同倫類型論

JoJo
jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有**項**的集合 Λ 的遞歸定義如下

1. （變量）Λ 中有無窮個變量；
2. （抽象）如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$，則 $(u.M) \in \Lambda$；
3. （應用）如果 $M, N \in \Lambda$，則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

定義 1.2 子項

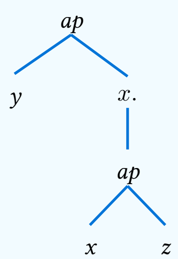
項 M 的所有**子項**的集合定義爲 $\mathit{Sub}(M)$，Sub 的遞歸定義如下

1. （基礎）對於任何變量 x，$\mathit{Sub}(x) := \{x\}$；
2. （抽象） $\mathit{Sub}(x.M) := \mathit{Sub}(M) \cup \{(x.M)\}$；
3. （應用） $\mathit{Sub}(MN) := \mathit{Sub}(M) \cup \mathit{Sub}(N) \cup \{(MN)\}$.

引理 1.1 1. （自反性）對於任何項 M，有 $M \in \mathit{Sub}(M)$；

2. （傳遞性）如果 $L \in \mathit{Sub}(M)$ 且 $M \in \mathit{Sub}(N)$，則 $L \in \mathit{Sub}(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出，如下圖中的例子



$(y(x.(xz)))$ 的樹表示

項的子項對應於項的樹表示的子樹.

約定 1.1 1. 最外層括號可以省略；

2. （抽象是右結合的） $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫；
3. （應用是左結合的） MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫；
4. （應用優先於抽象）$x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

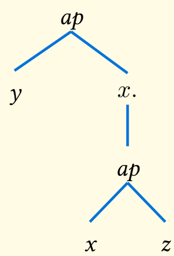
1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 **自由變量**

項 M 的所有**自由變量**的集合定義爲 $FV(M)$，FV 的遞歸定義如下

1. （變量） $FV(x) := \{x\}$；
2. （抽象） $FV(x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$；
3. （應用） $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}$.

定義 1.4 **閉項**

一個項 M 是**閉的** $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記爲 Λ^0.

1.3 α 等價

定義 1.5 **重命名**

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換爲 y，結果記爲 $\boldsymbol{M^{x \to y}}$.

定義 1.6 **α 等價**

定義 **α 等價** $=_\alpha$ 爲符合如下性質的關係

1. （重命名）如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x\to y}$；
2. （兼容性）如果 $M =_\alpha N$，則 $ML =_\alpha NL$，$LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$；
3. （自反性） $M =_\alpha M$；
4. （對稱性）如果 $M =_\alpha N$，則 $N =_\alpha M$；
5. （傳遞性）如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 **代入**

$(1a)$ $x[N/x] := N$；

$(1b)$ 如果 $x \neq y$，則 $y[N/x] := y$；

(2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$；

(3) 如果 $z.P^{y\to z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y\to z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 **同時代入**

$M[N_1, ..., N_n/x_1, ..., x_n]$ 表示把項 $N_1, ..., N_n$ **同時代入**到變量 $x_1, ..., x_n$.

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個**語境**是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_n : A_n$$

其中 $x_1, ..., x_n$ 是不同的變量，它們分別擁有類型 $A_1, ..., A_n$. 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\boldsymbol{\Gamma}$ ***ctx*** 是一個判斷，表示"Γ 是良構的語境."有如下規則

$$\frac{}{\cdot\ ctx}\ ctx\text{-}EMP$$

$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}\ ctx\text{-}EXT$$

其中，變量 x_n 與變量 $x_1, ..., x_n$ 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 *Vble* 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash x_i : A_i}\ Vble$$

定義 2.5 判斷相等

$$\text{如果 } a =_\alpha b\text{，則 } a \equiv b.$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 類型宇宙層級

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}CUMUL$$

2.5 依賴函數類型

定義 2.7 依賴函數類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \to B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \to B_1 \equiv (x : A_2) \to B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \Pi\text{-}COMP$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}UNIQ$$

2.6 依賴序偶類型

定義 2.8 依賴序偶類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : (x : A) \times B}\ \Sigma\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B}\ \Sigma\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p) : C[p/z]}\ \Sigma\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]}\ \Sigma\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, (a, b)) \equiv g[a, b/x, y] : C[p/z]}\ \Sigma\text{-}COMP$$

2.7 餘積類型

定義 2.9 餘積類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \text{ +-}\mathit{FORM}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A_1 + B_1 \equiv A_2 + B_2 : \mathcal{U}_i} \text{ +-}\mathit{FORM\text{-}EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathit{inl}(a) : A + B} \text{ +-}\mathit{INTRO}_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{inr}(b) : A + B} \text{ +-}\mathit{INTRO}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash \mathit{inl}(a_1) \equiv \mathit{inl}(a_2) : A + B} \text{ +-}\mathit{INTRO}_1\text{-}\mathit{EQ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash \mathit{inr}(b_1) \equiv \mathit{inr}(b_2) : A + B} \text{ +-}\mathit{INTRO}_2\text{-}\mathit{EQ}$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\mathit{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\mathit{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e : (A + B)}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) : C[e/z]} \text{ +-}\mathit{ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\mathit{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\mathit{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : (A + B)}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_1) \equiv \mathit{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e_2) : C[e_1/z] \equiv C[e_2/z]} \text{ +-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\mathit{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\mathit{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathit{inl}(a)) \equiv c[a/x] : C[\mathit{inl}(a)/z]} \text{ +-}\mathit{COMP}_1$$

$$\frac{\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash c : C[\mathit{inl}(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash d : C[\mathit{inr}(y)/z] \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathit{inr}(b)) \equiv d[b/y] : C[\mathit{inr}(b)/z]} \text{ +-}\mathit{COMP}_2$$

