кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 1.

Введение в курс. Элементы логики. Высказывания и предикаты, операции над ними. Кванторы. Построение отрицания сложного высказывания. Теорема как импликация. Прямая, обратная и противоположная теоремы, связь между ними. Доказательство от противного. Метод математической индукции. Бином Ньютона. Неравенство Бернулли.

ОЛ-1 гл. 1.

При изучении курса математики мы будем иметь дело с различными высказываниями. Высказыванием называют предложение, относительно которого имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Пример. Пусть имеются предложения:

$$A = \{\text{дважды два — четыре}\},$$

$$B = \{\text{семью семь — сорок семь}\},$$

$$C = \{\text{всяк кулик своё болото хвалит}\}.$$

Очевидно, A и B — высказывания. Относительно предложения C этого сказать нельзя, во всяком случае до уточнения его смысла.

Над высказываниями можно производить различные операции. Пусть A — высказывание. Отрицая то, что утверждается в A, мы получим новое высказывание. Отрицание $\neg A$ высказывания A истинно, если A ложно и ложно, если A истинно. Из двух высказываний A и $\neg A$ одно всегда истинно, а другое ложно. Для высказывания A из рассмотренного выше примера имеем

$$\neg A = \{\text{дважды два — не четыре}\}.$$

Имея два высказывания A и B мы можем рассмотреть их конъюнкцию $A\,\&B$, т.е. высказывание, которое истинно, если истинны оба высказывания A и B и ложно во всех остальных случаях. Для фактического получения конъюнкции соответствующие предложения соединяют союзом « и ». Например, для высказываний A и B из рассмотренного выше примера имеем

$$A\,\&B \ = \ \{\text{дважды два — четыре, и семью семь — сорок семь}\}.$$

Очевидно, в данном случае $A\,\&B$ — ложное высказывание.

Дизъюнкцией $A \vee B$ высказываний A и B называют высказывание, которое ложно, если ложны оба высказывания A и B и истинно во всех остальных случаях. Для получения высказывания $A \vee B$ те предложения, с помощью которых выражены A и B, соединяют союзом « или ». Например, для высказываний A и B из нашего примера получаем:

$$A \vee B \;=\; \{\text{дважды два — четыре, или семью семь — сорок семь}\}.$$

Это — истинное высказывание.

Рассмотрим ещё импликацию $A \Rightarrow B$, которая считается ложным высказыванием, если A истинно, а B ложно и истинным во всех остальных случаях. При построении импликации используют двойной союз « если ... то ». Например,

$$A \Rightarrow B \;=\; \{\text{если дважды два — четыре, то семью семь — сорок семь}\}.$$

Это — ложное высказывание. Зато высказывание

$$B \Rightarrow A \;=\; \{\text{если семью семь — сорок семь, то дважды два — четыре}\}$$

истинно.

Для дальнейшего нам потребуется понятие множества. В математике рассматривают самые разные множества: множества чисел, точек, геометрических фигур, букв и т.д. Всякое множество X состоит из элементов; запись $x \in X$ означает, что x есть элемент множества X. Отрицание последнего высказывания записывают так: $x \notin X$.

Рассмотрим следующие предложения:

$$A = \{x = 2\}, \quad B = \{x^2 = 4\}.$$

Эти предложения высказываниями не являются. Однако, если вместо x подставлять конкретные числа (т.е. элементы множества $\mathbb{R}$ действительных чисел), то мы будем каждый раз получать высказывания. Такие предложения, зависящие от элементов x некоторого множества X и превращающиеся в высказывания при подстановке вместо x конкретных элементов этого множества, называются неопределёнными высказываниями (по-учёному — «предикатами»).

С помощью квантора общности $\forall$ из неопределённого высказывания $A(x)$ можно построить высказывание

$$\forall x A(x), \tag{1}$$

которое считается истинным, если $A(x)$ истинно при всех x (из множества X) и ложным в противном случае (т.е. если $A(x)$ ложно хотя бы при одном $x \in X$). Квантор $\forall$ часто используют для замены слов «для любого», «для всех», «любой» и т.п.

Если в множестве X существует хотя бы один элемент x, для которого высказывание $A(x)$ истинно, то истинным считается и высказывание, полученное с помощью квантора существования $\exists$:

$$\exists x A(x). \tag{2}$$

Это высказывание считается ложным лишь в случае, когда $A(x)$ ложно при всех $x \in X$. Квантор существования часто используют для замены слов «существует», «найдётся» и т.п.

Отрицание высказывания (1) очевидно, заключается в том, что $A(x)$ ложно хотя бы при одном $x \in X$. Записать это можно так:

$$\exists x \neg A(x).$$

Мы видим, что при построении отрицания высказывания (1) можно действовать формально: надо заменить квантор общности квантором существования, а высказывание $A(x)$

— его отрицанием. Аналогичным формальным приёмом можно построить и отрицание высказывания (2):

$$\forall x \neg A(x).$$

В математике рассматривают различные теоремы. Часто теорема имеет вид

$$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)), \tag{3}$$

где x есть элемент некоторого множества X. Мы будем говорить, что теорема (3) справедлива, если для любого элемента $x \in X$, для которого истинно высказывание $A(x)$, истинно также и высказывание $B(x)$. В записи (3) неопределённое высказывание $A(x)$ называют условием теоремы, $B(x)$ — её заключением.

Пример. Пусть, как и выше, $A(x) = \{x = 2\}$, $B(x) = \{x^2 = 4\}$; в качестве X возьмём множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. При таких $A(x)$, $B(x)$ и X теорема (3) справедлива. На «обычном» языке эта «теорема» звучит так: если действительное число равно двум, то его квадрат равен четырём.

В дальнейшем теорему вида (3) будем записывать короче:

$$A \Rightarrow B. \tag{4}$$

В такой записи оба высказывания A и B называются условиями. При этом (в случае, если теорема справедлива) A называется достаточным условием B, а B — необходимым условием A.

Пример. Теорему из предыдущего примера можно сформулировать так: для того, чтобы квадрат действительного числа равнялся четырём, достаточно, чтобы это число равнялось двум. Но можно и по-другому: для того, чтобы число равнялось двум, необходимо, чтобы его квадрат равнялся четырём. Если в этих формулировках слова "достаточно" и "необходимо" поменять местами, то мы получим неверные утверждения.

Обратной теоремой для (4) называется теорема

$$B \Rightarrow A. \tag{5}$$

Если теорема (4) справедлива, то отсюда не следует, вообще говоря, что справедлива обратная теорема (5). Для теоремы из рассмотренного выше примера обратная теорема выглядит так: если квадрат действительного числа равен четырём, то это число равно двум. Ясно, что эта последняя теорема неверна.

В случае, когда справедливы обе теоремы (4) и (5), их обычно объединяют в одну теорему вида

$$A \Leftrightarrow B, \tag{6}$$

где символ $\Leftrightarrow$ означает эквивалентность соответствующих высказываний. При этом также говорят, что

A необходимо и достаточно для B;

A тогда и только тогда, когда B;

A если и только если B;

A в том и только в том случае, когда B;

A равносильно B.

Условие B называют в этом случае необходимым и достаточным условием A (и наоборот). Доказательство теоремы (6) должно состоять из доказательства необходимости, т.е. доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ и доказательства достаточности, т.е. доказательства теоремы $B \Rightarrow A$.

Иногда рассматривают ещё теорему $\neg A \Rightarrow \neg B$, которая называется противоположной теореме (4). Нетрудно проверить, что в противоположной теореме утверждается то же самое, что и в обратной теореме $B \Rightarrow A$. В самом деле, пусть обратная теорема $B \Rightarrow A$ справедлива, и пусть $\neg A$ истинно. Тогда A ложно, и из справедливости обратной теоремы следует, что B ложно, т.е. $\neg B$ истинно, и теорема $\neg A \Rightarrow \neg B$ справедлива. Обратно, пусть теорема $\neg A \Rightarrow \neg B$ справедлива, и пусть B истинно. Тогда $\neg B$ ложно, а поэтому ложно и $\neg A$. Следовательно, A истинно, и теорема $B \Rightarrow A$ справедлива. Аналогично можно проверить, что теорема, обратная противоположной (или, что то же самое, противоположная обратной), т.е. теорема $\neg B \Rightarrow \neg A$, эквивалентна исходной теореме $A \Rightarrow B$.

При доказательстве теорем часто применяют метод «от противного». Чтобы доказать теорему $A \Rightarrow B$ предполагают, что B неверно, т.е. справедливо $\neg B$, и приводят это предположение к противоречию. Преимущество здесь достигается за счёт использования в рассуждениях дополнительного утверждения $\neg B$ (надо было бы сказать «дополнительного истинного высказывания $\neg B$», но мы не будем слишком скрупулёзно следовать требованиям языка математической логики, поскольку это ведёт к тяжеловесным формулировкам).

$*$ **Пример** (здесь и далее звёздочками выделен необязательный материал)**.** Докажем методом от противного, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Предположим противное: пусть такое рациональное число p/q существует; при этом мы можем считать эту дробь несократимой. Если $p^2/q^2 = 2$, то $p^2 = 2q^2$, и число p должно быть чётным, т.е. $p = 2r$. Тогда $4r^2 = 2q^2$, $2r^2 = q^2$, и q — также чётное число. Таким образом, p и q — чётные числа, что противоречит несократимости дроби p/q, и наше утверждение доказано. $*$

Если в теореме утверждается, что некоторое высказывание $A(n)$ истинно при всех натуральных значениях n, т.е. при $n = 1, 2, 3, \dots$, то для доказательства можно применить метод математической индукции. Он состоит в следующем. Сначала проверяется истинность $A(1)$. Затем, исходя из предположения об истинности $A(n)$, доказывается, что истинным является и высказывание $A(n+1)$. Если перечисленные действия удаётся осуществить, то теорема считается доказанной.

Пример. С помощью индукции можно доказать неравенство Бернулли: при любом $x \geqslant -1$ и при любом натуральном n

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

$*$ Пусть $n = 1$; в этом случае имеем неравенство $1 + x \geqslant 1 + x$, которое, очевидно, справедливо. Пусть доказываемое неравенство справедливо при некотором натуральном n. Умножим обе его части на неотрицательное по условию число $1 + x$; имеем

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x,$$

т.е. $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$. По индукции неравенство доказано. $*$

Обобщением известных школьных формул $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ является формула бинома Ньютона, т.е. равенство

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k, \tag{7}$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!}$ — биномиальные коэффициенты. Они определены при неотрицательных целых n и при $0 \leqslant k \leqslant n$; при этом $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$. $*$ Основное свойство биномиальных коэффициентов, используемое при доказательстве формулы (7), состоит в том, что

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

$n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n$. Это равенство проверяется непосредственно:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!(n+1-k)}{(n+1-k)!k!} +$$

$$+ \frac{n!k}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}.$$

Докажем формулу бинома Ньютона по индукции. При $n = 1$ равенство (7), очевидно, справедливо. Пусть оно верно при некотором n. Умножим обе его части на $a+b$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}. \tag{8}$$

В последней сумме новым индексом суммирования будем считать $l = k+1$; тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}a^{n+1-l}b^l.$$

Подставляя это в (8) (и возвращаясь к прежнему обозначению индекса суммирования), получим:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.$$

По индукции формула (7) доказана. $*$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 2.

Множества, операции над ними, их свойства. Множество действительных чисел, его полнота. Промежутки. Окрестности конечной точки и бесконечности. Принцип вложенных отрезков. Ограниченные и неограниченные множества. Точная верхняя и нижняя грани множества.

ОЛ-1 гл. 1.

Предварительно обратимся вновь к общей теории множеств, а именно рассмотрим способы задания множеств. Если множество A конечно, и число элементов в нём не слишком велико, то A можно задать, перечислив его элементы:

$$A = \{a, b, \ldots, c\}.$$

В случае бесконечного множества или множества, содержащего слишком много элементов, такой способ не годится, и множество задают, указывая характеристическое свойство его элементов (т.е. свойство, присущее тем и только тем элементам, из которых состоит данное множество). Например, если множество X состоит из всех элементов x, для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут

$$X = \{x \,|\, P(x)\}$$

Пустое множество $\varnothing$, которое не содержит элементов, пользуясь этим способом, можно задать так:

$$\varnothing = \{x \,|(x \in X)\&(x \neq x)\} = \{x|x \in X,\ x \neq x\},$$

где X — какое-либо множество (любое).

Говорят, что множество A есть подмножество множества B, если для любого $x \in A$ выполняется также включение $x \in B$. В этом случае пишут $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B равны: $A = B$. Рассмотрим стандартные операции над множествами. Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_i — произвольные множества, занумерованные с помощью множества индексов I, то их объединение $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_i.

Назовём пересечением $A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Пересечением любого числа множеств A_i называется совокупность $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_i(как и выше, I есть некоторое множество индексов, с помощью которого занумерованы множества A_i). Операции объединения и пересечения множеств, очевидно, коммутативны и ассоциативны, т.е.

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, эти операции взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Докажем, например, последнее из этих равенств. В соответствии с определением равенства множеств, надо доказать два включения

$$(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{9}$$

и

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C. \tag{10}$$

Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in C$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$, следовательно, $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Если же $x \in C$, то, как и выше, $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, и $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Таким образом, включение (9) доказано.

Пусть теперь $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in C$, то $x \in (A \cap B) \cup C$. Если же $x \notin C$, то $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, и $x \in (A \cap B) \cup C$. Мы видим, что включение (10) также справедливо. Из (9) и (10) следует требуемое равенство.

Рассмотрим ещё разность множеств $A \setminus B$. Так называется множество, состоящие из всех элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B. Часто приходится рассматривать множества, являющиеся подмножествами некоторого основного множества M. В этом случае (т.е. если $A \subset M$) разность $M \setminus A$ называют дополнением множества A до множества M и обозначают $\bar{A}$.

Перейдём теперь к множеству действительных чисел $\mathbb{R}$. Перечислим основные свойства элементов этого множества. Действительные числа можно складывать, получая в качестве суммы вновь действительные числа. При этом для любых действительных чисел a, b, c выполняются равенства:

1) $a + b = b + a$ — сложение коммутативно;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ — сложение ассоциативно;

3) существует 0, т.е. такое число, что $a + 0 = a$ для любого a;

4) у каждого числа a есть противоположное число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$.

Действительные числа можно перемножать, получая в результате вновь действительные числа. При этом

5) $ab = ba$ — умножение коммутативно;

6) $(ab)c = a(bc)$ — умножение ассоциативно;

7) существует единица $1 \neq 0$, т.е. такое число, что для любого a
выполняется равенство $a \cdot 1 = a$;

8) для любого $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, для которого $a \cdot a^{-1} = 1$.

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению:

9) $(a + b)c = ac + bc$.

Множество действительных чисел упорядочено. Это значит, что для любых действительных чисел a и b выполняется одно (и только одно) из соотношений:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b.$$

При этом

10) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ — отношение порядка транзитивно;

11) если $a < b$, то $a + c < b + c$;

12) если $a < b$, и $c > 0$, то $ac < bc$.

Следующее (и последнее) свойство характеризует полноту множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

13) Для любых непустых множеств $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ таких,что для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$, существует число c, которое не меньше любого числа из A и не больше любого числа из B.

В формулировке этого свойства запись $a \leqslant b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$, т.е.

$$(a \leqslant b) \Leftrightarrow ((a < b) \vee (a = b)).$$

Перечисленные свойства полностью определяют множество действительных чисел в том смысле, что из этих свойств следуют и все остальные его свойства.

Напомним, что осью называют прямую, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений. Рассмотрим некоторую ось l. Будем считать, что она расположена горизонтально, а направление на ней выбрано слева направо. Как известно, между множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел и множеством точек оси l можно установить взаимно однозначное соответствие (это означает, что разным числам соответствуют разные точки оси, и каждой точке соответствует хотя бы одно (а на деле в точности одно) действительное число). Для установления такого соответствия надо выбрать на оси l начало отсчёта т.е. точку, которой соответствует число 0 и справа от неё — точку 1 (точнее, точку, которой соответствует число 1). В результате на оси появится единичный отрезок, с помощью которого можно измерять расстояния между её точками. Затем каждому числу $x \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие точку на расстоянии $|x|$ от начала отсчёта слева или справа в зависимости от знака x. Подробности не рассматриваем, т.к. они хорошо известны; напомним лишь определение понятия абсолютной величины (модуля) действительного числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Мы будем использовать геометрический язык, связанный с установленным соответствием: ось l будем называть числовой осью или числовой прямой, действительные числа будем отождествлять с точками этой прямой. Рассмотрим наиболее часто используемые в анализе подмножества $\mathbb{R}$. Интервал (a, b) числовой прямой задаётся так:

$$(a, b) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\, a < x < b\}.$$

Для удобства некоторых формулировок к множеству $\mathbb{R}$ добавляют два элемента $+\infty$ (плюс бесконечность) и $-\infty$ (минус бесконечность). При этом считается, что $-\infty < +\infty$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется двойное неравенство $-\infty < x < +\infty$. Всё же символы $-\infty$ и $+\infty$ не являются действительными числами, и мы не будем производить над ними арифметических операций. С помощью новых символов удобно записывать бесконечные интервалы. Пусть снова a и b — действительные числа. Бесконечные интервалы определяются так:

$$(-\infty, b) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\, x < b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\, x > a\}.$$

Аналогично определяются полуинтервалы (конечные и бесконечные):

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\},$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\},$$

а также отрезки

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Интервалы, полуинтервалы и отрезки называются промежутками числовой прямой. Заметим, что в определениях, подобных рассмотренным выше, часто не указывают включение $x \in \mathbb{R}$ (если и так ясно, что x — действительное число). Например, отрезок можно определить так:

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Окрестностью $U(x)$ точки x называют любой интервал, содержащий эту точку; ε-окрестностью точки x (при положительном ε) называют интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Окрестностями точек $-\infty$ и $+\infty$ называют соответственно интервалы вида $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число. Иногда рассматривают бесконечность ∞ «без знака». Окрестностью такой бесконечности называют объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

Опираясь на свойство полноты множества действительных чисел (свойство 13 в нашей нумерации), можно доказать лемму о вложенных отрезках.

Лемма. Для любой последовательности

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

вложенных отрезков найдётся точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

$*$ Доказательство. Пусть $I_m = [a_m, b_m]$ и $I_n = [a_n, b_n]$ — два различных отрезка рассматриваемой последовательности. Тогда $a_m \leqslant b_n$. В самом деле, если это не так, т.е. если $a_m > b_n$, то $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, и отрезки I_m и I_n не имеют общих точек, в то время как по условию один из них (тот, у которого номер больше) должен содержаться в другом. Мы видим, что для числовых множеств $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$, т.е. для множеств соответственно левых и правых концов рассматриваемых отрезков, выполнены условия свойства полноты. Поэтому существует число c, для которого $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. c принадлежит всем отрезкам I_n. Лемма доказана. $*$

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Множество X называется ограниченным снизу, если существует число c_1 такое, что $c_1 \leqslant x$ для любого $x \in X$. Аналогично говорят, что X ограничено сверху, если существует число c_2 такое, что $x \leqslant c_2$ для любого $x \in X$. Если множество ограничено как снизу, так и сверху, то оно называется ограниченным. Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным. Можно также определить неограниченное множество как множество, не содержащееся ни в одном отрезке.

Пусть числовое множество X ограничено сверху. Всякое число, не меньшее любого элемента множества X называется верхней границей этого множества. Пусть M — наименьшая из верхних границ множества X. Тогда M называется точной верхней гранью (или супремумом) X; при этом пишут

$$M = \sup X.$$

Очевидно, точная верхняя грань M характеризуется двумя свойствами:

1) для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $x \in X$ такое, что $x > M - \varepsilon$.

Первое из этих свойств означает, что M — верхняя граница множества X, а второе — что M наименьшая из таких границ. Аналогично вводится понятие нижней границы для ограниченного снизу множества X и понятие точной нижней грани (или инфимума) m как наибольшей из всех таких границ; при этом пишут

$$m = \inf X.$$

Точная нижняя грань характеризуется свойствами:

1) для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant m$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $x \in X$ такое, что $x < m + \varepsilon$.

Из свойства полноты множества $\mathbb{R}$ следует, что у всякого непустого ограниченного сверху числового множества существует точная верхняя грань, а у всякого непустого ограниченного снизу числового множества существует точная нижняя грань.

$*$ Докажем существование точной верхней грани. Пусть X — непустое ограниченное сверху числовое множество; через Y обозначим множество всех его верхних границ. Ясно, что $Y \neq \varnothing$. Поскольку для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$, мы можем применить свойство полноты. Согласно этому свойству существует число M такое, что

$$x \leqslant M \leqslant y \tag{11}$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Докажем, что $M = \sup X$. В самом деле, т.к. $x \leqslant M$ для любого $x \in X$, то M является верхней границей множества X, а т.к. $M \leqslant y$ для любого $y \in Y$, то M — наименьшая из таких границ. Поэтому M есть точная верхняя грань множества X. Доказательство закончено. $*$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 3.

Функция (отображение), её график, аргумент и значение функции, область определения, множество значений, образ и прообраз. Сумма, произведение и композиция функций. Обратные функции. Свойства числовых функций (монотонность, ограниченность, чётность, периодичность). Класс элементарных функций. Примеры функций, не являющихся элементарными.

ОЛ-1 гл. 2, 3.

Пусть X и Y — произвольные множества. Говорят, что задана функция f, определенная на множестве X со значениями в Y, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие элемент $f(x)$ множества Y; при этом пишут

$$f : X \to Y. \tag{1}$$

Множество X в (1) называется областью определения функции f. Областью значений этой функции называется подмножество множества Y, состоящее из тех (и только тех) его элементов y, для которых $y = f(x)$ при некотором $x \in X$; область значений обычно обозначают $f(X)$. Символ x, которым обозначается общий элемент множества X называется аргументом функции или независимой переменной. Элемент $f(x_0) \in Y$, поставленный в соответствие элементу $x_0 \in X$, называется значением функции f в точке x_0. Часто вместо (1) пишут $y = f(x)$. Заметим, что в соответствии со сказанным у последней записи есть и другой смысл: y есть значение функции f в точке x. Как правило, в конкретных случаях бывает ясно, о чем идет речь, и к недоразумениям такая двусмысленность не приводит. При изменении аргумента значения функции $y = f(x)$, вообще говоря, меняются. По этой причине y называют зависимой переменной. Следует иметь в виду, что слово функция имеет много синонимов: отображение, преобразование, соответствие, оператор, функционал и др. В общей теории функций чаще используется термин отображение. На первых порах мы почти исключительно будем заниматься действительнозначными функциями действительной переменной, т.е. в общем определении функции (1) множества X и Y будут подмножествами числовой прямой. Такие функции мы будем для краткости называть числовыми.

