 定義 5.10 逐纖維等價

我們稱一個逐纖維變換  $f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$  是一個**逐纖維等價**，如果  $(x : A) \rightarrow \text{ishae}(f(x))$ .

**定理 5.7** 設  $f : (x : A) \rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$  是一個逐纖維變換. 那麼, “ $f$  是一個逐纖維等價” iff “ $\text{total}(f)$  是一個雙可逆映射”.

*Proof.*  $f$  是一個逐纖維等價

iff  $(x : A) \rightarrow \text{ishae}(f(x))$

iff  $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(f(x))$

iff  $(x : A) \rightarrow (v : Q(x)) \rightarrow \text{isContr}(\text{fib}_{f(x)}(v))$

iff  $(w : (x : A) \times Q(x)) \rightarrow \text{isContr}(\text{fib}_{\text{total}(f)}(w))$

iff  $\text{isContr}(\text{total}(f))$

iff  $\text{total}(f)$  是一個雙可逆映射. □

## 5.5 對象分類器

**引理 5.6** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $a : A$ ,  $\text{pr}_1 : ((x : A) \times B(x)) \rightarrow A$  是投影函數. 則我們有一個雙可逆映射  $\text{fib}_{\text{pr}_1}(a) \simeq B(a)$ .

*Proof.* 略. □

## 5.6 函數外延性

### 定義 5.11 弱函數外延性原理 (WFE)

**弱函數外延性原理斷言：**對於任何  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ , 存在一個函數

$$[(x : A) \rightarrow \text{isContr}(P(x))] \rightarrow \text{isContr}[(x : A) \rightarrow P(x)].$$

**引理 5.7** 設有類型  $A, B, X : \mathcal{U}$  和一個雙可逆映射  $e \equiv \langle f_e, \alpha \rangle : A \simeq B$ . 那麼存在一個雙可逆映射  $f_e \circ_- : (X \rightarrow A) \simeq (X \rightarrow B)$ .

*Proof.* 根據泛等, 我們可以令  $e = \text{idtoeqv}(p)$  其中  $p : A = B$ . 根據  $p$  的道路歸納, 我們只需假設  $p \equiv \text{refl}_A$ , 那麼我們有  $e = \text{id}_A$ . 剩餘證明略. □

**推論 5.1** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(B(x))$ . 那麼我們有:

1. 投影  $\text{pr}_1 : ((x : A) \rightarrow B(x)) \rightarrow A$  是一個雙可逆映射;
2. 存在一個雙可逆映射  $\text{pr}_1 \circ_- : [A \rightarrow ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \rightarrow A)$ .

*Proof.* 1. 對於任何  $x : A$ , 我們有一個雙可逆映射  $\text{fib}_{\text{pr}_1}(x) \simeq B(x)$ . 因為  $B(x)$  是可縮的, 所以  $\text{fib}_{\text{pr}_1}(x)$  是可縮的, 所以  $\text{pr}_1$  是可縮的, 所以  $\text{pr}_1$  是一個雙可逆映射.

2. 略. □

**定理 5.8** 設  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $(x : A) \rightarrow \text{isContr}(B(x))$ ,  $\alpha \equiv \text{pr}_1 \circ_- : [A \rightarrow ((x : A) \times B(x))] \simeq (A \rightarrow A)$ . 那麼我們有:

1.  $(x : A) \rightarrow B(x)$  是  $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$  的一個收縮核;
2.  $(x : A) \rightarrow B(x)$  是可縮的 (**弱函數外延性原理**).

*Proof.* 1. 定義函數  $\varphi : [(x : A) \rightarrow B(x)] \rightarrow \text{fib}_\alpha(\text{id}_A) \equiv [(x : A) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(g : A \rightarrow ((x : A) \times B(x))) \times (\text{pr}_1 g = \text{id}_A)]$ ,  $\varphi(f) \equiv \langle x \mapsto \langle x, f(x) \rangle, \text{refl}_{\text{id}_A} \rangle$  和  $\psi : \text{fib}_\alpha(\text{id}_A) \rightarrow (x : A) \rightarrow B(x) \equiv [(g : A \rightarrow ((x : A) \times B(x))) \times (\text{pr}_1 g = \text{id}_A)] \rightarrow (x : A) \rightarrow B(x)$ ,  $\psi(\langle g, p \rangle) \equiv (x : A) \mapsto \text{transport}^B(\text{happly}(p, x), \text{pr}_2 g x)$ .

顯然,  $\psi \varphi \sim \text{id}_{(x : A) \rightarrow B(x)}$ .

2. 我們只需證明  $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$  是可縮的, 而這可以通過證明  $\alpha$  是可縮的來證明, 略. □

**引理 5.8** 設  $f : A \rightarrow B$ . 如果  $A, B$  是可縮的, 那麼  $f$  是一個雙可逆映射.

*Proof.* 設  $\alpha : \text{isContr}(A)$ ,  $\beta : \text{isContr}(B)$ ,  $a \equiv \text{pr}_1(\alpha)$ ,  $b \equiv \text{pr}_1(\beta)$ .

那麼有  $p : b = f(a)$ , 對於任何  $y : B$  有  $q_y \equiv (\text{pr}_2 \beta) y : b = y$

我們要證明對於任何  $y : B$ ,  $\text{fib}_f(y)$  是可縮的.

現在讓我們固定  $y : B$ . 定義  $p_y \equiv p^{-1} \cdot q_y : f(a) = y$ . 因此  $\langle a, p_y \rangle : \text{fib}_f(y)$ .

我們只需證明對於任何  $\langle a', p' \rangle : \text{fib}_f(y)$  有  $k : a = a'$  和  $\text{transport}^{\text{fib}_f(y)}(k, p_y) = p'$ .

我們有  $(\text{pr}_2 \alpha) a' : a = a'$ .

根據道路歸納, 我們只需要證明  $\text{transport}^{\text{fib}_f(y)}(\text{refl}_a, p_y) = p'$ , 即  $p_y = p'$ .

根據道路歸納, 只需證明  $p_{f(a)} = p'$ , 即  $\text{refl}_{f(a)} = \text{refl}_{f(a)}$ . □

### 定理 5.9 函數外延性原理

對於任何  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $f : (x : A) \rightarrow B(x)$ ,  $g : (x : A) \rightarrow B(x)$ , 我們有如下結論:

函數

$$\text{happly}(f, g) : (f = g) \rightarrow [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)]$$

是一個雙可逆映射.

*Proof.* 我們只需證明  $\text{happly}(f, \_) : (g : (x : A) \rightarrow B(x)) \rightarrow (f = g) \rightarrow (f \sim g)$  是一個逐纖維等價, 而這只需要證明  $\text{total}(\text{happly}(f, \_)) : [(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f = g)] \rightarrow (g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$  是一個雙可逆映射. 我們已經知道  $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f = g)$  是可縮的, 所以只需要證明  $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$  是可縮的.

我們有  $(g : (x : A) \rightarrow B(x)) \times (f \sim g)$  是  $(x : A) \rightarrow (u : B(x)) \times (f(x) = u)$  的一個收縮核, 所以只需證明  $(x : A) \rightarrow (u : B(x)) \times (f(x) = u)$  是可縮的.

根據 WFE, 我們只需證明對於任何  $x : A$  有  $(u : B(x)) \times (f(x) = u)$  是可縮的, 證畢. □

### 推論 5.2 funext

對於任何  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $f : (x : A) \rightarrow B(x)$ ,  $g : (x : A) \rightarrow B(x)$ , 函數  $\text{happly}(f, g) : (f = g) \rightarrow [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)]$  有一個擬逆:

$$\text{funext} : [(x : A) \rightarrow f(x) = g(x)] \rightarrow (f = g).$$

*Proof.* 略. □

引理 5.9 對於任何類型  $A$ , 我們有  $\text{isProp}(A)$  和  $\text{isSet}(A)$  是命題.

*Proof.* funext. □

引理 5.10  $\text{isProp}(A) \simeq (A \rightarrow \text{isContr}(A))$ .

*Proof.* 我們只需證明  $\text{isProp}(A)$  iff  $(A \rightarrow \text{isContr}(A))$ , 略. □

引理 5.11 如果  $f : A \rightarrow B$  有一個擬逆, 那麼  $\text{linv}(f)$  和  $\text{rinv}(f)$  是可縮的.

*Proof.* 根據函數外延性, 我們有  $\text{linv}(f) \simeq (g : B \rightarrow A) \times (g f = \text{id}_A)$ , 即  $\text{linv}(f) \simeq \text{fib}_{\circ f}(\text{id}_A)$ . 因為  $\text{fib}_{\circ f}(\text{id}_A)$  是可縮的, 所以  $\text{linv}(f)$  是可縮的. 類似地, 可以證明  $\text{rinv}(f)$  是可縮的. □

定理 5.10 對於任何  $f : A \rightarrow B$ ,  $\text{ishae}(f)$  是一個命題.

