# Actividad 6: Periodo real del péndulo simple

Valenzuela Chaparro Hugo de Jesús

7 de mayo de 2016

## 1. Péndulo simple

El péndulo simple es una idealización del péndulo físico, en un sistema aislado, en el cual se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- La cuerda en el que el péndulo oscila no posee masa, y siempre está tensada.
- EL cuerpo que oscila se considera una partícula puntual.
- El movimiento es solo en dos dimensiones, y el péndulo traza un arco en su recorrido.
- Se considera libre de fricción o de otras fuerzas disipativas.
- El campo gravitacional no cambia conforme el péndulo aumenta la altura.
- El soporte del péndulo no se mueve.

## 2. Cálculo del periodo

La ecuación diferencial que rige al movimiento del péndulo es:
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ ...... (Eq. 1)

### 2.1. Oscilaciones pequeñas (ángulos pequeños)

Si tomamos sólo valores para $\theta << 1$ pues de esa manera se tiene que $\sin\theta \approx \theta$.

De esta forma obtenemos la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple:
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
El periodo de la oscilación, lo que tarda en completar una ida y venida es:
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

### 2.2. Péndulo de oscilación arbitraria

Para amplitudes más grandes que las usadas en la aproximación para ángulos pequeños, podemos calcular el periodo exacto invirtiendo la siguiente ecuación para la velocidad angular:

$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\cos\theta - \cos\theta_0}$

obteniendo entonces:

$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

e integrando 4 veces sobre el cuarto de un ciclo lleva a:

$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$

Evaluando esta integral encontramos el periodo del péndulo.

## 3. Evaluación de la integral con Python

En este caso utilizamos la función scipy.integrate.quad de Python para integrar y encontrar el periodo del péndulo para oscilaciones arbitrarias, aunque en este caso se hizo de 0 a 90 grados. Se termina graficando el error $\frac{T}{T_0}$ en función de ángulo inical $\theta_0$. Además, la longitud del péndulo en este caso fue de 1 m. Código:

```
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


fig = plt.figure()

g = 9.8
#Vectores vacios de abscisas y ordenadas.
x=[]
Ts=[]
i = 0


# La variable i toma valores de 0 a 90 (grados) en este ciclo.
while (i<=90):
    i = i + 1
    #convertir grados a radianes
    theta0 = (i*np.pi)/180
    #longitud del pendulo
    l = 1
    #se define la ecuacion integrar
    f = lambda x: 1/np.sqrt(np.cos(x) - np.cos(theta0))
    # Se calcula el valor de la integral
    F, erri = integrate.quad(f,0,theta0)
```

```
    T = 4 * np.sqrt(l/g) * (1/np.sqrt(2)) * F
    # Se agrega la abscisa actual al vector de abscisas.
    x.append(i)

    # Para graficar Ts/Ths (relación entre periodo real y periodo de oscilaciones pequeñas)
    Ths = 2*np.pi*np.sqrt(l/g)
    T = T/Ths
    # Se agrega la ordenada actual al vector de ordenadas.
    Ts.append(T)

plt.xlabel('Theta0 (grados)')
plt.ylabel('T/T0')
plt.plot(x,Ts,color='r')
plt.show()
```

Gráfica: