同倫類型論

JoJo
jojoid@duck.com

目录

1 λ 演算

1.1 項

定義 1.1 項

所有**項**的集合 Λ 的遞歸定義如下

1.（變量）Λ 中有無窮個變量；

2.（抽象）如果 u 是一個變量且 $M \in \Lambda$，則 $(u.M) \in \Lambda$；

3.（應用）如果 $M, N \in \Lambda$，則 $(MN) \in \Lambda$.

更簡短的表述是

$$\Lambda := V \mid (V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$$

或

$$M := u \mid (u.M) \mid (MN)$$

其中 V 是變量集.

定義 1.2 子項

項 M 的所有**子項**的集合定義爲 $Sub(M)$，Sub 的遞歸定義如下

1.（基礎）對於任何變量 x，$Sub(x) := \{x\}$；

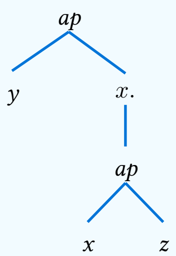
2.（抽象） $Sub(x.M) := Sub(M) \cup \{(x.M)\}$；

3.（應用） $Sub(MN) := Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$.

引理 1.1 1.（自反性）對於任何項 M，有 $M \in Sub(M)$；

2.（傳遞性）如果 $L \in Sub(M)$ 且 $M \in Sub(N)$，則 $L \in Sub(N)$.

引理 1.2 項可以以樹表示給出，如下圖中的例子



$(y(x.(xz)))$ 的樹表示

項的子項對應於項的樹表示的子樹.

慣例 1.1 1. 最外層括號可以省略；

2.（抽象是右結合的） $x.y.M$ 是 $x.(y.M)$ 的一個縮寫；

3.（應用是左結合的） MNL 是 $((MN)L)$ 的一個縮寫；

4.（應用優先於抽象）$x.MN$ 是 $x.(MN)$ 的一個縮寫.

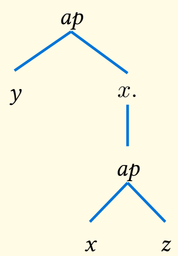
1.2 自由和綁定變量

定義 1.3 **自由變量**

項 M 的所有**自由變量**的集合定義爲 $FV(M)$，FV 的遞歸定義如下

1. （變量） $FV(x) := \{x\}$;
2. （抽象） $FV(x.M) := FV(M) \setminus \{x\}$;
3. （應用） $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$.

例子 1.1 $(y(x.(xz)))$ 的樹表示如下圖所示



$FV(y(x.(xz))) = \{y, z\}$.

定義 1.4 **閉項**

一個項 M 是**閉的** $:\Leftrightarrow FV(M) = \emptyset$.

所有閉項的集合記爲 Λ^0.

1.3 α 等價

定義 1.5 **重命名**

將項 M 中 x 的每個自由出現都替換爲 y，結果記爲 $\boldsymbol{M^{x\to y}}$.

定義 1.6 **α 等價**

定義 **α 等價** $=_\alpha$ 爲符合如下性質的關係

1. （重命名）如果 y 不在 M 中出現，則 $x.M =_\alpha y.M^{x\to y}$;
2. （兼容性）如果 $M =_\alpha N$，則 $ML =_\alpha NL$，$LM =_\alpha LN$ 且對於任何變量 z 有 $z.M =_\alpha z.N$;
3. （自反性） $M =_\alpha M$;
4. （對稱性）如果 $M =_\alpha N$，則 $N =_\alpha M$;
5. （傳遞性）如果 $L =_\alpha M$ 且 $M =_\alpha N$，則 $L =_\alpha N$.

1.4 代入

定義 1.7 **代入**

(1a) $x[N/x] := N$;

(1b) 如果 $x \neq y$，則 $y[N/x] := y$;

(2) $(PQ)[N/x] := (P[N/x])(Q[N/x])$;

(3) 如果 $z.P^{y\to z} =_\alpha y.P$ 且 $z \notin FV(N)$，則 $(y.P)[N/x] := z.(P^{y\to z}[N/x])$.

引理 1.3 設 $x \neq y$ 且 $x \notin FV(N)$，則 $L[M, N/x, y] = L[N, M[N/y]/x, y]$.

定義 1.8 同時代入

$M[N_1, ..., N_n/x_1, ..., x_n]$ 表示把項 $N_1, ..., N_n$ **同時代入**到變量 $x_1, ..., x_n$.

2 類型論

2.1 項

定義 2.1 項

比 λ 演算多了一些常量以及新的構造.

2.2 語境

定義 2.2 語境

一個**語境**是一個列表

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_n : A_n$$

其中 $x_1, ..., x_n$ 是不同的變量，它們分別擁有類型 $A_1, ..., A_n$. 我們用 Γ, Δ 等字母來縮寫語境.

定義 2.3 語境規則

$\boldsymbol{\Gamma}$ ***ctx*** 是一個判斷，表示“Γ 是良構的語境.”有如下規則

$$\frac{}{\cdot\ ctx}\ ctx\text{-}EMP$$

$$\frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, ..., x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}\ ctx\text{-}EXT$$

其中，變量 x_n 與變量 $x_1, ..., x_n$ 中的任何一個都不同.

2.3 結構規則

定義 2.4 *Vble* 規則

$$\frac{(x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)\ ctx}{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash x_i : A_i}\ Vble$$

定義 2.5 判斷相等

如果 $a =_\alpha b$，則 $a \equiv b$.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \quad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

2.4 類型宇宙

定義 2.6 **類型宇宙層級**

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$$

有如下規則

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-}CUMUL$$

2.5 依賴函數類型

定義 2.7 **依賴函數類型**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \to B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \to B_1 \equiv (x : A_2) \to B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-}FORM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b_1 \equiv b_2 : B}{\Gamma \vdash (x : A) \mapsto b_1 \equiv (x : A) \mapsto b_2 : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \equiv f_2 : (x : A) \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f_1(a) \equiv f_2(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash ((x : A) \mapsto b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \Pi\text{-}COMP$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (x : A) \to B}{\Gamma \vdash f \equiv (x \mapsto f(x)) : (x : A) \to B}\ \Pi\text{-}UNIQ$$

2.6 依賴序偶類型

定義 2.8 **依賴序偶類型**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A) \times B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \equiv A_2 : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A_1 \vdash B_1 \equiv B_2 : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (x : A_1) \times B_1 \equiv (x : A_2) \times B_2 : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子（引入規則）：$\langle \_, \_ \rangle : \{B : A \to \mathcal{U}\} \to (a : A) \to b : B(a) \to (x : A) \times B$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) : (x : A) \times B}\ \Sigma\text{-}INTRO\text{-}EQ$$

消除器（消除規則）：$ind_{(x:A)\times B} : [C : ((x : A) \times B(x)) \to \mathcal{U}] \to [(a : A) \to (b : B(a)) \to C(\langle a, b \rangle)] \to [p : (x : A) \times B(x)] \to C(p)$

$$\frac{\Gamma, z : (x : A) \times B \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash p_1 \equiv p_2 : (x : A) \times B}{\Gamma \vdash ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_1) \equiv ind_{(x:A)\times B}(z.C, x.y.g, p_2) : C[p_1/z] \equiv C[p_2/z]}\ \Sigma\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則：$ind_{(x:A)\times B}(C, g, \langle a, b \rangle) :\equiv g(a)(b)$

引理 2.1 投影函數

對於任何 Σ-類型 $(x:A)\times B(x)$，我們有函數

$$\boldsymbol{pr_1}:((x:A)\times B(x))\to A, \boldsymbol{pr_1}(\langle a,b\rangle):\equiv a$$

和

$$\boldsymbol{pr_2}:(p:(x:A)\times B(x))\to B(pr_1(p)), \boldsymbol{pr_2}(\langle a,b\rangle):\equiv b.$$

Proof. 略. ◻

2.7 餘積類型

定義 2.9 餘積類型

$$\frac{\Gamma\vdash A:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash B:\mathcal{U}_i}{\Gamma\vdash A+B:\mathcal{U}_i}\ +\text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma\vdash A_1\equiv A_2:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash B_1\equiv B_2:\mathcal{U}_i}{\Gamma\vdash A_1+B_1\equiv A_2+B_2:\mathcal{U}_i}\ +\text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子 1：$inl:\{A,B:\mathcal{U}\}\to A\to A+B$

構造子 2：$inl:\{A,B:\mathcal{U}\}\to B\to A+B$

$$\frac{\Gamma\vdash A:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash B:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash a_1\equiv a_2:A}{\Gamma\vdash inl(a_1)\equiv inl(a_2):A+B}\ +\text{-}INTRO_1\text{-}EQ$$

$$\frac{\Gamma\vdash A:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash B:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash b_1\equiv b_2:B}{\Gamma\vdash inr(b_1)\equiv inr(b_2):A+B}\ +\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

消除器：$ind_{A+B}:[C:(A+B)\to\mathcal{U}]\to[(a:A)\to C(inl(a))]\to[(b:B)\to C(inr(b))]\to(e:A+B)\to C(e)$

$$\frac{\Gamma,z:(A+B)\vdash C:\mathcal{U}_i \quad \Gamma,x:A\vdash c:C[inl(x)/z] \quad \Gamma,y:B\vdash d:C[inr(y)/z] \quad \Gamma\vdash e_1\equiv e_2:(A+B)}{\Gamma\vdash ind_{A+B}(z.C,x.c,y.d,e_1)\equiv ind_{A+B}(z.C,x.c,y.d,e_2):C[e_1/z]\equiv C[e_2/z]}\ +\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則 1：$ind_{A+B}(C,g_0,g_1,inl(a)):\equiv g_0(a)$

計算規則 2：$ind_{A+B}(C,g_0,g_1,inr(b)):\equiv g_1(b)$

2.8 空類型 0

定義 2.10 空類型 0

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma\vdash\mathbf{0}:\mathcal{U}_i}\ \mathbf{0}\text{-}FORM$$

消除器：$ind_{\mathbf{0}}:(C:\mathbf{0}\to\mathcal{U})\to(a:\mathbf{0})\to C(a)$

$$\frac{\Gamma,x:\mathbf{0}\vdash C:\mathcal{U}_i \quad \Gamma\vdash a_1\equiv a_2:\mathbf{0}}{\Gamma\vdash ind_{\mathbf{0}}(x.C,a_1)\equiv ind_{\mathbf{0}}(x.C,a_2):C[a_1/x]\equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{0}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

2.9 單元類型 1

定義 2.11 **單元類型 1**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{1}\text{-}FORM$$

構造子：$\star : \mathbf{1}$

消除器：$ind_{\mathbf{1}} : (C : \mathbf{1} \to \mathcal{U}) \to C(\star) \to (x : \mathbf{1}) \to C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_1) \equiv ind_{\mathbf{1}}(x.C, c, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{1}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則：$ind_{\mathbf{1}}(C, c, \star) :\equiv c$

2.10 boolean 類型

定義 2.12 ***boolean* 類型**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbf{2} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{2}\text{-}FORM$$

構造子 1：$0_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

構造子 2：$1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

消除器：$ind_{\mathbf{2}} : (C : \mathbf{2} \to \mathcal{U}) \to C(0_{\mathbf{2}}) \to C(1_{\mathbf{2}}) \to (x : \mathbf{2}) \to C(x)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0_{\mathbf{2}}/x] \quad \Gamma \vdash c_1 : C[1_{\mathbf{2}}/x] \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : \mathbf{2}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbf{2}}(x.C, c_0, c_1, a_1) \equiv ind_{\mathbf{2}}(x.C, c_0, c_1, a_2) : C[a_1/x] \equiv C[a_2/x]}\ \mathbf{2}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則 1：$ind_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0$

計算規則 2：$ind_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1$

2.11 自然數類型

定義 2.13 **自然數類型**

$$\frac{\Gamma\ ctx}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{N}\text{-}FORM$$

構造子 1：$0 : \mathbb{N}$

構造子 2：$succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash succ(n_1) \equiv succ(n_2) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-}INTRO_2\text{-}EQ$$

消除器：$ind_{\mathbb{N}} : (C : \mathbb{N} \to \mathcal{U}) \to C(0) \to [(n : N) \to C(n) \to C(succ(n))] \to (n : \mathbb{N}) \to C(n)$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash c_s : C[succ(x)/x] \quad \Gamma \vdash n_1 \equiv n_2 : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_1) \equiv ind_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n_2) : C[n_1/x] \equiv C[n_2/x]}\ \mathbb{N}\text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則 1：$ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) :\equiv c_0$

計算規則 2：$ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, succ(n)) :\equiv c_s(n, ind_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n))$

2.12 恆等類型

定義 2.14 **恆等類型**

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} = \text{-}FORM$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A \quad \Gamma \vdash b_1 \equiv b_2 : A}{\Gamma \vdash a_1 =_A b_1 \equiv a_2 =_A b_2 : \mathcal{U}_i} = \text{-}FORM\text{-}EQ$$

構造子：$refl : \{A : \mathcal{U}\} \to (a : A) \to (a = a)$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a_1 \equiv a_2 : A}{\Gamma \vdash refl_{a_1} \equiv refl_{a_2} : a_1 =_A a_1 \equiv a_2 =_A a_2} = \text{-}INTRO\text{-}EQ$$

消除器：$ind_{=_A} : [C : (x, y : A) \to (x = y) \to \mathcal{U}] \to [(x : A) \to C(x, x, refl_x)] \to (x, y : A) \to (p : x = y) \to C(x, y, p)$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash c : C[z, z, refl_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash q_1 \equiv q_2 : a =_A b}{\Gamma \vdash ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_1) \equiv ind_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, q_2) : C[a, b, q_1/x, y, p] \equiv C[a, b, q_2/x, y, p]} = \text{-}ELIM\text{-}EQ$$

計算規則：$ind_{=_A}(C, c, x, x, refl_x) :\equiv c(x)$

恆等類型的項稱爲**道路**；恆等類型的消除規則稱爲**道路歸納**.

