Ответы на вопросы для подготовки к РК 1

I) Определение

1. Софрмулируйте определение окрестности точки $x \in R$

Окрестностью $U_{(x0)}$ точки x_0 называют любой интервал, содержащий эту точку.

2. Софрмулируйте ε-определение окрестности точки $x \in R$

ε-Окрестностью $U_{(\varepsilon, x0)}$ точки x_0 называют множество точек, расстояние от которых до точки x_0 не больше ε.

$U_{(\varepsilon, x0)} = (x - \varepsilon; x+\varepsilon)$

3. Сформулируйте определение окрестности $+\infty$

Окрестностью $+\infty$ называют интервал вида $(a; +\infty)$, где a – произвольное действительное число.

4. Сформулируйте определение окрестности $-\infty$

Окрестностью $-\infty$ называют интервал вида $(-\infty; a)$, где a – произвольное действительное число.

5. Сформулируйте определение окрестности ∞

Окрестностью ∞ называют объядинение двух интервалов $(-\infty; a) \cup (a; +\infty)$, где a – произвольное действительное число.

6. Сформулируйте определение предела последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

7. Сформулируйте определение сходящейся последовательности

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, иначе расходящейся.

8. Сформулируйте определение ограниченной последлвательностьи

Последовательность $\{x_n\}$, ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной.

9. Сформулируйте определение монотонной последовательности

Монотонная последовательность – это последовательность, элементы которой с увеличением номером не убывают или не возрастают.

10. Сформулируйте определение возрастающей последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если каждый следующий элемент этой последовательности превашает предыдущий.

11. Сформулируйте определение убывающей последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей, если каждый предыдущий элемент этой последовательности превашает следующий за ним.

12. Сформулируйте определение не возрастающей последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется не возрастающей, если каждый следующий элемент этой последовательности не превосходит предыдущего.

13. Сформулируйте определение не убывающей последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется не возрастающей, если каждый предыдущий элемент этой последовательности не превосходит следующего за ним.

14. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности

Фундаментальная последовательность – это последовательность такая, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall i, j > 0$ выполнено $\left|a_i - a_j\right| < \varepsilon$.

15. Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности

Для того, чтобы последовательность была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

16. Сформулируйте определение по Гейне предела функции

A – предел функции f(x) в точке x_0 = a, если для каждой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке a, последовательность $f(x_n)$ сходит к A.

$\forall x_n;\ x_n \neq a;\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \to \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$

17. Сформулируйте определение бесконечно малой функции

Функции f(x) называется бесконечно малой при x → x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

18. Сформулируйте определение бесконечно большой функции

Функции f(x) называется бесконечно большой при x → x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

19. Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка

f(x) и g(x) являются бесконечно малыми функциями одного порядка при x → x_0, если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$

20. Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций

f(x) и g(x) не сравнимы при x → x_0, если x → x_0 не существует предела $\lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

21. Сформулируйте определение эквавилентных бесконечно малых функций

f(x) и g(x) называется эквавилентными бесконечно малых функций при x → x_0, если $\lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

22. Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой

Пусть f(x) и g(x) – бесконечно малые функции при x → x_0

Если при некотором k бесконечно малые f(x) и $(g(x))^к$ являются бесконечно малыми одного порядка, то говорят, что f(x) имеет порядок k по сравнению с g(x) при $x \to x_0$

23. Сформулируйте определение приращения функции

Приращением аргумента в точке x_0 называется разность $\Delta x = x - x_0$, где точка x лежит в окрестности точки x_0.

Приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx, называется разность $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

24. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое)

У = f(x) непрерывная в точке x = a, если:

- Определит в точке x = a
- Существует конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$

25. Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

y = f(x) непрерывная на интервале (a, b), если $\forall x \in (a, b)$, f(x) непрерывная.

26. Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

y = f(x) непрерывная на отрезке [a, b], если

- f(x) непрерывная на интервале (a, b)
- $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$

27. Сформулируйте определение точки разрыва

Точка разрыва функции – точка, в которой нарушается условие непрерывности .

28. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва

Точка разрыва x_0 называется точкой устранимого разрыва , если односторонные пределы в этой точке конечны и равны, но не равны $f(x_0)$ или не существует $f(x_0)$.

29. Сформулируйте определение точки разрыва I-ого рода

Точки разрыва I-ого рода ⇔ $\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) \neq \infty$

30. Сформулируйте определение точки разрыва II-ого рода

Точки разрыва II-ого рода, если в этой точке:

$\nexists \lim_{x \to x_0+0} f(x)$ или $\nexists \lim_{x \to x_0-0} f(x)$

или $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$

II) Определение предела по Коши

1. Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \to 0} f(x) = b$, где $b \in R$

Пусть функция f(x) определена в проколотой окрестности точки x = 0.
Число b нызывается пределом функции f(x) при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что:

$0 < |x| < \delta(\varepsilon)$, то $|f(x) - b| < \varepsilon$

2. Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, где $a \in R$

Пусть функция f(x) определена в проколотой окрестности точки x = a.
Для любого $M > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(M)$ такое, что:

$0 < |x - a| < \delta$, то $f(x) > M$

3. Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что:

$|x| > N$, то $|f(x)| < \varepsilon$

4. Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in R$

Для любого $M > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(M)$ такое, что:

$0 < a - x < \delta$, то $f(x) < -M$