2.8 空類型 0

定義 2.10 空類型 0

$$\frac{\Gamma\ \mathit{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \ \mathbf{0}\text{-}\mathit{FORM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a) : C[a/x]} \ \mathbf{0}\text{-}\mathit{ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_1) \equiv \mathit{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \ \mathbf{0}\text{-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

2.9 單元類型 1

定義 2.11 單元類型 1

$$\frac{\Gamma\ \mathit{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \ \mathbf{1}\text{-}\mathit{FORM}$$

$$\frac{\Gamma\ \mathit{ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \ \mathbf{1}\text{-}\mathit{INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a) : C[a/x]} \ \mathbf{1}\text{-}\mathit{ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_1) \equiv \mathit{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]} \ \mathbf{1}\text{-}\mathit{ELIM\text{-}EQ}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash \mathit{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, \star) \equiv c : C[\star/x]} \ \mathbf{1}\text{-}\mathit{COMP}$$

2.10 自然數類型

定義 2.12 自然數類型

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{N}\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n_1) \equiv succ(n_2) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n) : C[n/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x]}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, 0) \equiv c_0 : C[0/x]}\ \mathbb{N}\text{-}COMP_1$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, succ(n)) \equiv c_s[n, ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n)/x, y] : C[succ(n)/x]}\ \mathbb{N}\text{-}COMP_2$$

2.11 恆等類型

定義 2.13 恆等類型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i}\ =\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i}\ =\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash refl_a : a =_A a}\ =\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash refl_{a_1} \equiv refl_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2}\ =\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q) : C[a, b, q/x, y, p]}\ =\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]}\ =\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, refl_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, refl_a/x, y, p]}\ =\text{-}COMP$$

恆等類型的項稱爲**道路**，恆等類型的消除規則稱爲**道路歸納**.

2.12 定義

例子 2.1 $\circ :\equiv (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \to C) \mapsto (f : A \to B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x))$.

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A:\mathcal{U}_i, x, y:A$，都能構造一個函數 $\_^{-1}:(x=_A y)\to(y=_A x)$ 使得 $(refl_x)^{-1}\equiv refl_x$.

p^{-1} 稱爲 p 的**逆**.

Proof. 第一種證明

設 $A:\mathcal{U}_i$，$D:(x,y:A)\to(x=_A y)\to\mathcal{U}_i, D(x,y,p):\equiv(y=_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d:\equiv x\mapsto \mathrm{refl}_x:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x,y:A, p:(x=_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):(y=_A x)$.

現在對於任何 $x,y:A$ 我們可以定義期望得到的函數 $\_^{-1}:\equiv p\mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\mathrm{refl}_x)^{-1}\equiv\mathrm{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x,y:A$ 和 $p:x=y$，我們想要構造一個項 $p^{-1}:y=x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下，refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x=x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x^{-1}:\equiv\mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A:\mathcal{U}_i, x,y,z:A$，都能構造一個函數 $\bullet:(x=_A y)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$ 使得 $refl_x\bullet refl_x:\equiv refl_x$.

$p\bullet q$ 稱爲 p 和 q 的**合成**.

Proof. 期望得到的函數擁有類型 $(x,y,z:A)\to(x=_A y)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$.

我們將改爲定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x,y:A)\to(x=_A y)\to(z:A)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D:(x,y:A)\to(x=_A y)\to\mathcal{U}_i, D(x,y,p):\equiv(z:A)\to(q:y=_A z)\to(x=_A z)$.

然後，爲了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型爲 $(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$ 的函數，也就是類型爲 $(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to(x=_A z)$.

現在設 $E:(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to\mathcal{U}_i, E(x,z,q):\equiv(x=_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e:\equiv x\mapsto\mathrm{refl}_x:(x:A)\to E(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d:(x,z:A)\to(q:x=_A z)\to E(x,z,q), x\mapsto z\mapsto q\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q)$.

因爲 $E(x,z,q)\equiv(x=_A z)$，所以 $d:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x,y:A,p:(x=_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)\equiv\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x,z:A)\mapsto(q:y=_A z)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q),x,y,p\big):(z:A)\to(q:y=_A z)\to(x=_A z)$.

於是我們有

$$(x,y:A)\mapsto(p:x=_A y)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x,z:A)\mapsto(q:y=_A z)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,z,q),x,y,p\big):$$

$$(x,y:A)\to(x=_A y)\to(z:A)\to(y=_A z)\to(x=_A z)$$

現在對於任何 $a,b,c:A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\bullet:\equiv(p:a=_A b)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x:A)\mapsto(q:b=_A c)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,c,q),a,b,p\big):$$

$$(a,b,c:A)\to(a=_A b)\to(b=_A c)\to(a=_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\mathrm{refl}_a\bullet\mathrm{refl}_a\equiv\mathrm{ind}_{=_A}\big(D,(x:A)\mapsto\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,x,a,\mathrm{refl}_a),a,a,\mathrm{refl}_a\big)\equiv\mathrm{ind}_{=_A}(E,e,a,a,\mathrm{refl}_a)\equiv e(a)\equiv\mathrm{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$，$p : x = y$ 和 $q : y = z$，我們想要構造一個項 $p \cdot q : x = z$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot q : x = z$. 根據 q 的道路歸納，只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x : A$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x :\equiv \mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. $\square$