2.13 定義

例子 2.1 $\circ :\equiv (A : \mathcal{U}_i) \mapsto (B : \mathcal{U}_i) \mapsto (C : \mathcal{U}_i) \mapsto (g : B \to C) \mapsto (f : A \to B) \mapsto (x : A) \mapsto g(f(x)).$

3 同倫類型論

3.1 類型是高維羣胚

引理 3.1 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y : A$，都能構造一個函數 $\_^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$ 使得 $(refl_x)^{-1} \equiv refl_x$.

p^{-1} 稱爲 p 的**逆**.

Proof. 第一種證明

設 $A : \mathcal{U}_i$，$D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}_i, D(x, y, p) :\equiv (y =_A x)$.

隨即我們就能構造一個函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_x : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

然後根據恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y =_A x)$.

現在對於任何 $x, y : A$ 我們可以定義期望得到的函數 $\_^{-1} :\equiv p \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$.

由恆等類型的計算規則，得 $(\mathrm{refl}_x)^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$. □

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們想要構造一個項 $p^{-1} : y = x$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造. 在該情況下，refl_x 和 refl_x^{-1} 的類型都是 $x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x^{-1} :\equiv \mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.2 對於任何 $A : \mathcal{U}_i, x, y, z : A$，都能構造一個函數 $\cdot : (x =_A y) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$ 使得 $refl_x \cdot refl_x :\equiv refl_x$.

$p \cdot q$ 稱爲 p 和 q 的**連接**.

Proof. 第一種證明

期望得到的函數擁有類型 $(x, y, z : A) \to (x =_A y) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$.

我們將改爲定義一個函數，擁有和預期等價的類型 $(x, y : A) \to (x =_A y) \to (z : A) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$，這允許我們使用兩次恆等類型的消除規則.

設 $D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}_i, D(x, y, p) :\equiv (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

然後，爲了對 D 應用恆等類型的消除規則，我們需要類型爲 $(x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 的函數，也就是類型爲 $(x, z : A) \to (q : x =_A z) \to (x =_A z)$.

現在設 $E : (x, z : A) \to (q : x =_A z) \to \mathcal{U}_i, E(x, z, q) :\equiv (x =_A z)$.

隨即我們能構造函數 $e :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_x : (x : A) \to E(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

對 E 應用恆等類型的消除規則，我們得到函數 $d : (x, z : A) \to (q : x =_A z) \to E(x, z, q), x \mapsto z \mapsto q \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q)$.

因爲 $E(x, z, q) \equiv (x =_A z)$，所以 $d : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$.

然後對 D 應用恆等類型的消除規則我們有，對於任何 $x, y : A, p : (x =_A y)$，可以構造項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) \equiv \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p\big) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

於是我們有

$$(x, y : A) \mapsto (p : x =_A y) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x, z : A) \mapsto (q : y =_A z) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, z, q), x, y, p\big) :$$

$$(x, y : A) \to (x =_A y) \to (z : A) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$$

現在對於任何 $a, b, c : A$ 我們可以定義期望得到的函數

$$\cdot :\equiv (p : a =_A b) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x : A) \mapsto (q : b =_A c) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, c, q), a, b, p\big) :$$

$$(a, b, c : A) \to (a =_A b) \to (b =_A c) \to (a =_A c).$$

由恆等映射的計算規則，得

$$\mathrm{refl}_a \cdot \mathrm{refl}_a \equiv \mathrm{ind}_{=_A}\big(D, (x : A) \mapsto \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, x, a, \mathrm{refl}_a), a, a, \mathrm{refl}_a\big) \equiv \mathrm{ind}_{=_A}(E, e, a, a, \mathrm{refl}_a) \equiv e(a) \equiv \mathrm{refl}_a.$$

□

Proof. 第二種證明

對於每個 $x, y, z : A$，$p : x = y$ 和 $q : y = z$，我們想要構造一個項 $p \cdot q : x = z$. 根據 p 的道路歸納，我們只需要給出 y 是 x 且 p 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x, z : A$ 和 $q : x = z$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot q : x = z$. 根據 q 的道路歸納，只需給出 z 是 x 且 q 是 refl_x 時的構造，即對於每個 $x : A$，構造一個項 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x : x = x$. 因此我們可以簡單地定義 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x :\equiv \mathrm{refl}_x$. 於是根據道路歸納，我們完成了構造. □

引理 3.3 設 $A : \mathcal{U}_i$，$x, y, z, w : A$，$p : x = y$，$q : y = z$ 且 $r : z = w$. 我們有以下結論：

1. $p = p \cdot \mathit{refl}_y$ 且 $p = \mathit{refl}_x \cdot p$;
2. $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_x$ 且 $p^{-1} \cdot p = \mathit{refl}_y$;
3. $(p^{-1})^{-1} = p$;
4. $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

Proof. 所有證明都使用道路歸納.

1. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p = p \cdot \mathrm{refl}_y)$. 那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x, x, \mathrm{refl}_1) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_1)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : p = p \cdot \mathrm{refl}_y$.

本書後面將把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x, y, p) \mapsto (p = p \cdot \mathrm{refl}_y), x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}, x, y, p\big)$ 記爲 $\mathbf{ru}_{\boldsymbol{p}}$，把 $\mathrm{ind}_{=_A}\big((x, y, p) \mapsto (p = \mathrm{refl}_y \cdot p), x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}, x, y, p\big)$ 記爲 $\mathbf{lu}_{\boldsymbol{p}}$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p \cdot \mathrm{refl}_y \equiv \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$. 因此只需證明 $\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$，這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : \mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$.

2. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p \cdot p^{-1} = \mathrm{refl}_x)$. 那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x)$ 是 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x^{-1} = \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$ 且 $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \equiv \mathrm{refl}_x$，我們有 $D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此可以構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : p \cdot p^{-1} = \mathrm{refl}_x$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$p \cdot p^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$.

3. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (p^{-1})^{-1} = p$. 那麼 $D(x, x, p)$ 是 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} = \mathrm{refl}_x$. 因爲 $\mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$，所以 $(\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$，那麼 $D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (\mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x)$. 因此我們能構造函數 $d :\equiv x \mapsto \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x} : (x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於每個 $x, y : A$ 和 $p : x = y$，我們有項 $\mathrm{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$.

第二種證明：根據 p 的道路歸納，只需要假設 y 是 x 且 p 是 refl_x. 在該情況下，$(p^{-1})^{-1} \equiv (\mathrm{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \mathrm{refl}_x$.

4. 我們想要構造的函數的類型是 $(x, y, z, w : A) \to (p : x = y) \to (q : y = z) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$，我們改爲證明 $(x, y : A) \to (p : x = y) \to (z : A) \to (q : y = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$.

設 $D_1 : (x, y : A) \to (p : x = y) \to \mathcal{U}, D_1(x, y, p) :\equiv (z : A) \to (q : y = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r)$. 根據 p 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D_1(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x, z : A) \to (q : x = z) \to (w : A) \to (r : z = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot q) \cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_2 : (x, z : A) \to (q : x = z) \to \mathcal{U}, D_2(x, z, q) :\equiv (w : A) \to (r : z = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot q) \cdot r)$. 根據 q 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x, w : A) \to (r : x = w) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot r)$ 的函數.

爲了構造這個類型的函數，我們設 $D_3 : (x, w : A) \to (r : x = w) \to \mathcal{U}, D_3(x, w, r) :\equiv (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot r) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot r)$. 根據 r 的道路歸納，只需要構造類型爲 $(x : A) \to D_3(x, x, \mathrm{refl}_x) \equiv (x : A) \to (\mathrm{refl}_x \cdot (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) = (\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x) \cdot \mathrm{refl}_x) \equiv (x : A) \to \mathrm{refl}_x = \mathrm{refl}_x$ 的函數. 這是簡單的，即 $\mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}$.

因此，應用 3 此道路歸納，我們就得到了想要的類型的函數. □

引理 3.4 **加鬚**

1. 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b$，我們可以構造函數 $\_ \cdot_{\boldsymbol{r}} \_ : (p = q) \to (r : b = c) \to (p \cdot r = q \cdot r), \alpha \cdot_r \mathit{refl}_b :\equiv \mathit{ru}_p^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathit{ru}_q$;
2. 對於任何 $a, b, c : A, q, r : b = c$，我們可以構造函數 $\_ \cdot_{\boldsymbol{l}} \_ : (p : a = b) \to (q = r) \to (p \cdot q = p \cdot r), \mathit{refl}_b \cdot_l \beta :\equiv \mathit{lu}_q^{-1} \cdot \beta \cdot \mathit{lu}_r$.

Proof. 略. □

引理 3.5 對於任何 $a, b, c : A, p, q : a = b, r, s : b = c, \alpha : p = q, \beta : r = s$，我們有 $(\alpha \cdot_r r) \cdot (q \cdot_l \beta) = (p \cdot_l \beta) \cdot (\alpha \cdot_r s)$.

Proof. 略. □

定理 3.1 ***Eckmann–Hilton***

$$(\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)) \to (\alpha \centerdot \beta = \beta \centerdot \alpha)$$

Proof. 略. □

定義 3.1 **有點類型**

設 $A : \mathcal{U}, a : A$. 序偶 $(A, a) : (A : \mathcal{U}) \times A$ 稱爲一個**有點類型**，a 稱爲它的**基點**. 類型 $(A : \mathcal{U}) \times A$ 記爲 $\mathcal{U}_\bullet$.

定義 3.2 **迴路空間**

對於 $n : \mathbb{N}$，一個有點類型 (A, a) 的 $\boldsymbol{n}$ **重迭代迴路空間** $\Omega^n(A, a)$ 遞歸地定義爲

$$\Omega^0(A, a) :\equiv (A, a),$$

$$\Omega^1(A, a) :\equiv ((a =_A a), refl_a),$$

$$\Omega^{n+1}(A, a) :\equiv \Omega^n(\Omega(A, a)),$$

它的一個項稱爲點 a 的一個 $\boldsymbol{n}$ **維迴路**.

慣例 3.1 設 $\Omega^n(A, a) \equiv (B, b)$. 則 $x : \Omega^n(A, a)$ 表示 $x : B$.

3.2 函數是函子

引理 3.6 對於任何 $A, B : \mathcal{U}, f : A \to B, x, y : A$，都能構造函數 $\boldsymbol{ap_f} : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y)), ap_f(refl_x) \equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D : (x, y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}, D(x, y, p) :\equiv (f(x) =_B f(y))$. 那麼我們有 $d :\equiv (x : A) \mapsto \mathrm{refl}_{f(x)} : (x : A) \to (f(x) =_B f(y))$. 根據 p 的道路歸納，我們得到函數 $\mathrm{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$. 根據恆等類型的計算規則，對於任何 $x : A$，有 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) \equiv \mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：爲了對任何 $p : x = y$ 定義 $\mathrm{ap}_f(p)$，根據 p 的道路歸納，只需要構造 p 是 refl_x 的情況. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$.

□

慣例 3.2 我們將經常將 $ap_f(p)$ 簡寫爲 $f(p)$.

引理 3.7 對於任何函數 $f : A \to B, g : B \to C$ 和道路 $p : x =_A y, q : y =_A z$，我們有：

1. $ap_f(p \centerdot q) = ap_f(p) \centerdot ap_f(q)$；
2. $ap_f(p^{-1}) = \left(ap_f(p)\right)^{-1}$；
3. $ap_g\left(ap_f(p)\right) = ap_{g \circ f}(p)$；
4. $ap_{id_A}(p) = p$.

Proof. 1. 根據的道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x \centerdot \mathrm{refl}_x) = \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) \centerdot \mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)$，這太簡單，遂略.

2. 根據道路歸納，只需要證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x^{-1}) = \left(\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)\right)^{-1}$，略.

3. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_g\left(\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)\right) = \mathrm{ap}_{g \circ f}(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{ap}_g\left(\mathrm{refl}_{f(x)}\right) = \mathrm{refl}_{g \circ f}$，略.

4. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_{\mathrm{id}_A}(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_x$，略. □

3.3 類型族是纖維化

引理 3.8 **傳送**

設 $B : A \to \mathcal{U}, x, y : A$，則存在函數 $\boldsymbol{transport}^B(\_, \_) : p : x =_A y \to B(x) \to B(y), \boldsymbol{transport}^B(refl_x, b) \equiv b$.

Proof. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(p:x=y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv B(x)\to B(y)$. 那麼我們有函數 $d:\equiv(x:A)\mapsto \mathrm{id}_{B(x)}:D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x,y:A,p:x=y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):B(x)\to B(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p:x=y$，函數 $\mathrm{transport}^B(p,\ \_):\equiv \mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$. 根據計算規則，$\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,\ \_)\equiv \mathrm{id}_{B(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，對於任何 $b:B(x)$，我們定義 $\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,b):\equiv b$. □

引理 3.9 道路提升

設 $P:A\to\mathcal{U},x,y:A$. 則對於任何 $u:P(x),p:x=y$，我們有 $lift(u,p):(x,u)=_{(x:A)\times P(x)}(y,transport^P(p,u)),lift(u,refl_x)\equiv refl_{(x,u)}$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(x,u)=\big(x,\mathrm{id}_{P(x)}(u)\big)$，略. □

引理 3.10 依賴映射

設 $B:A\to\mathcal{U},f:(x:A)\to B(x),x,y:A$. 我們有映射 $apd_f:(p:x=_A y)\to\big(transport^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)\big),apd_f(refl_x):\equiv refl_{f(x)}$.

Proof. 第一種證明：設 $D:(x,y:A)\to(x=y)\to\mathcal{U},D(x,y,p):\equiv\mathrm{transport}^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)$. 於是我們有函數 $d:\equiv(x:A)\mapsto\mathrm{refl}_{f(x)}:(x:A)\to D(x,x,\mathrm{refl}_x)$. 根據道路歸納，對於任何 $x,y:A,p:x=y$，我們有函數 $\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p):\mathrm{transport}^B(p,f(x))=_{B(y)}f(y)$. 於是我們可以定義，對於任何 $p:x=y$，函數 $\mathrm{apd}_f(p):\equiv\mathrm{ind}_{=_A}(D,d,x,y,p)$. 根據計算規則，$\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x):\equiv\mathrm{refl}_{f(x)}$.

第二種證明：根據道路歸納，只需假設 p 是 refl_x. 在該情況下，我們定義 $\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x):\equiv\mathrm{refl}_{f(x)}:\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,f(x))=_{B(x)}f(x)$. □

引理 3.11 設 $B:A\to\mathcal{U},B(x):\equiv B,x,y:A$. 則能構造函數 $transportconst^B(\_,\_):(p:x=y)\to b:B\to b=transport^B(p,b)$.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $(b:B)\to b=\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x,b)$，即 $(b:B)\to b=b$. 顯然只需定義 $\mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x,b):\equiv\mathrm{refl}_b$. □

引理 3.12 設 $f:A\to B,x,y:A$. 則對於任何路徑 $p:x=y$，我們有類型爲 $ap_f(p)=transportconst^B(p,f(x))\bullet apd_f(p)$ 的路徑.

Proof. 根據道路歸納，只需證明 $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x)=\mathrm{transportconst}^B(\mathrm{refl}_x,f(x))\bullet\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x)$，即 $\mathrm{refl}_{f(x)}=\mathrm{refl}_{f(x)}\bullet\mathrm{refl}_{f(x)}$，這是顯然的. □

引理 3.13 $(P:A\to\mathcal{U})\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(q:y=z)\to(u:P(x))\to transport^P(q,transport^P(p,u))=transport^P(p\bullet q,u)$.

Proof. 略. □

引理 3.14 $(f:A\to B)\to(P:B\to\mathcal{U})\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(u:P(f(x)))\to transport^{P\circ f}(p,u)=transport^P\big(ap_f(p),u\big)$.

Proof. 略. □

引理 3.15

$(P,Q:A\to\mathcal{U})\to(f:(x:A)\to P(x)\to Q(x))\to(x,y:A)\to(p:x=y)\to(u:P(x))\to transport^Q(p,f_x(u))=_{Q(y)}f_y(transport^P(p,u))$.

Proof. 略. □

3.4 同倫和等價

定義 3.3 同倫

設 $P:A\to\mathcal{U},f,g:(x:A)\to P(x)$. 從 f 到 g 的一個**同倫**定義爲一個類型爲 $(f\sim g):\equiv(x:A)\to f(x)=g(x)$ 的函數.

引理 3.16 設 $f:A\to B$. 則 $(x:A)\mapsto refl_{f(x)}:f\sim f$.

Proof. 略. □

引理 3.17 設 $P : A \to \mathcal{U}$. 我們有：

1. $(f : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim f)$；
2. $(f, g : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim f)$；
3. $(f, g, h : (x : A) \to P(x)) \to (f \sim g) \to (g \sim h) \to (f \sim h)$.

Proof. 略. □

引理 3.18 設 $f, g : A \to B, H : f \sim g$. 則對於任何 $x, y : A, p : x = y$ 我們有 $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$，即下圖交換

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, "f(p)"] \arrow[d, "H(x)"'] & f(y) \arrow[d, "H(y)"] \\
g(x) \arrow[r, "g(p)"'] & g(y)
\end{tikzcd}$$

Proof. 略. □

推論 3.1 設 $f : A \to A, H : f \sim id_A$. 則對於任何 $x : A$ 我們有 $H(f(x)) = f(H(x))$.

Proof. 根據 H 的自然性，我們有 $f(H\,x) \cdot H\,x = H(f\,x) \cdot H\,x$，即下圖交換

$$\begin{tikzcd}
f\,f\,x \arrow[r, "f(H\,x)"] \arrow[d, "H(f\,x)"'] & f\,x \arrow[d, "H\,x"] \\
f\,x \arrow[r, "H\,x"'] & x
\end{tikzcd}$$

我們可以用 $(H\,x)^{-1}$ 加鬚來消除 $H\,x$，得到 $f(H\,x) = f(H\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x) \cdot H\,x \cdot (H\,x)^{-1} = H(f\,x)$. □

定義 3.4 擬逆

對於一個函數 $f : A \to B$，它的一個**擬逆**是一個三元組 $(g, \alpha, \beta) : \boldsymbol{qinv}(f) :\equiv (g : B \to A) \times [(g \circ f \sim id_A) \times (f \circ g \sim id_B)]$.

定義 3.5 等價

對於任何函數 $f : A \to B$，定義 $\boldsymbol{isequiv}(f) :\equiv [(g : B \to A) \times (g \circ f \sim id_A)] \times [(h : B \to A) \times (f \circ h \sim id_B)]$，$(A \simeq B) :\equiv (f : A \to B) \times isequiv(f)$.

引理 3.19 1. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $qinv(f) \to isequiv(f)$；

2. 對於任何 $f : A \to B$，存在函數 $isequiv(f) \to qinv(f)$.

Proof. 1. 略.

2. 給定四元組 $(g, \alpha, h, \beta) : \mathrm{isequiv}(f)$，我們有 $\alpha : (x : A) \to (g \circ f)(x) = x, \beta : (y : B) \to (f \circ h)(y) = y$，那麼我們有同倫 $g \circ \beta^{-1} : (y : B) \to g(y) = (g \circ f \circ h)(y) \equiv g \sim (g \circ f \circ h)$ 和 $\alpha \circ h : (y : B) \to (g \circ f \circ h)(y) = h(y) \equiv (g \circ f \circ h) \sim h$. 於是我們可以定義同倫 $\gamma :\equiv (g \circ \beta^{-1}) \cdot (\alpha \circ h) : g \sim h \equiv (y : B) \to g(y) = h(y)$. 那麼 $f \circ \gamma : (y : B) \to (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) \equiv (f \circ g) \sim (f \circ h)$. 於是有 $(f \circ \gamma) \cdot \beta : (f \circ g) \sim \mathrm{id}_B$. 所以有 $(g, \alpha, (f \circ \gamma) \cdot \beta) : \mathrm{qinv}(f)$. □

引理 3.20 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$，我們有 $isequiv(id_A)$，即 $A \simeq A$;

2. 對於任何函數 $f : A \to B$ 使得 $isequiv(f)$，即 $A \simeq B$，我們有一個函數 $f^{-1} : B \to A$ 使得 $isequiv(f^{-1})$，即 $B \simeq A$;

3. 對於任何函數 $f : A \to B$ 使得 $isequiv(f)$（即 $A \simeq B$）和 $g : B \to C$ 使得 $isequiv(g)$（即 $B \simeq C$），我們有 $isequiv(g \circ f)$（即 $A \simeq C$）.

Proof. 1. 我們要證明對於任何類型 $A : \mathcal{U}$ 有 $[(g : B \to A) \times (g \circ \mathrm{id}_A \sim \mathrm{id}_A)] \times [(h : B \to A) \times (\mathrm{id}_A \circ h \sim \mathrm{id}_B)]$，略.

2. f 的擬逆.

3. $f^{-1} \circ g^{-1}$ 是 $g \circ f$ 的一個擬逆. □

3.5 Σ-類型

定理 3.2 設 $P : A \to \mathcal{U}$，$w, w' : (x : A) \times P(x)$.

則我們有一個等價 $(w = w') \simeq (p : pr_1(w) = pr_1(w')) \times (transport^P(p, pr_2(w)) = pr_2(w'))$.

Proof. 我們定義一個函數 $f : (w, w' : (x : A) \times P(x)) \to (w = w') \to (p : \mathrm{pr}_1(w) = \mathrm{pr}_1(w')) \times (\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(w)) = \mathrm{pr}_2(w'))$，根據道路歸納，只需給出定義 $f(w, w, \mathrm{refl}_w) :\equiv \langle \mathrm{refl}_{\mathrm{pr}_1(w)}, \mathrm{refl}_{\mathrm{pr}_2(w)} \rangle$. 我們想要證明 f 是一個等價.

首先我們需要構造一個函數 $g : (w, w' : (x : A) \times P(x)) \to [(p : \mathrm{pr}_1(w) = \mathrm{pr}_1(w')) \times (\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(w)) = \mathrm{pr}_2(w'))] \to (w = w')$. 根據 w 和 w' 的歸納，我們設 $\langle w_1, w_2 \rangle :\equiv w$，$\langle w_1', w_2' \rangle :\equiv w'$，因此我們只需構造 $[(p : w_1 = w_1') \times (\mathrm{transport}^P(p, w_2) = w_2')] \to (\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1', w_2' \rangle)$. 接下來，給定一個序偶 $(p : w_1 = w_1') \times (\mathrm{transport}^P(p, w_2) = w_2')$，我們可以利用 Σ-類型的歸納原理來得到 $p : w_1 = w_1'$ 和 $q : \mathrm{transport}^P(p, w_2) = w_2'$. 根據 p 的道路歸納，我們有 $q : \mathrm{transport}^P\left(\mathrm{refl}_{w_1}, w_2\right) = w_2' \equiv w_2 = w_2'$，這足以證明 $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1', w_2' \rangle$. 因此，我們完成了 g 的構造.

接下來，我們要證明 g 是 f 的一個擬逆，略 □

3.6 單元類型

定理 3.3

$$(x, y : \mathbf{1}) \to ((x = y) \simeq \mathbf{1}).$$

Proof. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$. 設函數 $f : (\star = \star) \to \mathbf{1}, x \mapsto \star$ 和 $g : \mathbf{1} \to (\star = \star), x \mapsto \mathrm{refl}_\star$. 那麼我們只需證明對於任何 $x : \star = \star$ 有 $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\star = \star}(x)$ 和對於任何 $x : \mathbf{1}$ 有 $(f \circ g)(x) = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}(x)$. 根據單元類型和恆等類型的歸納原理，我們只需要證明 $(g \circ f)(\mathrm{refl}_\star) = \mathrm{id}_{\star = \star}(\mathrm{refl}_\star)$ 和 $(f \circ g)(\star) = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}(\star)$，略. □

定理 3.4

$$(x, y : \mathbf{1}) \to (x = y).$$

Proof. 略. □

3.7 宇宙和泛等公理

引理 3.21 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$，我們有一個函數 $\boldsymbol{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$.

Proof. 函數 $\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\_, \_) : (A =_{\mathcal{U}} B) \to A \to B$. 我們要證明 $(p : A =_{\mathcal{U}} B) \to \mathrm{isequiv}\left(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_)\right)$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\mathrm{isequiv}\left(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{refl}_A, \_)\right)$，即證明 $\mathrm{isequiv}(\mathrm{id}_A)$，略.

定義 $\mathbf{idtoeqv}_{A,B}(p) :\equiv \left(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_), a\right) : A \simeq B$，其中 $a : \mathrm{isequiv}\left(\mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p, \_)\right)$. □

引理 3.22 $(id_A, a) = idtoeqv_{A,B}(refl_A)$，其中 $a : isequiv(id_A)$.

Proof. 略. □

引理 3.23 對於任何 $x, y : A, p : x = y, B : A \to \mathcal{U}, u : B(x)$，我們有 $transport^B(p, u) = transport^{id_{\mathcal{U}}}(ap_B(p), u) = pr_1(idtoeqv(ap_B(p)))(u)$.

Proof. 根據歸納原理，只需證明 $\mathrm{transport}^B(\mathrm{refl}_x, u) = \mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{ap}_B(\mathrm{refl}_x), u) = \mathrm{pr}_1(\mathrm{idtoeqv}(\mathrm{ap}_B(\mathrm{refl}_x)))(u)$，略. □

定義 3.6 泛等公理（不常用）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \boldsymbol{univalence}(A, B) : isequiv(idtoeqv_{A,B})}\ \mathcal{U}_i\text{-}UNIV$$

引理 3.24 $(idtoeqv_{A,B}, univalence(A, B)) : (A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$.

Proof. 略. □

定義 3.7 泛等公理（常用）

1. 對於任何類型 $A, B : \mathcal{U}$，我們有一個函數 $\boldsymbol{ua} : (A \simeq B) \to (A =_{\mathcal{U}} B)$；
2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$，我們有 $idtoeqv_{A,B}(\boldsymbol{ua}(f, a)) = (f, a)$；
3. 對於任何 $p : A =_{\mathcal{U}} B$，我們有 $p = \boldsymbol{ua}(idtoeqv_{A,B}(p))$.

引理 3.25 1. 對於任何類型 $A : \mathcal{U}$，我們有 $refl_A = ua(id_A, a)$，其中 $a : isequiv(id_A)$；

2. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B, (g, b) : B \simeq C$，我們有 $ua(f, a) \cdot ua(g, b) = ua(g \circ f, c)$.

3. 對於任何 $(f, a) : A \simeq B$ 和它的一個擬逆 (f^{-1}, b)，我們有 $(ua(f, a))^{-1} = ua(f^{-1}, b)$.

Proof. 略. □

3.8 恆等類型

定理 3.5 如果 $(f, a) : A \simeq B$，則對於任何 $x, x' : A$，函數 $ap_f : (x = x') \to (f(x) = f(x'))$ 也是一個等價.

Proof. 我們想要構造一個四元組 $(g, \gamma, h, \delta) : \mathrm{isequiv}(\mathrm{ap}_f)$，即 $g : (f(x) = f(x')) \to (x = x'), \gamma : (p : x = x') \to (g(\mathrm{ap}_f(p)) = p), h : (f(x) = f(x')) \to (x = x'), \delta : (q : f(x) = f(x')) \to (\mathrm{ap}_f(g(q)))$.

設 $(f^{-1}, \alpha, \beta) : \mathrm{qinv}(f)$，即 $f^{-1} : B \to A, \alpha : (x : A) \to (f^{-1}(f(x)) = x), \beta : (y : B) \to (f(f^{-1}(y)) = y)$.

那麼對於任何 $x, x' : A$，我們有 $\mathrm{ap}_{f^{-1}} : (f(x) = f(x')) \to (f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')))$.

於是對於任何 $p : x = x'$，我們有

$\alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(\mathrm{ap}_f(p)) \cdot \alpha_{x'}$

$= \alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1} \circ f}(p) \cdot \alpha_{x'}$

$= \mathrm{ap}_{\mathrm{id}_A}(p)$

$= p.$

且對於任何 $q : f(x) = f(x')$，我們有

$\mathrm{ap}_f(\alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \alpha_{x'})$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \cdot \beta_{f(x)} \cdot \mathrm{ap}_f(\alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \alpha_{x'}) \cdot \beta_{f(x')}^{-1} \cdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \cdot \mathrm{ap}_f\left(\mathrm{ap}_f^{-1}\left(\mathrm{ap}_f(\alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \alpha_{x'})\right)\right) \cdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \cdot \mathrm{ap}_f(\alpha_x \cdot \alpha_x^{-1} \cdot \mathrm{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \alpha_{x'} \cdot \alpha_{x'}^{-1}) \cdot \beta_{f(x')}$

$= \beta_{f(x)}^{-1} \cdot \mathrm{ap}_f(\mathrm{ap}_{f^{-1}}(q)) \cdot \beta_{f(x')}$

$= q.$ □

引理 3.26 對於任何 $a, x_1, x_2 : A$ 和 $p : x_1 = x_2$，我們有

1. $(q : a = x_1) \to transport^{x \mapsto (a = x)}(p, q) = q \cdot p$;
2. $(q : x_1 = a) \to transport^{x \mapsto (x = a)}(p, q) = p^{-1} \cdot q$;
3. $(q : x_1 = x_2) \to transport^{x \mapsto (x = x)}(p, q) = p^{-1} \cdot q \cdot p$.

Proof. 略. □

3.9 自然數

定義 3.8 *code*

定義函數

$$\boldsymbol{code} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U},$$

模式匹配

$$\boldsymbol{code}(0, 0) :\equiv \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{code}(succ(m), 0) :\equiv \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{code}(0, succ(n)) :\equiv \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{code}(succ(m), succ(n)) :\equiv \boldsymbol{code}(m, n).$$

定義 3.9 $\boldsymbol{r}$

定義函數

$$\boldsymbol{r} : (n : \mathbb{N}) \to code(n, n)$$

模式匹配

$$\boldsymbol{r}(0) :\equiv \star$$

$$\boldsymbol{r}(succ(n)) :\equiv \boldsymbol{r}(n).$$

定理 3.6 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 我們有 $(m = n) \simeq code(m, n)$.

Proof. 定義函數

$$\mathbf{encode} : (m, n : \mathbb{N}) \to (m = n) \to \mathrm{code}(m, n),$$

$$\mathbf{encode}(m, n, p) :\equiv \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(m, \_)}(p, r(m)),$$

和函數

$$\mathbf{decode} : (m, n : \mathbb{N}) \to \mathrm{code}(m, n) \to (m = n),$$

模式匹配

$$\mathbf{decode}(0, 0, \star) :\equiv \mathrm{refl}_0$$

$$\mathbf{decode}(\mathrm{succ}(m), 0, \_) :\equiv \mathrm{ind}_{\mathbf{0}}((x : \mathbf{0}) \mapsto (m = n), \_)$$

$$\mathbf{decode}(0, \mathrm{succ}(n), \_) :\equiv \mathrm{ind}_{\mathbf{0}}((x : \mathbf{0}) \mapsto (m = n), \_)$$

$$\mathbf{decode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), \_) :\equiv \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}} \circ \mathbf{decode}(m, n, \_).$$

接下來我們要證明對於任何 $m, n : \mathbb{N}$ 有 $\mathrm{encode}(m, n, \_)$ 和 $\mathrm{decode}(m, n, \_)$ 互爲擬逆.

我們先證明對於任何 $p : m = n$ 有 $\mathrm{decode}(m, n, \mathrm{encode}(m, n, p)) = p$. 根據 p 的道路歸納，只需證明 $\mathrm{decode}(m, m, \mathrm{encode}(m, m, \mathrm{refl}_m)) = \mathrm{refl}_m$，即 $\mathrm{decode}(m, m, r(m)) = \mathrm{refl}_m$. 對 m 使用歸納法，如果 $m \equiv 0$，那麼 $\mathrm{decode}(0, 0, r(0)) = \mathrm{decode}(0, 0, \star) = \mathrm{refl}_0$；設 $x : \mathbb{N}, y : \mathrm{decode}(x, x, r(x)) = \mathrm{refl}_x$，則 $\mathrm{decode}(\mathrm{succ}(x), \mathrm{succ}(x), r(\mathrm{succ}(x))) = \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(x, x, r(x))) = \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_{\mathrm{succ}(x)}$.

然後我們證明對於任何 $c : \mathrm{code}(m, n)$ 有 $\mathrm{encode}(m, n, \mathrm{decode}(m, n, c)) = c$. 我們對 m, n 進行雙歸納. 如果都是 0，那麼 $\mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{decode}(0, 0, c)) = \mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{decode}(0, 0, \star)) = \mathrm{encode}(0, 0, \mathrm{refl}_0) = r(0) = \star = c$；如果 m 是 0 且 n 是一個後繼，或反之，那麼有 $c : \mathbf{0}$；最後是兩個後繼的情況，根據歸納假設我們有

$$\mathrm{encode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), \mathrm{decode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), c))$$

$$= \mathrm{encode}(\mathrm{succ}(m), \mathrm{succ}(n), \mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(m, n, c)))$$

$$= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(\mathrm{succ}(m), \_)}(\mathrm{ap}_{\mathrm{succ}}(\mathrm{decode}(m, n, c)), r(\mathrm{succ}(m)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(\mathrm{succ}(m),\,\mathrm{succ}(\_))}(\mathrm{decode}(m,n,c), r(\mathrm{succ}(m))) \\
&= \mathrm{transport}^{\mathrm{code}(m,\_)}(\mathrm{decode}(m,n,c), r(m)) \\
&= \mathrm{encode}(m,n,\mathrm{decode}(m,n,c)) \\
&= c
\end{aligned}
$$

□

推論 3.2 1. 對於任何 $m : \mathbb{N}$，我們有 $encode(succ(m), 0, \_) : (succ(m) = 0) \to \mathbf{0}$；

2. 對於任何 $m, n : \mathbb{N}$，我們有 $encode(succ(m), succ(n), decode(succ(m), succ(n), \_)) : (succ(m) = succ(n)) \to (m = n)$.

Proof. 略. □

4 集合和邏輯

4.1 集合和 n-類型

定義 4.1 **集合（0-類型）**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isSet}(A) :\equiv (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q).$$

定義 4.2 **1-類型**

一個類型 A 是一個 **1-類型** 如果 $(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

引理 4.1 如果 A 是一個集合，則 A 是一個 1-類型.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)] \to (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (\alpha, \beta : p = q) \to (\alpha = \beta)$.

設 $f : \mathrm{isSet}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 和 $p, q : x = y$ 我們有 $p = q$. 給定 x, y 和 p，定義 $g : (q : x = y) \to (p = q), g :\equiv f(x, y, p, \_)$. 那麼對於任何 $q, q' : x = y$ 和 $\alpha : q = q'$，我們有 $\mathrm{apd}_g(\alpha) : \mathrm{transport}^{q \mapsto (p=q)}(\alpha, g(q)) = g(q')$，也就有 $g(q) \cdot \alpha = g(q')$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y, \alpha, \beta : p = q$，我們有 $g(p) \cdot \alpha = g(q)$ 且 $g(p) \cdot \beta = g(q)$，也就有 $g(p) \cdot \alpha = g(p) \cdot \beta$，也就有 $\alpha = \beta$. □

4.2 命題

定義 4.3 **命題（-1-類型）**

設 $A : \mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{isProp}(A) :\equiv (x, y : A) \to (x = y).$$

引理 4.2 如果 P, Q 是命題使得 $P \to Q$ 且 $Q \to P$，則 $P \simeq Q$.

Proof. 略. □

引理 4.3 如果 P 是一個命題且 $x_0 : P$，則 $P \simeq \mathbf{1}$.

Proof. 略. □

定義 4.4 **可縮的**

$$\boldsymbol{isContr}(A) :\equiv (a : A) \times ((x : A) \to (a = x)).$$

引理 4.4 每個命題都是一個集合.

Proof. 我們想證明 $[(x, y : A) \to (x = y)] \to (x, y : A) \to (p, q : x = y) \to (p = q)$.

設 $f : \mathrm{isProp}(A)$. 那麼對於任何 $x, y : A$ 我們有 $f(x, y) : x = y$. 給定 x，定義 $g : (y : A) \to x = y, g :\equiv f(x, \_)$. 那麼對於任何 $y, z : A$ 和 $p : y = z$，我們有 $\mathrm{apd}_g(p) : \mathrm{transport}^{y \mapsto x=y}(p, g(y)) = g(z)$，也就有 $g(y) \cdot p = g(z)$，也就有 $p = (g(y))^{-1} \cdot g(z)$.

因此對於任何 $x, y : A, p, q : x = y$，我們有 $p = (g(x))^{-1} \cdot g(y) = q$. □

4.3 子集

引理 4.5 設 $P : A \to \mathcal{U}$ 且對於任何 $x : A$，$P(x)$ 是一個命題. 則對於任何 $u, v : (x : A) \times P(x)$，若 $pr_1(u) = pr_1(v)$，則有 $u = v$.

Proof. 設 $p : \mathrm{pr}_1(u) = \mathrm{pr}_1(v)$. 則爲了證明 $u = v$，我們只需證明 $\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(u)) = \mathrm{pr}_2(v)$. 因爲 $\mathrm{transport}^P(p, \mathrm{pr}_2(u)), \mathrm{pr}_2(v) : P(\mathrm{pr}_1(v))$ 且該類型是一個命題，所以證畢. □

定義 4.5 **子集**

設 $P : A \to \mathcal{U}$ 是一個命題族（即每個 $P(x)$ 是一個命題）.

$$\{x : A \mid P(x)\} :\equiv (x : A) \times P(x).$$

定義 4.6 $\boldsymbol{Set}_{\mathcal{U}}$

定義 $\mathcal{U}$ 的一個“子宇宙”:

$$\boldsymbol{Set}_{\mathcal{U}} :\equiv \{A : \mathcal{U} \mid isSet(A)\}.$$

5 歸納