Aproximación mediante polinomios de Taylor

Hugo de Jesús Valenzuela Chaparro

4 de marzo de 2015

1. Polinomio de Taylor

Los valores de funciones polinomiales pueden determinarse efectuando un número finito de adiciones y multiplicaciones, no obstante, otras funciones, entre ellas las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, no pueden evaluarse tan fácilmente. Muchas funciones pueden aproximarse usando polinomios, uno de los más utilizados es la fórmula de Taylor. La cual se establece así:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

La cual sirve para aproximar la función f(x). Se le conoce como polinomio de Taylor de grado n, centrado en a. En particular, si a=0 entonces es conocido como polinomio de Maclaurin.

2. Aproximaciones

2.1. $sin(x)$

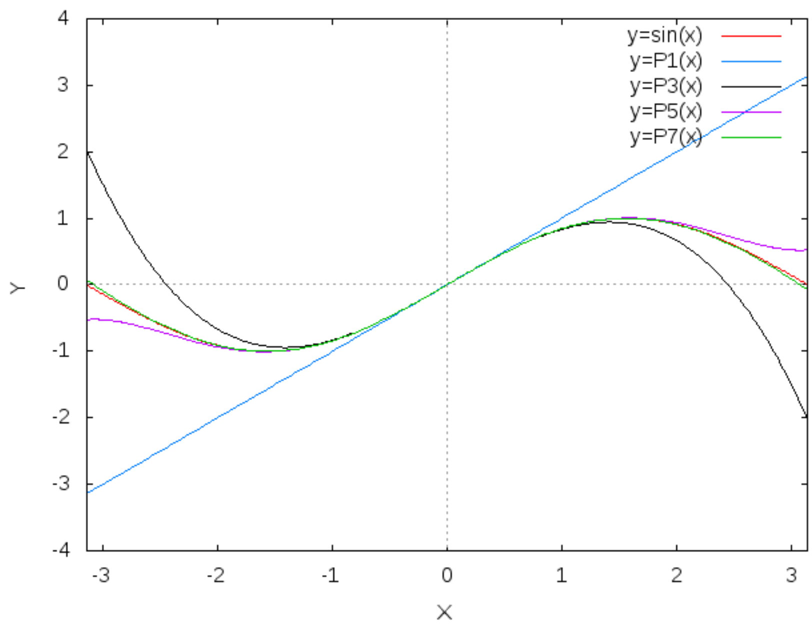
Se aproximó con polinomios de Maclaurin de grado 1, 3, 5 y 7.

CÓDIGO DE MAXIMA:

```
f(x):= sin(x);
P1(x):=taylor(f(x), x, 0, 1);
P3(x):=taylor(f(x), x, 0, 3);
```

```
P5(x):=taylor(f(x), x, 0, 5);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
fortran(P1(x));
fortran(P3(x));
fortran(P5(x));
fortran(P7(x));
tex(P1(x));
tex(P3(x));
tex(P5(x));
tex(P7(x));
plot2d ([f(x),P1(x),P3(x),P5(x),P7(x)], [x, -%pi, %pi],
[color, red, blue, black, magenta, green],
[legend, "y=sin(x)", "y=P1(x)", "y=P3(x)", "y=P5(x)", "y=P7(x)"],
[axes,true], [xlabel,"X"] , [ylabel,"Y"]);
```

Gráfica:

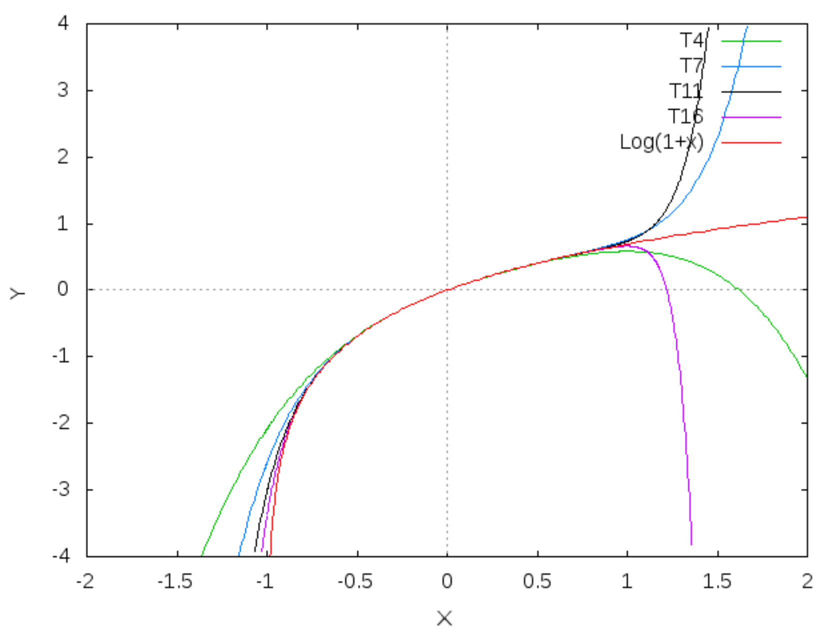


2.2. $log(1 + x)$

Se aproximó con polinomios de Maclaurin de grado 4, 7, 11 y 16.
CÓDIGO DE MAXIMA:

```
f(x):= log(1+x);
P4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
P11(x):=taylor(f(x), x, 0, 11);
P16(x):=taylor(f(x), x, 0, 16);
fortran(P4(x));
fortran(P7(x));
fortran(P11(x));
fortran(P16(x));
tex(P4(x));
tex(P7(x));
tex(P11(x));
tex(P16(x));
plot2d ([P4(x),P7(x),P11(x),P16(x),f(x)], [x, -2, 2], [y, -4, 4],
[color, green, blue, black, magenta, red],
[legend, "T4", "T7", "T11", "T16", "Log(1+x)"],
[axes,true], [xlabel,"X"] , [ylabel,"Y"]);
```

Gráfica:

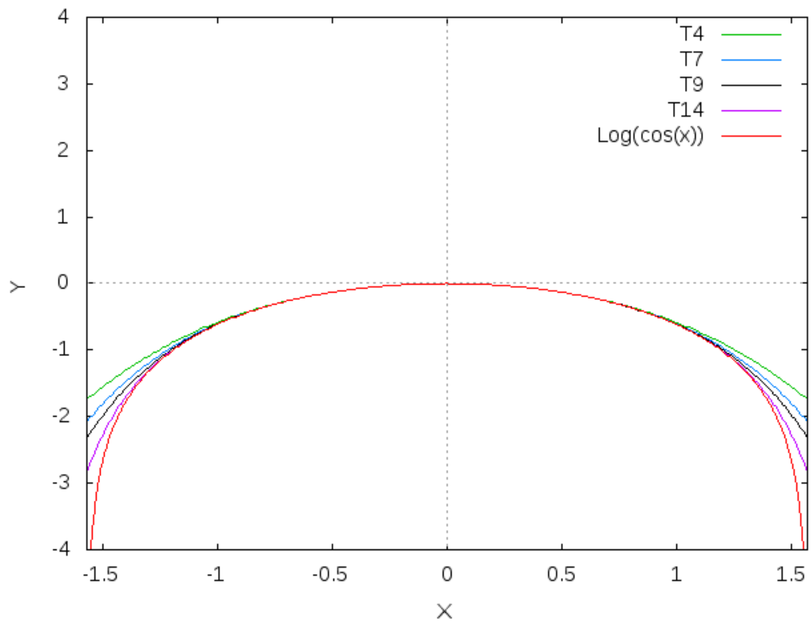


2.3. $log(cos(x))$

Se aproximó con polinomios de Maclaurin de grado 4, 7, 9 y 14.
CÓDIGO DE MAXIMA:

```
f(x):= log(cos(x));
P4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
P9(x):=taylor(f(x), x, 0, 9);
P14(x):=taylor(f(x), x, 0, 14);
fortran(P4(x));
fortran(P7(x));
fortran(P9(x));
fortran(P14(x));
tex(P4(x));
tex(P7(x));
tex(P9(x));
tex(P14(x));
plot2d ([P4(x),P7(x),P9(x),P14(x),f(x)], [x, -%pi/2, %pi/2], [y, -4, 4],
[color, green, blue, black, magenta, red],
[legend, "T4", "T7", "T9", "T14", "Log(cos(x))"],
[axes,true], [xlabel,"X"] , [ylabel,"Y"]);
```

