

Билет 1.

1. (4 балла) Даны точки $A(1; 1; 2)$ и $B(5; 9; 2)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $3 : 1$.
2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(1; -3; 4)$, $B(3; 1; -2)$, $C(-8; 5; 5)$, $D(-1; -2; \lambda)$ лежат в одной плоскости.
3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(0; 0; 11)$ до плоскости $5x + 4y - 2z + 7 = 0$.
4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(-3; 3; 4)$ на плоскость $-4x + 4y + 3z = -5$.
5. (4 балла) Найти угол между плоскостями $x + 2y + 2z = 0$ и $37x + 13y + 12z = 0$.
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/2$.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 16 + 5t$, $y = 24 + 13t$, $z = 24 + 13t$ относительно плоскости $2x + 3y + 3z = 88$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 2.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{-1; 2; -1\}$, $\mathbf{b} = \{3; -1; 3\}$, $\mathbf{c} = \{1; 0; 1\}$.
2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(3; -2; 2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(2; -1; 3)$, $D(0; 4; \lambda)$ лежат в одной плоскости.
3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(2; 2; 2)$ до плоскости $4x + 4y - 7z - 29 = 0$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(-1; 0; 0)$ до прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = 2 + 3t$, $y = t$, $z = -t$ и $x = 2 + t$, $y = 3t$, $z = t$.
6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 11. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна 3. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, опущенную из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.
7. (6 баллов) Показать, что прямые $\frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+5}{-7}$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{3}$ пересекаются. Найти точку пересечения и составить уравнение плоскости, которой они принадлежат.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 3.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{2; 1\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{3; 2\}$ и $\mathbf{b} = \{-5; -3\}$.
2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(5; 2; 4)$, $B(7; -3; 1)$, $C(-2; 6; 1)$, $D(-1; 4; \lambda)$ лежат в одной плоскости
3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $4x + 6y - 5z - 60 = 0$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ и перпендикулярна плоскости $2x + y - z - 1 = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = -1 + 6t$, $y = -1 - t$, $z = -1 + 2t$ и $x = 1 - t$, $y = 1 - 8t$, $z = 1 - t$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём 4, вершины $A(-1; -1; 0)$, $B(1; -1; -1)$, $C(-1; 1; -1)$, а о вершине D известно, что она лежит на отрицательной части оси OZ . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 3 - t$, $y = 2$, $z = 3t$ относительно плоскости $x + z - 5 = 0$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 4.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{-2; 2; -1\}$, $\mathbf{b} = \{4; -5; 1\}$, $\mathbf{c} = \{-3; 2; -3\}$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(0; 1; 0)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 2; 1)$.
4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(2; -1; 3)$ на плоскость $x + z - 3 = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = -1 - t$ и $x = 2$, $y = 2 + t$, $z = 2 + t$.
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $7\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/4$.
7. (6 баллов) Показать, что прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{0}$ пересекаются. Найти точку пересечения и составить уравнение плоскости, которой они принадлежат.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 5.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{-1; 1; -2\}$, $\mathbf{b} = \{3; -2; 5\}$, $\mathbf{c} = \{-1; 2; -3\}$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(2; 2; 3)$, $B(2; -1; 3)$, $C(3; 1; 2)$, $D(2; 3; 1)$.
3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(2; 5; 0)$ до плоскости $3x - 4z + 4 = 0$.
4. (4 балла) Найти точку пересечения плоскости $x - 2y + 3z = 6$ с прямой, проходящей через точки $A(-6; 0; 1)$ и $B(8; 4; 5)$.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = -2t$, $y = 2t$, $z = t$ и плоскостью $4x - 5y + 3z + 12 = 0$.
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = 13\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = -3\mathbf{a} + \mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен 60° . Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Показать, что прямые $\frac{x+2}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-5}{-1}$ и $\frac{x-5}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-3}$ пересекаются. Найти точку пересечения и составить уравнение плоскости, которой они принадлежат.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 6.

1. (4 балла) В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ BD в отношении $1:3$, а точка N делит сторону CD пополам. Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$.
2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(1; 2; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(1; 0; 0)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(-1; -1; 1)$ до плоскости $2x - 3y + 6z + 7 = 0$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(9; 0; 5)$ до прямой $\frac{x-4}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+4}{0}$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = 1 + 3t$, $y = 2t$, $z = -1 + 2t$ и $x = 1 + t$, $y = 0$, $z = -1 + 4t$.
6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен $V = 6$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна $S = 2$. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, которая опущена из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -t, \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 7.

1. (4 балла) Даны точки $A(-2; 0; -3)$ и $B(6; 8; 9)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $1 : 3$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(1; -1; 0)$, $B(-7; 0; 6)$, $C(0; -7; 6)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 2)$, $B(7; -2; 2)$, $C(-1; 5; 6)$.
4. (4 балла) Найти точку пересечения плоскости $2x - 4y + z = 4$ с прямой, проходящей через точки $A(-5; -2; 3)$ и $B(-12; -4; 6)$.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 0$ и плоскостью $x = 0$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём $V = 1$, вершины $A(1; 0; 0)$, $B(2; 2; 0)$, $C(0; 1; 2)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси Oy . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -1 - t, \\ z = -2 + 2t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 8.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{3; -1\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{3; 4\}$ и $\mathbf{b} = \{2; 1\}$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра, вершинами которого служат точки $A(-1; -2; -3)$, $B(1; -1; -2)$, $C(0; 0; -2)$, $D(-2; -1; 1)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 2; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -3; -4)$.
4. (4 балла) Для прямой $x - y - z - 2 = 0$, $x - 3y + 3z - 2 = 0$ найти параметрические уравнения.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = 0$, $y = 1 + t$, $z = t$ и плоскостью $z - 2 = 0$.
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/2$. Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(4; 2; -3)$ и пересекающей прямые $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{0}$ и $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 9.

1. (4 балла) В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ AC в отношении $1 : 2$, а точка N делит сторону BC в отношении $2 : 1$. Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$.

2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(2; 3; 5)$, $B(-1; 3; 8)$, $C(2; 1; 7)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .

3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 2; 2)$, $B(-3; -2; -2)$, $C(2; -6; 7)$.

4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(2; 0; 1)$ на плоскость $x + z - 5 = 0$.

5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x + y + z - 5 = 0$.

6. (6 баллов) Вершинами тетраэдра служат точки $A(2; 0; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(2; 2; 1)$, $D(0; -2; 3)$. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC .

7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 5 + 3t, \\ y = 9 + 7t, \\ z = -8 - 10t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -5 - 3t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 10.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{0; 3; 1\}$, $\mathbf{b} = \{2; 1; -1\}$, $\mathbf{c} = \{-3; 2; 1\}$.

2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 3. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; -1; 1)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{5}$.

4. (4 балла) Для прямой $x + 2y - z - 2 = 0$, $x + y - 1 = 0$ найти параметрические уравнения.

5. (4 балла) Найти острый угол между плоскостями $2x + y - z - 1 = 0$ и $x + y - 3 = 0$.

6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен $V = 4$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна $S = 2$. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$, которая опущена из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.

7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 30 + 30t$, $y = 30 + 30t$, $z = -47 - 7t$ относительно плоскости $3x + 3y - 5z = 200$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 11.

1. (4 балла) Найти точку пересечения прямых $3x + 5y + 7 = 0$ и $x + 3y + 5 = 0$.
2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(2; 1; 3)$, $B(1; -1; 1)$, $C(3; 0; -1)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $2x - y + 3z - 6 = 0$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ и перпендикулярна плоскости $2x + 2y + 3z = 7$.
5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 0; -1)$ параллельно оси Oy .
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = -5\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен 45° . Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(5; -19; -11)$ относительно прямой $\frac{x}{9} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 12.

1. (4 балла) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $3 : 2$, точка M делит сторону AB в отношении $5 : 3$, а точка N — середина стороны CD . Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$.
2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(0; 1; 2)$, $B(0; 3; 2)$, $C(-1; 2; 2)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 2; 2)$ параллельно плоскости $x + y + z - 1 = 0$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(5; -1; -2)$ до прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{0}$.
5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; -2; 4)$ параллельно оси OX .
6. (6 баллов) Вершинами тетраэдра служат точки $A(-1; 2; 2)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; 4; 2)$, $D(0; 1; 0)$. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC .
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 2 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 1 - 2t$ относительно плоскости $x - y + z - 3 = 0$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 13.

1. (4 балла) Даны точки $A(-1; 2; 1)$ и $B(-4; 5; -2)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $1 : 2$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(0; 0; 7)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 4; 3)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -1; 3)$, $B(3; -2; 2)$, $C(2; 2; 3)$.
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ и перпендикулярна плоскости $x + y - z - 1 = 0$.
5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $x - z = 0$.
6. (6 баллов) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-5; 8; -8)$, $B(-4; 8; -7)$, $C(4; 20; 0)$, $D(-4; -43; -7)$. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC .
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 2 + t$, $y = -1$, $z = 3 - 3t$ относительно плоскости $x + z - 3 = 0$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 14.

1. (4 балла) Даны точки $A(1; 1; 2)$ и $B(-4; 6; 12)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $2 : 3$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(-4; -3; -2)$, $B(0; 2; 2)$, $C(1; 1; 3)$, $D(0; -8; 0)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(0; 1; 2)$.
4. (4 балла) Для прямой $2x + y - z + 2 = 0$, $y + z + 2 = 0$ найти параметрические уравнения.
5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$ параллельно оси Ox .
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = 15\mathbf{a} + 11\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен 30° . Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(-8; 4; 10)$ относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+10}{-3} = \frac{z-13}{2}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 15.

1. (4 балла) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $3 : 1$, точка M делит сторону AB в отношении $1 : 3$, а точка N — середина стороны CD . Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$.

2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(2; 1; 3)$, $B(3; -2; 2)$, $C(2; 2; 3)$, $D(1; 0; \lambda)$ лежат в одной плоскости.

3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(3; 3; -3)$ до плоскости $x + 2y - 2z = 0$.

4. (4 балла) Для прямой $2x + y - z = 0$, $y + z - 20 = 0$ найти параметрические уравнения.

5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0; 1; -1)$ параллельно оси OY .

6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём $V = 2$, вершины $A(0; 3; -2)$, $B(0; 2; -3)$, $C(2; 3; 2)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси Oy . Найти координаты вершины D .

7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(-4; 1; 2)$ относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{0}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 16.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{-10; 3\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{3; -1\}$ и $\mathbf{b} = \{7; -2\}$.

2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(1; 0; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 1; \lambda)$ лежат в одной плоскости.

3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $x + 4y + 5z - 20 = 0$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».

4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(0; 1; 0)$ на плоскость $x - 1 = 0$.

5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 1; 0)$ параллельно оси OZ .

6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 7. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна 2. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, опущенную из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.

7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = -1 - t$, $y = -2t$, $z = 2 + 2t$ относительно плоскости $2x + y - z - 2 = 0$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 17.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{1; 2; 1\}$, $\mathbf{b} = \{0; 3; -2\}$, $\mathbf{c} = \{-1; 3; -4\}$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(3; -2; 2)$, $C(2; 2; 3)$, $D(2; 0; 1)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; 2; 3)$ параллельно плоскости $x - y - z + 1 = 0$.
4. (4 балла) Для прямой $y - z + 1 = 0$, $y - 3 = 0$ найти параметрические уравнения.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = t$, $y = -2t$, $z = t$ и плоскостью $3x + 4y = 0$.
6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 5. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна 10. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, опущенную из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.
7. (6 баллов) Показать, что прямые $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-10}{7}$ и $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-13}{5} = \frac{z+19}{-11}$ пересекаются. Найти точку пересечения и составить уравнение плоскости, которой они принадлежат.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 18.

1. (4 балла) В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ AC в отношении $3 : 2$, а точка N делит сторону BC в отношении $1 : 2$. Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$.
2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 2. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$.
3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $3x + 3y - 7z + 21 = 0$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ и перпендикулярна плоскости $2x - 5y + 3z = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = t$, $y = 1$, $z = 2$ и $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1$.
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/4$.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 3, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 19.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{8; 17\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{1; -2\}$ и $\mathbf{b} = \{4; 3\}$.
2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 3. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; -1; 1)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{3}$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(3; -1; 6)$ до прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{0}$.
5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 3; 3)$ перпендикулярно плоскости $z = 1$.
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/3$.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 8 - 7t, \\ y = 6 - 4t, \\ z = -2 + 5t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 4t, \\ z = -9 - 3t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 20.

1. (4 балла) Найти точку пересечения прямых $3x - 4y + 1 = 0$ и $3x + 4y + 17 = 0$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(3; 1; 2)$, $B(2; 2; 3)$, $C(3; -2; 2)$, $D(3; 2; 0)$.
3. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(-2; -3; 3)$ до плоскости $9x - 4y + z + 17 = 0$.
4. (4 балла) Для прямой $x + y - z - 1 = 0$, $x - y - 2 = 0$ найти параметрические уравнения.
5. (4 балла) Найти острый угол между плоскостями $y + z - 2 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/3$.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 21.

1. (4 балла) Найти точку пересечения прямых $-4x + y - 3 = 0$ и $-5x + y - 4 = 0$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(1; -2; 3)$, $B(4; 2; 2)$, $C(3; 0; 2)$.
3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $10x - 15y + 6z = 30$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ и перпендикулярна плоскости $x + z - 5 = 0$.
5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 0; 2)$ перпендикулярно плоскости $-x + y - z + 5 = 0$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём 9, вершины $A(2; -1; -1)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(-1; -1; 2)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси Ox . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(0; 0; 0)$ и пересекающей прямые $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ и $\frac{x+6}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 22.

1. (4 балла) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $2 : 1$, точка M делит сторону AB в отношении $2 : 3$, а точка N — середина стороны CD . Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$.
2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 5. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
3. (4 балла) Найти точки пересечения плоскости $2x - 5y - z + 10 = 0$ с осями координат и задать эту плоскость уравнением «в отрезках».
4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(3; 3; 3)$ на плоскость $5x - 4y + 4z = -42$.
5. (4 балла) Найти острый угол между плоскостями $x + z - 5 = 0$ и $x - 3 = 0$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём $V = 1/3$, вершины $A(1; 0; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 0; 2)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси Oy . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(-9; 13; 1)$ относительно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-11}{2} = \frac{z}{-3}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 23.

1. (4 балла) Найти точку пересечения прямых $3x + y + 4 = 0$ и $5x + 2y + 7 = 0$.
2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 3. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $-2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3; 2; 1)$ параллельно плоскости $x + y - z + 1 = 0$.
4. (4 балла) Найти точку пересечения плоскости $x + y + z = 0$ с прямой, проходящей через точки $A(-6; -9; -1)$ и $B(8; 5; 3)$.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = 0$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$ и плоскостью $z = 0$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объём 3, вершины $A(-1; -1; -1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; 0)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси OZ . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(7; -6; 8)$ относительно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 24.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{3; 1\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{-5; -2\}$ и $\mathbf{b} = \{2; 1\}$.
2. (4 балла) Найти все значения λ , при которых точки $A(7; 2; 9)$, $B(3; -3; 6)$, $C(2; 0; 1)$, $D(5; 5; \lambda)$ лежат в одной плоскости.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(7; -5; 4)$ параллельно плоскости $-3x - 2y + 4z = 0$.
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и перпендикулярна плоскости $3x - 3y + 5z = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между плоскостями $-4x + 7y + 4z = 0$ и $-y + 4z + 3 = 0$.
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = 5\mathbf{a} + \mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/3$. Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(1; 1; 1)$ и пересекающей прямые $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+5}{6}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 25.

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{1; 1; 1\}$, $\mathbf{b} = \{0; -1; 2\}$, $\mathbf{c} = \{3; 0; 1\}$.
2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(2; 2; 1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; 1; 1)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-1; 1; 1)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-4}$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(3; 2; 1)$ до прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{0}$.
5. (4 балла) Найти угол между прямой $x = 2t$, $y = 2t$, $z = -t$ и плоскостью $x + y + z = 10$.
6. (6 баллов) Вершины треугольной пирамиды суть $A(6; 6; 6)$, $B(-6; 7; 6)$, $C(-6; 6; 5)$, $D(12; 7; 16)$. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-1; 6; 5)$ и пересекающей прямые $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ и $\frac{x}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{1}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 26.

1. (4 балла) Разложить вектор $\mathbf{c} = \{-1; 3\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{2; 1\}$ и $\mathbf{b} = \{5; -1\}$.
2. (4 балла) Найти объём тетраэдра, вершинами которого служат точки $A(-1; -1; -1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(3; 4; 5)$, $D(6; 7; 4)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3; -3; 4)$ параллельно плоскости $-3x - 2y + 2z - 1 = 0$.
4. (4 балла) Найти точку пересечения плоскости $x + z - 3 = 0$ с прямой, проходящей через точки $A(3; 1; 2)$ и $B(4; 1; 3)$.
5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 0; -1)$ перпендикулярно плоскости $x - y = 0$.
6. (6 баллов) Вершинами тетраэдра служат точки $A(0; 1; 0)$, $B(0; 3; -2)$, $C(0; 0; -1)$, $D(1; 1; 3)$. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC .
7. (6 баллов) Показать, что прямые $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{0}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{1}$ пересекаются. Найти точку пересечения и составить уравнение плоскости, которой они принадлежат.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 27.

1. (4 балла) Даны точки $A(4; 5; 1)$ и $B(-2; 2; -11)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $2 : 1$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(2; 0; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(2; 2; 1)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 0; -2)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{1}$.
4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(5; 1; 2)$ на плоскость $2x - 2y - z = -3$.
5. (4 балла) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 0; 0)$ параллельно оси Oz .
6. (6 баллов) Найти угол между векторами $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $2\pi/3$.
7. (6 баллов) Найти точку Q , симметричную точке $P(-1; 3; -2)$ относительно прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+1}{-1}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 28.

1. (4 балла) В параллелограмме $ABCD$ точка M делит сторону BC в отношении $3 : 2$, а точка N делит диагональ AC в отношении $1 : 5$. Найти разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(0; 1; -1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 2; -3)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 2; 2)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}$.
4. (4 балла) Найти расстояние от точки $M(1; 1; 1)$ до прямой $\frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-6}{-3}$.
5. (4 балла) Найти угол между плоскостями $x - y + 12 = 0$ и $-2x + 2z - 1 = 0$.
6. (6 баллов) Параллелограмм построен на векторах $\mathbf{m} = 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{n} = 6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$, где $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ и угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $\pi/4$. Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора \mathbf{n} на вектор \mathbf{m} .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-2; 1; 4)$ и пересекающей прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 29.

1. (4 балла) Найти точку пересечения прямых $3x - 5y - 13 = 0$ и $2x + 7y - 81 = 0$.
2. (4 балла) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен 3. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 1; 1)$ параллельно плоскости $x + 2y + 2z - 5 = 0$.
4. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через прямую $\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ и перпендикулярна плоскости $x + y - z - 1 = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $x = 3 + t$, $y = 2$, $z = 1 - t$ и $x = -4 + t$, $y = t$, $z = 5$.
6. (6 баллов) Объём параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , равен $V = 12$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , равна $S = 3$. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 4\mathbf{c}$, которая опущена из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = -5 - t$, $y = -10 + 2t$, $z = -10 + 2t$ относительно плоскости $x + y + z = -10$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов

Билет 30.

1. (4 балла) Даны точки $A(-1; -1; 3)$ и $B(9; 9; 13)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $2 : 3$.
2. (4 балла) Вершинами треугольника служат точки $A(-2; -2; -2)$, $B(-5; 4; 3)$, $C(5; -1; 1)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 0; -3)$ и перпендикулярна прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.
4. (4 балла) Для прямой $2x + y - z + 2 = 0$, $y + z + 2 = 0$ найти параметрические уравнения.
5. (4 балла) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0; 1; 0)$ перпендикулярно плоскости $x + z = 0$.
6. (6 баллов) Вершинами тетраэдра служат точки $A(1; 1; 1)$, $B(9; 9; -2)$, $C(4; 5; 0)$, $D(1; -1; 21)$. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC .
7. (6 баллов) Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = 6 + 6t$, $y = 1 - 2t$, $z = -1 - t$ относительно плоскости $x + 2y - z - 6 = 0$.

min: 19 баллов, max: 32 баллов