Рассмотрим плоскость, на которой введена декартова прямоугольная система координат. Каждой точке плоскости можно известным способом поставить в соответствие упорядоченную пару действительных чисел (x, y) — ее координаты. В результате получим взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Графиком функции

$$f : X \to \mathbb{R}$$

называется множество точек плоскости

$$\Gamma = \{(x, y) |\, x \in X,\ y = f(x)\}.$$

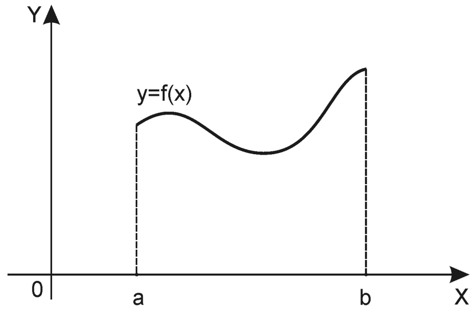
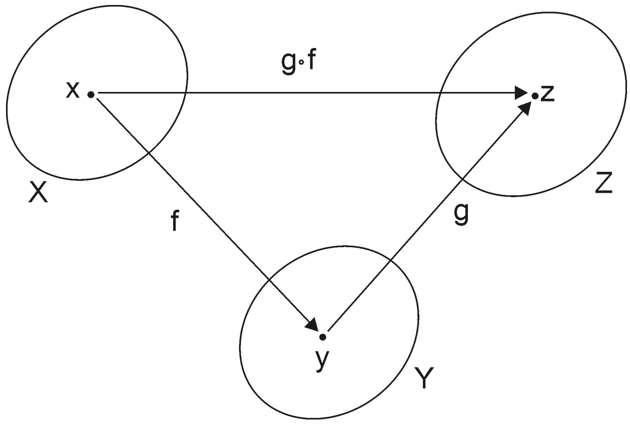


График функции дает наглядное представление о поведении функции.



Пусть даны два отображения

$$f : X \to Y \qquad \text{и} \qquad g : Y \to Z.$$

С их помощью можно построить новое отображение

$$g \circ f : X \to Z,$$

которое элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $g(f(x)) \in Z$. Такая операция над функциями называется композицией; функцию $z = g(f(x))$ называют при этом сложной функцией.

Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если для любого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Это означает, что f отображает X **на** Y (в общем случае X отображается **в** Y). Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если для любых элементов x_1 и x_2 множества X из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если отображение одновременно сюръективно и инъективно, то оно называется биективным отображением (или взаимно однозначным соответствием). Множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, называются равномощными. Если равномощные множества конечны, то они состоят из одного и того же числа элементов. Мощностью (или кардинальным числом) называется то общее, что есть у равномощных множеств. Это — определение на интуитивном уровне; точное определение мы не рассматриваем. Мощность множества A обозначается через $\operatorname{card} A$. Если множества X и Y равномощны, то пишут $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Если X равномощно некоторому подмножеству Y_1 множества Y, но при этом X и Y не равномощны, то пишут $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

Пример. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n чётное число $2n$. В результате получим взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{N}$

натуральных чисел и множеством чётных чисел. Возможность для множества быть равномощным своей части характерна именно для бесконечных множеств.

Множество, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется счётным. Если X счётно, то существует взаимно однозначное соответствие между X и $\mathbb{N}$. Если при этом натуральному числу n соответствует элемент x_n, то все элементы множества X можно расположить в виде последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Поскольку $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, то $\operatorname{card} \mathbb{N} \leqslant \operatorname{card} \mathbb{R}$. На деле, однако, $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$, т.е. множество $\mathbb{R}$ счётным не является. $*$ Чтобы доказать это, рассмотрим интервал $(0,1)$ числовой прямой. Каждое число x этого интервала можно записать в виде бесконечной десятичной дроби $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Если x допускает две различные записи такого вида, выберем, например, ту из них, которая не содержит цифру 9 в качестве периода. Предположим, что рассматриваемый интервал — счётное множество. Тогда все числа этого интервала можно записать в виде последовательности (в нашей записи — в столбик):

$$\begin{gathered}
0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots, \\
0,a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0,a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{gathered}$$

Рассмотрим число $x_0 = 0,a_1\,a_2\ldots a_n\ldots$, у которого на n-м месте после запятой находится цифра

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_{nn} \neq 1, \\ 2, & \text{если} \quad a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Ясно, что $x_0 \in (0,1)$ и не равно ни одному из чисел написанной последовательности. Таким образом, числа интервала $(0,1)$ нельзя записать в виде последовательности, т. е. $(0,1)$ — несчётное множество. Отсюда следует, что несчётным является и множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Если бы это было не так, мы бы выписали в виде последовательности все действительные числа, вычеркнули бы числа, не принадлежащие интервалу $(0,1)$, и получили бы последовательность всех чисел этого интервала, что, как мы видели, невозможно. $*$

Обратимся к числовым функциям. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется возрастающей, если из того, что $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, всегда следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ или $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то получим определение соответственно убывающей, неубывающей и невозрастающей функций. Все такие функции называются монотонными; если неравенства в определениии строгие, то и функции называются строго монотонными.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется ограниченной снизу на множестве $A \subset X$, если существует число c_1 такое, что для любого $x \in A$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant c_1$. Аналогично определяется функция, ограниченная сверху (на множестве A). Если существуют числа c_1 и c_2 такие, что $c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2$ для всех $x \in A$, то функция f называется ограниченной на A.

Рассмотрим теперь функцию f, определённую на симметричном относительно начала координат множестве X. Симметричность в данном случае означает, что если $x \in X$, то и $-x \in X$. Функция f называется чётной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. Если в этом определении $f(x) = -f(-x)$, то функция f называется нечётной.

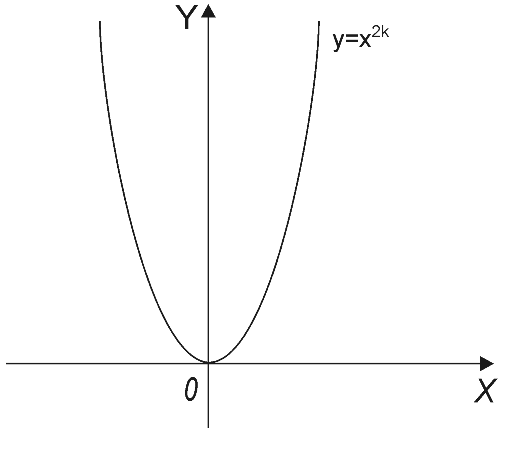
Пусть T — некоторое ненулевое действительное число (обычно его считают положительным), и пусть $X \subset \mathbb{R}$ таково, что из $x \in X$ следует включение $x + kT \in X$ для любого $k \in \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется T-периодической, если $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in X$.

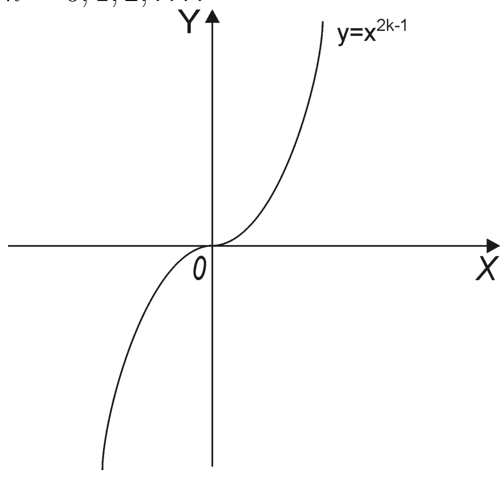
Обратимся снова к общей теории функций. Пусть $f : X \to Y$ – биективное отображение. Поскольку в этом случае f сюръективно, то для любого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$, а поскольку f инъективно, то такой элемент ровно один.Таким образом определено отображение $f^{-1} : Y \to X$, которое произвольному элементу $y \in Y$ ставит в соответствие тот единственныый элемент x множества X, для которого $y = f(x)$. Отображение f^{-1} называется обратным по отношению к f. Нетрудно проверить, что $f^{-1} : Y \to X$ также является биективным отображением, обратным для которого служит отображение f.

Чтобы применить эти общие соображения к числовым функциям, заметим, что возрастающая или убывающая (т.е. строго монотонная) функция $f : X \to Y$ осуществляет биективное отображение множества X на свою область значений $f(X) \subset Y$. В самом деле, сюръективность здесь очевидна, а инъективность следует из того, что разным числам x_1 и x_2 из X ставятся в соответствие разные числа $f(x_1)$ и $f(x_2)$ из $f(X)$. Действительно, если $x_1 \neq x_2$, и, например, $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_2)$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция f, но в обоих случаях $f(x_1) \neq f(x_2)$.

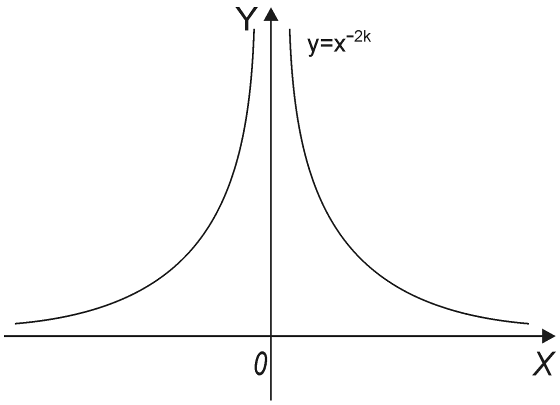
Таким образом, для строго монотонной функции $f : X \to Y$ всегда существует обратная функция $f^{-1} : f(X) \to X$.

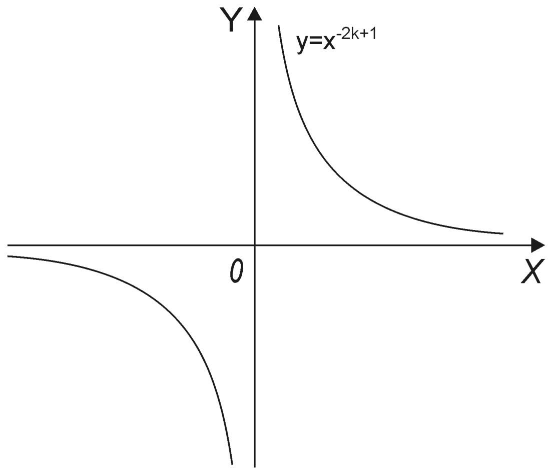
Основными элементарными функциями называются следующие функции: степеннная $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; показательная $y = a^x$, $a > 0$; логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Рассмотрим графики этих функций и некоторые их свойства. Пусть дана степенная функция $y = x^\alpha$, и пусть α – натуральное число. Такая функция определена при всех действительных x; она является чётной при $\alpha = 2k$ и нечётной при $\alpha = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.



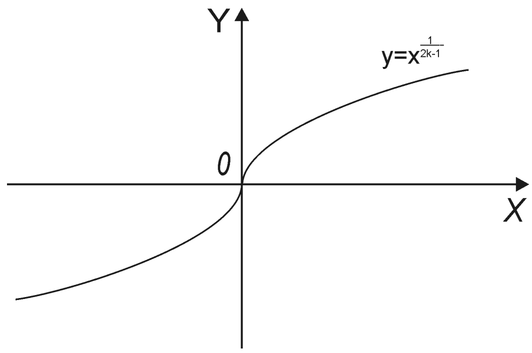


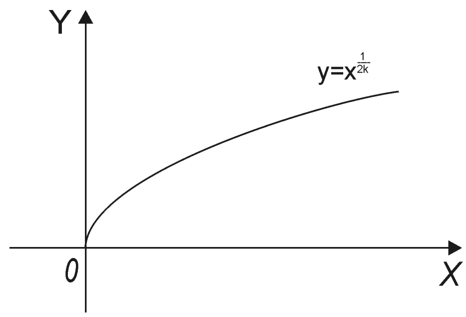
Пусть α – отрицительное целое число; в этом случае степенная функция не определена при $x = 0$.



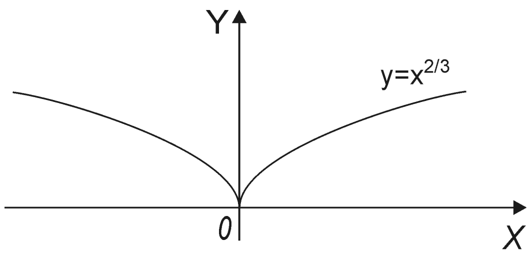


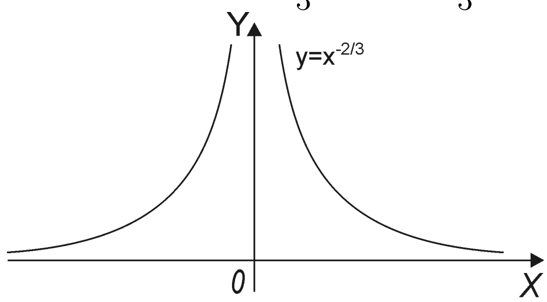
Если $\alpha = \dfrac{1}{2k-1}$, то функция $y = x^\alpha$ определена при всех x; если $\alpha = 2k$ — то лишь при неотрицательных x $(k = 1, 2, \ldots)$.



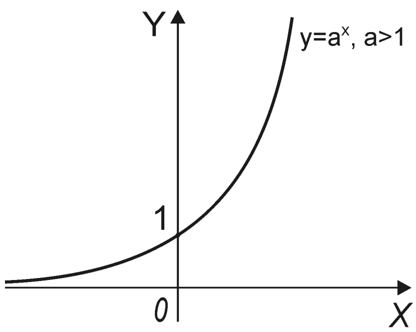


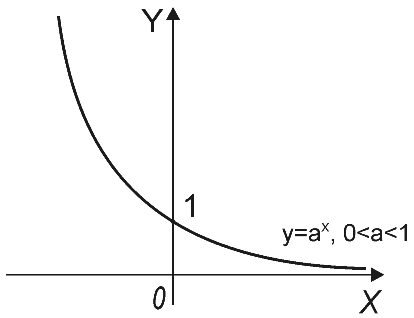
Для других дробных показателей рассмотрим лишь случаи $\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\alpha = -\dfrac{2}{3}$.



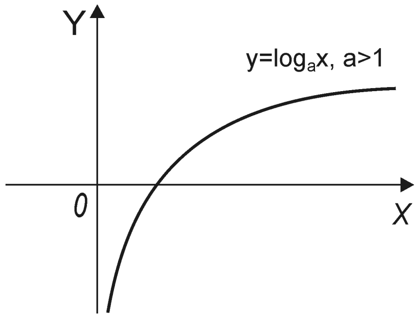


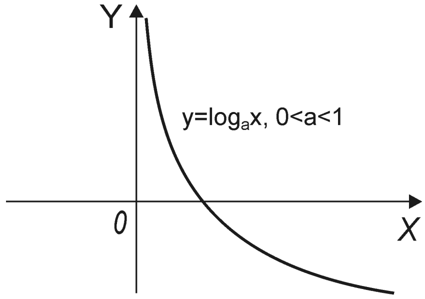
Для показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, важно различать случаи $0 < a < 1$ и $a > 1$. Случай $a = 1$ не представляет интереса.



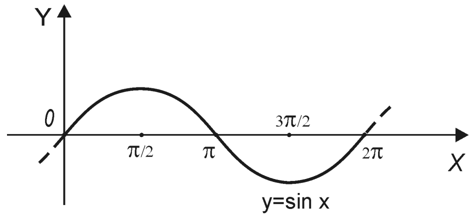


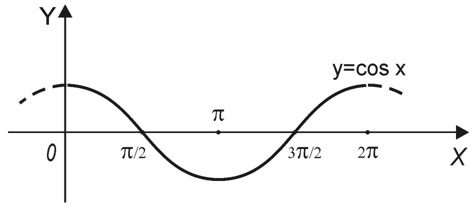
Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, определена при $x > 0$ и является обратной по отношению к соответствующей показательной функции. Ясно, что если точка (x, y) лежит на графике функции $y = y(x)$, то точка (y, x) лежит на графике соответствующей обратной функции (и наоборот). Поэтому графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Зная, как выглядит график показательной функции, нетрудно, пользуясь указанным свойством, нарисовать график логарифмической функции.



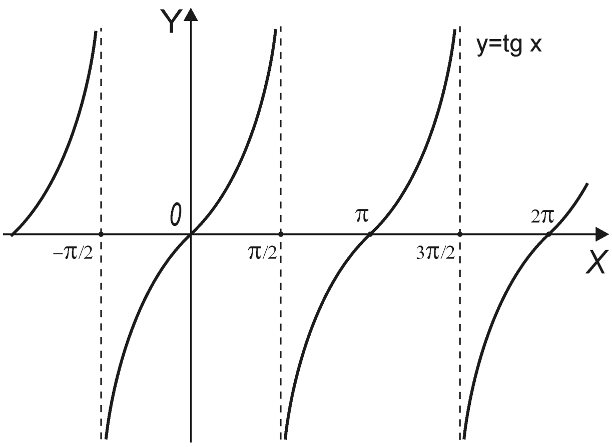


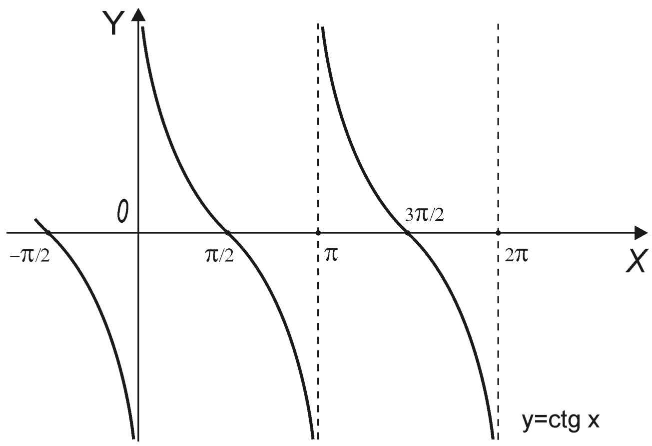
Поскольку функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются 2π-периодическими, то достаточно изобразить графики этих функций на каком-либо отрезке длины 2π, например на $[0, 2\pi]$, а затем продолжить эти графики «по периодичности». Тождество $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ показывает, что график косинуса получается из графика синуса сдвигом влево на $\pi/2$ единиц.





Тангенс и котангенс являются $\pi-$ периодическими функциями; их графики изобразим соответственно на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(0,\ \pi)$, а затем продолжим «по периодичности».





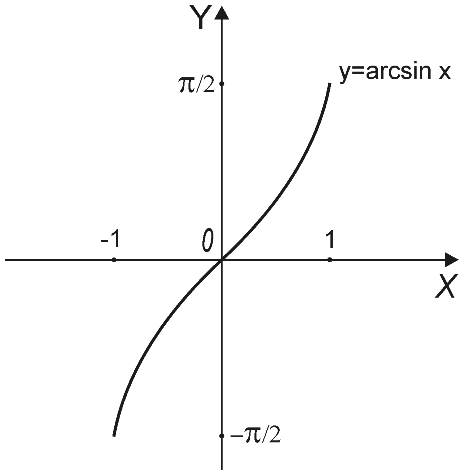
Обратимся вновь к общей теории функций. Пусть дано отображение $f : X \to Y$, где X и $Y-$ произвольные множества, и пусть $A \subset X$. Ограничением $f|_A$ отображения f на множество A называется отображение $f|_A : A \to Y$, для которого $f|_A(x) = f(x)$ для любого $x \in A$. Поскольку функция $y = \sin x$ не является монотонной, то мы рассмотрим ограничение этой функции на отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, т.е. в обозначениях общей теории функций, рассмотрим функцию

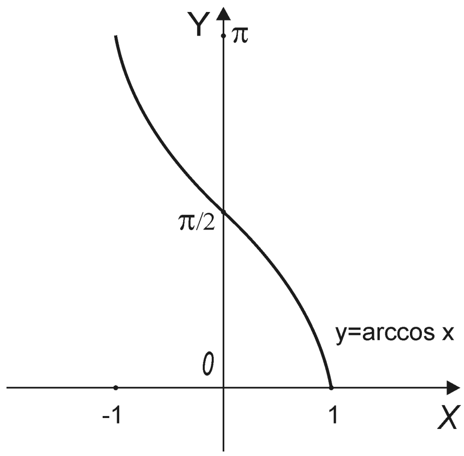
$$\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1].$$

Эта функция возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, и для неё существует обратная функция

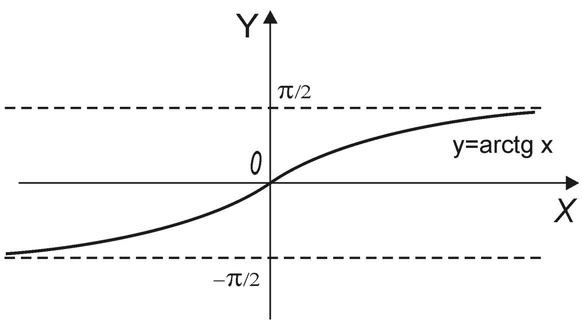
$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

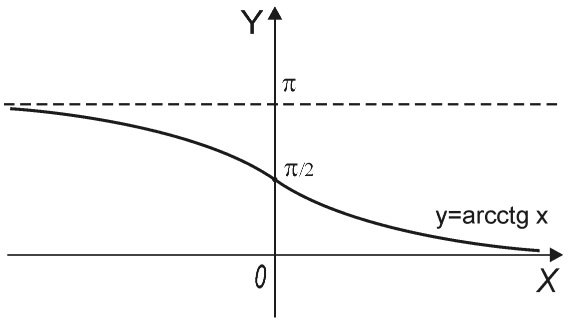
причем значением арксинуса в точке $x \in [-1, 1]$ служит то единственное число $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, для которого $x = \sin y$. График арксинуса можно построить, пользуясь тем, что он симметричен графику синуса относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Аналогично для получения функции, обратной косинусу, рассматривают ограничение косинуса на отрезок $[0, \pi]$. На этом отрезке косинус убывает, и обратная функция существует.





Для получения арктангенса и арккотангенса рассматривают ограничения тангенса и котангенса соответственно на интервалы $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(0, \pi)$, на которых указанные функции строго монотонны.





Всякая функция, которая может быть задана с помощью формулы $y = f(x)$, содержащей конечное число арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) над основными элементарными функциями и композиций, называется элементарной. Примерами таких функций могут служить $y = \sin x^2$, $y = \sqrt{x^2 + \operatorname{arctg} x}$ и т. п.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 4.

Числовая последовательность и её предел. Основные свойства пределов последовательностей (предел постоянной, единственность предела). Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Ограниченность сходящейся последовательности. Признаки сходимости последовательностей. Критерий Коши, фундаментальная последовательность. Сходимость ограниченной монотонной последовательности. Число е.

ОЛ-1 гл. 6.

Последовательностью называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число x_n, то это число называется n-м элементом последовательности; n называют номером элемента x_n. Последовательность можно задать, выписав все её элементы

$$x_1,\ x_2 \ldots, x_n, \ldots;$$

используется и краткая запись $\{x_n\}$.

Напомним известные свойства неравенств, связанных с абсолютными величинами. Неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$; для любых двух действительных чисел x и y выполняются неравенства $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$; модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы их модулей: $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

Рассмотрим теперь понятие предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $x_n \longrightarrow a$ при $n \longrightarrow \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Поскольку неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то все элементы сходящейся последовательности за исключением конечного их числа при любом $\varepsilon > 0$ лежат в ε-окрестности точки a.

Примеры. 1. Не всякая последовательность имеет предел. Пусть, например, $x_n = n$. Ясно, что за пределами 1-окрестности $(a - 1,\ a + 1)$ любого числа a лежит бесконечно много элементов данной последовательности. Поэтому ни одно число не может служить её пределом, предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

2. Пусть $0 < q < 1$, и пусть $x_n = q^n$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Предварительно рассмотрим понятие целой части числа. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Из этого определения следует, что $[x] \leqslant x < [x]+1$. Вернёмся к последовательности $x_n = q^n$. Неравенство $q^n < \varepsilon$, очевидно, эквивалентно неравенству $n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg q}$. Поэтому при выполнении последнего неравенства имеем $|0 - q^n| = q^n < \varepsilon$. В качестве номера N из определения предела можно взять $N = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg q}\right] + 1$.

Рассмотрим теоремы об основных свойствах сходящихся последовательностей.

Теорема (*о пределе постоянной*). Если $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Доказательство. Пусть задано положительное ε. Возьмём $N = 1$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем $|c - x_n| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. В соответствии с определением предела получаем отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Теорема доказана.

Заметим, что в последней теореме на деле N от ε не зависит.

Теорема (*о единственности предела*). Последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Тогда для $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$ найдется номер N_1 такой, что при всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$; найдется также номер N_2 такой, что при всех $n \geqslant N_2$ выполняется неравенство $|b - x_n| < \varepsilon$. Пусть $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$. Тогда $|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \dfrac{2|a-b|}{3}$, т.е. $|a - b| < \dfrac{2}{3}|a-b|$ — противоречие. Теорема доказана.

Выше мы рассматривали ограниченные числовые функции. Напомним соответствующие понятия применительно к последовательностям (которые являются функциями натурального аргумента). Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует число c_1 такое, что $x_n \geqslant c_1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число c_2 такое, что $x_n \leqslant c_2$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной. Пользуясь тем, что неравенство $|x_n| \leqslant c$ равносильно двойному неравенству $-c \leqslant x_n \leqslant c$, нетрудно проверить, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена сверху. Последнее замечание относится и к произвольным числовым функциям: ограниченность функции $f(x)$ на некотором множестве равносильна ограниченности сверху функции $|f(x)|$ на этом множестве.

Теорема (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится, и пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда для положительного числа 1 существует номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < 1$. Отсюда $|x_n| - |a| \leqslant |a - x_n| < 1$, т.е. $|x_n| < |a| + 1$. Следовательно, $|x_n| \leqslant \max(|x_1|, \ldots, |x_N|,\ |a|+1)$, $n = 1, 2, \ldots,$ и последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема доказана.

Рассмотрим арифметические операции над последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда можно составить последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$, называемые соответственно суммой, разностью, произведением и частным исходных последовательностей. В случае частного предполагается, что $\{y_n\}$ состоит из ненулевых чисел.

Теорема (*о сумме и разности сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для положительного числа $\varepsilon/2$ существует номер N_1 такой, что при всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично существует номер N_2 такой, что при $n \geqslant N_2$ выполняется неравенство $|b - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. При $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$ имеем

$$|(a \pm b) - (x_n \pm y_n)| = |(a - x_n) \pm (b - y_n)| \leqslant |a - x_n| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда по определению предела последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$. Теорема доказана.

Теорема (*о пределе произведения сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

Доказательство. Т.к. последовательность $\{x_n\}$ сходится, то эта последовательность ограничена. Следовательно, существует (неотрицательное) число c такое, что $|x_n| \leqslant c$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ существует номер N_1 такой, что при всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$. Для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2(c+1)}$ также найдется номер N_2 такой, что при всех $n \geqslant N_2$ справедливо неравенство $|b - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2(c+1)}$ — это следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Отсюда при $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$ получаем

$$|ab - x_n y_n| = |ab - bx_n + bx_n - x_n y_n| \leqslant |b| \cdot |a - x_n| + |x_n| \cdot |b - y_n| <$$

$$< |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2(c+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $|ab - x_n y_n| < \varepsilon$, если $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$. Теорема доказана.

Теорема (*о пределе частного сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$, а последовательность $\{y_n\}$ состоит из ненулевых чисел. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$, то рассматриваемая теорема станет следствием предыдущей. Заметим сначала, что для положительного числа $\dfrac{|b|}{2}$ найдется номер N_1 такой, что при всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|b - y_n| < \dfrac{|b|}{2}$ — это следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Отсюда $|b| - |y_n| \leqslant |b - y_n| < \dfrac{|b|}{2}$. Поэтому $|b| - |y_n| < \dfrac{|b|}{2}$, и $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$. Из последнего неравенства получаем, что

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$$

при всех $n \geqslant N_1$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для положительного числа $\dfrac{\varepsilon|b|^2}{2}$ существует номер N_2 такой, что при $n \geqslant N_2$ справедливо неравенство $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon|b|^2}{2}$. При $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$ имеем тогда

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{y_n}\right| = \frac{|y_n - b|}{|b| \cdot |y_n|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\left|\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{y_n}\right| < \varepsilon$, если $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$, а отсюда, как отмечалось выше, вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Следующая теорема является основной в теории пределов.

Теорема (*Критерий Коши существования предела последовательности*). Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Поскольку в этой теореме идет речь об эквивалентности двух условий, то ее доказательство естественным образом распадается на две части: доказательство необходимости и доказательство достаточности.

Доказательство необходимости. Требуется доказать, что если последовательность сходится, то она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдется номер N такой, что при $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняются

неравенства
$$|a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ и } \ |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда
$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $|x_m - x_n| < \varepsilon$, если $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$. Мы видим, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Необходимость доказана.

$*$ *Доказательство достаточности.* Здесь требуется доказать, что если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то у этой последовательности существует предел. Докажем сначала, что $\{x_n\}$ ограничена. Для положительного числа 1 существует номер N такой, что при $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < 1$. В частности, при $m = N$ отсюда следует, что при всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_N - x_n| < 1$. Следовательно, $|x_n| - |x_N| \leqslant |x_N - x_n| < 1$, и $|x_n| \leqslant |x_N| + 1$. Поэтому при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$|x_n| \leqslant \max(|x_1|, \ldots, |x_N|,\ |x_N| + 1),$$

и последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому все элементы этой последовательности принадлежат некоторому отрезку $[a_1, b_1]$. Разделим этот отрезок пополам и из двух образовавшихся отрезков $\left[a_1,\ \dfrac{a_1 + b_1}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a_1 + b_1}{2},\ b_1\right]$ выберем тот, который содержит бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности $\{x_n\}$. Обозначим выбранный отрезок $[a_2, b_2]$. Очевидно, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ и $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Далее разделим

$[a_2, b_2]$ пополам и из двух отрезков $\left[a_2, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$ выберем тот, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Вновь выбранный отрезок обозначим $[a_3, b_3]$. Очевидно, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3]$, и $b_3 - a_3 = \dfrac{b_2 - a_2}{2} = \dfrac{b_1 - a_1}{4}$. Продолжая этот процесс выбора отрезков, получим последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, причем $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. По лемме о вложенных отрезках имеется точка c, принадлежащая всем построенным отрезкам. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для этого ε подберем номер N так, чтобы при всех $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполнялось неравенство $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, выберем число k так, чтобы было $\dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$; это возможно, т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = 0$ (см. выше пример на вычисление предела $\lim\limits_{k\to\infty} q^k$ при $0 < q < 1$). Поскольку отрезок $[a_k, b_k]$ содержит (по построению) бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то среди этих элементов найдется такой элемент x_{n_0}, для которого $n_0 \geqslant N$. Поэтому при $n \geqslant N$ имеем $|x_{n_0} - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, т.к. $c \in [a_k, b_k]$, то

$$|c - x_{n_0}| \leqslant b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } |c - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поэтому при всех $n \geqslant N$ имеем

$$|c - x_n| = |c - x_{n_0} + x_{n_0} - x_n| \leqslant |c - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } |c - x_n| < \varepsilon,$$

и последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число c. Достаточность доказана. $*$ Теорема доказана.

Применяя общее определение монотонной функции к последовательности (а последовательность есть по определению (числовая) функция натурального аргумента), приходим к понятию монотонной последовательности. В качестве примера рассмотрим определение неубывающей последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей, если $x_n \leqslant x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема (*о пределе монотонной последовательности*). Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство. Необходимость. Требуется доказать, что если монотонная последовательность сходится, то она ограничена. Мы знаем однако, что это утверждение справедливо и без предположения о монотонности последовательности (см. выше теорему об ограниченности сходящейся последовательности). Необходимость доказана.

$*$ Достаточность. Требуется доказать, что если монотонная последовательность ограничена, то она имеет предел. Рассмотрим это утверждение для неубывающей последовательности $\{x_n\}$. Ограниченность снизу здесь не имеет значения: всякая неубывающая последовательность ограничена снизу, например, числом x_1. Важна ограниченность сверху. Поскольку непустое множество элементов последовательности ограничено сверху, то это множество имеет точную верхнюю грань M. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для точной верхней грани M выполнены, как известно, два условия:
1) $x_n \leqslant M$ для $n = 1, 2, \ldots$;
2) существует элемент x_N последовательности $\{x_n\}$, для которого $x_N > M - \varepsilon$.

Для элементов последовательности x_n, у которых $n > N$ неравенство $x_n > M - \varepsilon$ будет выполнено и подавно, т.к. данная последовательность не убывает, и $x_n \geqslant x_N$. Таким образом, при всех $n \geqslant N$ имеем такое двойное неравенство:

$$M - \varepsilon < x_n \leqslant M.$$

Следовательно, $M-\varepsilon < x_n < M+\varepsilon$, что равносильно неравенству $|M-x_n| < \varepsilon$. Т.к. последнее неравенство выполняется при всех $n \geqslant N$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится (к числу M). Для неубывающей последовательности достаточность доказана; для невозрастающей последовательности доказательство аналогично. Достаточность доказана. $*$ Теорема доказана.

Поскольку в этой теореме представляет интерес лишь утверждение о достаточности, причем для неубывающей (возрастающей) последовательности важна ограниченность сверху, а для невозрастающей (убывающей) последовательности — ограниченность снизу, то обычно используют два следствия из рассмотренной теоремы: если последовательность не убывает (возрастает) и ограничена сверху, то она имеет предел, а если последовательность не возрастает (убывает) и ограничена снизу, то она также имеет предел.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что эта последовательность имеет предел. Для этого рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ и докажем, что она убывает. В самом деле,

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}.$$

Применим неравенство Бернулли:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} \geqslant \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} >$$

$$> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1, \quad \text{т.е.} \quad y_n > y_{n+1}.$$

Таким образом, последовательность $\{y_n\}$ убывает. Очевидно, она ограничена снизу (например, нулём). Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$. Таким же будет и предел исходной последовательности $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

Приближенное значение e таково: $e \approx 2,718281828459045$, причем верны все написанные знаки. Запомнить их нетрудно: после 2,7 пишем два раза год рождения писателя Л.Н.Толстого, а затем углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций

для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 5.

Гиперболические функции, их свойства и графики. Два определения предела функции в точке (предел по Коши и предел по Гейне). Теорема об эквивалентности этих определений. Геометрическая иллюстрация предела. Предел функции в бесконечности. Бесконечные пределы. Единственность предела функции. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел. Теорема о сохранении функцией знака своего предела. Предельный переход в неравенстве. Теорема о пределе промежуточной функции.

ОЛ-1, пп. 7.1, 7.3, 7.4, 7.8

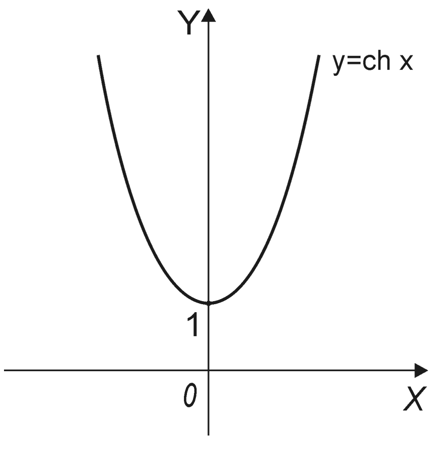
При решении многих задач оказываются полезными гиперболические функции:

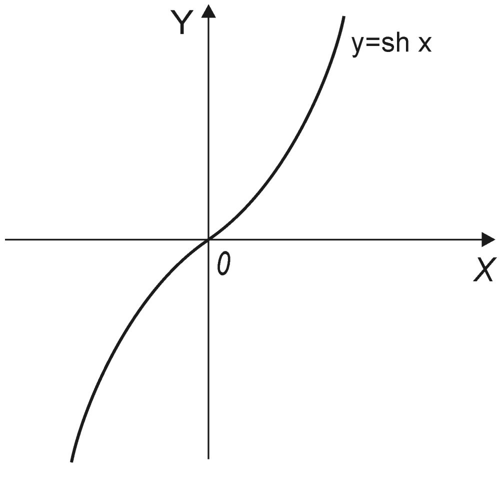
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус;}$$

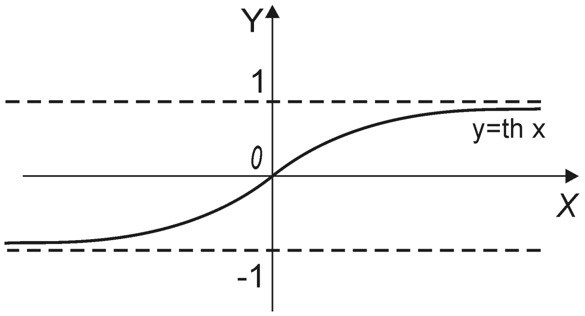
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус;}$$

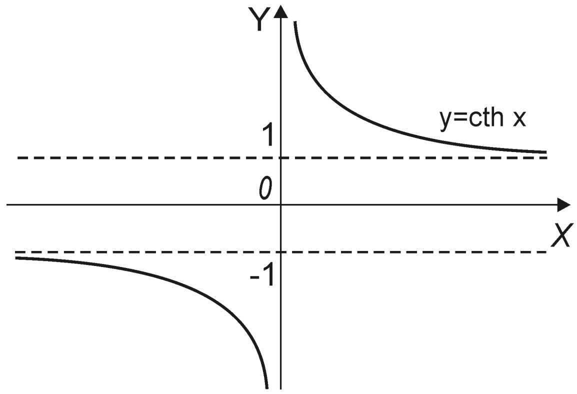
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ — гиперболические тангенс}$$

и котангенс соответственно.









Свойства гиперболических функций похожи на соответствующие свойства тригонометрических функций. Например,

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Из последнего равенства при $x = y$ в случае знака минус получаем

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Это — определение предела по Коши. Определение предела по Гейне выглядит так.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $\mathring{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Эти определения эквивалентны, т.е. с их помощью вводится одно и то же понятие. * Чтобы убедиться в этом, требуется доказать два утверждения.

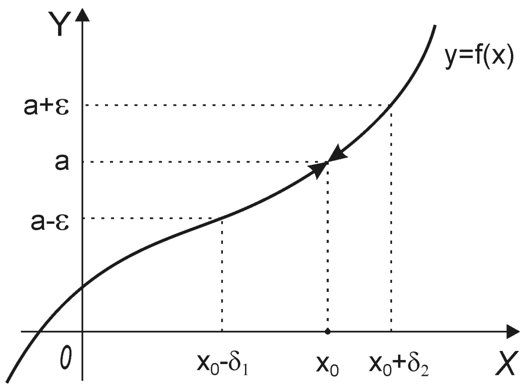
Пусть сначала a является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в смысле определения по Коши. Проверим, что при этом будут также выполнены требования определения по Гейне. Пусть задана последовательность точек $\{x_n\}$, все элементы которой лежат в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Если задано $\varepsilon > 0$, то в соответствии с определением предела по Коши найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}(x_0)$, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то найдется номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - x_0| < \delta$, а тогда $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Таким образом, при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, и число a является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в смысле определения по Гейне.

Предположим теперь, что a является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в смысле определения по Гейне. Доказательство того, что a будет также пределом в смысле определения по Коши удобнее провести методом от противного. Если требования определения по Коши не выполняются, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом положительном δ существует число $x \in \mathring{U}(x_0)$, для которого $|x - x_0| < \delta$, однако $|f(x) - a| \geqslant \varepsilon_0$. Зафиксировав такое ε_0, при каждом $n = 1, 2, \ldots$ подберем такое $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, что $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, и при этом $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon_0$. Из последнего неравенства следует, что a не является пределом последовательности $\{f(x_n)\}$ при $n \to \infty$. Чтобы доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ заметим, что для любого положительного числа ε при некотором натуральном N выполняется неравенство $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Ясно, что тогда при любом $n \geqslant N$

выполняется также неравенство $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$, т.е. $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Это означает , что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Таким образом, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, и в то же время $\{f(x_n)\}$ не стремится к a при $n \to \infty$. Полученное противоречие означает, что доказываемое утверждение справедливо. Эквивалентность двух определений предела доказана. $*$

Если a есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или $f(x) \to a$ при $x \to x_0$. По ходу доказательства эквивалентности двух определений предела мы воспользовались тем, что для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon_0 > 0$ найдется натуральное N такое, что $\frac{1}{N} < \varepsilon_0$, т.е. $N > \frac{1}{\varepsilon_0}$. Справедливость этого утверждения следует из аксиомы Архимеда: для любого вещественного числа существует превосходящее его натуральное число. $*$ Опираясь на существование точной верхней грани у всякого непустого ограниченного сверху множества действительных чисел, можно доказать аксиому Архимеда. В самом деле, пусть существует действительное число E такое, что $n \leqslant \mathrm{E}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (здесь E – заглавная греческая буква эпсилон; эту букву часто используют для обозначения «сколь угодно большого числа», в отличие от буквы ε, служащей для обозначения «сколь угодно малого числа» (например, в определении предела)). Тогда $\mathbb{N}$ — непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$. Следовательно, у этого множества существует точная верхняя грань n_0. Для числа n_0 выполнены два условия:
1) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $n \leqslant n_0$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > n_0 - \varepsilon$.

Взяв $\varepsilon = 1$, получим, что $n > n_0 - 1$, т.е. $n + 1 > n_0$, а т.к. $n + 1$ — натуральное число, то мы получаем противоречие с первым условием. Таким образом, точная верхняя грань n_0 не существует, и множество $\mathbb{N}$ не является ограниченным сверху, т.е. аксиома Архимеда справедлива. $*$



На рисунке показана геометрическая иллюстрация предела: чтобы по заданному $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, о котором говорится в определении предела (по Коши), достаточно взять минимальное из чисел δ_1 и δ_2.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $+\infty$, т.е. на интервале $(x_0, +\infty)$. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число E (не меньшее x_0) такое, что при всех $x > \mathrm{E}$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Это — определение по Коши. Можно сформулировать и определение по Гейне: число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для всякой последовательности точек $\{x_n\}$ интервала $(x_0, +\infty)$ из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Эти определения эквивалентны; доказательство проводится так же, как и в случае $x \to x_0$. Обозначение: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, или $f(x) \to a$ при $x \to +\infty$.

Следует отметить, что в теории последовательностей мы не рассматривали ситуацию из последнего определения, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$, если для любого числа Е существует номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $x_n > \text{Е}$. Аналогично определяются пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Надо только в последнем определении неравенство $x_n > \text{Е}$ заменить соответственно на $x_n < \text{Е}$ и $|x_n| > \text{Е}$.

Эти определения без труда переносятся на случай функций. Запись $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ для функции, определенной в проколотой окрестности точки x_0, означает, что для любого Е найдется положительное число δ такое, что если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $f(x) > \text{Е}$. Если последнее неравенство заменить соответственно на $f(x) < \text{Е}$ или $|f(x)| > \text{Е}$, то получим определения того, что $f(x) \to -\infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Рассмотрим теорему о единственности предела функции.

Теорема (*о единственности предела функции*). Функция $f(x)$, определенная в проколотой окрестности точки x_0, может иметь не более одного предела при $x \to x_0$.

Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, причем $a \neq b$. Для положительного числа $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x)-a| < \varepsilon$, и число $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. Если $\delta = \min(\delta_1,\ \delta_2)$, то при $0 < |x-x_0| < \delta$ имеем $|a-b| = |(a-f(x)) + (f(x)-b)| \leqslant |a-f(x)| + |f(x)-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, т.е. $|a-b| < |a-b|$ — противоречие. Теорема доказана.

Теорема (*о локальной ограниченности функции, имеющей предел*). Для функции $f(x)$, имеющей (конечный) предел при $x \to x_0$ существует проколотая окрестность этой точки, на которой данная функция ограничена.

Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда для положительного числа 1 найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-a| < 1$. Отсюда

$$|f(x)| = |f(x)-a+a| \leqslant |f(x)-a| + |a| < 1 + |a|, \quad \text{т.е.} \quad |f(x)| < 1 + |a|,$$

и мы видим, что $f(x)$ ограничена в проколотой δ-окрестности $(x_0-\delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0+\delta)$ точки x_0. Теорема доказана.

Теорема (*о сохранении функцией знака своего предела*). Пусть предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ положителен. Тогда функция $f(x)$ положительна в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a > 0$. Тогда для положительного числа $\dfrac{a}{2}$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-a| < \dfrac{a}{2}$. Это неравенство равносильно такому: $-\dfrac{a}{2} < f(x) - a < \dfrac{a}{2}$; следовательно, $f(x) > \dfrac{a}{2}$, т.е. данная функция положительна при $x \in (x_0-\delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0+\delta)$. Теорема доказана.

Переформулированные соответствующим образом последние три теоремы остаются в силе и для других рассмотренных выше предельных процессов.

Теорема (*о предельном переходе в неравенстве*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, причем для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то $a \geqslant b$.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы $a < b$, и пусть $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство $|f(x)-a| < \varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$. Аналогично существует $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x-x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|g(x)-b| < \varepsilon$, т.е. $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$. Если $\delta = \min(\delta_1,\ \delta_2)$, и $0 < |x-x_0| < \delta$, то $f(x) < a+\varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = b-\varepsilon < g(x)$, т.е. $f(x) < g(x)$ для указанных значений x — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ заменить на строгое, т.е. если $f(x) > g(x)$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $a > b$. Например, при $|x| < 1,\ x \neq 0$, имеем $|x| > x^2$. В то же время $\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}x^2 = 0$.

Теорема (*о пределе промежуточной функции*). Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что при $0 < |x-x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство $|f(x)-a| < \varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$, а при $0 < |x-x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|h(x)-a| < \varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon < h(x) < a+\varepsilon$. Тогда при $0 < |x-x_0| < \delta$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство $a-\varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < a+\varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon < g(x) < a+\varepsilon$, и $|g(x)-a| < \varepsilon$. Таким образом, при $0 < |x-x_0| < \delta$ имеет место неравенство $|g(x)-a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Теорема доказана.

Заметим, что аналоги доказанных теорем справедливы и для других рассмотренных выше предельных процессов (в том числе и в теории последовательностей).

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций

для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 6.

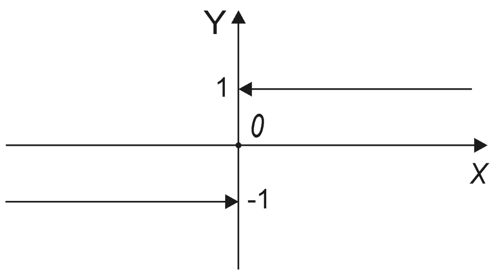
Односторонние пределы. Теорема о замене переменной в пределе (о пределе сложной функции). Арифметические операции с функциями, имеющими пределы. Первый и второй замечательные пределы. Следствия из них.

ОЛ-1, пп. 7.2, 7.4-7.7

Пусть функция $f(x)$ определена при $x_0 < x < x_0+\eta$, где $\eta -$ некоторое положительное число. Говорят, что a есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом x, $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Такой предел называют правосторонним или пределом при $x \to x_0$ справа. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a$. Аналогично можно определить предел $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ при условии, что функция $f(x)$ задана при $x_0 - \eta < x < x_0$; $\eta > 0$.

Пример. Рассмотрим функцию («сигнум икс»)

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$



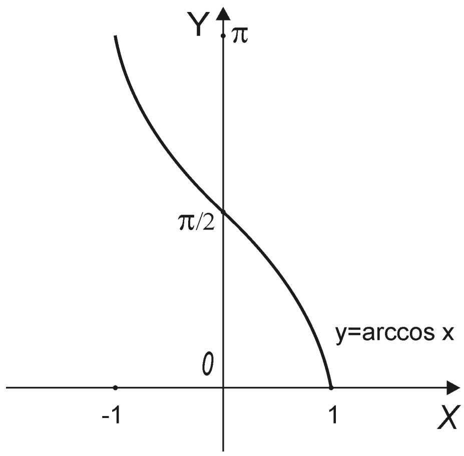
Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1$.

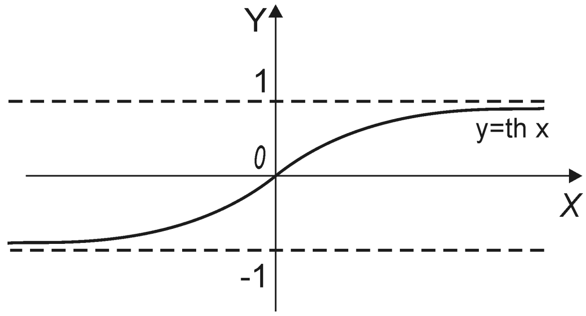
Теорема (*о пределе сложной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 и принимает значения в проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(y_0)$ точки y_0, причём $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда, если функция $g(y)$ определена на $\overset{\circ}{V}(y_0)$, и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, то для ε найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|g(y) - a| < \varepsilon$. Для положительного числа δ в силу равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ существует число $\eta = \eta(\delta) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \eta$, имеет место неравенство $|f(x) - y_0| < \delta$; при этом в силу того, что $f(x) \in \overset{\circ}{V}(y)$, и, следовательно, $f(x) \neq y_0$, выполняется также неравенство $|f(x) - y_0| > 0$. Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ мы нашли $\eta > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \eta$, выполняется неравенство $0 < |f(x) - y_0| < \delta$; в таком случае для всех указанных x выполняется неравенство $|g(f(x)) - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = a$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остаётся в силе, если какие-либо из чисел x_0, y_0 или a заменить символами $-\infty, +\infty$ или ∞. Можно также рассмотреть аналоги доказанной теоремы, в которых фигурируют односторонние пределы. Ограничение $f(x) \neq y_0$ можно отбросить, если функция $g(y)$ определена при $y = y_0$, и $g(y_0) = a$.

Пример. Найти пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} \arccos \operatorname{th} x$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \arccos \operatorname{th} x$.





Из графика арккосинуса ясно, что $\lim\limits_{y \to -1+} \arccos y = \pi$ и $\lim\limits_{y \to 1-} \arccos y = 0$. Для доказательства этих равенств следует воспользоваться непрерывностью арккосинуса, которая будет рассмотрена ниже. Поскольку $\operatorname{th} x \to -1$ при $x \to -\infty$, и $\operatorname{th} x \to 1$ при $x \to +\infty$, причём всегда $|\operatorname{th} x| < 1$, то $\arccos \operatorname{th} x \to \pi$ при $x \to -\infty$, и $\arccos \operatorname{th} x \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема (*об арифметических операциях над функциями, имеющими предел*). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = ab$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. Последнее равенство справедливо при $b \neq 0$, а также при условии, что $g(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0.

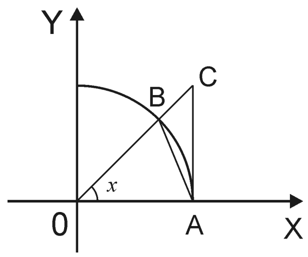
Доказательство. Утверждение теоремы можно вывести из доказанных выше теорем об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, используя определение предела функции по Гейне. Рассмотрим, например, утверждение о пределе частного. Пусть $\overset{\circ}{U}(x_0)$ — проколотая окрестность точки x_0, в которой определены функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, все элементы которой лежат в $\overset{\circ}{U}(x_0)$, и при этом $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = x_0$. По определению предела функции по Гейне имеем равенства $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = b$, причем $g(x_n) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме о пределе частного из теории последовательностей

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. Аналогично можно доказать два оставшихся утверждения теоремы. Теорема доказана.

Теорема (*о первом замечательном пределе*). Имеет место равенство
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

Доказательство. Т.к. функция $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ является чётной, то достаточно доказать равенство $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.



Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол AOB равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда площадь $\triangle OAB$ меньше площади сектора OAB, а площадь этого сектора меньше площади $\triangle OAC$, т.е.
$$\frac{1}{2}\,R^2\sin x<\frac{1}{2}\,R^2x<\frac{1}{2}\,R^2\operatorname{tg}x\ ,\ \text{и}$$
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\ . \tag{1}$$
Чтобы можно было применить теорему о пределе промежуточной функции, достаточно доказать, что $\cos x\to 1$ при $x\to 0+$. Т.к. $0<\sin x<x$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ (это следует из доказанного; на деле неравенство верно при всех $x>0$), то $\sin x\to 0$ при $x\to 0+$. Отсюда следует, что $\sin^2\dfrac{x}{2}\to 0$ при $x\to 0+$, а поскольку $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то $\cos x\to 1$ при $x\to 0+$. Поэтому из (1) вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теорема (*о втором замечательном пределе*). Справедливо равенство
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

Доказательство. Требуется доказать, что
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\text{и}\quad\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ . \tag{2}$$
Рассмотрим первое из этих равенств. Имеем $[x]\leqslant x<[x]+1$, где $[x]$ — целая часть x. При $x>1$ (при этом $[x]>0$) получаем отсюда:
$$1+\frac{1}{[x]}\geqslant 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{[x]+1}\ ,$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\ . \tag{3}$$
Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, то
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e\ .$$

Аналогично и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = e$. Таким образом, для вспомогательных функций

$$g_1(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{и} \quad g_2(n) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

натурального аргумента n имеем

$$\lim_{n\to\infty} g_1(n) = \lim_{n\to\infty} g_2(n) = e.$$

Если $x \to +\infty$, то и целая часть $[x] \to +\infty$. Следовательно, по теореме о пределе сложной функции $g_1([x]) \to e$ и $g_2([x]) \to e$ при $x \to +\infty$. Отсюда и из (3) по теореме о пределе промежуточной функции получаем первое из соотношений (2). Для доказательства второго из этих соотношений вновь применим теорему о пределе сложной функции:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

Итак, справедливость обоих равенств (2) установлена, и теорема доказана.

Замечание. Нетрудно убедиться, что утверждение теоремы о втором замечательном пределе равносильно равенству $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$.

Если в выражении $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ числитель и знаменатель стремятся к нулю, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то нельзя непосредственно применить теорему о пределе частного. В этом случае говорят, что мы имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Вычисление предела в этой ситуации называется раскрытием неопределённости. При этом в некоторых случаях может оказаться полезной теорема о первом замечательном пределе. Например

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x = \frac{2}{3}\ .$$

При вычислении предела степенно-показательного выражения $u(x)^{v(x)}$ могут встретиться неопределённости вида 1^∞, 0^0 и ∞^0. Первую из них обычно удаётся раскрыть с помощью теоремы о втором замечательном пределе. При этом используется следующее утверждение. Пусть $x \to x_0$; тогда, если $u(x) \to a$, $a > 0$, $v(x) \to b$, то $u(x)^{v(x)} \to a^b$. Доказательством этого утверждения мы сейчас заниматься не будем.

Пример. Требуется найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$. Здесь $1+\sin x \to 1$, $\dfrac{1}{x} \to \infty$, и мы имеем дело с неопределённостью вида 1^∞. Раскрыть эту неопределённость можно, например, так:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = e\ ,$$

т.к. выражение в больших скобках стремится к e по теореме о втором замечательном пределе, а показатель степени $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ по теореме о первом замечательном пределе.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 7.

Бесконечно малые функции. Связь функции, ее предела и бесконечно малой. Свойства бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми.

ОЛ-1 п. 7.6

Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$.

Теорема (*о связи функции, ее предела и бесконечно малой*). Равенство $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Требуется доказать, что $f(x) = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - a$. Тогда из определения предела функции получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| = |\varphi(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, т.е. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$, а т.к. $\varphi(x) = f(x) - a$, то также и неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций.

Теорема (*о сумме бесконечно малых*). Пусть функции $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$. Тогда их алгебраическая сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \pm\varphi_i(x)$ также бесконечно мала при $x \to x_0$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для $n = 2$, т.е. доказать, что бесконечно малой при $x \to x_0$ является функция $\pm\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$; из того, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$ получаем, что существует число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|\varphi_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; существует также число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех

$x,\ 0<|x-x_0|<\delta_2$, выполняется неравенство $|\varphi_2(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$, то при всех $x,\ 0<|x-x_0|<\delta$, имеем

$$|\pm\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)|\leqslant|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0}(\pm\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x))=0$, т.е. функция $\pm\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)$ бесконечно мала при $x\to x_0$, и теорема доказана.

Теорема (*о произведении бесконечно малой величины на ограниченную*). Пусть в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, причем $f(x)$ ограничена на $\overset{\circ}{U}(x_0)$, а $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x\to x_0$. Тогда произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Доказательство. Т.к. $f(x)$ ограничена на множестве $\overset{\circ}{U}(x_0)$, то существует число c такое, что $|f(x)|\leqslant c$ при всех $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$. Далее, пусть задано $\varepsilon>0$. Для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{c+1}$ (т.к. $c\geqslant0$, то $c+1\neq0$) существует $\delta>0$ такое, что при всех $x,\ 0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{c+1}$. Для указанных x имеем $|f(x)\cdot\varphi(x)|\leqslant c\cdot\dfrac{\varepsilon}{c+1}<\varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\varphi(x)=0$, и функция $f(x)\cdot\varphi(x)$ бесконечно мала при $x\to x_0$. Теорема доказана.

$*$ *Замечание.* В качестве примера на применение теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой дадим другое доказательство утверждения о пределе частного двух функций. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, то $f(x)=a+\varphi(x)$ и $g(x)=b+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)-$ бесконечно малые при $x\to x_0$. При этом $b\neq0$, и $g(x)=b+\psi(x)\neq0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Чтобы доказать равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ достаточно убедиться в том, что разность $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{a}{b}$ бесконечно мала при $x\to x_0$. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{a}{b}=\frac{a+\varphi(x)}{b+\psi(x)}-\frac{a}{b}=\frac{b\varphi(x)-a\psi(x)}{b(b+\psi(x))}.$$

Из теорем о произведении бесконечно малой величины на ограниченную и о сумме бесконечно малых следует, что функция, находящаяся в числителе последней дроби бесконечно мала (при $x\to x_0$). Далее, $\lim\limits_{x\to x_0}b(b+\psi(x))=b^2$ — это следует из упомянутой выше теоремы о связи функции, её предела и бесконечно малой. Поэтому для положительного числа $\dfrac{b^2}{2}$ найдется $\delta>0$ такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство

$$|b(b+\psi(x))-b^2|<\frac{b^2}{2},\ \text{ т.е. }\ -\frac{b^2}{2}<b(b+\psi(x))-b^2<\frac{b^2}{2}.$$

Отсюда $$b(b+\psi(x))>\frac{b^2}{2},\ \text{ и }\ 0<\frac{1}{b(b+\psi(x))}<\frac{2}{b^2}.$$

Мы видим, что при $0<|x-x_0|<\delta$ функция $\dfrac{1}{b(b+\psi(x))}$ ограничена. Следовательно, $\dfrac{b\varphi(x)-a\psi(x)}{b(b+\psi(x))}$ есть произведение бесконечно малой (находящейся в числителе) на ограниченную функцию. Поэтому разность $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{a}{b}$ бесконечно мала при $x\to x_0$, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$. Требуемое утверждение доказано. $*$

Функция $f(x)$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки x_0, называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. Аналогично определяются бесконечно большие функции и при других предельных переходах.

Теорема (*о связи между бесконечно большой и бесконечно малой*). Пусть функция $\varphi(x)$ отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Эта функция бесконечно мала при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ является бесконечно большой (при $x \to x_0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, и пусть задано (сколь угодно большое) положительное число Е. Возьмём столь малое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < \dfrac{1}{\text{E}}$; тогда $\dfrac{1}{\varepsilon} > \text{E}$. Т.к. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$. По условию теоремы $\varphi(x)$ отлична от нуля в проколотой окрестности точки x_0; отсюда $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{\varphi(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon} > \text{E}$, т.е. $|f(x)| > \text{E}$. Поэтому $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to x_0$, и $f(x)$ является бесконечно большой при указанном предельном переходе. Необходимость доказана. *Достаточность* доказывается аналогично. Теорема доказана.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 8.

Сравнение функций при данном стремлении аргумента. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы об эквивалентных функциях. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций и её применение к вычислению пределов. Относительный порядок малости (или роста) функции при данном стремлении, выделение ее главной части. Теорема о сумме бесконечно малых разных порядков.

ОЛ-1, пп. 10.1-10.3

Пусть бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличны от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$, то говорят, что бесконечно малая $\varphi(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\psi(x)$, а $\psi(x)$ имеет более низкий порядок малости по сравнению с $\varphi(x)$. Записывают это так: $\varphi(x) = o(\psi(x))$, $x \to x_0$. Последняя запись служит лишь для обозначения указанного соотношения между бесконечно малыми. Привычные свойства равенств могут при этом нарушаться. Например, очевидно, $x^2 = o(x)$ и $x^3 = o(x)$ при $x \to 0$. Отсюда, однако, не следует, что $x^2 = x^3$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0$, и на этот раз функция $\psi(x)$ имеет при $x \to x_0$ более высокий порядок малости по сравнению с $\varphi(x)$.

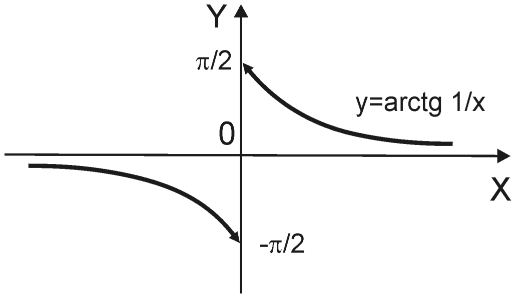
Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = C$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются при $x \to x_0$ бесконечно малыми одного порядка и пишут $\varphi(x) = O(\psi(x))$, обязательно указывая, при каком предельном переходе имеет место это соотношение (в данном случае при $x \to x_0$). В случае $C = 1$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми и пишут $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \to x_0$. Если при $x \to x_0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела отношения $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не сравнимы при $x \to x_0$.

Примеры. 1. При $x \to 0$ имеем $1 - \cos x = o(x)$, т.к.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2}}{4 \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = 0\,.$$

2. Функции $\varphi(x)=\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}$ и $\psi(x)=x^2$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Отсюда следует, что $\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}\sim\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$ при $x\to 0$.

3. Бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не сравнимы при указанном предельном переходе, т.к. $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $x\to 0$. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$.



Рассмотрим некоторые теоремы о бесконечно малых функциях.

Теорема (*о транзитивности отношения эквивалентности бесконечно малых*). Отношение эквивалентности бесконечно малых (как и всякое отношение эквивалентности) обладает свойствами рефлексивности, т.е. $\varphi(x)\sim\varphi(x)$, симметричности, т.е. если $\varphi(x)\sim\psi(x)$, то $\psi(x)\sim\varphi(x)$, и транзитивности, т.е. если $\varphi(x)\sim\psi(x)$, а $\psi(x)\sim\eta(x)$, то $\varphi(x)\sim\eta(x)$; везде $x\to x_0$.

В *доказательстве* здесь нуждается лишь последнее свойство. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\eta(x)$ определены и отличны от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и бесконечно малы при $x\to x_0$. По условию $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\psi(x)}{\eta(x)}=1$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\eta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{\psi(x)}{\eta(x)}=1$, т.е. $\varphi(x)\sim\eta(x)$ при $x\to x_0$. Теорема доказана.

Теорема (*о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых*). Бесконечно малые $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эквивалентны (при $x\to x_0$) тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости при $x\to x_0$ по сравнению с каждой из них.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x)\sim\psi(x)$ при $x\to x_0$. Требуется доказать, что разность $\varphi(x)-\psi(x)$ имеет более высокий порядок малости при $x\to x_0$ по сравнению с каждой их функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По определению эквивалентных бесконечно малых имеем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$; по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой выполняется равенство $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1+\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Отсюда $\dfrac{\varphi(x)-\psi(x)}{\psi(x)}=\varepsilon(x)$. Т.к. $\varepsilon(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\varphi(x)-\psi(x)=o\big(\psi(x)\big)$, $x\to x_0$. Аналогично можно показать, что $\varphi(x)-\psi(x)=o\big(\varphi(x)\big)$ при $x\to x_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\varphi(x)-\psi(x)=o\big(\psi(x)\big)$, $x\to x_0$. Тогда $\dfrac{\varphi(x)-\psi(x)}{\psi(x)}=o(1)$, и $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1+o(1)$, $x\to x_0$. Через $o(1)$ обозначают бесконечно малую величину, характер стремления которой к нулю неизвестен или не представляет интереса. Из последнего равенства следует, что $\varphi(x)\sim\psi(x)$ при $x\to x_0$. К такому же выводу можно прийти, рассматривая равенство $\varphi(x)-\psi(x)=o\big(\varphi(x)\big)$, $x\to x_0$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Теорема (*об использовании эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов).* Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$ функции, отличные от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0, и пусть $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to x_0$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=A$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также равный A.

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{g(x)}=A\ ,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$. Теорема доказана.

Заметим, что при вычислении предела произведения бесконечно малых сомножители также можно заменять на эквивалентные.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие функции при $x\to x_0$. Говорят, что эти функции являются бесконечно большими одного порядка (при $x\to x_0$) если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=C\ , \tag{1}$$

Где C — отличное от нуля число. При этом пишут $f(x)=O\big(g(x)\big)$, $x\to x_0$. При $C=1$ бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ называют эквивалентными и пишут $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$. Если в (1) число C равно нулю, то говорят, что $g(x)$ есть бесконечно большая более высокого порядка роста по сравнению с $f(x)$ (а $f(x)$ есть бесконечно большая более низкого порядка роста по сравнению с $g(x)$) и пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$, $x\to x_0$. Для бесконечно больших справедливы аналоги доказанных выше теорем (кроме теоремы о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых). Как обычно, все рассматриваемые понятия и теоремы можно распространить и на другие предельные процессы (включая односторонние пределы).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ бесконечно малые при $x\to x_0$. Если при некотором k бесконечно малые $\varphi(x)$ и $\big(\psi(x)\big)^k$ являются бесконечно малыми одного порядка, то говорят, что $\varphi(x)$ имеет порядок малости k по сравнению с $\psi(x)$ при $x\to x_0$. Если $\varphi(x)\sim A\big(\psi(x)\big)^k$, где $A\neq 0$ — некоторое число, то $\varphi(x)=A\big(\psi(x)\big)^k+o\big((\psi(x))^k\big)$, $x\to x_0$. В этом случае говорят, что выделена главная часть вида $A\big(\psi(x)\big)^k$ бесконечно малой $\varphi(x)$. Определение порядка малости и выделение главной части не всегда возможно. В качестве $\psi(x)$ для выделения главной части обычно выбирают более простую (или лучше изученную) бесконечно малую. Например, если $x\to x_0$, то часто берут $\psi(x)=x-x_0$, а если $x\to\infty$, то полагают $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$. Аналогичные понятия вводятся и для бесконечно больших функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x\to x_0$ функции. Говорят, что $f(x)$ имеет порядок роста k по сравнению с $g(x)$, если $f(x)$ и $\big(g(x)\big)^k$ имеют одинаковый порядок роста при $x\to x_0$. Если A — ненулевое число, и $f(x)=A\big(g(x)\big)^k+o\big((g(x))^k\big)$, $x\to x_0$, то говорят, что у бесконечно большой функции $f(x)$ выделена главная часть вида $A\big(g(x)\big)^k$. При $x\to x_0$ обычно берут $g(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$, а при $x\to\infty$ полагают $g(x)=x$. Как и в случае бесконечно малых выделение главной части (и определение порядка роста) не всегда возможно.

Примеры. 1. Функции $\varphi(x)=\arccos x$ и $\psi(x)=1-x$ бесконечно малы при $x\to 1-$ (для $\psi(x)$ это очевидно; равенство $\lim\limits_{x\to 1-}\arccos x=0$ уже рассматривалось выше). Определим порядок малости $\varphi(x)$ относительно $\psi(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\arccos x}{(1-x)^k}=\lim_{t\to 0+}\frac{\arccos\cos t}{(1-\cos t)^k}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\left(1-\left(1-2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)\right)^k}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{2^k\cdot\sin^{2k}\dfrac{t}{2}}\,.$$

Ясно, что конечный отличный от нуля предел получается лишь при $k=\dfrac{1}{2}$. При этом значении k имеем

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{t}{2}}=\sqrt{2}\,.$$

Для раскрытия последней неопределённости мы воспользовались теоремой о первом замечательном пределе. Итак, $\varphi(x)=\arccos x$ есть бесконечно малая порядка $1/2$ по сравнению с $\psi(x)=1-x$ при $x\to 1-$. Из наших вычислений следует также, что $\arccos x=\sqrt{2(1-x)}+o(\sqrt{1-x})$, $x\to 1-$. Если в качестве $\psi(x)$ взять бесконечно малую $\sqrt{1-x^2}$, то, поскольку $\sqrt{2(1-x)}\sim\sqrt{1-x^2}$, $\arccos x=\sqrt{1-x^2}+o(\sqrt{1-x^2})$, $x\to 1-$. При решении некоторых задач это равенство может оказаться удобнее предыдущего.

2. Пусть $a>1$, и пусть $f(x)=a^x$, $g(x)=x$. В дальнейшем будет доказано, что при любом k имеет место равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^k}=\infty$. Поэтому нельзя определить порядок роста $f(x)$ относительно $g(x)$; нельзя также выделить у функции $f(x)$ главную часть вида $A\cdot x^k$ при $x\to+\infty$.

Теорема *(о сумме бесконечно малых разных порядков).* Пусть $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\psi(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$ функции, и пусть k_i — порядок малости функций $\varphi_i(x)$ относительно $\psi(x)$, $i=1,\ldots,n$, причём числа $k_1,\ldots,k_n$ попарно различны. Тогда сумма $\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)$ эквивалентна при $x\to x_0$ слагаемому минимального порядка относительно $\psi(x)$.

Доказательство проведём по индукции. При $n=1$ нечего доказывать. Пусть при некотором $n\geqslant 1$ утверждение теоремы справедливо, и пусть даны бесконечно малые $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x),\psi(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть (для определённости) k_{n+1} — минимальное среди чисел $k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}$, а k_n — минимальное среди чисел $k_1,\ldots,k_n$. Тогда по предположению индукции $\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)\sim\varphi_n(x)$, $x\to x_0$. Далее,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}+1\right)=$$

$$=1+\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}=1+\lim_{x\to x_0}(\psi(x))^{k_n-k_{n+1}}.$$

Последний предел равен нулю, т.к. $\big(\psi(x)\big)^{k_n-k_{n+1}}\to 0$ при $k_n>k_{n+1}$. Таким образом, $\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\varphi_{n+1}(x)\sim\varphi_{n+1}(x)$ при $x\to x_0$, и по индукции теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для бесконечно больших функций: сумма бесконечно больших различных порядков эквивалентна слагаемому наивысшего порядка.

Пример. Если $x\to+\infty$, то $x^2+x+\sqrt{x}\sim x^2$, $2x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\sim 2x^2$; поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\,.$

Мы пока не располагаем общими методами выделения главной части, поэтому более подробно на этом способе вычисления пределов не останавливаемся.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 9.

Непрерывность функции в точке: равносильные определения. Непрерывность суммы, произведения, композиции непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность функции. Непрерывность функции на промежутке (на интервале, полуинтервале и отрезке). Непрерывность основных элементарных функций (док-во для многочлена и синуса). Точки разрыва функций, их классификация.

ОЛ-1, пп. 9.1-9.3

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, и пусть на X задана числовая функция $f(x)$. Эта функция называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если x_0 — изолированная точка множества X (т.е у этой точки имеется окрестность, не содержащая точек множества X, отличных от x_0), то в соответствии с этим определением функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Например, последовательность $\{x_n\}$, являющаяся, как известно, функцией натурального аргумента, непрерывна в каждой точке области своего определения (здесь для произвольного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = 1/2$). Такая «непрерывность» интереса не представляет. Мы будем, в основном, применять понятие непрерывности к функциям, заданным на промежутках. Пусть I — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{R}$, и пусть $x_0 \in I$, причём x_0 является внутренней точкой этого промежутка. Очевидно, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это равенство в рассматриваемом случае можно принять за определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Рассмотрим другой подход к определению непрерывности функции. Пусть снова x_0 — внутренняя точка промежутка I, на котором задана числовая функция $f(x)$. Если $x_0 \in I$, то приращением аргумента называют разность $\Delta x = x - x_0$; соответствующим приращением функции называют $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Нетрудно проверить, что для непрерывности функции $f(x)$ при $x = x_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0\,. \tag{1}$$

В самом деле, если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $|x - x_0| < \delta$, т.е. при $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $|\Delta f(x)| < \varepsilon$. Это означает выполнение соотношения (1). Таким образом, условие (1) необходимо для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Если же выполнено условие (1), то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $|\Delta x| < \delta$, т.е. при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\Delta f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, и по определению функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Мы видим, что условие (1) не только необходимо, но и достаточно для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Можно дать определение непрерывности функции, основанное на определении предела функции по Гейне. Пусть, как и выше, функция $f(x)$ определена на промежутке I числовой прямой, и пусть x_0 – внутренняя точка этого промежутка. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$ промежутка I , для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Рассмотрим некоторые теоремы о локальных (т.е. определяемых поведением функции в сколь угодно малой окрестности соответствующей точки) свойствах непрерывных функций.

Теорема (*о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке. Тогда в точке x_0 непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$; последнее — при условии, что $g(x)$ отлична от нуля в указанной окрестности точки x_0.

Доказательство вытекает из свойств пределов и определения непрерывной функции. Например, для частного рассматриваемых функций имеем на основании теоремы о пределе частного:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \,.$$

Отсюда непосредственно вытекает непрерывность функции $f(x)/g(x)$ в точке x_0. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично. Теорема доказана.

Теорема (*о непрерывности сложной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и принимает значения в окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, и пусть на $V(y_0)$ определена функция $g(y)$. Тогда, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство проведём с помощью теоремы о пределе сложной функции (с учётом сделанного там замечания). В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$, а при $y \to y_0$ имеем $g(y) \to g(y_0)$. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(y_0) = g\big(f(x_0)\big)$, т.е. $g\big(f(x)\big)$ непрерывна при $x = x_0$. При этом требование $f(x) \neq y_0$ в проколотой окрестности точки x_0 здесь можно отбросить, т.к. $g(y)$ определена при $y = y_0$, и $g(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. Теорема доказана.

Теорема (*о сохранении знака непрерывной функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) > 0$. Тогда, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, по теореме о сохранении функцией знака своего предела неравенство $f(x) > 0$ будет выполняться также и в некоторой окрестности точки x_0. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о непрерывности элементарных функций. Заметим сначала, что константа $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывна в каждой точке x_0. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta = 1$. Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, и исследуемая функция непрерывна. Очевидна также непрерывность функции $f(x) = x$; здесь для $\varepsilon > 0$ берем $\delta = \varepsilon$. Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Заметим, что доказанная непрерывность рассмотренных функций равносильна равенствам

$$\lim_{x\to x_0} c = c \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0} x = x_0 \,. \tag{1}$$

Теперь мы можем доказать непрерывность многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ в любой точке x_0, пользуясь теоремой о пределе суммы и произведения и равенством (1). Имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (a_n x^n + \ldots + a_0) = \lim_{x\to x_0} \sum_{s=0}^{n} a_s x^s = \sum_{s=0}^{n} a_s (\lim_{x\to x_0} x)^s =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} a_s x_0^s = f(x_0)\ ,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, и непрерывность многочлена в произвольной точке x_0 доказана.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Предварительно докажем неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|\ , \tag{2}$$

которое справедливо при всех x. По ходу доказательства теоремы о первом замечательном пределе было доказано неравенство $\sin x < x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. При $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ такое неравенство также справедливо, т.к. $|\sin x| \leqslant 1$, и $\dfrac{\pi}{2} > 1$. При $x = 0$ неравенство (1), очевидно справедливо. Осталось рассмотреть случай $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. В этом случае (2) запишется так: $-\sin x \leqslant -x$ или $\sin(-x) \leqslant -x$. Последнее неравенство справедливо, т.к. $-x > 0$. Таким образом, (2) доказано. Теперь можно доказать непрерывность синуса в любой точке x_0. Имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|, \text{ т.е. } |\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, и непрерывность функции $f(x) = \sin x$ доказана в произвольной точке x_0.

Можно доказать также и непрерывность остальных основных элементарных функций (показательной, степенной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) в каждой точке их области определения. Затем с помощью теорем о непрерывности сложной функции и о непрерывности суммы произведения и частного можно получить такой результат: любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена. В силу этого рассмотренные ранее функции $y = \operatorname{sign} x$ и $y = [x]$ не являются элементарными; функция $y = |x|$ элементарна, т.к. $|x| = \sqrt{x^2}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на правосторонней окрестности $[x_0, x_0+\eta)$, $\eta > 0$, точки x_0. Это функция называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Аналогично можно определить непрерывность слева: функция $f(x)$ должна быть определена на левосторонней окрестности $(x_0-\eta, x_0]$, $\eta > 0$, точки x_0, и должно выполняться равенство $\lim\limits_{x\to x_0-} = f(x_0)$. Заметим, что оба эти определения эквивалентны данному выше определению непрерывности функции, заданной на произвольном множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если I — промежуток числовой прямой, и $f\colon I \to \mathbb{R}$, то функция $f(x)$ называется непрерывной на I, если эта функция непрерывна в каждой точке промежутка I. При этом непрерывность на левом конце промежутка (если он принадлежит I) понимается как непрерывность справа; непрерывность на правом конце (если он принадлежит I) понимается как непрерывность слева. В частности, можно говорить о функциях, непрерывных на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в проколотой окрестности этой точки. Если данная функция не является непрерывной в точке x_0, то

x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$. Говорят также, что функция $f(x)$ терпит разрыв этой точке. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} = f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Во всех прочих случаях говорят о разрыве второго рода. Если x_0 — точка разрыва первого рода, и если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то такой разрыв называют устранимым. Доопределив функцию $f(x)$ в точке устранимого разрыва x_0 (или изменив ее значение в этой точке, если функция в ней определена), полагая $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$, получим новую функцию, которая будет непрерывна в точке x_0.

Примеры. 1. Пусть $f(x)=\operatorname{sign} x$; здесь $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sign} x=-1$, $\lim\limits_{x\to x_0+}\operatorname{sign} x=1$. В нуле разрыв первого рода; скачок $f(0+)-f(0-)=2$.

2. Если $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, то при $x=0$ имеем устранимый разрыв. Доопределённая при $x=0$ функция

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}\,, & \text{если } x\neq 0\,,\\ 1\,, & \text{если } x=0\,,\end{cases}$$

уже непрерывна при $x=0$.

3. Функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ имеют в точке $x=0$ разрыв второго рода. Для первой из них $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, а для второй $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует. В самом деле, последовательности $x_n=\dfrac{1}{\pi n}$ и $x_n'=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ обе стремятся к нулю при $n\to\infty$, однако $\sin\dfrac{1}{x_n}\to 0$, а $\sin\dfrac{1}{x_n'}\to 1$.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней). Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$. Если $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, то расстояние $|x-x_0|$ от точки $M(x,\,f(x))$ до прямой $x=x_0$ стремится к нулю, если точка M стремится к бесконечности вдоль графика функции $y=f(x)$ (с соответствующей стороны).

Примеры. Ось ординат является вертикальной асимптотой графиков функций $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\log_a x$, $y=\operatorname{ctg} x$. Для графика последней функции вертикальными асимптотами являются также прямые $x=\pi n,\ n=\pm1,\pm2,\dots$.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 10.

Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, прохождение через любое промежуточное значение. Теорема о непрерывности обратной функции. Асимптоты графика функции.

ОЛ-2 гл. 1, 9.4, 10.5

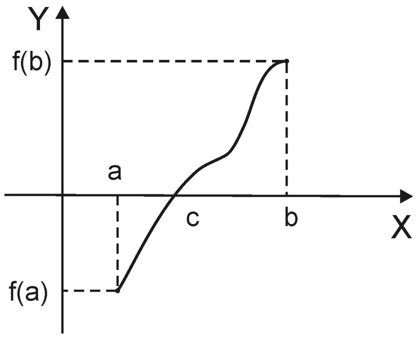
Рассмотрим теоремы о свойствах функций непрерывных на отрезке. **Теорема** (*Больцано-Коши*). Если функция определена и непрерывна на некотором отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то эта функция обращается в нуль хотя бы в одной точке данного отрезка.

$*$ *Доказательство.* Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Предположим для определенности, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Множество X точек отрезка $[a,b]$, в которых $f(x) < 0$ не пусто и ограничено сверху, поэтому существует точная верхняя грань этого множества: $c = \sup X$. Заметим сначала, что $c \in [a,b]$. Если это не так, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $c - \varepsilon > b$, а тогда на интервале $(c, c-\varepsilon)$ нет точек множества X, что противоречит определению точной верхней грани. На самом деле c является внутренней точкой отрезка $[a,b]$. Действительно, $f(x)$, будучи непрерывной в точках a и b, сохраняет знаки чисел $f(a)$ и $f(b)$ соответственно на полуинтервалах $[a,\ a+\eta)$ и $(b-\eta,\ b]$, где η — некоторое положительное число. Поэтому предположение $c = a$ противоречит тому, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant c$. Если же $c = b$, то полуинтервал $(b-\eta,\ b]$ должен содержать точки множества X, чего на деле нет. Поэтому $a < c < b$. В точке c должно выполняться одно (и только одно) из соотношений:

$$f(c) < 0, \quad f(c) > 0, \quad f(c) = 0. \tag{3}$$

пусть $f(c) < 0$. Тогда найдётся положительное число η такое, что для любого $x \in (c-\eta,\ c+\eta)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$ (это следует из непрерывности функции $f(x)$ в точке c). Отсюда получаем, что в множестве X есть точки, лежащие на отрезке $[a,b]$ правее точки c, что невозможно, т.к. c есть точная верхняя грань множества X. Не может выполняться и неравенство $f(c) > 0$, т.к. в этом случае, как и выше, найдётся окрестность $(c-\eta,\ c+\eta)$, $\eta > 0$, в каждой точке которой $f(x)$ положительна. Это также противоречит тому, что $c = \sup X$, т.к. должны существовать точки множества X, лежащие на интервале $(c-\eta,\ c)$. Таким образом, первые два из соотношений (3) не выполняются, и $f(c) = 0$. Существование требуемой точки установлено. Теорема доказана. $*$

Теорема Больцано-Коши имеет простой геометрический смысл: точки $\big(a, f(a)\big)$ и $\big(b, f(b)\big)$ лежат по разные стороны от оси абсцисс, а при вычерчивании графика непрерывной функции $f(x)$ мы соединяем эти точки, «не отрывая карандаша от бумаги». Ясно, что при этом придётся пересечь отрезок $[a, b]$ в некоторой точке c, в которой $f(c) = 0$.



Следствие (*теорема о промежуточном значении*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и если $f(a) = A$, $f(b) = B$, то эта функция принимает все значения, лежащие на отрезке с концами в точках A и B.

В самом деле, пусть, например, $A < B$, и пусть $A < C < B$. Тогда функция $f(x) - C$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Следовательно, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) - C = 0$, т.е. $f(c) = C$.

Теорема *(Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции).* Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

$*$ *Доказательство.* Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, но не является ограниченной на этом отрезке. Обозначим $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$. Разделим отрезок I_1 пополам и обозначим через $I_2 = [a_2, b_2]$ тот из получившихся отрезков $\left[a_1, \dfrac{a_1 + b_1}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$, на котором функция $f(x)$ неограничена. Тогда $I_2 \subset I_1$, и длина отрезка I_2 равна $\dfrac{b - a}{2}$. Пусть уже построены отрезки $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_1$, причём на отрезке $I_k = [a_k, b_k]$ функция $f(x)$ неограничена, и длина этого отрезка равна $\dfrac{b - a}{2^{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$. Разделим отрезок I_n пополам и обозначим $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ тот из получившихся отрезков $\left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$, на котором функция $f(x)$ неограничена. Тогда $I_{n+1} \subset I_n$, длина I_{n+1} равна $\dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b - a}{2^n}$, и построение отрезков по индукции может быть продолжено. По принципу вложенных отрезков существует точка c, принадлежащая всем построенным отрезкам, в частности $c \in [a_1, b_1] = [a, b]$. В точке c функция $f(x)$ непрерывна, и, следовательно, имеет предел (равный $f(c)$) при $x \to c$. По теореме о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $(c - \delta,\ c + \delta) \cap [a, b]$, $\delta > 0$, этой точки (окрестность может получиться и односторонней, если точка c совпадет с одной из граничных точек отрезка $[a, b]$). С другой стороны, при достаточно большом n выполняется неравенство $\dfrac{b - a}{2^n} < \delta$, и отрезок I_n должен целиком лежать в указанной окрестности, т.к. этот отрезок содержит точку c. Поскольку по построению функция $f(x)$ неограничена на отрезке I_n, то мы получаем противоречие. Итак, ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ доказана. Поскольку множество значений функции $f(x)$ на указанном отрезке не пусто и ограничено, то существует точная верхняя грань $M = \sup\limits_{x \in [a, b]} \big\{f(x)\big\}$ множества значений функции $f(x)$ на этом отрезке. Если $f(x) < M$ для всех $x \in [a, b]$, то функция $M - f(x)$ непрерывна и положительна на $[a, b]$, а тогда $g(x) = 1/\big(M - f(x)\big)$ непрерывна на этом отрезке и по доказанному ограничена на нём. С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) > M - \varepsilon$, т.е. $\varepsilon > M - f(\xi) > 0$, и $g(\xi) = \dfrac{1}{M - f(\xi)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Это противоречит ограниченности функции $g(x)$ на $[a, b]$. Полученное противоречие доказывает существование на отрезке $[a, b]$ точки c такой, что $f(c) = M$. Ясно, что при этом M будет максимальным значением функции $f(x)$ на $[a, b]$. Аналогично можно доказать, что минимальное значение функции $f(x)$ на рассматриваемом отрезке также достигается в некоторой его точке. Теорема доказана. $*$

Заметим, что для промежутков, не являющихся отрезками, утверждения теоремы могут и не выполняться. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна, но неограничена на интервале $(0, 1)$. Далее, функция $f(x) = x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не имеет на этом интервале максимального и минимального значений.

Теорема *(о непрерывности обратной функции).* Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $\big[f(a), f(b)\big]$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, которая непрерывна и возрастает на этом отрезке.

$*$ *Доказательство.* Пусть $y \in \big[f(a), f(b)\big]$. По теореме о промежуточном значении существует число $x \in [a, b]$ такое, что $y = f(x)$. Это число единственно, т.к. если $x' \neq x$, то $x' > x$ или $x' < x$, и, соответственно, $f(x') > f(x) = y$ или $f(x') < f(x) = y$. Итак, каждому y из отрезка $\big[f(a), f(b)\big]$ можно поставить в соответствие число $x \in [a, b]$, являющееся единственным решением уравнения $y = f(x)$. Мы видим, что обратная функция $f^{-1}\colon \big[f(a), f(b)\big] \to [a, b]$ действительно существует. Эта функция возрастает. В самом деле, пусть $f(a) \leqslant y_1 < y_2 \leqslant f(b)$. Тогда если $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, то $f\big(f^{-1}(y_1)\big) = f\big(f^{-1}(y_2)\big)$, т. е. $y_1 = y_2$, что невозможно. Если же $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, то в силу возрастания функции $f(x)$ получаем отсюда $f\big(f^{-1}(y_1)\big) > f\big(f^{-1}(y_2)\big)$, т.е. $y_1 > y_2$ – противоречие. Остается признать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, и функция $f^{-1}(y)$ возрастает на $\big[f(a), f(b)\big]$. Докажем, что $f^{-1}(y)$ непрерывна в произвольной точке y_0 этого отрезка. Пусть $f^{-1}(y_0) = x_0$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Для определённости точки x_0 и y_0 будем считать внутренними точками соответствующих отрезков; число ε можно считать столь малым, что $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$. Т.к. функция $f(x)$ возрастает, то $f(a) < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon) < f(b)$. Пусть $\delta = \min\big(y_0 - f(x_0 - \varepsilon),\ f(x_0 + \varepsilon) - y_0\big)$. Ясно, что $\delta > 0$. Тогда, если $|y - y_0| < \delta$, то по определению δ имеем $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Т.к. функция $f^{-1}(y)$ возрастает, то $f^{-1}\big(f(x_0 - \varepsilon)\big) < f^{-1}(y) < f^{-1}\big(f(x_0 + \varepsilon)\big)$, т.е. $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, и $\big|f^{-1}(y) - x_0\big| = \big|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\big| < \varepsilon$, и непрерывность функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 доказана. Аналогично можно доказать непрерывность (одностороннюю) этой функции и в граничных точках $f(a)$ и $f(b)$. Теорема доказана. $*$

Можно сформулировать и доказать другие варианты этой теоремы. Возрастающую функцию $f(x)$ можно заменить убывающей. Отрезки $[a, b]$ и $[f(a), f(b)]$ можно заменить интервалами (a, b) и $\big(f(a + 0), f(b - 0)\big)$, где $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $f(b - 0) = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$, причем последние пределы могут быть и бесконечными.