*Proof.* 我們只需假設  $f$  是一個半伴隨等價, 並證明  $\text{ishae}(f)$  是可縮的, 即證明  $(g : B \rightarrow A) \times (\varepsilon : f g \sim \text{id}_B) \times (\eta : g f \sim \text{id}_A) \times (f \eta \sim \varepsilon f)$  是可縮的, 即證明  $(u : (g : B \rightarrow A) \times (f g \sim \text{id}_B)) \times (\eta : (\text{pr}_1 u) f \sim \text{id}_A) \times (f \eta \sim (\text{pr}_2 u) f)$  是可縮的, 即證明  $(u : \text{rinv}(f)) \times \text{rcoh}(\langle \text{pr}_1(u), \text{pr}_2(u) \rangle)$  是可縮的. 剩餘證明略. □

**定理 5.11** 對於任何  $f : A \rightarrow B$ ,  $biinv(f)$  是一個命題.

*Proof.* 略. □

**引理 5.12** 設  $A$  是類型,  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$  且對於任何  $x : A$  有  $B(x)$  是一個命題. 則  $(x : A) \rightarrow B(x)$  是一個命題.

*Proof.* funext. □

**定理 5.12** 對於任何  $f : A \rightarrow B$ ,  $isContr(f)$  是一個命題.

*Proof.* 略. □

**定理 5.13** 對於任何  $f : A \rightarrow B$ , 我們有  $isContr(f) \simeq ishae(f) \simeq biinv(f)$ .

*Proof.* 略. □



## 6 範疇論

### 6.1 範疇和預範疇

#### 定義 6.1 預範疇

一個預範疇  $A$  系如下資料：

1. 一個類型  $A_0$ ，它的項稱為對象；
2. 一個函數  $hom_A : A_0 \rightarrow A_0 \rightarrow Set$ ，集合  $hom_A(a, b)$  的元素稱為態射；
3. 一個函數  $1 : (a : A_0) \rightarrow hom_A(a, a)$ ， $1_a$  稱為恆等態射；
4. 一個函數  $_ \circ _ : hom_A(b, c) \rightarrow hom_A(a, b) \rightarrow hom_A(a, c)$  稱為合成；
5. 對於任何  $a, b : A_0$  和  $f : hom_A(a, b)$ ，我們有  $f = 1_b \circ f$  且  $f = f \circ 1_a$ ；
6. 對於任何  $a, b, c, d : A$  和  $f : hom_A(a, b), g : hom_A(b, c), h : hom_A(c, d)$ ，我們有  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

#### 定義 6.2 同構

一個態射  $f : hom_A(a, b)$  是一個同構，如果存在一個態射  $g : hom_A(b, a)$  使得  $g \circ f = 1_a$  且  $f \circ g = 1_b$ .

$$isIso(f) := (g : hom_A(b, a)) \times (g \circ f = 1_a) \times (f \circ g = 1_b),$$

$$a \cong b := (f : hom_A(a, b)) \times isIso(f).$$

引理 6.1 對於任何態射  $f : hom_A(a, b)$ ， $isIso(f)$  是一個命題. 因此  $a \cong b$  是一個集合.

*Proof.* 只需證明  $g = g'$ ，略.

我們以後將同構  $f : a \cong b$  的逆記作  $f^{-1}$ . □

#### 引理 6.2 $idtoiso$

如果  $A$  是一個預範疇且  $a, b$  是它的對象，則有  $idtoiso_{a,b} : (a = b) \rightarrow (a \cong b)$ .

*Proof.* 略. □

引理 6.3 設  $A$  是類型， $B : A \rightarrow \mathcal{U}$  且對於任何  $x : A$  有  $B(x)$  是一個集合. 則  $(x : A) \rightarrow B(x)$  是一個集合.

*Proof.* funext. □

#### 例子 6.1 預範疇 $Set$

1. 對象類型為  $Set$ ；
2.  $hom_{Set}(a, b) := a \rightarrow b$ ；
3.  $1_a := id_a$ ；
4. 態射合成定義為函數的合成.

#### 定義 6.3 範疇

稱一個預範疇  $A$  是一個範疇，如果對於它的任何對象  $a, b$  有  $idtoiso_{a,b}$  是一個等價.

例子 6.2  $Set$  是一個範疇.

*Proof.* ua. □

引理 6.4 在一個範疇中，所有對象組成的類型是一個 1-類型.

*Proof.* 只需證明  $a = b$  是集合，略。

□