Actividad 1

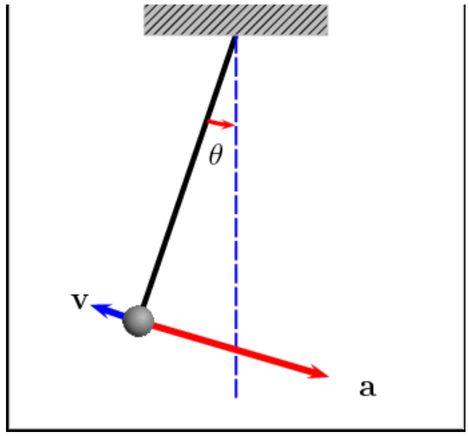
Valenzuela Chaparro Hugo de Jesús

30 de enero de 2016

1. Péndulo simple

El péndulo simple es una idealización del péndulo físico, en un sistema aislado, en el cual se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- La cuerda en el que el péndulo oscila no posee masa, y siempre está tensada.
- EL cuerpo que oscila se considera una partícula puntual.
- El movimiento es solo en dos dimensiones, y el péndulo traza un arco en su recorrido.
- Se considera libre de fricción o de otras fuerzas disipativas.
- El campo gravitacional no cambia conforme el péndulo aumenta la altura.
- El soporte del péndulo no se mueve.



El movimiento del péndulo se puede representar por medio de la siguiente ecuación diferencial:
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ ...... (Eq. 1)
donde g es la aceleración debida a la fuerza gravitacional, ℓ la longitud del péndulo y θ el desplazamiento angular respecto a la vertical.

2. Aproximando la solución para ángulos pequeños

Pero (Eq. 1) requiere métodos númericos para aproximar su solución, pero se puede resolver anaíticamente si tomamos sólo valores para $\theta << 1$ pues de esa manera se tiene que $\sin\theta \approx \theta$.

De esta forma obtenemos la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple:
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
y dando las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, la solución se convierte en:
$\theta(t) = \theta_0 \cos(wt)$, $\theta << 1$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

El movimiento es armónico simple, donde θ_0 es la semi-amplitud, es decir, el ángulo entre la cuerda del péndulo y la vertical. El periodo de la oscilación, lo que tarda en completar una ida y venida es:
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ...... (Eq. 2) , $\theta << 1$
usando la aproximación de los ángulos pequeños, el periodo es independiente de la amplitud θ_0, y de la masa, esta es la propiedad de isocronismo que

Galileo notó.

2.1. Aproximación empírica para la longitud de péndulo

Si despejamos ℓ de (Eq. 2) para el periodo, se obtiene:
$\ell = \frac{g}{\pi^2}\frac{T_0^2}{4}$
si se usa el sistema mks y si la medición se está haciendo en la superficie terrestre, por lo que $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$ y $\frac{g}{\pi^2} \approx 1$

Entonces obtenemos estas aproximaciones rasonables para el periodo y la longitud:
$\ell \approx \frac{T_0^2}{4}$
$T_0 \approx 2\sqrt{\ell}$

3. Periodo de amplitud arbitraria

Para amplitudes más grandes que las usadas en la aproximación para ángulos pequeños, podemos calcular el periodo exacto invirtiendo la siguiente ecuación para la velocidad angular:
$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\cos\theta - \cos\theta_0}$
obteniendo entonces:
$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$
e integrando 4 veces sobre el cuarto de un ciclo lleva a:
$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$

Esta integral diverge conforme θ_0 se acerca a la vertical
$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty$
así que un péndulo con la energía necesaria para ir verticalmente nunca llegará. La integral se puede escribir en terminos de integrales elípticas conmo:
$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K(\sin^2\frac{\theta_0}{2})$........(Eq. 3)
donde K es la integral elíptica incompleta de primer tipo definida por:
$K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}du$
Para comparar la aproximación con la solución lineal, consideramos el periodo de un péndulo de longitud 1 m en la Tierra ($g = 9.80665\frac{m}{s^2}$) con un ángulo inicial de 10°. La diferencia entre ambos valores es menor del 0.2 %.

que es mucho menor que la que podría causar de g debido a la localización geográfica.

Hay distintas maneras de procedera calcular la integral elíptica:

3.1. Solución polinomial de Legendre

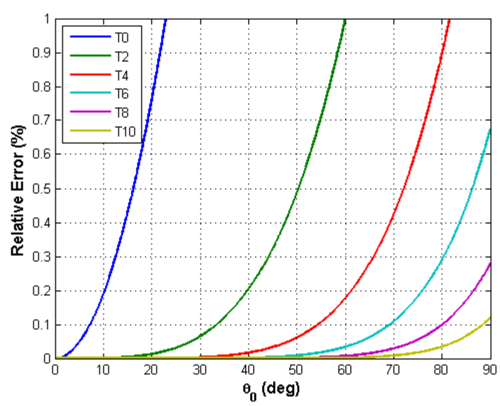
Dada (Eq. 3) y la solución polinomial de Legendre para la interal elíptica:

$K(k) = \frac{\pi}{2}\{1 + (\frac{1}{2})k^2 + (\frac{1\cdot3}{2\cdot4})^2 k^2 + ... + [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 k^{2n} + ...\}$,

una solución exacta para el periodo del péndulo es:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}\right)^2 \cdot \sin^{2n}(\frac{\theta_0}{2})\right]$

La siguiente figura muestra los errores relativos usando series de potencia. T_0 es la aproximación lineal, y de T_2 a T_{10} incluyen los términos de la segunda a la décima potencia, respectivamente.



3.2. Solución de serie de potencia

Otra solución se puede encontrar en las series de Maclaurin:

$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 - \frac{1}{48}\theta_0^3 + \frac{1}{3840}\theta_0^5 - \frac{1}{645120}\theta_0^7 + ...$

que se usa en la solución polinimial de Legendre. La serie de potencia que resulta entonces es:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200}\theta_0^{10} + \frac{233526463}{2009078326886400}\theta_0^{12} + ...\right)$

3.3. Solución de la media aritmético-geométrica

Dada (Eq. 3) y la solución de la media aritmético-geométrica para la integral elíptica:

$K(k) = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(1-k, 1+k)}$,

donde M(x,y) es la media aritmético-geométrica para x e y.

Esto lleva a una fórmula alternativa, rápida y convergente para el periodo:

$T = \frac{2\pi}{M(1, \cos \frac{\theta_0}{2})} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

4. Referencias

1. Robert N, M.G. Olsson. "The pendulum: Rich physics from a simple system". (1986).

2. Carvalhaes C, Suppes P. .^{A}pproximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean". (2008).

3. Adlaj S. .^{A}n eloquent formula for the perimeter of an ellipse". (2012).

4. Van Baak T. .^{A} New and Wonderful Pendulum Period Equation". (2013).

5. Wikipedia. LINK: www.wikipedia.org