В качестве приложения доказанной теоремы рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Все требования теоремы о непрерывности обратной функции выполнены. Поэтому функция $x = \arcsin y$ непрерывна и возрастает на отрезке $[-1, 1]$.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = a$ называется правой горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$. По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой мы можем написать $f(x) = a + o(1)$, где $o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$. И здесь расстояние $|a - f(x)|$ от точки $M\big(x, f(x)\big)$ графика функции $y = f(x)$ до асимптоты стремится к нулю, если точка M вдоль графика стремится в бесконечность (т. е. если $x \to +\infty$). Аналогично определяется и левая горизонтальная асимптота в случае функции, определённой при $x < x_0$ (т. е. в окрестности точки $-\infty$).

Пример. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальные асимптоты $y = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$ соответственно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Горизонтальные асимптоты имеют также графики функций $y = a^x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ и др.

Пусть снова функция $f(x)$ определена при $x > x_0$, и пусть $f(x) = Ax + B + o(1)$ при $x \to +\infty$. Тогда прямая $y = Ax + B$ называется (правой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. И здесь расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ до асимптоты стремится к нулю, если M стремится в бесконечность вдоль графика рассматриваемой функции (т. е. при $x \to +\infty$). Это следует из того, что указанное расстояние не превосходит модуля разности соответствующих ординат, т.е. величины $|f(x) - Ax - B|$, которая бесконечно мала при $x \to +\infty$ по определению асимптоты. Аналогично определяется и левая наклонная асимптота для функции, заданной при $x < x_0$. Очевидно также, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной.

Пример. В курсе аналитической геометрии встречаются асимптоты гиперболы. Например, расположенная в первой четверти часть гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, которую можно рассматривать как график функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$, имеет (правую) наклонную асимптоту $y = x$.

Теорема (*о необходимых и достаточных условиях наличия наклонной асимптоты*). Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой асимптотой графика данной функции, когда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) = B\,.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = Ax + B$ — правая наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax + B + o(1)$, $x \to +\infty$. Отсюда $\dfrac{f(x)}{x} = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{o(1)}{x} \to A$, $f(x) - Ax = B + o(1) \to B$, если $x \to +\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $f(x) - Ax \to B$ при $x \to +\infty$, то $f(x) - Ax = B + o(1)$, $x \to +\infty$. Поэтому прямая $y = Ax + B$ есть (правая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = A$ здесь не понадобился. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Пример. Найдём с помощью доказанной теоремы асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2}{x(x^2 + 1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1\,;$

$$\lim_{x\to\infty} \big(y(x) - x\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1\,.$$

В данном случае прямая $y = x + 1$ является двусторонней наклонной асимптотой.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций

для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 11.

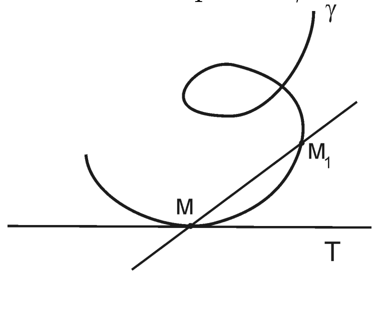
Производная функции в точке, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке. Бесконечная производная, односторонние производные и их геометрический смысл. Дифференцируемость функции в точке, эквивалентность дифференцируемости существованию в точке конечной производной. Связь непрерывности и дифференцируемости. Основные правила дифференцирования функций. Дифференцирование обратных функций.

ОЛ-2, пп. 1.1-1.6, 2.1, 2.2, 4.1, 4.2.

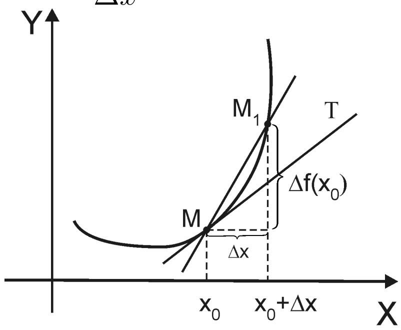
Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, и пусть $\Delta x \neq 0$ таково, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Как известно, знаменатель дроби под знаком последнего предела называется приращением аргумента, а числитель — приращением функции. Поэтому говорят также, что производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Пусть материальная точка движется вдоль оси абсцисс, и пусть $x(t)$ — её координата в момент времени t. Для вычисления мгновенной скорости движения материальной точки при $t = t_0$ составляют отношение $\dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$ и находят его предел при $\Delta t \to 0$. Таким образом, мгновенная скорость изменения координаты (в данном случае абсциссы) материальной точки при $t = t_0$ равна $x'(t_0)$.

Пусть имеется (плоская) кривая γ, и на ней задана точка M. Выберем на этой кривой точку M_1, отличную от M и проведем секущую MM_1. Если при стремлении M_1 к M секущая MM_1 стремится занять определенное положение, то прямая T, находящаяся в этом положении, называется касательной к кривой γ в точке M.



Углом наклона к оси абсцисс прямой l, пересекающей эту ось в точке P, называется угол, на который следует повернуть вокруг точки P в направлении против часовой стрелки луч, исходящий из точки P в положительном направлении оси абсцисс, до его совпадения с прямой l. Если прямая l параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней), то указанный угол по определению считается равным нулю. Пусть дан график функции $y = f(x)$, определённой в окрестности точки x_0 и пусть точка $M(x_0,\ f(x_0))$ лежит на этом графике. Возьмём на графике функции $y = f(x)$ точку $M_1(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$. Угловой коэффициент (т.е. тангенс угла наклона к оси абсцисс) секущей, проходящей через точки M и M_1, равен $\dfrac{f(x_0+\Delta x)\ -f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то угловой коэффициент касательной, положение которой стремится при $\Delta x \to 0$ занять секущая, равен $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



Отсюда — геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$. Зная угловой коэффициент, нетрудно составить уравнение касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\ .$$

Нормалью к кривой γ в точке M, лежащей на этой кривой, называется прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной к γ в этой точке. Составим уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$. Вектор нормали к касательной служит направляющим вектором прямой N. В качестве такого вектора можно взять вектор $\mathbf{n} = \big\{f'(x_0), -1\big\}$. Отсюда получаем (каноническое) уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1}\ .$$

Обычно уравнение нормали записывают в виде:

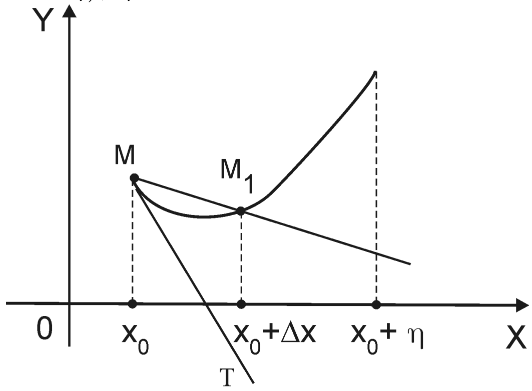
$$x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0\ .$$

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, и если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечную производную, равную соответственно $+\infty$ или $-\infty$. Геометрически наличие бесконечной производной означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке вертикальна.

Если функция $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0, т.е. на полуинтервале $[x_0, x_0+\eta)$, $\eta > 0$, то в точке x_0 можно рассмотреть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,,$$

который в случае его существования называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$. Аналогично можно рассмотреть левую производную $f'_-(x_0)$ для функции, определенной на левосторонней окрестности $(x_0 - \eta, x_0]$, $\eta > 0$, точки x_0. Левая и правая производные называются односторонними. Чтобы выяснить геометрический смысл, например, правой производной, рассмотрим график функции $y = f(x)$, определённой на полуинтервале $[x_0, x_0 + \eta)$, $\eta > 0$.



Рассмотрим точки точки $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, $0 < \Delta x < \eta$, лежащие на рассматриваемом графике. Если M_1 стремится к M, и при этом секущая MM_1 стремится занять определённое положение, то прямая T в этом положении называется (правой) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M. Угловой коэффициент такой касательной равен, как и выше, $f'_+(x_0)$. Аналогично можно рассмотреть левую касательную в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ к графику функции $y = f(x)$, заданной на полуинтервале $(x_0 - \eta, x_0]$, $\eta > 0$. Угловой коэффициент левой касательной равен $f'_-(x_0)$. Уравнения односторонних касательных составляются так же, как и уравнение обычной (двусторонней) касательной.

Примеры. 1. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$. Здесь $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = +\infty$. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0,0)$ вертикальна.

2. Пусть $y = |x|$. В этом случае $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1$. Эта функция не имеет производной при $x = 0$. Правой касательной в точке $(0,0)$ будет прямая $y = x$, левой — прямая $y = -x$.

3. Рассмотрим функцию $y = x^{2/3}$. В данном случае $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{(\Delta x)^{2/3} - 0}{\Delta x} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{(\Delta x)^{2/3} - 0}{\Delta x} = -\infty$. Левая и правая касательные к графику функции $y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $(0,0)$ обе вертикальны и совпадают. Здесь вертикальная прямая, т.е. ось ординат, является обычной (двусторонней) касательной.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \ , \Delta x \to 0 \ ,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx.

Теорема (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции*). Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Требуется доказать существование $f'(x_0)$. По определению дифференцируемости $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \ , \Delta x \to 0$. После деления на Δx получаем: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1) \to A$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, производная $f'(x_0)$ существует (и равна A). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)$, $\Delta x\to 0$. После умножения на Δx получаем: $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(1)\cdot\Delta x$, $\Delta x\to 0$. Очевидно, $o(1)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$, поэтому функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что число A в определении дифференцируемости равно $f'(x_0)$. В связи с этой теоремой функцию, имеющую (конечную) производную в некоторой точке, называют дифференцируемой в этой точке. Сам процесс вычисления производной называют дифференцированием функции.

Теорема (*о непрерывности дифференцируемой функции.*) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$. Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\big)=0$, т.е. $\Delta f(x_0)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$. Теорема доказана.

Достаточным условием дифференцируемости непрерывность не является. Мы видели, что функция $f(x)=|x|$ не имеет производной при $x=0$. Однако, $f(x)$ непрерывна в этой точке (как и во всякой другой). Это следует, например, из равенства $|x|=\sqrt{x^2}$ и теоремы о непрерывности сложной функции. Можно доказать и непосредственно: если $\varepsilon>0$, то, взяв $\delta=\varepsilon$, получим, что при $|x-x_0|<\delta$ выполняются соотношения $\big||x|-|x_0|\big|\leqslant|x-x_0|<\delta=\varepsilon$, т.е. $\big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon$.

Рассмотрим теоремы о правилах дифференцирования функций.

Теорема (*о производной суммы, произведения и частного.*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда в этой точке дифференцируемы также функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (последняя — при условии $g(x)\neq 0$), причём

$$\big(f(x)\pm g(x)\big)'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\,.$$

Доказательство. Имеем:

$$\big(f(x)\pm g(x)\big)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big(\big(f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)\big)-\big(f(x)\pm g(x)\big)\Big)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=f'(x)\pm g'(x)\,.$$

Производная произведения может быть вычислена так:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $g(x)$, которая является следствием дифференцируемости: $g(x+\Delta x)\to g(x)$ при $\Delta x\to 0$.

В случае производной частного рассуждаем аналогично

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}=$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\,.$$

Теорема доказана.

Пусть $f(x)=C$, где C — константа. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0,$$

т.е. $C'=0$. Поскольку постоянный множитель можно вынести за знак предела, то $(Cf(x))'=Cf'(x)$.

Теорема (*о производной сложной функции*). Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ определены в окрестностях соответственно точек x_0 и y_0 и дифференцируемы в этих точках, $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, и $\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0}=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Функция $f(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна в точке x_0. Пусть функция $g(y)$ определена для тех y, для которых $|y-y_0|<\varepsilon$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\varepsilon$, и для таких x имеет смысл сложная функция $g(f(x))$. Таким образом, сложная функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0, и можно говорить о её производной в этой точке. Запишем определение дифференцируемости функции $g(y)$ в точке y_0:

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y)\,,\quad \Delta y\to 0.$$

Пусть $\alpha(\Delta y)=\dfrac{o(\Delta y)}{\Delta y}$, если $\Delta y\neq 0$, и $\alpha(\Delta y)=0$, если $\Delta y=0$. Очевидно, $\alpha(\Delta y)\to 0$, если $\Delta y\to 0$. Определение дифференцируемости можно переписать так:

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+\alpha(\Delta y)\cdot\Delta y,\quad \Delta y\to 0.$$

При достаточно малом Δx подставим сюда $y_0=f(x_0)$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Тогда

$$g\big(f(x_0+\Delta x)\big)-g\big(f(x_0)\big)=g'(y_0)\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)+\alpha(\Delta y)\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)\,.$$

Отсюда

$$\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\big(f(x_0+\Delta x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(g'(y_0)\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\big(\alpha(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,.\quad (1)$$

Заметим, что $\alpha(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))\to 0$, т.к. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ — дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Кроме того, $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому последний предел в (1) равен нулю, и мы получаем требуемое равенство:

$$\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0}=g'(y_0)\cdot f'(x_0)\,.$$

Теорема доказана.

Правило дифференцирования сложной функции часто записывают в виде

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,,$$

где под $g'\big(f(x)\big)$ понимается производная функции $g(y)$, вычисленная при $y = f(x)$.

Теорема (*о производной обратной функции.*) Пусть функция $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение окрестности $U(x_0)$ точки x_0 на окрестность $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причём обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0. Тогда, если существует $f'(x_0) \neq 0$, то существует также и $(f^{-1})'(y_0)$, причём

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Доказательство. Пусть $y_0 + \Delta y \in V(y_0)$, и пусть $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$. Далее, $f^{-1}(y_0) = x_0$, и

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x\,,\\ &f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(f^{-1}(y_0 + \Delta y)) - y_0 = y_0 + \Delta y - y_0 = \Delta y\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $\Delta y \neq 0$ то и $\Delta x \neq 0$ — это вытекает из того, что отображение $f\colon U(x_0) \to V(y_0)$ взаимно однозначно. Заметим ещё, что из непрерывности функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 и из (2) следует, что если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Теперь можно вычислить производную обратной функции:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Теорема доказана.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ взаимно однозначно отображает бесконечный интервал $(0, +\infty)$ на себя. Поэтому существует обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, которая непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Мы видим, что $f'(x) \neq 0$ на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому обратная функция дифференцируема в каждой точке такого интервала. Для её производной имеем:

$$(f^{-1})'(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2x}\,\Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

Таким образом, $(\sqrt{y})' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 12.

Таблица производных элементарных функций. Логарифмическая производная и ее применение. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Правила вычисления дифференциалов. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций (первая и вторая производная).

ОЛ-2, пп. 1.7, 2.2-2.4, гл. 3.

Найдём производные основных элементарных функций.

Если $y = e^x$, то

$$y'(x) = (e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Пусть $\Delta x = \ln(1+t)$; тогда $t\to 0$ при $\Delta x\to 0$, и мы получаем

$$y'(x) = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} =$$
$$= e^x\frac{1}{\ln\bigl(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\bigr)} = e^x\frac{1}{\ln e} = e^x,$$

т.к. по теореме о втором замечательном пределе $(1+t)^{1/t}\to e$ при $t\to 0$, и функция $\ln x$ непрерывна в точке $x = e$. Если $a > 0, a\neq 1$, то $a^x = e^{x\ln a}$, и по правилу дифференцирования сложной функции

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

Производную логарифмической функции найдём, используя правило дифференцирования обратной функции. Действительно, $y = a^x$ и $y = \log_a x$, $a > 0$, $a\neq 1$, являются взаимно обратными функциями. Поэтому при $x > 0$ имеем $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(a^y)'|_{y=\log_a x}} = \dfrac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \dfrac{1}{x\ln a}$. Если $a = e$, то получаем отсюда формулу $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Для степенной функции $y = x^\alpha$ при при $x > 0$ имеем (используем правило дифференцирования сложной функции и полученные выше результаты):

$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, т.е. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Эта же формула остается в силе и в точке $x=0$ (для $\alpha \geqslant 1$; если соответствующая степенная функция определена лишь при $x \geqslant 0$, то эта формула даёт значение правой производной). В самом деле, если $\alpha \geqslant 1$, то (считаем, что $\Delta x > 0$, если функция $y = x^\alpha$ не определена при $x < 0$):

$$(x^\alpha)'\big|_{x=0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1,\\ 0, & \text{если } \alpha > 1,\end{cases}$$

т.е. $(x^\alpha)'|_{x=0} = \alpha x^{\alpha-1}|_{x=0}$. Если же x отрицательно, и функция $y = x^\alpha$ определена при таких x, то эта функция является либо чётной либо нечётной, т.е. при $x < 0$ имеем $x^\alpha = \pm(-x)^\alpha$. Тогда

$$(x^\alpha)' = \pm\big((-x)^\alpha\big)' = \pm\,\alpha(-x)^{\alpha-1}\cdot(-x)' = \alpha\cdot\frac{\pm(-x)^\alpha}{-x}\cdot(-1) = \alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}\,,$$

и $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ также и при $x < 0$.

Рассмотрим тригонометрические функции. Имеем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\Big(x+\dfrac{\Delta x}{2}\Big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\Big(x+\frac{\Delta x}{2}\Big) = \cos x\,.$$

Мы воспользовались теоремой о первом замечательном пределе и непрерывностью функции $y = \cos x$. Далее, $\cos x = \sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)$, поэтому $(\cos x)' = \Big(\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big)' = \cos\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)\cdot\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)' = \cos\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big) = -\sin x$, т.е. $(\cos x)' = -\sin x$.

Производные тангенса и котангенса найдём по правилу дифференцирования дроби:

$$(\operatorname{tg} x)' = \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)' = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Таким образом, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Рассмотрим обратные тригонометрические функции. Функция $y = \sin x$ дифференцируема на интервале $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ и имеет на этом интервале отличную от нуля производную $(\sin x)' = \cos x$. Поэтому для обратной функции $y = \arcsin x$ при $-1 < x < 1$ имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y\big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

т.е. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В формуле $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ мы взяли знак «+» перед радикалом потому, что $\arcsin x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, и косинус положителен на этом интервале. Аналогично вычисляется и производная арккосинуса. Функция $y = \cos x$ на интервале $(0,\pi)$ имеет отличную от нуля производную $(\cos x)' = -\sin x$, поэтому

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y\big|_{y=\arccos x}} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

если $x \in (-1,1)$. Можно также воспользоваться соотношением $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, известным из элементарной тригонометрии. Имеем $(\arccos x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Выбор знака «+» перед радикалом в использованной выше формуле $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ объясняется тем, что $\arccos x \in (0,\pi)$, и функция $y = \sin x$ положительна на этом интервале. Заметим, что рассмотренные функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ не имеют конечной производной при $x \pm 1$. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'\big|_{y=\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{1/\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

т.е. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Аналогично,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'\big|_{y=\operatorname{arcctg} x}} = -\frac{1}{1/\sin^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\sin^2(\operatorname{arcctg} x) =$$

$$= -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Этот же результат можно получить быстрее, если воспользоваться равенством $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ и предыдущей формулой.

Производные гиперболических функций можно вычислить с помощью формул $(e^x)' = e^x$ и $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Например, $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$. Аналогично $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Составим таблицу производных основных элементарных функций.

1. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x\,.$

2. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\,, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,.$

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,, \quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,, \quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}.$

4. $(\cos x)' = -\sin x.$

5. $(\sin x)' = \cos x\,.$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,.$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,.$

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\,.$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\,.$

Эту таблицу полезно дополнить формулами:

12. $C' = 0$ — производная константы равна нулю.

13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Рекомендуется также запомнить производные некоторых часто встречающихся функций. Например, $(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема и отлична от нуля на некотором промежутке I. Тогда в точках этого промежутка определена функция $y = \ln|f(x)|$. Найдём производную этой функции. Пусть сначала $f(x) > 0$ для всех $x \in I$. Тогда $\big(\ln|f(x)|\big)' = \big(\ln f(x)\big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Если $f(x) < 0$ при всех $x \in I$, то $\big(\ln|f(x)|\big)' = \big(\ln(-f(x))\big)' = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, т.е. в обоих случаях $\big(\ln|f(x)|\big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Производная от логарифма (модуля) функции называется логарифмической производной. Если последнюю формулу переписать в виде $f'(x) = f(x)\cdot(\ln|f(x)|)'$, то её можно использовать для вычисления $f'(x)$ в тех случаях, когда логарифмическую производную вычислить проще, чем производную самой функции.

Пример. Пусть $y = (f(x))^{g(x)}$. Тогда
$$y' = y(\ln y)' = y\,(g(x)\cdot\ln f(x))' = \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\cdot\big(f(x)\big)^{g(x)}.$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке промежутка I, то на этом промежутке определена функция $f'(x)$, для которой также можно рассмотреть вопрос о её производной в точках промежутка I. Если такая производная в точке x существует, то она называется второй производной исходной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Производная рассматириваемой функции n-го порядка определяется по индукции. пусть $x \in I$, и пусть в окрестности этой точки определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Тогда производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в точке x по определению есть $\big(f^{(n-1)}(x)\big)'$. Таким образом, в соответствии с этим определением для существования $f^{(n)}(x)$ в точке x требуется, чтобы в некоторой окрестности этой точки существовали производные $f^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и чтобы производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ была дифференцируема в т. x (при этом под «производной нулевого порядка» здесь и далее понимается сама функция $f(x)$).

Пусть материальная точка движется вдоль ось абсцисс, и пусть зависимость её координаты от времени определяется равенством $x = x(t)$. Тогда мгновенная скорость изменения координаты (в данном случае абсциссы) материальной точки равна, как известно, $v(t) = x'(t)$. Для характеристики скорости изменения $v(t)$ с течением времени вводят понятие ускорения материальной точки:

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x'(t+\Delta t) - x'(t)}{\Delta t} = \big(x'(t)\big)' = x''(t)\,,$$

т.е. ускорение есть вторая производная координаты по времени. В этом состоит механический смысл второй производной.

Вычислим производные n-го порядка некоторых элементарных функций. Пусть сначала $y = a^x$. В этом случае $y' = a^x\ln a$, $y'' = a^x\ln^2 a$ и т.д. Общая формула $y^{(n)} = a^x\ln^n a$

доказывается по индукции. В частности, при $a = e$ имеем $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$. Здесь $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}$ и т.д. Общая формула $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$ доказывается по индукции. Для логарифмической функции $y = \log_a x$ можно воспользоваться этим результатом при $\alpha = -1$. Имеем

$$y' = \frac{1}{x\,\ln a}\,,\; y'' = \frac{-1}{x^2\,\ln a}\,,\; y''' = \frac{2}{x^3\,\ln a}\,,\; y^{IV} = -\frac{2\cdot 3}{x^4\,\ln a}\,,\; y^{V} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5\,\ln a}\;\text{ и т.д.}$$

Нетрудно угадать общую формулу

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}\,. \tag{1}$$

При $n = 1, 2, 3, 4, 5$ эта формула справедлива. Для производной $(n+1)$-го порядка имеем

$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}\right)' = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)}{x^{n+1}\ln a} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}\ln a}\,,$$

и по индукции формула (1) доказана.

Пусть $y = \sin x$. Докажем, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{2}$$

При $n = 0$ имеем $(\sin x)^{(0)} = \sin x = \sin\left(x + 0\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$. Пусть при некотором n формула (2) справедлива. Тогда

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left((\sin x)^{(n)}\right)' = \left(\sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \sin\left(x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right),$$

и формула (2) доказана. Аналогично доказывается и правило вычисления производной n-го порядка косинуса:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим еще формулу Лейбница

$$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}\,v^{(k)},$$

где для краткости у функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ не указана зависимость от x. Обе эти функции предполагаются дифференцируемыми соответствующее число раз в точке x. $*$ Для доказательства формулы Лейбница применим индукцию. При $n = 1$ формула справедлива, т.к. $(u\,v)' = u'v + u\,v' = \binom{1}{0}\,u'v + \binom{1}{1}\,uv'$. Пусть при некотором n формула Лейбница уже доказана. Тогда

$$(u\,v)^{(n+1)} = \left((u\,v)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}\,v^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(n+1-k)}\,v^{(k)} + u^{(n-k)}\,v^{(k+1)}\right) = u^{(n+1)}\,v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{(n+1-k)}\,v^{(k)} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)}\, v^{(k+1)} + u^{(0)}\, v^{(n+1)} = u^{(n+1)}\, v^{(0)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}\right) u^{(n+1-k)}\, v^{(k)} + u^{(0)}\, v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n+1-k)}\, v^{(k)}.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству формулы бинома Ньютона; на заключительном этапе рассуждения мы воспользовались равенствами

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix},$$

$$u^{(n+1)}\, v^{(0)} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} u^{(n+1-0)}\, v^{(0)} \ \text{ и } u^{(0)}\, v^{(n+1)} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} u^{(n+1-n-1)}\, v^{(n+1)}.$$

По индукции формула Лейбница доказана. $*$

Рассмотрим вопрос о дифференцировании функции, заданной параметрически. Пусть на интервале (t_1, t_2) заданы две функции

$$x = x(t) \text{ и } y = y(t)\,, \tag{3}$$

причём первая их них осуществляет взаимно однозначное отображение интервала (t_1, t_2) на интервал (x_1, x_2). В таком случае определена обратная функция $t = t(x)$, и на интервале (x_1, x_2) можно рассмотреть сложную функцию $y(x) = y(t(x))$. Про эту последнюю функцию говорят, что она задана параметрически равенствами (3). Предположим, что выполнены условия, при которых применимы правила дифференцирования сложной и обратной функций, и в этом предположении вычислим производную $y'(x)$; имеем

$$y'(x) = \big(y(t(x))\big)' = y'(t(x)) \cdot t'(x) = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))}\,, \text{ т.е. } y'(x) = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))}\,.$$

Обычно эту формулу записывают короче: $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}\,.$

Пример. Пусть $x(t) = t^2$, $y(t) = \sqrt{t}$, $t \in (0, +\infty)$. Здесь $t(x) = \sqrt{x}$, и $y(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$. Производная этой функции по доказанной формуле

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2t}\Big|_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

Рассмотрим равенство

$$F(x, y) = 0\,, \tag{4}$$

где $F(x, y)$ — «функция двух переменных». Можно считать, что левая часть (4) — это некоторая формула, содержащая x и y. Если для функции $y = y(x)$, заданной на промежутке I, для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F(x, y(x)) = 0$, то говорят, что функция $y = y(x)$ задана неявно равенством (4). Чтобы найти производную функции, заданной неявно, надо продифференцировать равенство $F(x, y(x)) = 0$ по x, используя правило дифференцирования сложной функции. Из получившегося соотношения между x, $y(x)$ и $y'(x)$ можно затем выразить $y'(x)$ через x и $y(x)$.

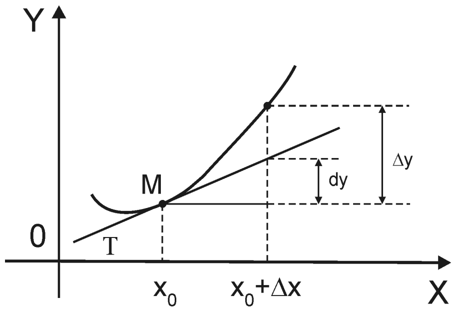
Пример. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Тогда, если $x^2 + (y(x))^2 = 1$, то $2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$, и $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$. Например, если $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, то $y'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда приращение этой функции может быть записано в виде

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)\,, \quad \Delta x \to 0\,.$$

Дифференциалом $df(x)$ функции $f(x)$ в точке x называется $f'(x)\Delta x$. Эта часть приращения $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ линейна относительно Δx, а при $f'(x) \neq 0$ она является главной частью Δy при $\Delta x \to 0$. Приращение Δx независимой переменной называется дифференциалом независимой переменной и обозначается dx. В таком случае $df(x) = f'(x)dx$, и $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$. Правую часть этого равенства используют также для обозначения производной; при этом $\dfrac{df(x)}{dx}$ следует рассматривать не как дробь, а как единое выражение.

Примеры. Имеем по определению $de^x = e^x dx$, $d\,x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}dx$, $d\ln x = \dfrac{1}{x}\,dx$, $d\cos x = -\sin x\, dx$ и т.д.



Рассмотрим геометрический смысл дифференциала. Уравнение касательной T к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ есть $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Очевидно, ордината касательной при $x = x_0$ равна $f(x_0)$. При $x = x_0 + \Delta x$ ордината касательной T равна $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Приращение ординаты касательной, следовательно, равно $f'(x_0)\Delta x$, т.е. равно дифференциалу функции $f(x)$ в точке x_0, отвечающему приращению Δx независимой переменной. В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

Поскольку дифференциал равен производной функции, умноженной на дифференциал независимой переменной, то правила вычисления дифференциалов мало чем отличаются от соответствующих правил вычисления производных. Например,

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)\,,$$
$$d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)\,,$$
$$d\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{(g(x))^2}\,.$$

Докажем лишь последнее равенство. Имеем

$$d\,\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,dx = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{(g(x))^2}\,.$$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда

$$df(x) = f'(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь сложную функцию $f(x(t))$. Дифференциал этой функции можно найти с помощью правила дифференцирования сложной функции: $df(x(t)) = f'(x(t))\,x'(t)\,dt$. Поскольку $x'(t)\,dt = dx(t)$, то имеем также равенство $df(x(t)) = f'(x(t))\,dx(t)$. Если не указывать здесь зависимость от t, то мы вернёмся к прежней форме (1) записи дифференциала:

$df(x) = f'(x)\,dx$. Подмеченное свойство называется инвариантностью формы записи дифференциала: в равенстве (1) можно считать x независимой переменной или функцией новой переменной t — в обоих случаях это равенство справедливо.

Вернемся вновь к равенству

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)\,, \quad \Delta x \to 0\,.$$

Если в правой части отбросить $o(\Delta x)$, то мы получим приближённое равенство

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

Обычно оно используется для вычисления (приближённого) $f(x + \Delta x)$:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x\,. \tag{2}$$

Пример. Пусть требуется вычислить $\sqrt[3]{8.1}$. Возьмём $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $\Delta x = 0.1$. Тогда $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, и по формуле (2) $\sqrt[3]{8.1} \approx \sqrt[3]{8} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0.1 = 2 + \dfrac{0.1}{12} \approx 2.008$.

Зафиксировав в равенстве $df(x) = f'(x)\,dx$ дифференциал независимой переменной dx, мы получим функцию от x, для которой можно вычислить дифференциал в точке x. Если при этом считать дифференциал независимого переменного равным его прежнему значению dx, то мы получим дифференциал второго порядка исходной функции: $d^2f(x) = d\,(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'dx = f''(x)\,dx^2$, т.е. $d^2f(x) = f''(x)\,dx^2$. Дифференциал n-го порядка определяется по индукции. Если дифференциал порядка $n-1$ уже определен, то дифференциал n-го порядка по определению есть $d^nf(x) = d\,(d^{n-1}f(x))$. При этом в качестве dx берётся то же значение, что и в дифференциале $(n-1)$-го порядка. Докажем по индукции, что $d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$. При $n = 1$ и $n = 2$ это равенство справедливо. Пусть при некотором n имеем равенство $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx$; тогда $d^{n+1}f(x) = d\,(d^nf(x)) = d\,(f^{(n)}(x)\,dx^n) = (f^{(n)}(x)\,dx^n)'dx = f^{(n+1)}(x)\,dx^{n+1}$, и по индукции формула $d^nf(x) = f^{(n)}\,dx^n$ доказана.

Примеры. Из полученных выше результатов следуют такие равенства: $d^ne^x = e^xdx^n$, $d^n\ln x = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}\,dx^n$, $d^n\cos x = \cos\Big(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\Big)\,dx^n$ и т.д.

Из доказанной выше формулы для дифференциала n-го порядка следует, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$. Правую часть этого равенства часто используют для обозначения производной n-го порядка; в этом случае $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ следует рассматривать не как дробь, а как единый символ.

Заметим еще, что для дифференциалов порядка выше первого свойство инвариантности формы записи уже не имеет места. В самом деле, пусть

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2\,. \tag{3}$$

Предположим, что $x = x(t)$. Тогда $(f(x(t)))' = f'(x(t)) \cdot x'(t)$; $(f(x(t)))'' = f''(x(t))(x'(t))^2 + f'(x(t))x''(t)$. Отсюда

$$d^2f(x(t)) = (f(x(t)))''\,dt^2 = (f''(x(t))(x'(t))^2 + f'(x(t))x''(t))dt^2 =$$

$$= f''(x(t))\,(dx(t))^2 + f'(x(t))\,d^2x(t).$$

Если здесь не указывать зависимость от t, т.е. заменить $x(t)$ на x, то мы получим $d^2f(x) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x$, и мы не возвращаемся к прежней форме записи дифференциала (3), когда x было независимым переменным. Равенство нарушается из-за слагаемого $f'(x)\,d^2x = f'(x(t))\,x''(t)\,dt^2$.

Пусть имеется параметрически заданная функция

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,,\ t \in (t_1, t_2). \tag{3}$$

Предположим, что на интервале (t_1, t_2) функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, определённую на интервале (x_1, x_2). Тогда, как известно, при условии $x'(t) \neq 0$ при всех $t \in (t_1, t_2)$, функция $y = y(x) = y(t(x))$, заданная параметрически равенствами (3) дифференцируема в каждой точке интервала (x_1, x_2), причем

$$y'(x) = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\,.$$

Дифференцируя это равенство, получаем, используя известные правила дифференцирования функций:

$$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = \left(\frac{y'(t(x))}{x'(t(x))}\right)' = \frac{\big(y'(t(x))\big)'\, x'(t(x)) - \big(x'(t(x))\big)'\, y'(t(x))}{\big(x'(t(x))\big)^2} =$$

$$= \frac{y''(t(x))\, \dfrac{x'(t(x))}{x'(t(x))} - x''(t(x)) \cdot \dfrac{y'(t(x))}{x'(t(x))}}{\big(x'(t(x))\big)^2} = \frac{y''(t)\, x'(t) - x''(t)\, y'(t)}{\big(x'(t)\big)^3}\,, \text{ где } t = t(x)\,.$$

Дифференцируя еще раз полученное равенство

$$y''(x) = \frac{y''(t)\, x'(t) - x''(t)\, y'(t)}{\big(x'(t)\big)^3}\,,$$

и не забывая при этом, что $t = t(x)$, можно найти $y'''(x)$ и т.д.

При вычислении производных высших порядков неявно заданных функций равенство $F(x, y) = 0$ дифференцируют соответствующее число раз, считая y функцией от x. Из полученного таким способом равенства можно выразить $y^{(n)}$ через $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Если требуется выразить $y^{(n)}$ через x и y, то все производные $y', \ldots, y^{(n-1)}$ надо последовательно выразить через указанные переменные и получившиеся выражения подставить в формулу для $y^{(n)}$.

Пример. Ранее из соотношения

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{4}$$

мы нашли первую производную $y' = -\dfrac{x}{y}$. Дифференцируя (4), получаем последовательно:

$2x + 2yy' = 0,\ 2 + 2\,(y')^2 + 2yy'' = 0$, и $y'' = -\dfrac{1 + (y')^2}{y} = -\dfrac{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}{y} = -\dfrac{x^2 + y^2}{y^3} = -\dfrac{1}{y^3}$. Если например, $y = \sqrt{1 - x^2}$, то $y'' = (\sqrt{1 - x^2})'' = -\dfrac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$. Здесь можно проверить получившийся результат непосредственным дифференцированием: $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$$y'' = -\frac{\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = -\frac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 13.

Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Теорема Бернулли - Лопиталя и раскрытие неопределенностей (док-во только для [0/0]). Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций в бесконечности.

ОЛ-2, гл. 5, 6.

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на некотором промежутке I, принимает в точке x_0 этого промежутка наибольшее значение, если для любой точки $x \in I$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Если же для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Рассмотрим основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема (*Ферма*). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Для определённости будем считать, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0\,,$$

т.к. здесь числитель неположителен, а знаменатель положителен. Далее,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0\,,$$

т.к. числитель по-прежнему неположителен, а знаменатель отрицателен. Таким образом, $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимальное значение рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Заметим, что если точка x_0 не является внутренней точкой промежутка I, то утверждение теоремы может оказаться несправедливым. Пусть, например, функция $y = x$ рассматривается на отрезке $[0, 1]$. Производная этой функции тождественно равна единице и не обращается в нуль в точках 0 и 1, в которых данная функция достигает соответственно наименьшего и наибольшего значений.

Теорема (*Ролля*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M в точке c_1 и наименьшего значения m в точке c_2. Если $m = M$, то, поскольку, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и её производная равна нулю во всех точках интервала (a, b); в качестве точки c, в которой $f'(c) = 0$, можно взять любую точку этого интервала. Если же $m < M$, то в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек c_1 или c_2 является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, и тогда по теореме Ферма в этой внутренней точке производная функции $f(x)$ равна нулю. Теорема доказана.

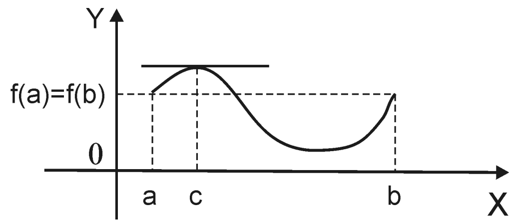
Заметим, что нарушение любого из условий теоремы может привести к тому, что её заключение не будет выполняться.

Если, например

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{если } 0 \leqslant x < 1\,, \\ 0\,, & \text{если } x = 1\,, \end{cases}$$

то точки c, в которой $f'(c) = 0$ не существует. Здесь функция не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Если $f(x) = x$ на том же отрезке, то нарушено условие $f(a) = f(b)$; производная $f'(x)$ тождественно равна единице и не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0, 1)$. Рассмотрим еще функцию $f(x) = x^{2/3}$ на отрезке $[-1, 1]$. Функция $f(x)$ непрерывна, $f(-1) = f(1)$, но производная $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ нигде в нуль не обращается. В данном случае дело в том, что $f'(x)$ не существует при $x = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении её условий на интервале (a, b) найдется хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$ горизонтальна.



Заметим еще, что если точка $c \in (a, b)$, то её можно записать в виде $c = a + \theta(b - a)$, где θ – некоторое число из интервала $(0, 1)$. В самом деле, $\theta = \dfrac{c - a}{b - a}$, числитель и знаменатель этой дроби оба положительны, причём числитель меньше знаменателя. Поэтому $\theta \in (0, 1)$.

Теорема (*Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда на этом интервале существует точка c такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\,.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), поскольку этими свойствами обладает $f(x)$. Далее $F(a) = f(a)$ и $F(b) = f(a)$ — это проверяется непосредственно. Мы видим, что для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, для которой

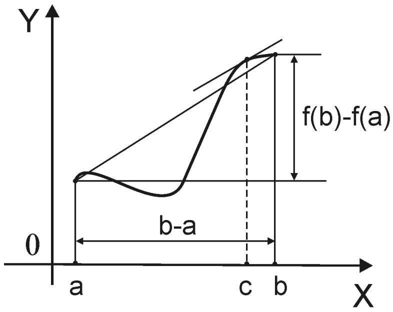
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\,.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причём во всех точках этого интервала $f'(x) = 0$. Тогда эта функция постоянна на отрезке $[a, b]$.

В самом деле, пусть $a < x \leqslant b$. Применим теорему Лагранжа к отрезку $[a, x]$. Имеем: $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, т.к. $f'(c) = 0$. Поэтому $f(x) = f(a)$ для всех $x \in [a, b]$, и $f(x) = \text{const}$.

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа. Очевидно, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$. Поскольку, как известно, $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$, то мы видим, что при выполнении условий теоремы Лагранжа на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна хорде, соединяющей граничные точки этого графика.



Теорема (*Коши*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причём $g'(x)$ отлична от нуля в каждой точке этого интервала. Тогда на (a, b) найдется точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. В самом деле, если бы выполнялось равенство $g(b) = g(a)$, то на интервале (a, b) по теореме Ролля нашлась бы точка ξ, в котрой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы такой точки нет. Поэтому $g(b) - g(a) \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,(g(x) - g(a))\,.$$

Легко видеть, что для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g'(c) = 0\,.$$

Из этого равенства вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теорема (*правило Лопиталя раскрытия неопределенностей*). Пусть в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 определены и дифференцируемы функции $f(x)$ и $g(x)$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0\,,$$

и $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$. Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K\,, \tag{1}$$

то и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K\,, \tag{2}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. В результате получим функции, непрерывные в окрестности $U(x_0) = \mathring{U}(x_0) \cup \{x_0\}$ точки x_0. Для этих новых функций оставим прежние обозначения. Заметим, что если $x \neq x_0$, то $g(x) \neq 0$. Если бы было $g(x) = 0$, то, как и при доказательстве теоремы Коши, к отрезку с концами в точках x_0 и x можно было применить теорему Ролля, и тогда нашлась бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы это невозможно. Поэтому для любого $x \neq x_0$ имеем $g(x) \neq 0$. Пусть $x \neq x_0$, и пусть для определенности $x > x_0$. Для пары функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K\,,$$

т.к., очевидно, $c \to x_0$, если $x \to x_0$. Здесь $c \in (x_0, x)$ — точка, существование которой обеспечивается теоремой Коши. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, и теорема доказана.

Мы рассмотрели теорему о раскрытии неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Аналогичное утверждение справедливо и для случая неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для всех остальных предельных переходов ($x \to \infty$, $x \to x_0+$ и т.п.) правило Лопиталя остается в силе. Заметим, что если предел отношения производных (1) не существует, то отсюда еще не следует, вообще говоря, что не существует предел (2).

Пример. Выясним вопрос о производных функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ при $x = \pm 1$. Имеем

$$(\arcsin x)'\,\Big|_{x=1} = \lim_{h\to 0-} \frac{\arcsin(1+h)-\arcsin 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0-} \frac{(\arcsin(1+h)-\arcsin 1)'}{h'} = \lim_{h\to 0-} \frac{1}{\sqrt{1-(1+h)^2}} = +\infty\,.$$

Таким образом, (левая) производная функции $y = \arcsin x$ в точке $x = 1$ равна $+\infty$. Аналогично проверяется что $(\arcsin x)'\,\Big|_{x=-1} = +\infty$, и $(\arccos x)'\,\Big|_{x=\pm 1} = -\infty$.

С помощью правила Лопиталя вычислим несколько важных пределов. Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, и пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{a^x}{x^\alpha}$. Мы имеем здесь дело с неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем сначала выражение под знаком предела:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{\left(a^{1/\alpha}\right)^x}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha$$

Где $b = a^{1/\alpha} > 1$. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b^x}{x}$. Для раскрытия этой неопределенности $\left(\text{вида } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} b^x \ln b = +\infty\,.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = +\infty\,.$$

Мы видим, что показательная функция (с основанием большим единицы) растёт быстрее степенной (с любым показателем степени). Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Рассмотрим предел

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a^\beta x}$. И здесь целесообразно предварительно преобразовать выражение под знаком предела:

$$\frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta .$$

Вычислим сначала предел выражения в скобках. Для этого надо раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{\alpha/\beta}\right)'}{(\log_a x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot x^{(\alpha/\beta)-1}}{\dfrac{1}{x\ln a}} = \frac{\alpha\ln a}{\beta} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha/\beta} = +\infty\, .$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta = +\infty\, .$$

Мы видим, что степенная функция (с положительным показателем степени) растет быстрее любой степени логарифма при $x\to+\infty$.

Рассмотрим еще при $0<a<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$ предел $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x$. Здесь мы имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Пусть $x=\dfrac{1}{t}$. Тогда $t\to+\infty$, и мы получаем

$$\lim_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-\log_a t)^\beta}{t^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_{a^{-1}}^\beta t}{t^\alpha} = 0$$

в силу предыдущего результата. Таким образом, $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x = 0$.

$*$ Докажем ещё, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, где $a>0$. Если $0<a\leqslant 1$, то утверждение очевидно. Пусть $a>1$, и пусть

$$[n/2] > 4a^2, \tag{3}$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$. Тогда

$$n! > [n/2]([n/2]+1)([n/2]+2)\dots([n/2]+[n/2]) > (4a^2)^{[n/2]+1} > (4a^2)^{n/2} = 2^n a^n,$$

т.е. при указанных n выполняется неравенство $n! > 2^n a^n$. Поэтому при выполнении (3) имеем:

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^n}{2^n a^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Т.к. $\dfrac{1}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, то отсюда получаем требуемое. $*$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекция 14.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано. Формула Маклорена и представление по этой формуле некоторых элементарных функций. Использование формулы Тейлора в приближенных вычислениях и для вычисления пределов.

ОЛ-2, гл.7.

Формулой Тейлора называется равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k+r_n(x);$$

слагаемое $r_n(x)$ называется остаточным членом. Рассмотрим два варианта формулы Тейлора.

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Тогда для любого $x\in U(x_0)$ справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)\,!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,,$$

где θ — некоторое число из интервала $(0,1)$.

Доказательство. Пусть $x\in U(x_0)$, и пусть для определенности $x>x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x_0,x]$ две функции $\varphi(t)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k\,!}\cdot(x-t)^k$ и $\psi(t)=(x-t)^{n+1}$. Для этих функций имеем $\varphi(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}\cdot(x-x)^k=f(x)-f(x)=0$, $\varphi(x_0)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k$, $\quad\psi(x)=(x-x)^{n+1}=0$, $\quad\psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$.

Вычислим производные:

$$\varphi'(t)=\Big(f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k\,!}\cdot(x-t)^k\Big)'=$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\Big(f^{(k+1)}(t) \cdot (x-t)^k - k\, f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} \Big) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!} \cdot (x-t)^{k-1}\,.$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k-1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!} \cdot (x-t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!}\,(x-t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!} \cdot (x-t)^l\,.$$

Следовательно,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x-t)^k + f'(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!}\,(x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x-t)^n\,,$$

т.е. $\varphi'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x-t)^n$.

Далее, $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале (x_0, x) отлична от нуля. К паре функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ применим теорему Коши. Имеем:

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta(x-x_0))}{\psi'(x_0 + \theta(x-x_0))}\,,$$

где $\theta \in (0,1)$. Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n\,!} \cdot (x - x_0 - \theta(x-x_0))^n \times$$

$$\times \frac{1}{-(n+1)(x - x_0 - \theta(x-x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)\,!}\,,$$

т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)\,!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при $x > x_0$. При $x < x_0$ рассуждения аналогичны; если $x = x_0$, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n-го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)\,,\ x \to x_0\,.$$

Доказательство. Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0\,.$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, применим $n-1$ раз правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)\,!}\cdot(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)\,!}\cdot(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n\,!(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{n\,!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=0\,,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=f^{(n)}(x_0)$. Теорема доказана.

Заметим, что мы не могли при доказательстве это теоремы применить правило Лопиталя n раз, поскольку по условию теоремы производная n-го порядка функции $f(x)$ существует лишь при $x=x_0$. Рекомендуется самостоятельно проверить, что в наших рассуждениях перед каждым применением правила Лопиталя были выполнены все требования соответствующей теоремы.

Если $x_0=0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена. Из доказанных теорем вытекают такие формулы Маклорена с остаточным членом соответственно в форме Лагранжа и Пеано:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!}\cdot x^{n+1}\,,\quad 0<\theta<1,\quad \text{и}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}+o(x^n)\,,\quad x\to 0\,.$$

Пусть $f(x)=\cos x$. Тогда

$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=\cos k\dfrac{\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n\,, \text{ если } k=2n\,,\\ 0\,, \text{ если } k=2n+1\,,\end{cases}\quad n=0,1,2,\ldots\,.$

При составлении формулы Маклорена учтем производные $f^{(k)}(0)$ до $k=2n+1$ включительно; при этом остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{\cos(\theta x+(n+1)\,\pi)}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2}\,,$$

и мы получаем такие формулы

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2}\,,\quad 0<\theta<1\,,\quad \text{и}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+o(x^{2n+1})\,,\quad x\to 0\,.$$

Остаточный член в форме Пеано записан в виде $o(x^{2n+1})$ потому, что слагаемое, содержащее x^{2n+1} имеет нулевой коэффициент. Если $f(x)=\sin x$, то

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(k)}(0) = \sin k\cdot\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n\,,\ \text{если } k = 2n+1\,, \\ 0\,,\ \text{если } k = 2n\,, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Если при составлении формулы Маклорена учесть слагаемые, содержащие производные до $2n$-го порядка включительно, то остаточный член в форме Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{\sin\left(\theta x + (2n+1)\,\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1} = (-1)^n\cdot\frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1}\,.$$

Поэтому

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!} + (-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1}\,,\quad 0<\theta<1, \quad \text{и}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!} + o(x^{2n})\,,\quad x\to 0\,.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$. Здесь производная порядка k вычисляется по формуле $f^{(k)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$; при $x = 0$ имеем $f^{(k)}(0) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$. Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\,!}\cdot x^k + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)\,!}\times$$
$$\times\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\,,\quad 0<\theta<1\,.$$

В этой формуле возможно дополнительное ограничение $x > -1$, связанное с тем, что для функции $(1+x)^\alpha$ в точке $x = -1$ могут не выполняться условия соответствующей теоремы. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеет в данном случае вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\,!}\cdot x^k + o(x^n),\quad x\to 0\,.$$

Для логарифмической функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f(0) = \ln 1 = 0$;

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)\,!}{(1+x)^k}\,,\quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k} + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\,,\quad 0<\theta<1.$$

В этой формуле $x > -1$, т.к. логарифм $\ln(1+x)$ не определен при $1+x \leqslant 0$. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k} + o(x^n)\,,\quad x\to 0.$$

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно использовать в приближённых вычислениях. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)\,!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,,$$

и пусть известно, что для всех x из интервала с концами в точках x_0 и x выполняется неравенство
$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M\,. \tag{1}$$
Тогда имеет место приближённая формула
$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k\,, \tag{2}$$
причём можно оценить погрешность:
$$\Bigl|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k\Bigr| = \Bigl|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)\,!} \cdot (x-x_0)^{n+1}\Bigr| \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$
Если неравенство (1) справедливо при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то погрешность приближенной формулы (2) стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку, как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)\,!} = 0$. В этом случае формула (2) позволяет (в принципе) вычислить $f(x)$ с любой точностью.

Обратимся к примерам.

Примеры. 1. При $x = 1$ получаем из формулы Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)\,!}\,, \quad 0 < \theta < 1\,.$$
Отсюда, т.к. $1 < e^{\theta} < 3$
$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!}\right) < \frac{3}{(n+1)\,!}\,,$$
и мы получаем не только приближенную формулу
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!}\,,$$
но и оценку ее погрешности.

2. Поскольку при любых $n = 0, 1, 2\ldots$ и $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\cos x| \leqslant 1$, то для $\cos x$ и $\sin x$ имеем такие приближённые равенства
$$\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} \quad \text{и} \quad \sin x \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!}\,,$$
причем абсолютные погрешности этих приближенных равенств не превосходят соответственно
$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)\,!} \quad \text{и} \quad \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)\,!}\,.$$

2. В формулу
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

подставим $x = -\dfrac{1}{2}$ и умножим обе части получившегося равенства на -1; получим:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}\Bigl(1 - \dfrac{\theta}{2}\Bigr)^{n+1}},$$

где $0 < \theta < 1$. Из последнего неравенства следует, что $1 - \dfrac{\theta}{2} > 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\theta}{2}} < 2$; $\dfrac{1}{\Bigl(1 - \dfrac{\theta}{2}\Bigr)^{n+1}} < 2^{n+1}$. Поэтому $\dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot \Bigl(1 - \dfrac{\theta}{2}\Bigr)^{n+1}} < \dfrac{1}{n+1}$, и мы имеем приближенную формулу

$$\ln 2 \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}, \tag{3}$$

причем

$$0 < \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} < \frac{1}{n+1}.$$

При такой оценке погрешности для получения значения $\ln 2$ с точностью, например, до 0.001 в формуле (3) пришлось бы взять n, для которого $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 0.001$, т.е. $n \geqslant 999$. Можно доказать, что на деле абсолютная погрешность формулы (3) меньше, чем $\dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$.

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано можно применять для вычисления пределов. Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sqrt[3]{1+x^2} \cdot \sin x}{x^3}.$$

По соответствующим формулам Маклорена имеем при $x \to 0$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{\frac{1}{3}\Bigl(\frac{1}{3} - 1\Bigr)}{2} x^4 + o(x^4) = 1 + \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)$.

Для получения аналогичного разложения арктангенса придется потрудиться, т.к. готовой формулы у нас нет:

$$(\operatorname{arctg} x)' \Big|_{x=0} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1,$$
$$(\operatorname{arctg} x)'' \Big|_{x=0} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0,$$
$$(\operatorname{arctg} x)''' \Big|_{x=0} = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4} \Big|_{x=0} = -2,$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0} + \frac{(\operatorname{arctg} x)'|_{x=0}}{1!} x + \frac{(\operatorname{arctg} x)''|_{x=0}}{2!} x^2 + \frac{(\operatorname{arctg} x)'''|_{x=0}}{3!} x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Возвращаемся к исходной задаче:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) - \Bigl(1 + \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\Bigr)\Bigl(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\Bigr)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{3} - x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2} + o(1)\Big) = -\frac{1}{2}\,.$$

Искомый предел равен $-\dfrac{1}{2}$. При вычислении пределов описанным способом могут оказаться полезными свойства символа $o(x^n)$. Приведем без доказательства некоторые из них; везде $x \to 0$: $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$, $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$, $\big(o(x^m)\big)^n = o(x^{mn})$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$, $o(x^n) = o(x^m)$, $o(x^n)/x^m = o(x^{n-m})$. Здесь m и n — натуральные числа; в последних трёх формулах $n \geqslant m$. Все перечисленные равенства читаются слева направо. Например, запись $o(x^n) = o(x^m)$, $n \geqslant m$, надо понимать в том смысле, что бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x^n будет также и бесконечной малой более высокого порядка по сравнению с x^m (но не наоборот).

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Математический анализ

конспект лекций
для студентов 1-го курса 1-го семестра
всех специальностей ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)

Лекции 15-16.

Необходимое и достаточное условия монотонности дифференцируемой функции на промежутке. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Стационарные и критические точки функции. Достаточные условия экстремума (по первой и второй производным, по производной высшего порядка). Выпуклость (вверх и вниз) функции, точки перегиба. Достаточные условия выпуклости дважды дифференцируемой функции. Необходимые и достаточные условия наличия точки перегиба. Схема полного исследования функции и построения ее графика.

ОЛ-2, гл.8.

Напомним некоторые определения. Функция $f(x)$, определенная на промежутке I, называется неубывающей на этом промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 этого промежутка из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$, то получим определения соответственно невозрастающей, возрастающей и убывающей функций. Все такие функции называются монотонными, а две последние — строго монотонными.

Теорема (*необходимые и достаточные условия монотонности функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех точках этого промежутка за исключением, быть может, конечного их числа. Для того, чтобы эта функция была неубывающей на промежутке I, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду, где она определена.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ не убывает на промежутке I. Тогда в точке $x \in I$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

$$\text{т.к.} \quad f(x+\Delta x) - f(x) \geqslant 0, \quad \text{и} \quad \Delta x > 0.$$

Если x — правый конец промежутка I, причём $x \in I$, то следует взять $\Delta x < 0$; результат будет тем же. Таким образом, $f'(x) \geqslant 0$, и необходимость доказана; заметим, что непрерывность функции $f(x)$ здесь не понадобилась.

Достаточность. Пусть во всех точках промежутка I, в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, и пусть x_1 и x_2, $x_2 > x_1$, — произвольные точки этого промежутка. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_1,\ x_2)$, то, применяя к отрезку $[x_1,\ x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0, \quad \text{т.е. } f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

Если же на интервале $(x_1,\ x_2)$ имеются точки $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < x_2$, в которых производная функции $f(x)$ не существует, то можно применить теорему Лагранжа к каждому из отрезков $[x_1,\ \xi_1],\ [\xi_1,\ \xi_2], \ldots, [\xi_n,\ x_2]$. В результате, как и выше, получим $f(x_1) \leqslant f(\xi_1) \leqslant f(\xi_2) \leqslant \ldots \leqslant f(\xi_n) \leqslant f(x_2)$, т.е. $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Мы видим, что $f(x)$ и в самом деле не убывает на промежутке I. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Можно доказать аналогичную теорему и для невозрастающей функции $f(x)$; в этом случае (при выполнении прочих условий теоремы) надо потребовать, чтобы производная $f'(x)$ была неположительной всюду, где она определена.

Теорема (*достаточные условия возрастания функции на промежутке*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех его точках за исключением, быть может, конечного их числа. Если производная $f'(x)$ неотрицательна всюду, где она определена, и не равна тождественно нулю ни на одном интервале $I_1 \subset I$, то функция $f(x)$ возрастает на I.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $f(x)$ не убывает на I. Пусть для некоторых точек x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, этого промежутка $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда для любой точки $x \in (x_1,\ x_2)$ имеем $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Это означает, что функция $f(x)$ постоянна на $(x_1,\ x_2)$, и, следовательно, $f'(x)$ тождественно равна нулю на этом интервале, что противоречит условиям теоремы. Поэтому на деле $f(x_1) \neq f(x_2)$, а тогда $f(x_1) < f(x_2)$, и функция $f(x)$ возрастает на I. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и в отношении убывающих функций. Надо только в условиях теоремы неотрицательность производной заменить на неположительность.

Примеры. Из доказанной теоремы следует, например, что всюду возрастают функции $y = e^x$, $y = x^3$, $y = \operatorname{arctg} x$; функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ возрастают на полуинтервале $[0, +\infty)$; функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, а функция $y = \cos x$ убывает на $[0,\ \pi]$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x) \geqslant f(x_0)$, то мы получим определение локального минимума. А если потребовать, чтобы для всех $x \neq x_0$ выполнялось строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то получится определение соответственно строгого локального максимума и строгого локального минимума. Во всех этих четырех случаях точка x_0 называется точкой локального экстремума; в двух последних случаях говорят о точке строгого локального экстремума. Из теоремы Ферма следует, что если в точке экстремума x_0 функции $f(x)$ существует производная, то эта производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$. Таким образом, в точках экстремума производная функции либо не существует, либо равна нулю. Равенство нулю производной является лишь необходимым условием наличия в этой точке экстремума. Достаточным это условие не является. Рассмотрим, например, функцию $y = x^3$. Эта функция всюду возрастает, однако, $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными точками этой функции. Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует, называются критическими точками функции (а также точками, подозрительными на экстремум). Если функция, определенная в проколотой окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0, принимает положительные значения во всех точках интервала $(x_0 - \delta,\ x_0)$ и отрицательные значения во всех точках интервала $(x_0,\ x_0+\delta)$, то говорят, что эта функция меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0. Аналогично определяется ситуация, когда функция меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. Если во всех точках указанной проколотой окрестности функция принимает значения одного знака, то говорят, что функция сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0.

Рассмотрим теоремы о достаточных условиях наличия экстремума.

Теорема (*первая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ этой точки. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0, то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0, то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x)<0$ при всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, то на полуинтервале $(\ x_0-\delta,\ x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ имеем по теореме о достаточных условиях убывания функции неравенство $f(x)>f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0,\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0)<f(x)$ для всех $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет. Теорема доказана.

Теорема (*вторая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ существуют все производные до n-го порядка включительно, причем $f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда, если n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Если n четно, и $f^{(n)}(x_0)<0$, то в точке x_0 строгий локальный максимум. Если n нечетно, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Запишем для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; в силу условия $f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ имеем такое равенство:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0.$$

Отсюда

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))\cdot(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где $$\alpha(x)=n!\frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}\longrightarrow 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Пусть теперь n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда

$$\lim_{n\to x_0}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))=f^{(n)}(x_0)>0,$$

и по теореме о сохранении функцией знака своего предела существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 такая, что $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$ для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$. Далее, т.к. n четно, то также и $(x-x_0)^n>0$ для указанных x. Поэтому из (1) следует, что для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Пусть n нечетно, и пусть для определенности $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда, как и выше, найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ такая, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x) > 0$. Поскольку n нечетно, то при $x < x_0$ имеем неравенство $(x - x_0)^n < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $(x - x_0)^n > 0$. Поэтому из (1) получаем, что при $x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, а при $x > x_0$ — неравенство $f(x) > f(x_0)$, если, конечно, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Мы видим, что экстремума в точке x_0 нет. К такому же выводу мы придем, если предположим, что $f^{(n)}(x_0) < 0$. Теорема доказана.

Чаще всего эту теорему применяют при $n = 2$, т.е. наличие экстремума и его характер определяют по знаку $f''(x_0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,\ b)$. Говорят, что функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на этом интервале, если для любой касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше (ниже) точки графика функции с той же абсциссой. Точка $x_0 \in (a,\ b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если существует $\delta > 0$ такое, что направления выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0 + \delta)$ различны (т.е. при переходе через точку перегиба направление выпуклости функции меняется на противоположное). Точка $(x_0,\ f(x_0))$ называется при этом точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Теорема (*достаточные условия выпуклости функции*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b), причем в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала (a, b) вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то функция $f(x)$ выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство. Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Уравнение такой касательной, как известно, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть для определенности $x_0 < x < b$. Тогда разность ординат точки касательной $(x,\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ и точки графика $(x, f(x))$ равна $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Поэтому $\Delta y = (f'(x_0) - f'(c))(x - x_0)$, $c \in (x_0,\ x)$. Применим еще раз теоремму Лагранжа: $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $c_1 \in (x_0, c)$. Здесь $f''(c_1) > 0$, $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, поэтому $\Delta y < 0$, и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае $a < x < x_0$. Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b). Теорема доказана.

Теорема (*необходимые условия наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0. Поэтому на деле $f''(x_0) = 0$, и теорема доказана.

Как и в случае точек экстремума условие $f''(x_0) = 0$ лишь необходимо для наличия перегиба в соответствующей точке. Достаточным это условие не является, как показывает пример функции $y = x^4$. Здесь $y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$, однако эта функция выпукла вниз на интервале $(-\infty, \infty)$ и не имеет перегиба при $x = 0$.

Теорема (*первое достаточное условие наличия точки перегиба*). Пусть функция

$f(x)$ определена в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда если в соответствующей проколотой окрестности $(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 есть точка перегиба функции $y=f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ и отрицательна при $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Тогда на $(x_0-\delta,\ x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0,\ x_0+\delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема (*второе достаточное условие наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0, причем $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$. Тогда x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f'''(x_0)>0$. Тогда

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)}{x-x_0}.$$

Выражение $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}$ в некоторой левосторонней проколотой окрестности $(x_0-\delta_1,\ x_0)$, $\delta_1>0$, должно иметь знак своего предела $f'''(x_0)$, т.е. $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$, а тогда (т.к. $x-x_0<0$) выполняется неравенство $f''(x)<0$. Аналогично

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+}\frac{f''(x)}{x-x_0},$$

и $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ при $x\in(x_0,\ x_0+\delta_2)$, $\delta_2>0$, т.е. $f''(x)>0$ при указанных x.

Мы видим, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. По предыдущей теореме x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

При построении графика функции следует предварительно выяснить его характерные особенности. При этом можно руководствоваться, например, такой схемой.

1. Найти область определения функции, выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической.

2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат. Определить интервалы, на которых функция сохраняет знак.

3. Определить точки разрыва, выяснить характер разрывов, найти вертикальные асимптоты.

4. Исследовать поведение функции при стремлении аргумента к $\pm\infty$ и найти наклонные асимптоты.

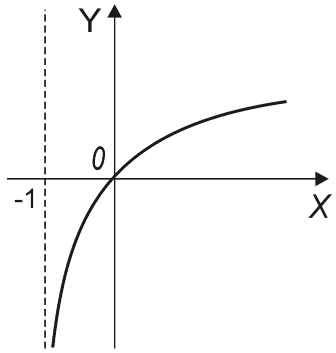
5. Определить интервалы монотонности и найти точки экстремумов.

6. Определить интервалы выпуклости, найти точки перегиба.

Пример. Пусть требуется построить график функции $y=\ln(1+\sqrt[3]{x})$. Здесь функция определена при $1+\sqrt[3]{x}>0$, т.е. при $x>-1$. Специальными свойствами, указанными в первом пункте приведенной выше схемы, данная функция не обладает (про такую функцию говорят, что она «общего вида»). Решая уравнение $\ln(1+\sqrt[3]{x})=0$ находим единственную точку $x=0$ пересечения графика с осью абсцисс; функция отрицательна на интервале $(-1,0)$ и положительна на $(0,+\infty)$. Данная функция, очевидно, непрерывна всюду, где она определена; $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+\sqrt[3]{x}) = -\infty$. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+\sqrt[3]{x}) = \infty.$$

Наклонных асимптот нет. По результатам проведенного исследования можем нарисовать предварительный эскиз графика функции.



Дифференцируем: $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Сведения о производной можно занести в таблицу:

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$y'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$
$y(x)$	$\nearrow$ возрастает	экстремума нет	$\nearrow$ возрастает

Дифференцируем еще раз:

$$y'' = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})}\right)' = -\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(1+\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{3}}{3\sqrt[3]{x^4}(1+\sqrt[3]{x})^2} = -\frac{2+3\sqrt[3]{x}}{9x\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}.$$

Составляем таблицу для второй производной:

x	$\left(-1, -\dfrac{8}{27}\right)$	$-\dfrac{8}{27}$	$\left(-\dfrac{8}{27}, 0\right)$	0	$(0,\ +\infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$	не опред.	$-$
$y(x)$	$\frown$ выпукла вверх	точка перегиба	$\smile$ выпукла вниз	точка перегиба	$\frown$ выпукла вверх

Рисуем уточненный эскиз графика функции.