1. Дать определение равенства геометрический векторов.

Два геометрических вектора называют равными, если:

- они коллинеарны и однонаправлены;
- их длины совпадают.

2. Дать определение суммы векторов и умножения вектора на число.

Суммой a + b двух векторов a и b называют вектор c, построенный по следующему правилу треугольника. Совместим начало вектора b с концом вектора a. Тогда суммой этих векторов будет вектор c, начало которого совпадает с началом a, а конец — с концом b.

Наряду с правилом треугольника существует правило параллелограмма. Выбрав для векторов a и b общее начало, строим на этих векторах параллелограмм. Тогда диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов, определяет их сумму.

При умножении вектора на число, направление вектора не меняется, а длина вектора умножается на число.

3. Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.

Два геометрических вектора называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Три геометрических вектора называют компланарными, если эти векторы лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

4. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Векторы $a_1, \dots, a_n$ называют линейно зависимыми, если существует такой набор коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ и при этом хотя бы один из этих коэффициентов ненулевой.

Если указанного набора коэффициентов не существует, то векторы называют линейно независимыми.

5. Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

- Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
- Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

6. Дать определение базиса и координат вектора.

Базис— множество таких векторов в векторном пространстве, что любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов из этого множества — базисных векторов.

Координаты вектора **—** коэффициенты единственно возможной линейной комбинации базисных векторов в выбранной системе координат, равной данному вектору.

7. Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор векторного пространства можно разложить по его базису и притом единственным способом.

Если $e = (\overline{e_1} \dots \overline{e_i})$ – базис $V_i, \bar{x} \in V_i$ $i = (1, 2, 3)$, то существует набор чисел $(x_1 \dots x_i)$ такой, что $\bar{x} = \overline{x_1}\,\overline{e_1} + \dots + \overline{x_i}\overline{e_i}$, где $(x_1 \dots x_i)$ – координаты вектора в базисе.

8. Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

Ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ называется скалярная величина $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| * \cos(\varphi)$, где угол φ – угол между векторами.

9. Дать определение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное $\vec{a} * \vec{b} * \cos\varphi$— произведению длин $|\overrightarrow{a}|$ и $|\overrightarrow{b}|$ этих векторов на косинус угла φ между ними.

10. Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

- Совместно с умножением на число операция скалярного умножения ассоциативна: $(\lambda\bar{a})\,\bar{b} = \lambda(\bar{a}\,\bar{b})$.
- Скалярное умножение и сложение векторов связаны свойством дистрибутивности: $(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}$.

11. Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$

$\bar{a}\,\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

12. Записать формулу для косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

13. Дать определение правой и левой тройки векторов.

Упорядоченную тройку некомпланарных векторов a, b, c называют правой, если направление вектора a совмещается с направлением вектора b при помощи кратчайшего поворота вектора a в плоскости этих векторов, который со стороны вектора c совершается против хода часовой стрелки. В противном случае (поворот по ходу часовой стрелки) эту тройку называют левой.

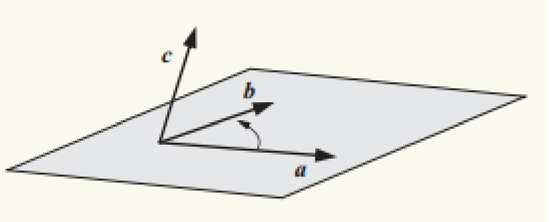

Рис. 3.1

14. Дать определение векторного произведения векторов.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют такой вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

- вектор c ортогонален векторам a и b;
- длина вектора с равна $|\bar{c}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\phi$, где ϕ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

15. Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

- Скалярное произведение коммутативно: $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$.
- Векторное произведение антикоммутативно: $\bar{a} \text{x} \bar{b} = -\bar{b} \text{x} \bar{a}$.

16. Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

- свойство ассоциативности совместно с умножением на число $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$;
- свойство дистрибутивности относительно сложения $(\bar{a} + \bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}$.

Свойства ассоциативности и дистрибутивности векторного произведения объединяют, аналогично случаю скалярного произведения, в **свойство линейности векторного произведения** относительно первого сомножителя. В силу свойства антикоммутативности векторного произведения векторное произведение линейно и относительно второго сомножителя:

$$\bar{a}\times(\lambda\bar{b}) = -(\lambda\bar{b})\times\bar{a} = -\lambda(\bar{b}\times\bar{a}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$$
$$\bar{a}\times(\bar{b} + \bar{c}) = -(\bar{b} + \bar{c})\times\bar{a} = -(\bar{b}\times\bar{a} + \bar{c}\times\bar{a}) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}.$$

17. Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

18. Дать определение смешанного произведения векторов.

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называют число, равное $(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}$ — скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

19. Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

Для смешанного произведения действует **правило циклической перестановки**:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}.$$

20. Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

- Для смешанного произведения выполняется свойство ассоциативности относительно умножения векторов на число: $(\lambda\bar{a})\,\bar{b}\,\bar{c} = \lambda(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$.
- Для смешанного произведения выполняется свойство дистрибутивности: $(\overline{a_1}+\overline{a_2})\,\bar{b}\,\bar{c} = \overline{a_1}\,\bar{b}\,\bar{c} + \overline{a_2}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Эти свойства смешанного произведения сформулированы для первого сомножителя. Однако при помощи циклической перестановки можно доказать аналогичные утверждения и для второго и для третьего сомножителей, т.е. верны равенства
$\bar{a}\,(\lambda\bar{b})\,\bar{c} = \lambda(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$, $\bar{a}\,\bar{b}\,(\lambda\bar{c}) = \lambda(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$,
$\bar{a}\,(\overline{b_1} + \overline{b_2})\,\bar{c} = \bar{a}\,\overline{b_1}\,\bar{c} + \bar{a}\,\overline{b_2}\,\bar{c}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,(\overline{c_1} + \overline{c_2}) = \bar{a}\,\bar{b}\,\overline{c_1} + \bar{a}\,\bar{b}\,\overline{c_2}$,
и в итоге имеем **свойство линейности смешанного произведения** по каждому сомножителю.

21. Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$, $\bar{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

22. Записать общее уравнение плоскости и уравнение “в отрезках”. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

– Уравнение Ax + By + Cz + D = 0 называют **общим уравнением плоскости**. Коэффициенты A, B, C при неизвестных в этом уравнении имеют наглядный геометрический смысл: вектор n = {A; B; C} перпендикулярен плоскости. Его называют нормальным вектором плоскости. Он, как и общее уравнение плоскости, определяется с точностью до (ненулевого) числового множителя.
– Уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ называют **уравнением плоскости в отрезках**, где a, b, c – соответствующие координаты точек лежащих на осях OX, OY и OZ соответственно.

23. Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – заданные точки, а точка M(x, y, z) – точка, принадлежащая плоскости, образованной точками M_1, M_2 и M_3, тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

24. Сформулировать условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

– Две плоскости **перпендикулярны**, если их нормальные векторы **ортогональны**.
– Две плоскости **параллельны**, если их нормальные векторы **коллинеарны**.

25. Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ используется формула: $\rho(M,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

26. Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

– Уравнение $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, где {l; m; n} - координаты направляющего вектора $\bar{S}$ прямой L и $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – координаты точки $M_0 \in$ L в прямоугольной системе координат, называют **параметрическими уравнениями прямой** в пространстве.
– Уравнение $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ называют **каноническими уравнениями прямой** в пространстве.

27. Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

Уравнения $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ называют **уравнениями прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

28. Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

Пусть ***a*** и ***b*** — направляющие векторы этих прямых, а точки M_1 и M_2 принадлежат соответственно прямым и l_1 и l_2. Тогда две прямые будут принадлежать одной плоскости, если смешанное произведение (a, b, M_1M_2) равно 0.

29. Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Расстояние от точки M_1 до прямой L может быть вычислено по формуле:

$\rho(M_1, L) = \frac{|\overline{M_0M_1}\times\bar{S}|}{|\bar{S}|}$, где $\bar{S}$ – направляющий вектор прямой L, M_0 – точка на прямой L.

30. Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Расстояние между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 может быть вычислено по формуле:

$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\overline{S_1 S_2}\ \overline{M_1M_2}|}{|\overline{S_1}\times\overline{S_2}|}$, где $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ – направляющие векторы прямых; M_1, M_2 – точки принадлежащие прямым.

