多物品拍卖（最优分配算法）

目的是把总价为P'的n个物品更有效的分配给n个人，实现最大效用

封闭报价

n个竞拍者封闭报价，给出自己对n个物品的报价，反映n个物品对自己的效用，形成报价矩阵S_ij

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}$$

其中第1行S_{11}，S_{12}，$\cdots$，S_{1n}即第1个人对n个物品的报价。
...以此类推

因此每行之和，即每个人的对所有物品的报价和，都等于原始n个物品的总价P'

物品分配

(虚拟)卖家将挑选出最优报价组合$(S_{i_1 1}, S_{i_2 2}, ..., S_{i_n n})$，使报价组合的总价格
$P = S_{i_1 1} + S_{i_2 2} + ... + S_{i_n n}$最高
其中$i_1, i_2, ..., i_n$代表矩阵中互不相同的n行，即n个不一样的人
物品1将分配给第i_1个人
物品2将分配给第i_2个人
......以此类推

实际支出

n个物品原本的总价是固定的P'（比方说一个包含可乐、鸡翅、薯条、汉堡的套餐总价为30元）
显然，拍卖后卖家挑选的最优报价组合的总价格 $P \geq P'$（仅在所有人报价完全一致时取等）

由于本方案的目的是更好的分配物品，拍卖的卖家是虚拟的，无须盈利。所以我们要**调整实际支出**，使得所有人的实际支出和等于物品的原始总价。

此处给出两种方法，第一种熟悉的**Normalize正则化**基于效用的比例差异，第二种**均匀返现**基于效用的绝对值差异，绝对值差异在数学上会更严谨。但严谨程度都取决于竞拍人在报价反映自身效用时的想法。

Normalize正则化

已知P为最优报价组合的总价格，P'为n个物品原始价格总额。则设正则项

$$||N|| = \frac{P}{P'}$$

设第i个人在最优组合中被分配到了物品j，
则每个人调整后的实际支出为

$$S'_{ij} = \frac{S_{ij}}{||N||} = \frac{S_{ij}P'}{P}$$

均匀返现

虚拟卖家把超额利润$P - P'$均分给所有n个竞拍者，即

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{P - P'}{n}$$

最终效果

可以看出，每个人的实际支出S'都将小于他对该物品的原报价S。因此可以看出，经过组合团购/拍卖交易后，每个人获得的效用增加了。

数学证明

假设效用可以用货币来衡量。
设第j个物品给第i个人带来的效用（Utility）为U_{ij}，报价为S_{ij}，那么假如报价即为此人购买该物品的支出，则购买物品j给第i个人带来的收益为

$$profit_{ij} = U_{ij} - S_{ij} \qquad (1)$$

假设任何一个竞拍者，对所有物品的报价都真实反映了该物品对自己的效用，则所有物品给该竞拍者带来的收益都相等。即

$$profit_{i1} = profit_{i2} = \cdots = profit_{in}$$

记为$profit_i$。

因竞拍者对n个物品报价之和为原本的总价P'是固定的，易得

$$profit_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(U_{ij} - S_{ij})}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} U_{ij} - P'}{n} \qquad (3)$$

又由式(1)可得

$$S_{ij} = U_{ij} - profit_i \qquad (2)$$

总效用最大化

以下给出两种思路，证明该分配方案能使所有人得到的总效用最大化。（自然也是帕累托最优）

证明1：

已知报价组合的总价格为

$$P = S_{i_1 1} + S_{i_2 2} + \ldots + S_{i_n n} = \sum_{j=1}^{n} S_{i_j j}$$

其中$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$是1到n的一个排列，表示第j个物品分配给i_j。

又由式(2)可得

$$P = \sum_{j=1}^{n} (U_{i_j j} - profit_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} U_{i_j j} - \sum_{i=1}^{n} profit_i$$

又由式(3)可知，$profit_i$在分配前已经是固定的了，$\sum_{i=1}^{n} profit_i$是一个常数，而$\sum_{j=1}^{n} U_{i_j j}$就是所有物品分配后给所有人带来的总效用。所以$P = 总效用 - 常数$。

因此最优报价组合在最大化报价组合的总额P的同时，也使得总效用最大化。

证明2：

还有另外一种思路证明，总共有$n!$个**可行报价组合**$(S_{i_1 1}, S_{i_2 2}, \ldots, S_{i_n n})$，倘若每个人的支出和报价一致，那么无论怎样组合，第i个人获得的收益始终是$profit_i$。
但**最优报价组合**能使报价之和P最大，则虚拟卖家获得的超额收益$P - P'$能达到最大，虚拟卖家的这部分收益是会全额返还给竞拍者的。
假如把超额收益**均匀返现**，则第i个人最终获得的实际收益为$profit_i + \frac{P-P'}{n}$。所有物品原始价格$P'$不变，则报价组合的总额$P$越大，每个人得到的收益越大。

基于google sheet&colab的一个简单在线实现方法

step 1:每个人准备好自己的报价写进自己私人的google sheet

step 2:过3分钟，大家一起公开自己的报价sheet的只读sharelink。（由于google sheet的修改记录是可见的，可验证3分钟内不存在报价变动。）

step 3:在colab里打开程序，输入报价并运行。

其中step1 & 2是用于可靠的封闭报价的，sharelink得一起公开，否则存在事先准备好多个googlesheet的作弊漏洞。
如果在现实中当面报价，Step 1 & 2可直接用纸笔封闭报价代替。

> Written with StackEdit.