やる夫で学ぶデジタル信号処理のノート

jojonki

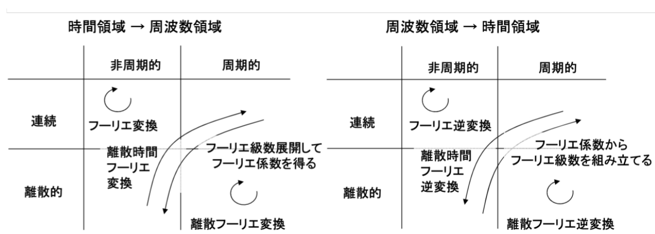
July. 2020

Contents

1 Cheat Sheet

$$
\begin{aligned}
&\text{フーリエ係数の計算とフーリエ級数展開}\\
F_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-j\Omega_0 kt}dt\\
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega_0 t}\\
&\text{フーリエ変換とフーリエ逆変換}\\
F(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt\\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega\\
&\text{離散時間フーリエ変換と離散時間フーリエ逆変換} \qquad (1)\\
F(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n}\\
f[n] =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{j\omega n}d\omega\\
&\text{離散フーリエ変換と離散逆フーリエ変換}\\
F[k] &= \sum_{k=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}\\
f[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}
\end{aligned}
$$

時間領域			周波数領域	
離散性	周期性		離散性	周期性
連続	周期的	フーリエ級数展開 $\longleftrightarrow$	離散的	非周期的
連続	非周期的	フーリエ変換 $\longleftrightarrow$	連続	非周期的
離散的	非周期的	離散時間フーリエ変換 $\longleftrightarrow$	連続	周期的
離散的	周期的	離散フーリエ変換 $\longleftrightarrow$	離散的	周期的



2　三角関数型のフーリエ級数展開

周期 T_0 の周期信号の 1 周期分の信号は下記のように定義できる．各周波数が異なる cos と sin の和によって，信号を表現できる．k=1 のときの角周波数を $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f$ と表せる．k=1 は 1 周期分，k=2 は 2 周期分，k=n は n 周期分の sin, cos 信号だと解釈できる．例えば基本周期 $T_0 = 0.01sec$ とすると，基本周波数は 100Hz となる．なので，100Hz, 200Hz, 300Hz,... の成分に分解されていると定義できる．

また a_k や b_k をフーリエ係数と呼ぶ．

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right\} \tag{2}$$

2.1　フーリエ係数の求め方

1 周期分で積分するとくくり出せる．例えば f(t) を-T0/2 ～T0/2 で積分すると，cos, sin の 1 周期分の積分は 0 なので第 2,3 項はきれいに消える．

$$\begin{gathered} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_0 dt = a_0 T_0 \\ \text{よって} \\ a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \end{gathered} \tag{3}$$

次に $k > 0$ ではどうなるか，これも異なる周波数成分の積の 1 周期分の積分は 0 になることから，取り出したいフーリエ級数に対応する sin or cos をかけて，1 周期積分すれば良い．例えば a_3 を求める．同一周期の cos 同士（あるいは sin 同士）の 1 周期積分は $T_0/2$ になることも利用して，

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(\Omega_0 3t)\,dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_3 \cos(\Omega_0 3t)\cos(\Omega_0 3t)\,dt = a_3 \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(\Omega_0 3t)^2\,dt = a_3 \frac{T_0}{2} \tag{4}$$

よってフーリエ係数の求め方は，まとめると下記のようになる，

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \\ a_k &= \frac{T_0}{2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(\Omega_0 kt)\,dt, (k = 1, 2, 3...) \\ b_k &= \frac{T_0}{2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(\Omega_0 kt)\,dt, (k = 1, 2, 3...) \end{aligned} \tag{5}$$

3　複素指数関数型のフーリエ級数展開

フーリエ級数展開を複素指数関数で表す．オイラーの公式を用いて，cos と sin を置き換える．

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \frac{e^{j\Omega_0 kt} + e^{-j\Omega_0 kt}}{2} + b_k \frac{e^{j\Omega_0 kt} - e^{-j\Omega_0 kt}}{2j} \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\Omega_0 kt} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j\Omega_0 kt} \right\} \\ &\text{k の値は－無限から＋無限の場合を考えていると解釈できるのでまとめる．} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega_0 t} \end{aligned} \tag{6}$$

3.1 複素指数関数型のときのフーリエ係数の求め方

複素指数関数型のフーリエ級数のときも内積を利用する．実数表示のときと同じように，周波数が異なる複素指数関数をかけると積分は 0 になる（P25 参照）．そのため取り出したいフーリエ係数 F_k に対応する，複素指数関数の複素共役との内積を積分すれば良い．F_3 を取り出したいときを考える，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-j\Omega_0 3t}dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_3 e^{jk\Omega_0 t}\right\}e^{-j\Omega_0 3t}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_3 e^{j\Omega_0 3t}e^{-j\Omega_0 3t}dt = F_3 T_0\end{aligned} \tag{7}$$

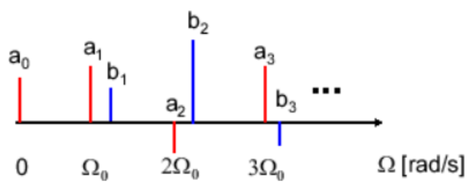
よって，下記のようになる．（複素共役での積分なので e の符号がマイナスであることに注意）

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-j\Omega_0 kt}dt \tag{8}$$

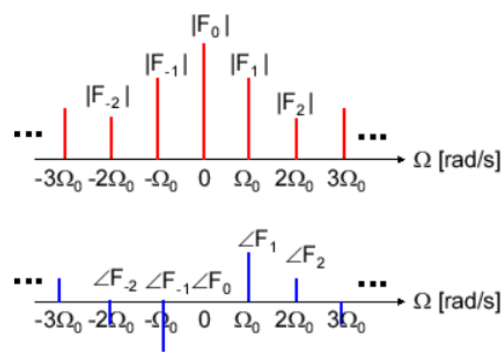
3.2 フーリエ級数のイメージ

まとめると下記のようになる．三角関数型の場合，角周波数に対して，cos と sin の両方を考える必要がある．一方で，複素指数関数型の場合，フーリエ係数 F_k が各周波数成分の振幅と位相を示している．また $|F_k|$ を振幅スペクトル，$\angle F_k$ を位相スペクトル，$|F_k|^2$ をパワースペクトル，と呼ぶ．$f(t)$ が実数である場合，複素指数関数型の振幅スペクトルは偶対象で，位相スペクトルは奇対象となっており，計算が楽．

三角関数型のフーリエ級数



複素指数関数型のフーリエ級数（絶対値と偏角）

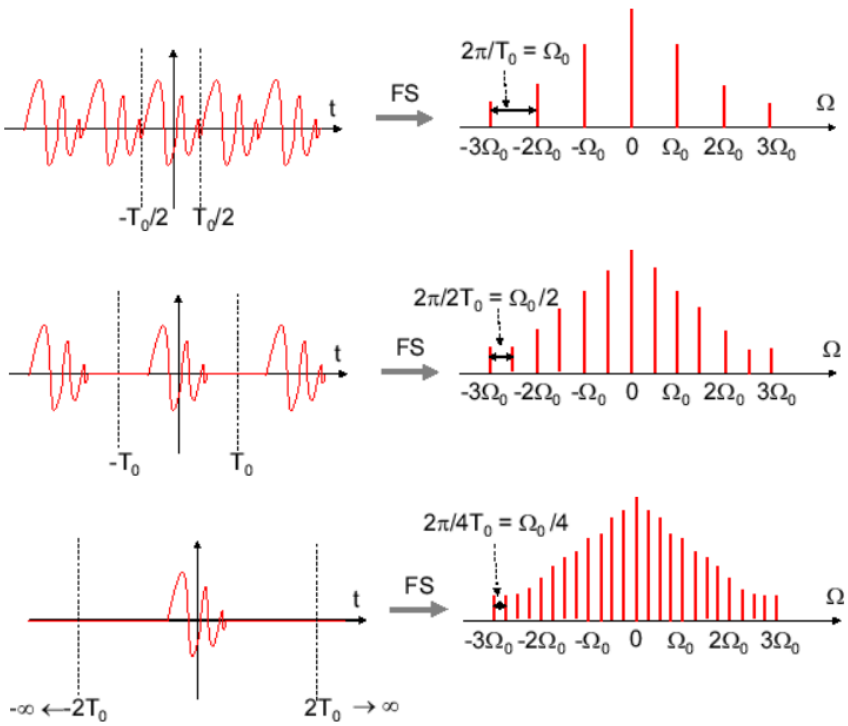


4　フーリエ変換（Fourier Transform）

4.1　周期をどんどん長くする

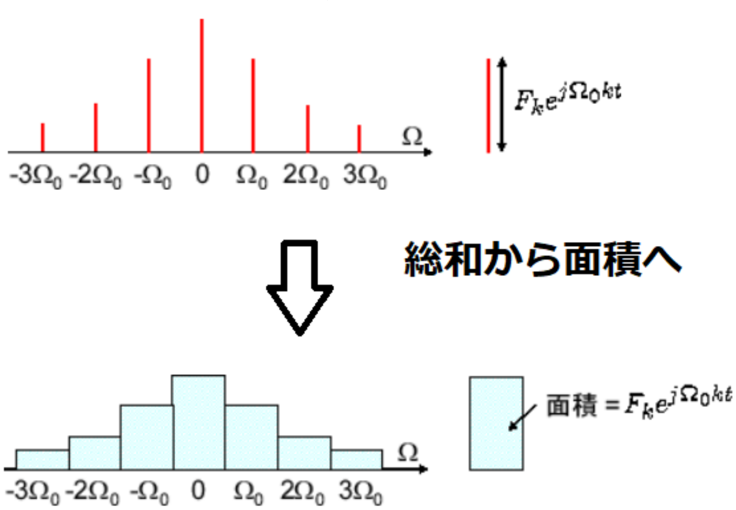
先程までの話では，$-T_0/2 - T_0/2$ で考えていた．周波数成分は，$\Omega_0 = 2\pi/T_0$ であり，Ω_0 の整数倍の成分を足し合わせたものであった．ここで，もとの波形を変えずに，周期だけを長くする．例えば 2 倍にすると周期は $2T_0$ となる．このとき基本各周波数は，$\frac{2\pi}{2T_0} = \Omega_0/2$ となる．この整数倍の和で表されるのだから，先ほどとくらべて周波数成分が倍の密度になっている．

この周期を無限方向に広げていく．そうすると $-\infty$ から ∞ の連続時間上で定義された時間関数は，周波数領域で見ると，$-\infty$ から ∞ の連続周波数上で定義されたスペクトルになる．



4.2　フーリエ変換とフーリエ逆変換

積分系にするために線でなく，面積として考える．



そのためにフーリエ級数の式に対して，面積を求める形式に変えて周期を無限長にすることで，フーリエ逆変換の式を導き出すことができる．（フーリエ変換でなくフーリエ逆変換であることに注意）

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \frac{F_k e^{jk\Omega_0 t}}{\Omega_0} \\
&\Omega_0 k = \Omega[k] \text{ と表す，あと都合上 } 1/2\pi \text{ をくくりだして，} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \frac{2\pi F_k e^{j\Omega[k]t}}{\Omega_0} \\
&F(\Omega[k]) = \frac{2\pi F_k}{\Omega_0} \text{ と置くと，} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 F(\Omega[k]) e^{j\Omega[k]t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega[k]) e^{j\Omega[k]t} \Delta\Omega \\
&T_0 \to \infty \text{ とすると，} \Delta\Omega \text{ は } d\Omega \text{ になり，} \Omega[k] \text{ は実数 } \Omega \text{ に連続化されて} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega
\end{aligned} \tag{9}
$$

フーリエ変換も求めよう．フーリエ係数を求める式から展開することで求められる．

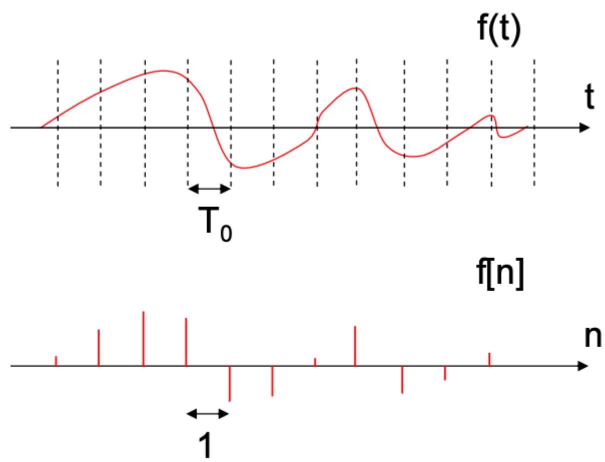
$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-j\Omega_0 k t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-j\Omega[k]t} dt \\
&F(\Omega[k]) = 2_k/\Omega_0 \text{ であるから，} \\
F(\Omega[k]) &= \frac{2\pi}{\Omega_0} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-j\Omega[k]t} dt \\
&= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-j\Omega[k]t} dt \\
&T_0 \to \infty \text{ とすると，フーリエ変換の式となる．} \\
F(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt
\end{aligned} \tag{10}
$$

4.3 ここまでのまとめ

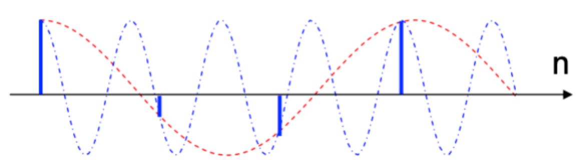
フーリエ級数のときは，周期的な時間信号を，無限個の複素指数関数の足し合わせで表現できた．しかし，周期的とは限らない一般の時間信号 $f(t)$ を表現しようと思うとあらゆる実数を考えなくてはならない．数式で表現すると複素指数関数の「総和」でなく，「積分」で表現した．フーリエ級数展開もフーリエ変換も，信号を複数の周波数に分解している点は変わらない．ただしフーリエ級数展開の場合は，離散的な周波数を取ったのに対して，フーリエ変換時は連続的な成分として取った．

5　離散時間信号について

まず離散時間信号は，連続時間信号から，サンプリング周期 T_0 単位で取ってきた値 $f[n]$ と表現される．また時間軸からサンプリングの個数単位 n 軸へと変化している．つまり時間を正規化していると言える．このとき周波数や角周波数も正規化する必要がある，つまり 1 サンプルで何回振動するか（Hz），1 サンプルで何 rad 位相が進むか，ということになる．このときの正規化した角周波数を正規化角周波数 ω と小文字のオメガで定義する．サンプリング周期を T_s とすると，$\omega = \Omega T_s$ となる．



ちなみに $x[n] = \cos\omega_1 n$ の離散時間信号を考えてみる．ω_1 を増やしていって，2π 増やすと，再び $cos(\omega_1 + 2\pi)n = cos\omega_1 n = x[n]$ に戻る不思議な現象がある．これは 1 サンプルごとに 1 周多く回っていると考えられ，下記のようにサンプリング周期が大きいため，もとの信号を復元できていないことがわかる．



5.1　離散時間フーリエ変換（Discrete-Time Fourier Transform）

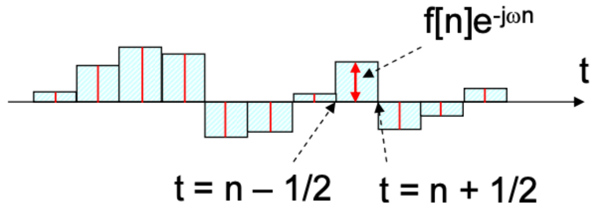
では，離散時間信号 $f[n]$ のフーリエ変換を 2 つの考え方で導く．

復習として，連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換は下記だった．

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt \tag{11}$$

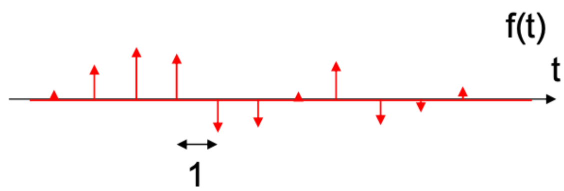
まず 1 つ目の考え方．離散時間信号を線ではなく，面積として考えることで，積分を可能にする．そのために，幅 1，高さ $f[n]e^{-j\omega n}$ の短冊をイメージ．そうすると積分は面積の和として表現できるので，簡単に表現できる．

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} \tag{12}$$



２つ目の考え方は，デルタ関数を使って，積分値を計算できるようにする．

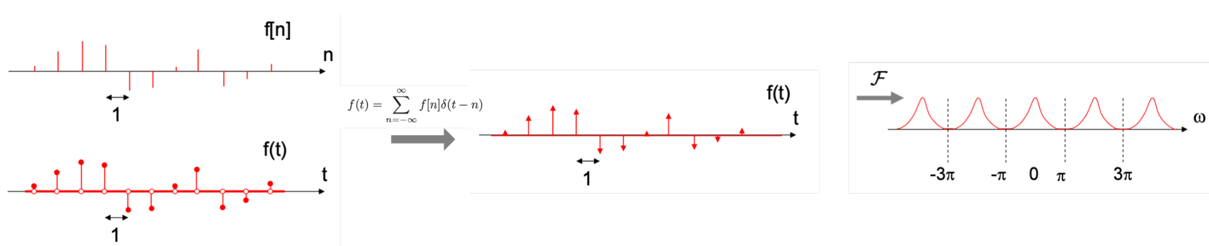
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(t-n) \tag{13}$$



これをフーリエ変換の式に入れれば良い．先ほどと同じ結果になる．

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(t-n) \right) e^{-j\omega t}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n)e^{-j\omega t}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n}
\end{aligned} \tag{14}$$

ちなみにこのとき，時間軸上において，1 ごとに値を持つ離散関数．その周波数領域での周期は，$\Omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi/1 = 2\pi$ となる．よって同じスペクトルの形状が角周波数 2π ごとに繰り返し現れる．（自信なし）複素指数関数のときと同じ．



5.2 離散時間フーリエ逆変換

$F(\omega)$ を $f[n]$ に戻す処理を行う．まず連続時間信号のフーリエ逆変換は下記だった．

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \tag{15}$$

ただ今は周期的な周波数スペクトルを逆フーリエ変換するので，積分範囲は 1 周期で十分（P49，65 参照）．先程の $F(\omega)$ の式を代入すれば，$f[n]$ になることは確かめられる．

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{j\omega n}d\omega \tag{16}$$

6　離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform）

実はまだ離散時間信号の周波数スペクトルはコンピュータ上で求まらない．というのも離散時間フーリエ逆変換の式に積分があり，周波数は連続のままなので積分が計算できない．そこで周波数も離散化する．

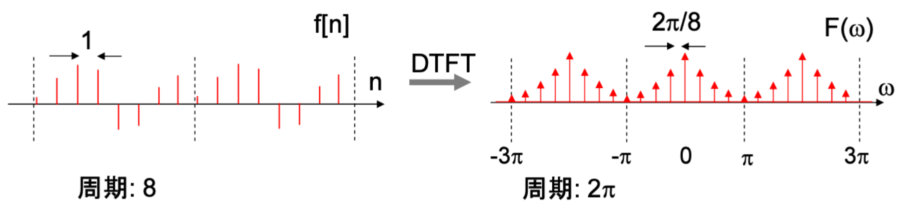
これから導出するのは，N 点のりさん時間信号から N 点の離散周波数スペクトルの変換とその逆変換．離散時間・離散周波数フーリエ変換，通称，離散フーリエ変換（DFT: Discrete Fourier Transform）だ．

6.1　離散フーリエ逆変換

まず積分ができないので逆変換側から導出する．おさらいとして，離散時間フーリエ変換とその逆変換を載せておく．

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n} \\
f[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{j\omega n} d\omega
\end{aligned} \tag{17}
$$

ここで $F(\omega)$ がどのような値になるか考えると下記（$N=8$ とした）．$F(\omega)$ から $f[n]$ への変換は，$2\pi/N$ 間隔で並んだ N 本のインパルスの面積を足し合わせると $f[n]$ が得られる．



まず，下記を導入する．$F(\omega)$ はインパルスを $2\pi/N$ おきに並べたものだった．でインパルスの面積を c_k と考えると，下記のようになる．c_k は $k=0,1,..,N-1$ の周期的な値だ．

$$
F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{18}
$$

これをフーリエ逆変換の積分の式に代入すると，離散フーリエ逆変換（DFT）が求まる．

$$
\begin{aligned}
f[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) e^{j\omega n} d\omega \\
&\quad c_k \text{ は周期性を持ち，サンプリング間隔だと 1 周期は } k=0,..,N-1 \text{ にあたるので，} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \\
&\quad c_k = F[k] \frac{2\pi}{N} \text{ とすると，} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}
\end{aligned} \tag{19}
$$

6.2　離散フーリエ変換

次に離散フーリエ変換を導出する．これも離散時間フーリエ変換からスタート．

$$
F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n} \tag{20}
$$

$f[n]$ が周的である場合，$F(\omega)$ は $\omega = 2\pi k/N$ に無限大のインパルスが立っている．$f[n]$ の 1 周期分の総和をさらに無限に足し合わせて無限大になってしまう．なので総和を 1 周気分だけでやめて無限大を回避する．

これが離散フーリエ変換．

$$F[k] = \sum_{k=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \tag{21}$$

ちなみに計算量は，e の箇所は計算済みとした場合，$F[k]$ の計算は N 回，さらにこれを $F[0], .., F[N-1]$ の N 回行うので $O(N^2)$ になる．ちなみに FFT を使うと $O\log(N)$ まで削減できる．