Часть Б

1. Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство:

Если три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ линейно зависимы, то, согласно теореме 2.1 (о линейной зависимости векторов), один из них, например $\bar{a}$, является линейной комбинацией остальных: $\bar{a} = \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$. Совместим начала векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ в точке A. Тогда векторы $\beta\bar{b}$, $\gamma\bar{c}$ будут иметь общее начало в точке A и по правилу параллелограмма их сумма, т.е. вектор $\bar{a}$, будет представлять собой вектор с началом A и концом, являющимся вершиной параллелограмма, построенного на векторах-слагаемых. Таким образом, все векторы лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны. Если один из этих векторов является нулевым, то очевидно, что он будет линейной комбинацией остальных. Достаточно все коэффициенты линейной комбинации взять равными нулю. Поэтому можно считать, что все три вектора не являются нулевыми. Совместим начала этих векторов в общей точке O. Пусть их концами будут соответственно точки A, B, C (рис. 2.1). Через точку C проведем прямые, параллельные прямым, проходящим через пары точек O, A и O, B. Обозначив точки пересечения через A’ и B’, получим параллелограмм OA’CB’, следовательно, $\overline{OC} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$. Вектор $\overline{OA'}$ и ненулевой вектор $\bar{a} = \overline{OA}$ коллинеарны, а потому первый из них может быть получен умножением второго на действительное число α: $\overline{OA'} = \alpha\overline{OA}$. Аналогично $\overline{OB'} = \beta\overline{OB}$, $\beta \in R$. В результате получаем, что $\overline{OC} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$, т.е. вектор $\bar{c}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Согласно теореме 2.1 (о линейной зависимости векторов), векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ являются линейно зависимыми.

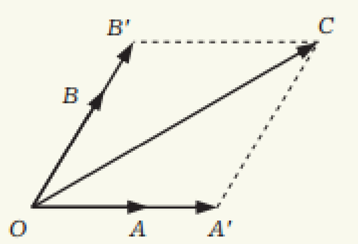

Рис. 2.1

2. Доказать теорему о разложении вектора по базису.

Теорема о разложении вектора по базису. *Если* $e = (\overline{e_1} \dots \overline{e_i})$ *– базис* $V_i, \bar{x} \in V_i$ $i = (1, 2, 3)$, *то существует набор чисел* $(x_1 \dots x_i)$ *такой, что* $\bar{x} = \overline{x_1}\,\overline{e_1} + \dots + \overline{x_i}\overline{e_i}$, *где* $(x_1 \dots x_i)$ *– координаты вектора в базисе.*

Доказательство: (для i = 2)

$(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ – базис V_2, $\bar{x} \in V_2$

По определению пространства V2: x, e1, e2 – компланарны => (критерий линейной зависимости 3-х векторов) => $\bar{x}$, $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ линейно зависимы => $\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ \in R$.

$\alpha_0\bar{x} + \alpha_1\bar{e_1} + \alpha_2\bar{e_2} = \bar{0}, \ \ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$

<u>1 случай:</u> $\alpha_0 = 0$, тогда $\alpha_1\bar{e_1} + \alpha_2\bar{e_2} = \bar{0}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, значит α_1, α_2 – линейно зависимые ⇔ $(\bar{e_1}, \bar{e_2})$ – лин. завис. ⇔ $\bar{e_1}$и $\bar{e_2}$ коллинеарны.

<u>2 случай:</u> $\alpha_0 \neq 0$

$\bar{x} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)\bar{e_1} + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)\bar{e_2}$

Доказали существование.

Пусть существует 2 представления:

$\bar{x} = y_1\bar{e_1} + y_2\bar{e_2}$

Разность:

$\bar{0} = \bar{x} - \bar{x} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} - y_1\bar{e_1} - y_2\bar{e_2} = (x_1 - y_1)\bar{e_1} + (x_2 - y_2)\bar{e_2}$ => линейно зависимы, а это противоречит определению базиса.

3. Доказать свойство линейности скалярного произведения.

- Совместно с умножением на число операция скалярного умножения ассоциативна: $(\lambda\bar{a})\ \bar{b} = \lambda(\bar{a}\ \bar{b})$.
- Скалярное умножение и сложение векторов связаны свойством дистрибутивности: $(\bar{a} + \bar{b})\ \bar{c} = \bar{a}\ \bar{c} + \bar{b}\ \bar{c}$.

Что и требовалось доказать.

4. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

Вывод формулы для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из V_3 заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$: $\bar{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Это означает, что имеются разложения $\bar{a} = x_a\bar{\imath} + y_a\bar{\jmath} + z_a\bar{k}$,

$\bar{b} = x_b\bar{\imath} + y_b\bar{\jmath} + z_b\bar{k}$. Используя их и свойства скалярного произведения, вычислим

$$\bar{a}\bar{b} = (x_a\bar{\imath} + y_a\bar{\jmath} + z_a\bar{k})(x_b\bar{\imath} + y_b\bar{\jmath} + z_b\bar{k}) = x_a x_b\bar{\imath}\,\bar{\imath} + x_a y_b\bar{\imath}\,\bar{\jmath} + x_a z_b\bar{\imath}\,\bar{k} + y_a x_b\bar{\jmath}\,\bar{\imath} + y_a y_b\bar{\jmath}\,\bar{\jmath} + y_a z_b\bar{\imath}\,\bar{k} + z_a x_b\bar{k}\,\bar{\imath} + z_a y_b\bar{k}\,\bar{\jmath} + z_a z_b\bar{k}\,\bar{k} = x_a x_b\bar{\imath}^2 + y_a y_b\bar{\jmath}^2 + z_a z_b\bar{k}^2 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Окончательный ответ получен с учетом того, что ортонормированность базиса $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$,

$\bar{k}$ означает выполнение равенств $\bar{\imath}\,\bar{\jmath} = \bar{\imath}\,\bar{k} = \bar{\jmath}\,\bar{k} = 0$, $\bar{\imath}^2 = \bar{\jmath}^2 = k^2 = 1$. Таким образом,

$$\bar{a}\,\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

5. Вывести формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных в правом ортонормированном базисе.

Вывод формулы для вычисления векторного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

Рассмотрим два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$: $\bar{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Тогда имеют место разложения этих векторов $\bar{a} = x_a\bar{\imath} + y_a\bar{\jmath} + z_a\bar{k}$, $\bar{b} = x_b\bar{\imath} + y_b\bar{\jmath} + z_b\bar{k}$.

Исходя из этих представлений и алгебраических свойств векторного умножения, получаем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(x_a\bar{\imath} + y_a\bar{\jmath} + z_a\bar{k}\right) \times \left(x_b\bar{\imath} + y_b\bar{\jmath} + z_b\bar{k}\right)$$
$$= x_a x_b \bar{\imath} \times \bar{\imath} + x_a y_b \bar{\imath} \times \bar{\jmath} + x_a z_b \bar{\imath} \times \bar{k} + y_a x_b \bar{\jmath} \times \bar{\imath} + y_a y_b \bar{\jmath} \times \bar{\jmath} + y_a z_b \bar{\imath} \times \bar{k} + z_a x_b \bar{k} \times \bar{\imath} + z_a y_b \bar{k} \times \bar{\jmath} + z_a z_b \bar{k} \times \bar{k} = (y_a z_b - y_b z_a)\bar{\imath} + (z_a x_b - z_b x_a)\bar{\jmath} + (x_a y_b - x_b y_a)\bar{k}$$
$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \bar{k}$$

Чтобы упростить полученную формулу, заметим, что она похожа на формулу разложения определителя третьего порядка по 1-й строке, только вместо числовых коэффициентов стоят векторы. Поэтому можно записать эту формулу как определитель, который вычисляется по обычным правилам. Две строки этого определителя будут состоять из чисел, а одна — из векторов. Итак, формулу вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$можно записать в виде:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6. Доказать свойство линейности смешанного произведения.

Используя свойства смешанного произведения, можно доказать линейность векторного произведения по первому множителю:

$$\left(\alpha * \bar{a} + \beta * \bar{b}, \bar{c}\right) = \alpha * (\bar{a}, \bar{c}) + \beta * (\bar{b}, \bar{c})$$

Для этого найдем скалярное произведение вектора в левой части равенства и единичного вектора $\vec{\imath}$ стандартного базиса. Учитывая линейность смешанного произведения по второму множителю,

$$\left(\vec{i}, [\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \vec{c}]\right) = \left(\vec{i}, \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \vec{c}\right) = \alpha \cdot \left(\vec{i}, \vec{a}, \vec{c}\right) + \beta \cdot \left(\vec{i}, \vec{b}, \vec{c}\right) =$$
$$= \alpha \cdot \left(\vec{i}, [\vec{a}, \vec{c}]\right) + \beta \cdot \left(\vec{i}, [\vec{b}, \vec{c}]\right) = \left(\vec{i}, \alpha \cdot [\vec{a}, \vec{c}] + \beta \cdot [\vec{b}, \vec{c}]\right),$$

получаем

т.е. абсцисса вектора, стоящего в левой части доказываемого равенства равна абсциссе вектора в правой его части. Аналогично доказываем, что ординаты, а также и аппликаты, векторов в обеих частях равенства соответственно равны. Следовательно, это равные векторы, так как их координаты относительно стандартного базиса совпадают.

7. Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

Вывод формулы для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

Пусть векторы a, b, c заданы своими координатами в правом ортонормированном базисе: $\bar{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\bar{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, $\bar{c} = \{x_c; y_c; z_c\}$. Чтобы найти их смешанное произведение, воспользуемся формулами для вычисления скалярного и векторного произведений:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{a}\left(\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} \bar{k}\right)$$
$$= x_a \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

8. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Вывод формулы для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π и произвольную точку M_0. Выберем для плоскости единичный нормальный вектор n с началом в некоторой точке $M_1 \in \pi$, и пусть $\rho(M_0, \pi)$ — расстояние от точки M_0 до плоскости π. Тогда (рис. 5.5)

$$\rho(M_0, \pi) = |\text{пр}_n \overline{M_1M_0}| = |\bar{n}\overline{M_1M_0}|, \tag{5.8}$$

так как $|\bar{n}| = 1$.

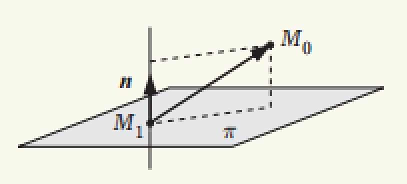

Рис. 5.5

Если плоскость π задана в прямоугольной системе координат своим общим уравнением
Ax + By + Cz + D = 0, то ее нормальным вектором является вектор с координатами {A; B; C}.
Пусть (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) — координаты точек M_0 и M_1. Тогда выполнено равенство
$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, так как точка M1 принадлежит плоскости, и можно найти координаты
Вектора $\overline{M_1M_0}$: $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$. Записывая скалярное произведение $\bar{n}\overline{M_1M_0}$ в координатной форме и преобразуя (5.8), получаем

$$\rho(M, \pi) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

поскольку $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Итак, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости нужно подставить координаты точки в общее уравнение плоскости, а затем абсолютную величину результата разделить на нормирующий множитель, равный длине соответствующего нормального вектора.

9. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Вывод формулы для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой L, заданной каноническими уравнениями L: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, может быть вычислено при помощи векторного произведения. Действительно, канонические уравнения прямой дают нам точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой
и направляющий вектор $\bar{S}$ = {l; m; n} этой прямой. Построим параллелограмм на векторах $\bar{S}$ и $\overline{M_0M_1}$.
Тогда расстояние от точки M_1 до прямой L будет равно высоте h параллелограмма (рис. 6.6).

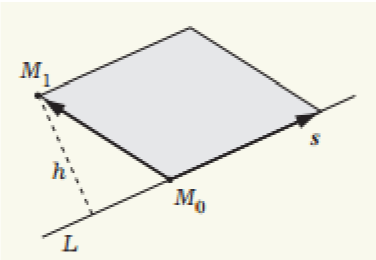

Рис. 6.6

Значит, нужное расстояние может быть вычислено по формуле

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{S}|}{|\bar{S}|}.$$

10. Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Вывод формулы для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно находить, используя смешанное произведение. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями. Так как они скрещиваются, их направляющие векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ и вектор $\overline{M_1M_2}$, соединяющий точки на прямых, некомпланарны. Поэтому на них можно построить параллелепипед (рис. 6.7).

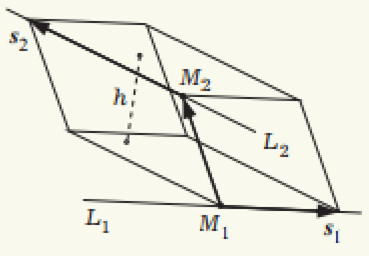

Рис. 6.7

Тогда расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения трех указанных векторов, а площадь параллелограмма в основании параллелепипеда равна модулю векторного произведения направляющих векторов прямых. В результате получаем формулу для расстояния $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{M_1M_2}|}{|\overline{S_1} \times \overline{S_2}|}$$