$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Let $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

$T(v) = T(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3)$

$= v_1 T(e_1) + v_2 T(e_2) + v_3 T(e_3)$

Co-ordinate vector

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ be an ordered basis of V.

Let $v \in V$

$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$

$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \rightarrow$ Coordinate vec

---

Ex $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$[T]_B^{B'}$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \right]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$c_3 = -1$

$c_2 + c_3 = 3$

$c_2 + -1 = 3$

$c_2 = 4$

$c_1 + c_2 + c_3 = 2$

$c_1 + 4 - 1 = 2$

$c_1 = -1$

$\left(T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right)_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

R'

$$-1 \qquad 2\,]$$

(b) Verify $v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\underline{[T(v)]_{B'}} = \underline{[T]_B^{B'}}\,\underline{[v]_B}$

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} \longrightarrow \text{Please verify.}$$

Ex — $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$[T]_B^{B'}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Find $[T]_{B'}^{B}$, $\quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) \longrightarrow p''(x)$

$B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$B' = \{1, x, x^2\}$

$$[T]_{B}^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$T(x) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$T(x^2) = 2 = 2\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$T(x^3) = 6x = 0\cdot 1 + 6\cdot x + 0$