Gráfica:



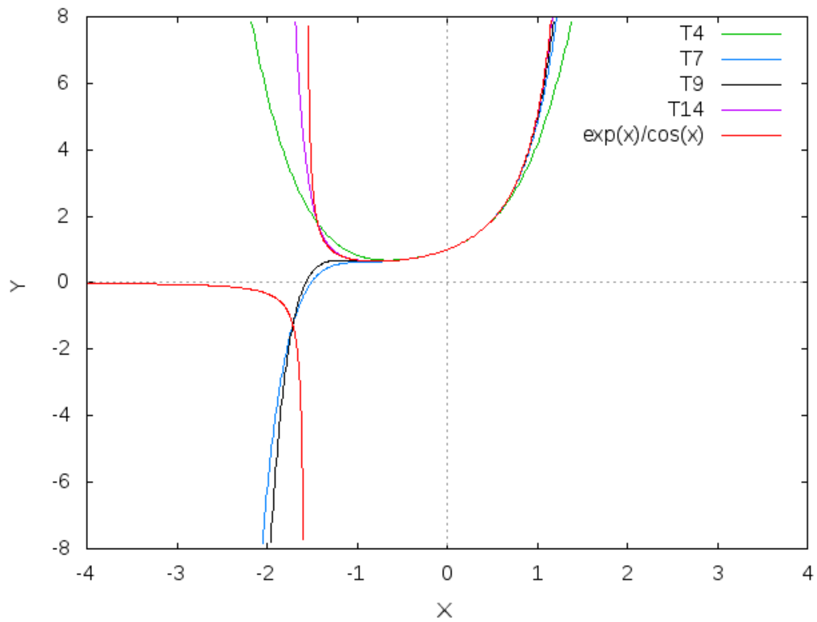
2.4. $e^x/cos(x)$

Se aproximó con polinomios de Maclaurin de grado 4, 7, 9 y 14.
CÓDIGO DE MAXIMA:

```
f(x):=exp(x)/cos(x);
P4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
P9(x):=taylor(f(x), x, 0, 9);
P14(x):=taylor(f(x), x, 0, 14);
fortran(P4(x));
fortran(P7(x));
fortran(P9(x));
fortran(P14(x));
tex(P4(x));
tex(P7(x));
tex(P9(x));
tex(P14(x));
plot2d ([P4(x),P7(x),P9(x),P14(x),f(x)], [x, -4, 4], [y, -8, 8],
[color, green, blue, black, magenta, red],
```

```
[legend, "T4", "T7", "T9", "T14", "exp(x)/cos(x)"],
[axes,true], [xlabel,"X"] , [ylabel,"Y"]);
```

Gráfica:



2.5. $(1+x)e^x$

Se aproximó con polinomios de Maclaurin de grado 4, 7, 9 y 14.
CÓDIGO DE MAXIMA:

```
f(x):=(1+x)*exp(x);
P4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
P9(x):=taylor(f(x), x, 0, 9);
P14(x):=taylor(f(x), x, 0, 14);
fortran(P4(x));
fortran(P7(x));
fortran(P9(x));
fortran(P14(x));
tex(P4(x));
tex(P7(x));
tex(P9(x));
```

```
tex(P14(x));
plot2d ([P4(x),P7(x),P9(x),P14(x),f(x)], [x, -8, 8], [y, -8, 8],
[color, green, blue, black, magenta, red],
[legend, "T4", "T7", "T9", "T14", "(1+x)*exp(x)"],
[axes,true], [xlabel,"X"] , [ylabel,"Y"]);
```

Gráfica: