Ковалец Кирилл ИУ7-22М

Билет 1

Типовая задача оптимизации имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in G \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу (1) в случае произвольной функции f и произвольного подмножества $G \subseteq R^n$.

Если $G = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, то задача (1) называв. задачей одномерной оптимизации.

Рассмотрим задачу одномерной оптимиз:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Опр.

Функция f называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists\ a_1, b_1 \in [a, b]$ такие, что:

1) $a_1 \leq b_1$

2) если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a, a_1]$,

если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1, b]$

3) $\forall x \in [a_1, b_1] \quad f(x) = \min\limits_{t \in [a, b]} f(t)$

Метод перебора

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in [a, b], \end{cases}$$

f - унимодальна на $[a, b]$.

1) Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n равновеликих частей точками $x_i = a + i\Delta$, $i = \overline{0;n}$, где $\Delta = \dfrac{b-a}{n}$.

2) Вычисляем $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0;n}$

3) Выбираем $x_m \in \{x_0, \ldots, x_n\}$ так, чтобы

$$f(x_m) = \min_{i=\overline{0;n}} \{f_i\}$$

4) Принимаем $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$.

Погрешность нахождения точки x^*:

$$\varepsilon_n \le \frac{b-a}{n}$$

Реализация метода требует вычисления $N = n+1$ значения целевой функции. Поэтому точность $\varepsilon(N) = \dfrac{b-a}{N-1}$.

Метод поразрядного поиска

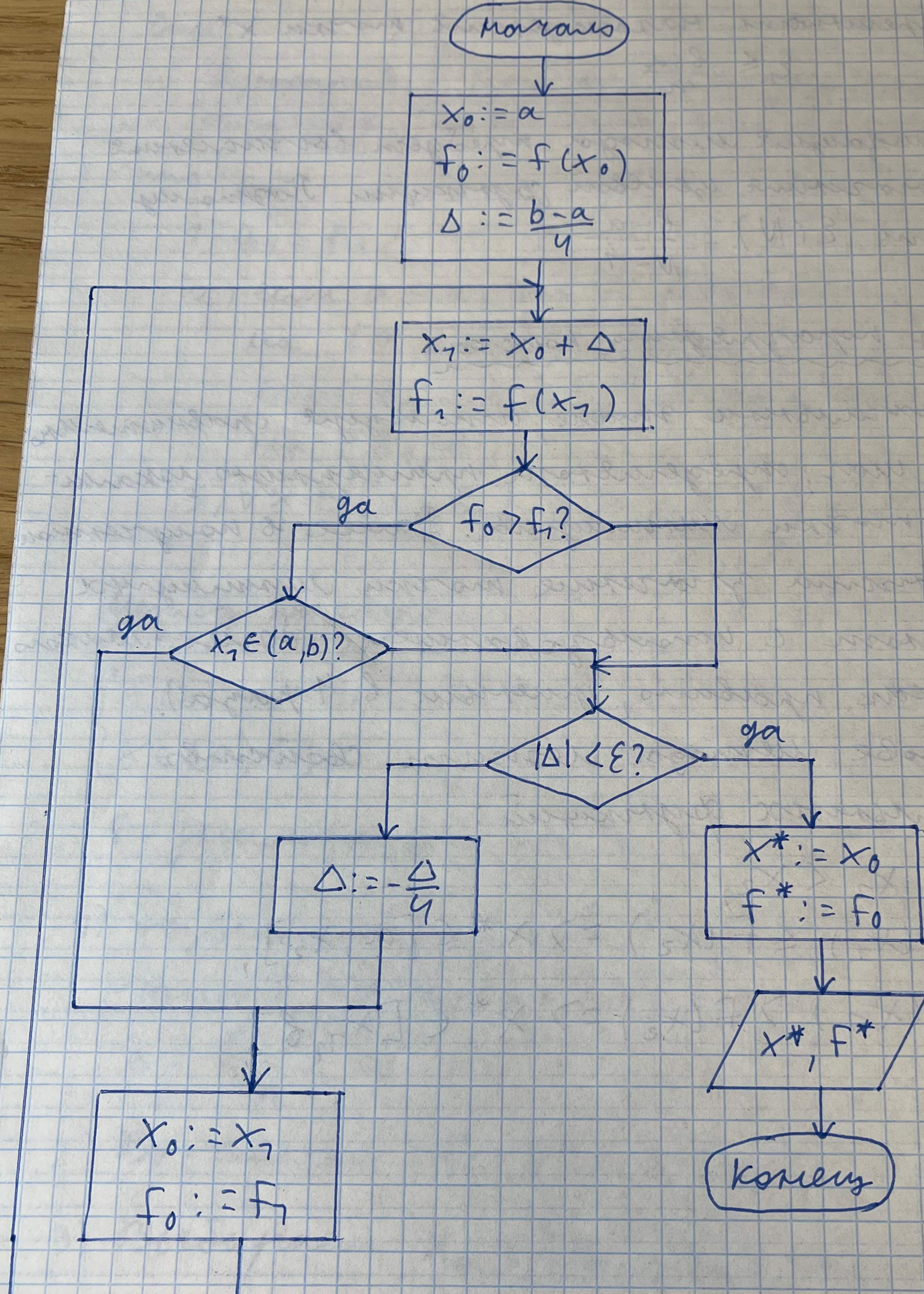
На начальном этапе, используя сравнительно больший шаг, определяют примерную локализацию точки минимума. Далее в полученной окрестности значение точки минимума уточняют с использованием более мелкого шага (как правило, уменьш. в 4 раза).

В основе метода лежит свойство унимодальных функций:

если $x_1 < x_2$,

то $f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow x^* \in [a, x_2]$,

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x^* \in [x_1, b]$.



начало
$x_0 := a$
$f_0 := f(x_0)$
$\Delta := \frac{b-a}{4}$
$x_1 := x_0 + \Delta$
$f_1 := f(x_1)$
да
$f_0 > f_1$?
да
$x_1 \in (a,b)$?
да
$|\Delta| < \varepsilon$?
$\Delta := -\frac{\Delta}{4}$
$x^* := x_0$
$f^* := f_0$
x^*, f^*
$x_0 := x_1$
$f_0 := f_1$
конец

Ковалец Кирилл ИУ7-22М

Билет 2

Типовая задача оптимизации имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in G \end{cases}$$

Будем рассматривать задачу (1) в случае произвольной функции f и произвольного подмножества $G \subseteq R^n$.

Если $G = [a, b] \subset \mathbb{R}$, то задача (1) называется задачей <u>одномерной оптимизации</u>.

Рассмотрим задачу одномерной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Опр.

Функция f называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists\, a_1, b_1 \in [a, b]$ такие, что

1) $a_1 \leq b_1$
2) если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a, a_1]$,
   если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1, b]$.
3) $\forall x \in [a_1, b_1] \quad f(x) = \min\limits_{t \in [a, b]} f(t)$

Метод дихотомии

В методе дихотомии выбирают $0 < \delta \ll b - a$ и полагают, что

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

В этом случае

$$\frac{\text{длина нового отр.}}{\text{длина текущего отр.}} = \frac{|[a, x_2]|}{|[a, b]|} = \frac{|[x_1, b]|}{|[a, b]|} \approx$$

$$\approx \{\delta \ll b - a\} \approx \frac{1}{2}.$$

Точность ε_n, которая обеспечивается после выполнения n итераций алгоритма:

$$\varepsilon_n \approx \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Точность $\varepsilon(N)$, которую можно обеспечить после N обращений к f:

$$\varepsilon(N) \approx \left\{ n = \frac{N}{2} \right\} \approx \frac{b-a}{2^{\frac{N}{2}+1}}.$$

Метод золотого сечения

Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$ — пробные точки, которые расположены симметрично относительно середины отрезка. С целью уменьшения кол-ва вычисляемых значений функции F надо подобрать x_1 и x_2 так, чтобы при переходе к новому отрезку $[a_1, b_1] \subset [a,b]$ одна из них стала новой пробной точкой.

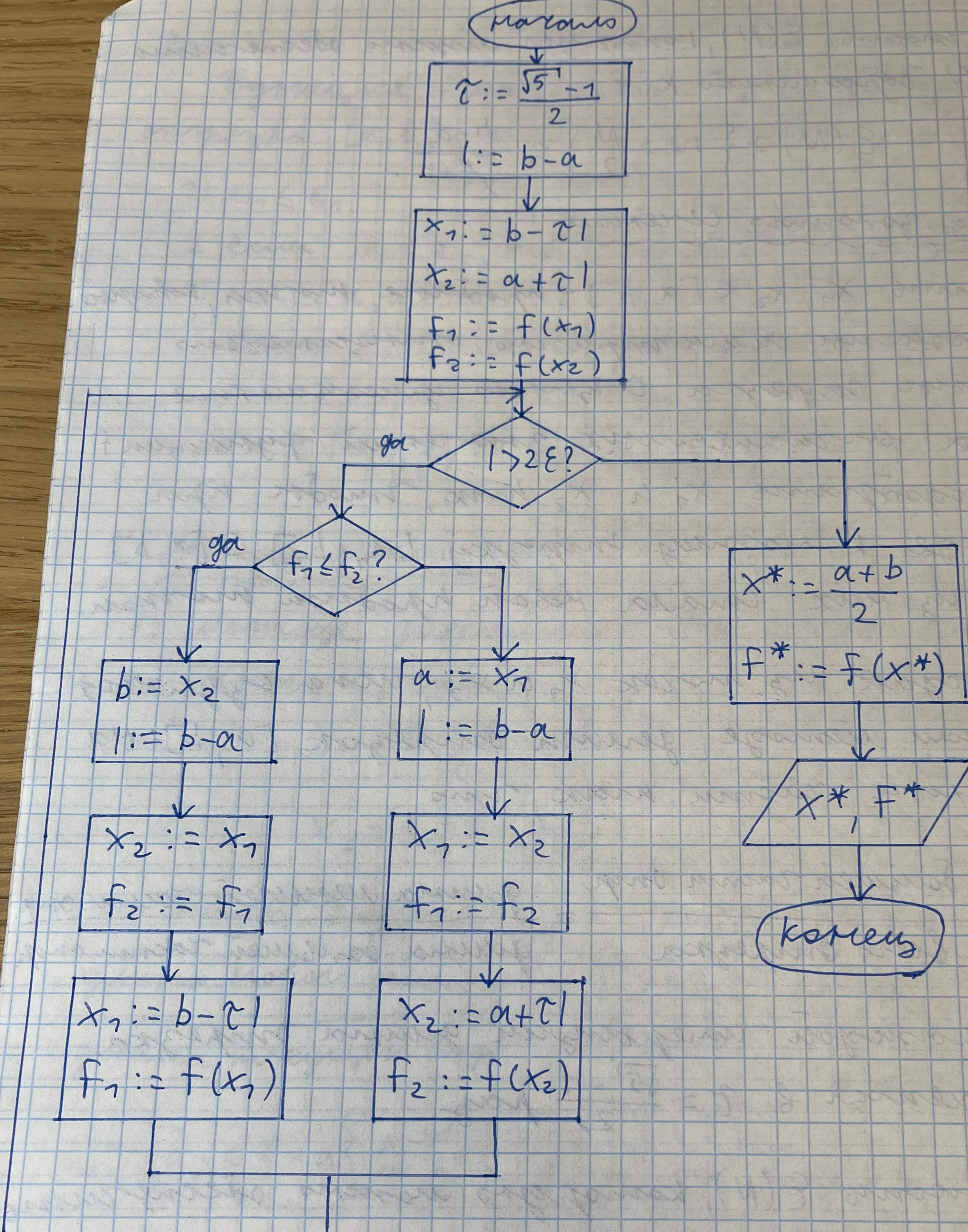
Каждая из точек x_1 и x_2, используемых в данном методе, делит отрезок $[a,b]$ на 2 неравные части так, что

$$\frac{\text{длина большей части отр.}}{\text{длина всего отрезка}} = \frac{\text{длина меньшей части отр.}}{\text{длина большей части отр.}}$$

На каждой итерации длина отрезка уменьшается в $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ раз.

Точность $\varepsilon(N)$, которую можно обеспечить после N обращений к f:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon\Big|_{n=N-1} = \frac{1}{2}\tau^{N-1}(b-a) \approx \tau^{N-2}(b-a).$$


начало
$\tau := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$l := b - a$
$x_1 := b - \tau l$
$x_2 := a + \tau l$
$f_1 := f(x_1)$
$f_2 := f(x_2)$
да
$l > 2\varepsilon$?
да
$f_1 \le f_2$?
$b := x_2$
$l := b - a$
$x_2 := x_1$
$f_2 := f_1$
$x_1 := b - \tau l$
$f_1 := f(x_1)$
$a := x_1$
$l := b - a$
$x_1 := x_2$
$f_1 := f_2$
$x_2 := a + \tau l$
$f_2 := f(x_2)$
$x^* := \frac{a+b}{2}$
$f^* := f(x^*)$
x^*, f^*
конец

Коваленко Кирилл ИУ7-22М

Билет 3

Типовая задача оптимизации имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in G \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу (1) в случае произвольной функции f и произвольного подмножества $G \subseteq R^n$.

Если $G = [a, b] \subseteq R$, то задача (1) называется задачей <u>одномерной оптимизации</u>.

Рассмотрим задачу одномерной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Опр.

Функция f называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists\, a_1, b_1 \in [a, b]$ такие, что

1) $a_1 \leq b_1$

2) если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a, a_1]$,
если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1, b]$

3) $\forall x \in [a_1, b_1] \quad f(x) = \min\limits_{t \in [a, b]} f(t)$

Метод парабол.

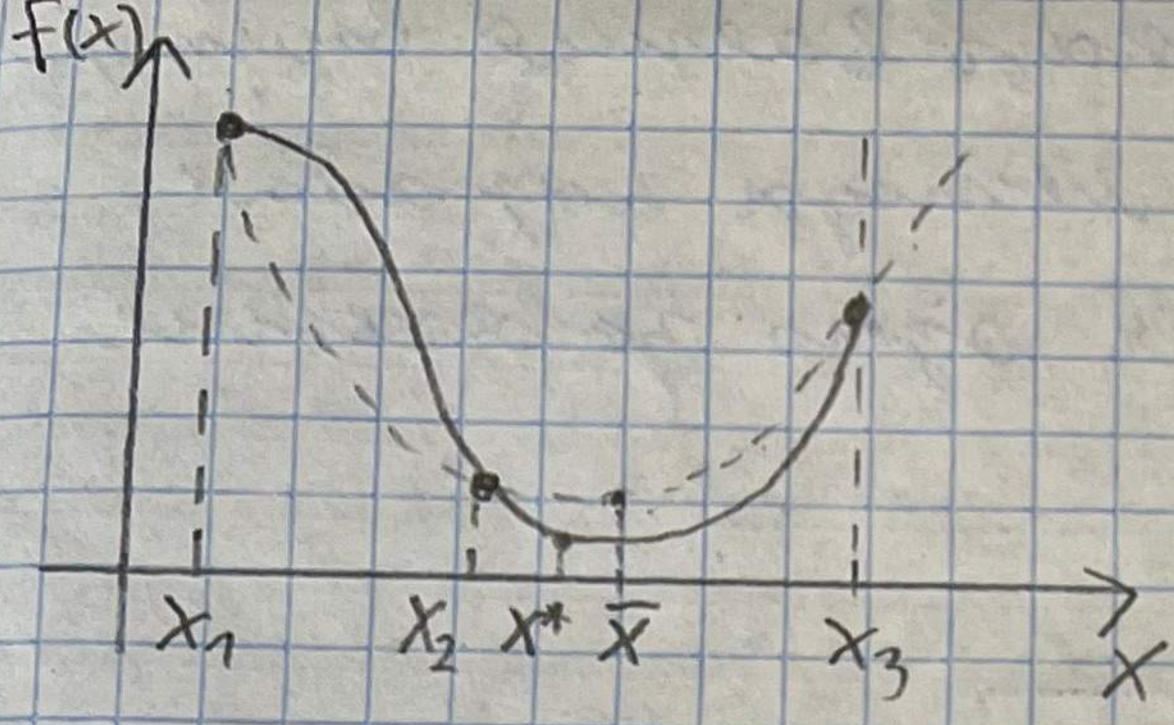
Основан на аппроксимации целевой функции некоторой другой функцией, точку минимума которой можно найти аналитически. Эта точка принимается за очередное приближение искомого минимума целевой функции.

Пусть: 1) $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$
2) f достигает минимума во внутренней точке отрезка $[a, b]$

выберем точки $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ так, чтобы

$$(*) \begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geqslant f(x_2) \leq f(x_3), \end{cases}$$
причём по крайней мере одно неравенство должно быть строгим.

Тогда в силу унимодальности f $x^* \in [x_1, x_3]$



Аппроксимируем целевую функцию параболой, проходящей через точки $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$, где $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

В силу выбора точек x_1, x_2, x_3 ветви параболы будут направлены вверх, а её точка минимума $\bar{x} \in [x_1, x_3]$. За очередное приближение точки x^* принимается $\bar{x}$.

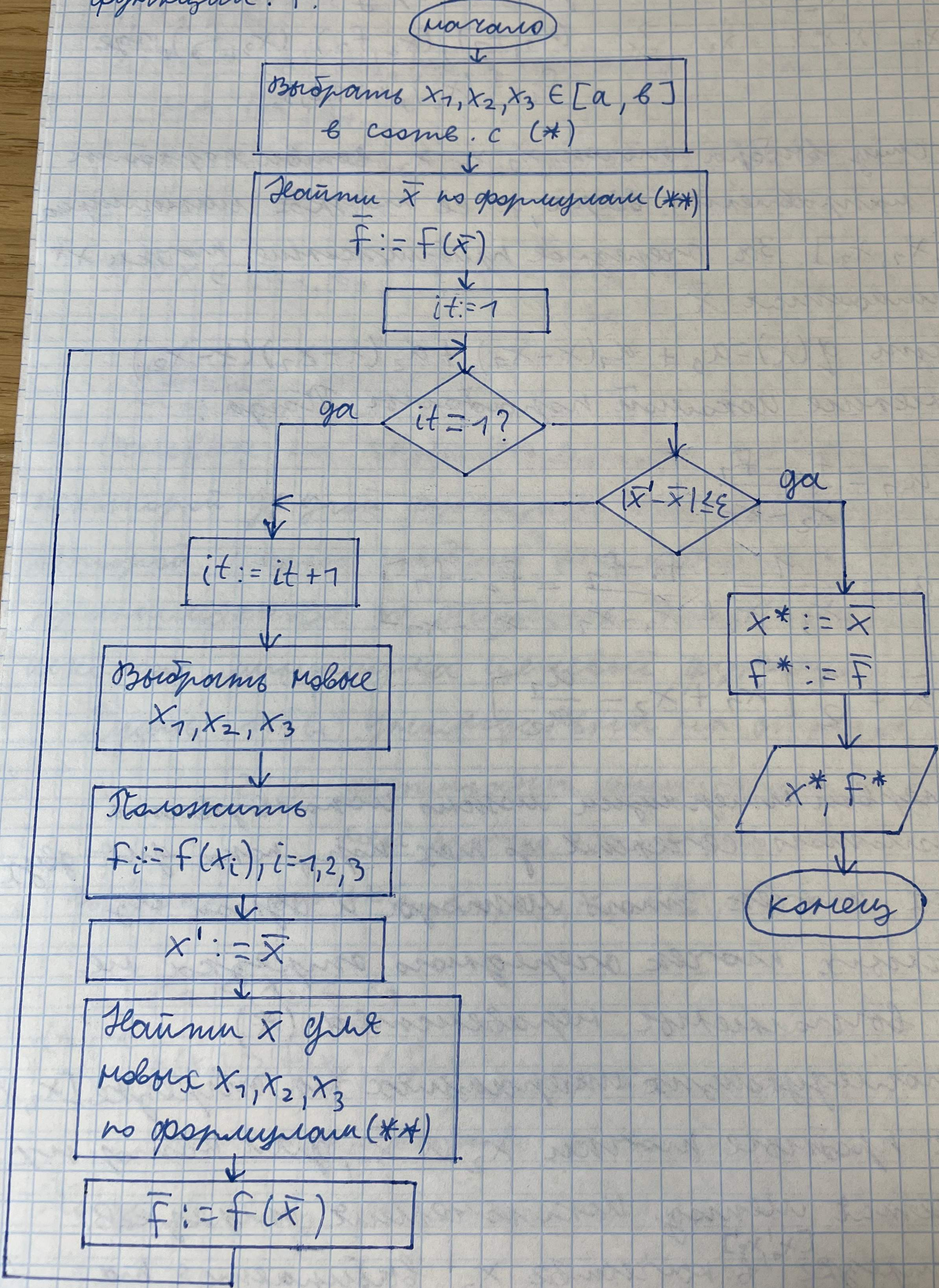
Пусть $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$ — уравнение искомой параболы. Тогда:

$$(**) \begin{cases} a_1 = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \\ a_2 = \dfrac{1}{x_3 - x_2}\left[\dfrac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right] \\ \bar{x} = \dfrac{1}{2}\left[x_1 + x_2 - \dfrac{a_1}{a_2}\right] \end{cases}$$

На первой итерации можно использовать метод золотого сечения до тех пор, пока для двух пробных точек этого метода и одной из граничных точек очередного отрезка не будут выполнены неравенства (*).

При последующих итерациях на отрезке $[x_1, x_3]$ рассм-ся пробные точки x_2 и $\bar{x}$, для которых используется метод исключения отрезков. В новом отрезке $[x_1', x_3']$ в качестве x_2' выбирается та точка из x_2 и $\bar{x}$, которая оказывается внутри.

На каждой итерации метода парабол, кроме первой, вычисляется одно значение функции: $\bar{f}$.



Ковалец Кирилл ИУ7-22М

Билет 4.

Типовая задача оптимизации имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in G \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу (1) в случае произвольной функции f и произвольного подмножества $G \subseteq R^n$.

Если $G = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, то задача (1) назыв. задачей одномерной оптимизации.

Рассмотрим задачу одномерной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Опр.

Функция f называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists\, a_1, b_1 \in [a, b]$ такие, что:

1) $a_1 \leq b_1$
2) если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a, a_1]$,
   если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1, b]$
3) $\forall x \in [a_1, b_1] \quad f(x) = \min\limits_{t \in [a, b]} f(t)$

Метод бисекции

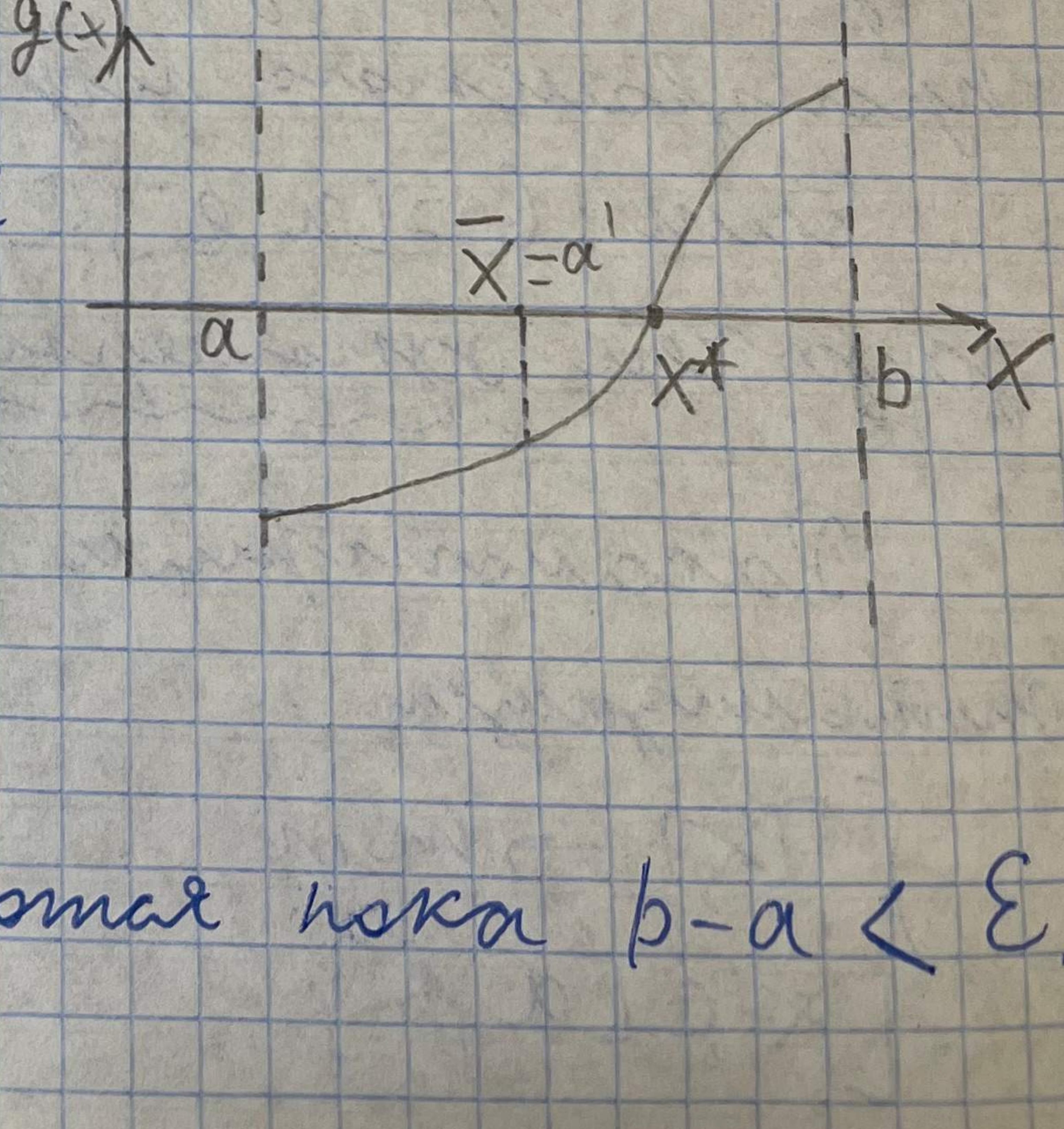
Метод решения уравнения $f'(x) = 0$

Замечание

Метод бисекции решения уравнения $g(x) = 0$

Пусть:

1) $g(x)$ имеет единственный корень на $[a, b]$
2) $g(a) \cdot g(b) < 0$



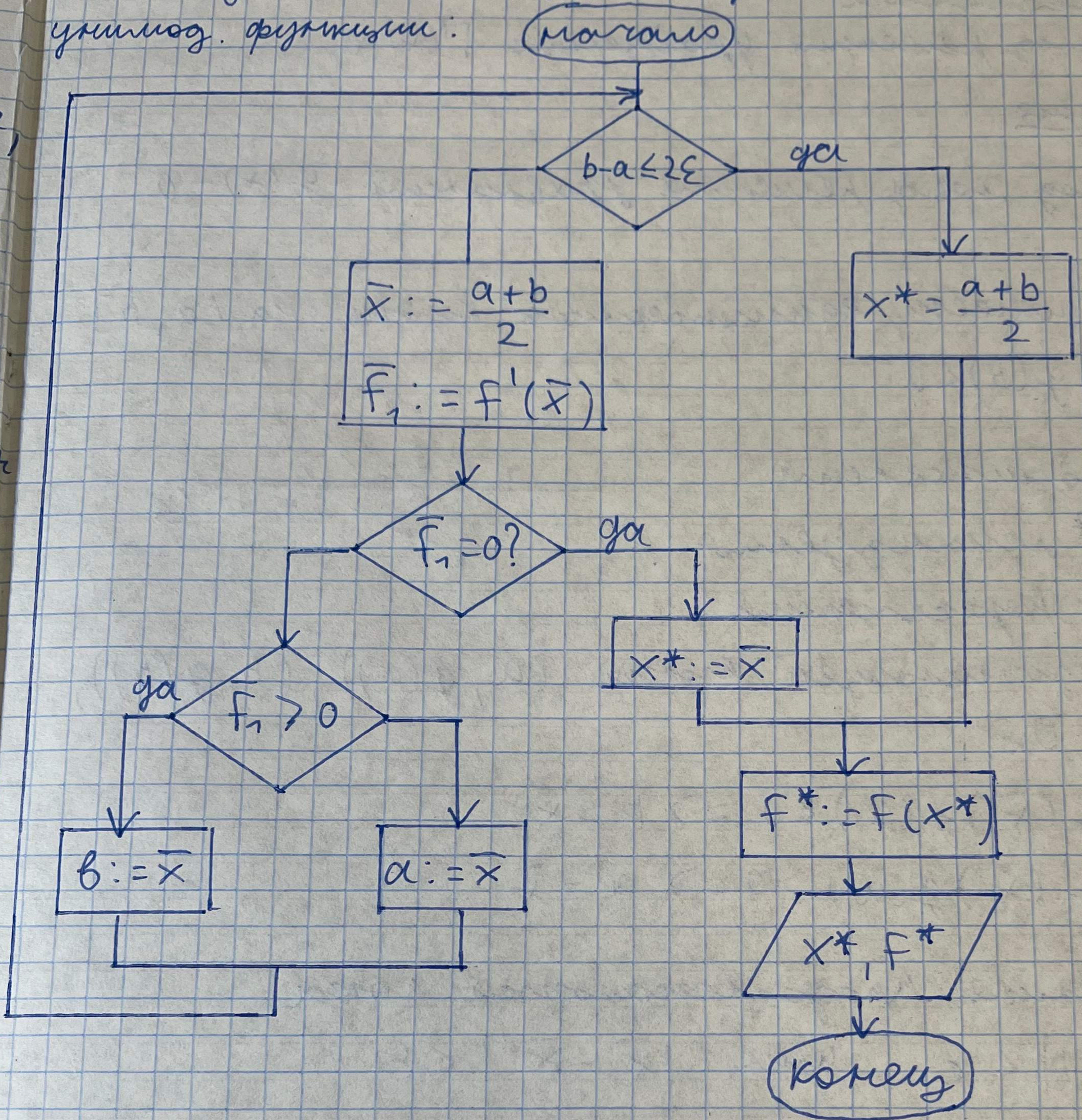
Для приближения корня x^* используется $\bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$

Если $g(\bar{x})\, g(a) < 0 \Rightarrow b = \bar{x}$

$g(\bar{x})\, g(a) > 0 \Rightarrow a = \bar{x}$

Вычисления продолжаются пока $b - a < \varepsilon$.

Метод бисекции для задачи минимизации унимод. функции:



Замечание

1) Т.к. мы рассматриваем выпуклую вниз функцию $\Rightarrow f'(x)$ возрастает на $[a, b] \Rightarrow$ всегда $f'(a) \le 0$, $f'(b) \geq 0$.

2) На каждом шаге отрезок уменьшается ровно в 2 раза, поэтому за n итераций будет достигнута точность:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}} (b-a)$$

Метод хорд

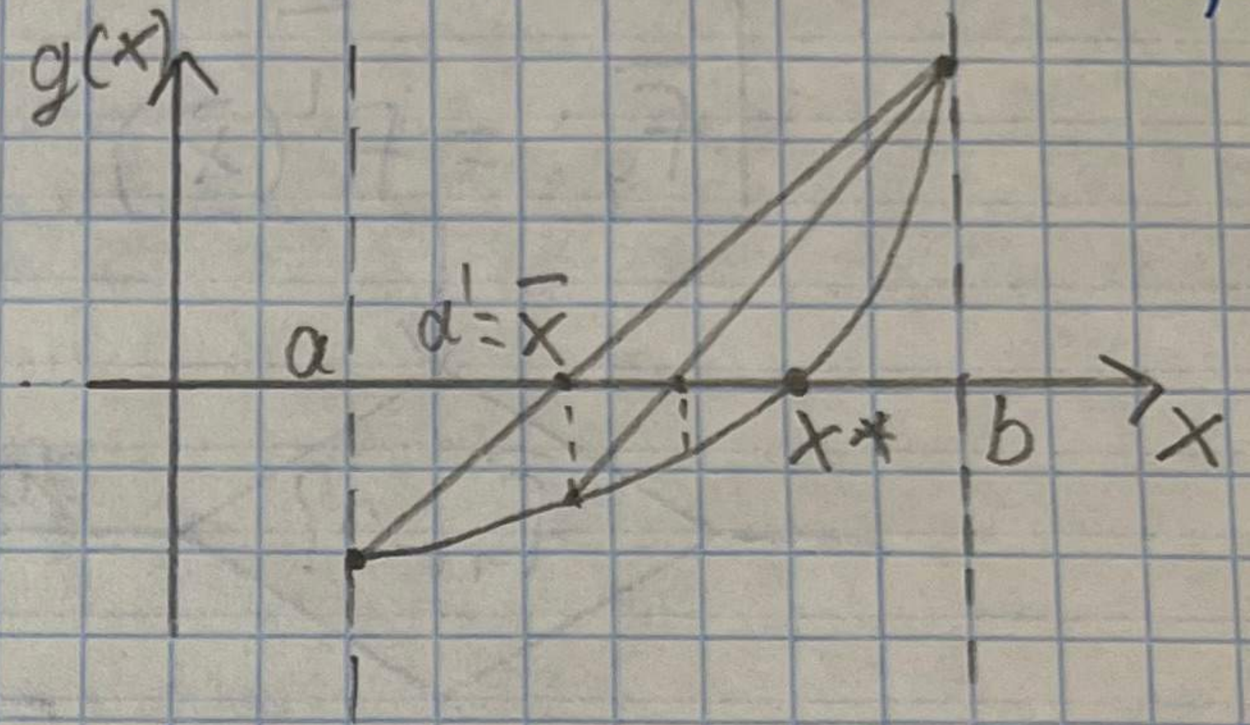
Метод решения уравнения $f'(x)=0$.

Замечание

Метод хорд решения уравнения $g(x)=0$

Пусть:

1) $g(x)$ имеет единственный корень на $[a, b]$
2) $g(a)g(b)<0$



Для приближения корня x^* используется точка $\bar{x}$ пересечения хорды, соединяющей точки $(a, g(a))$, $(b, g(b))$, с осью Ox.

Если $g(\bar{x})g(a)<0 \Rightarrow b=\bar{x}$

$g(\bar{x})g(a)>0 \Rightarrow a=\bar{x}$

Вычисления продолжаются пока

$$|g(\bar{x})|<\varepsilon \quad \text{или} \quad |\bar{x}-\bar{x}'|<\varepsilon$$

Уравнение хорды, проходящей через точки $(a, g(a))$, $(b, g(b))$:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-g(a)}{g(b)-g(a)}$$

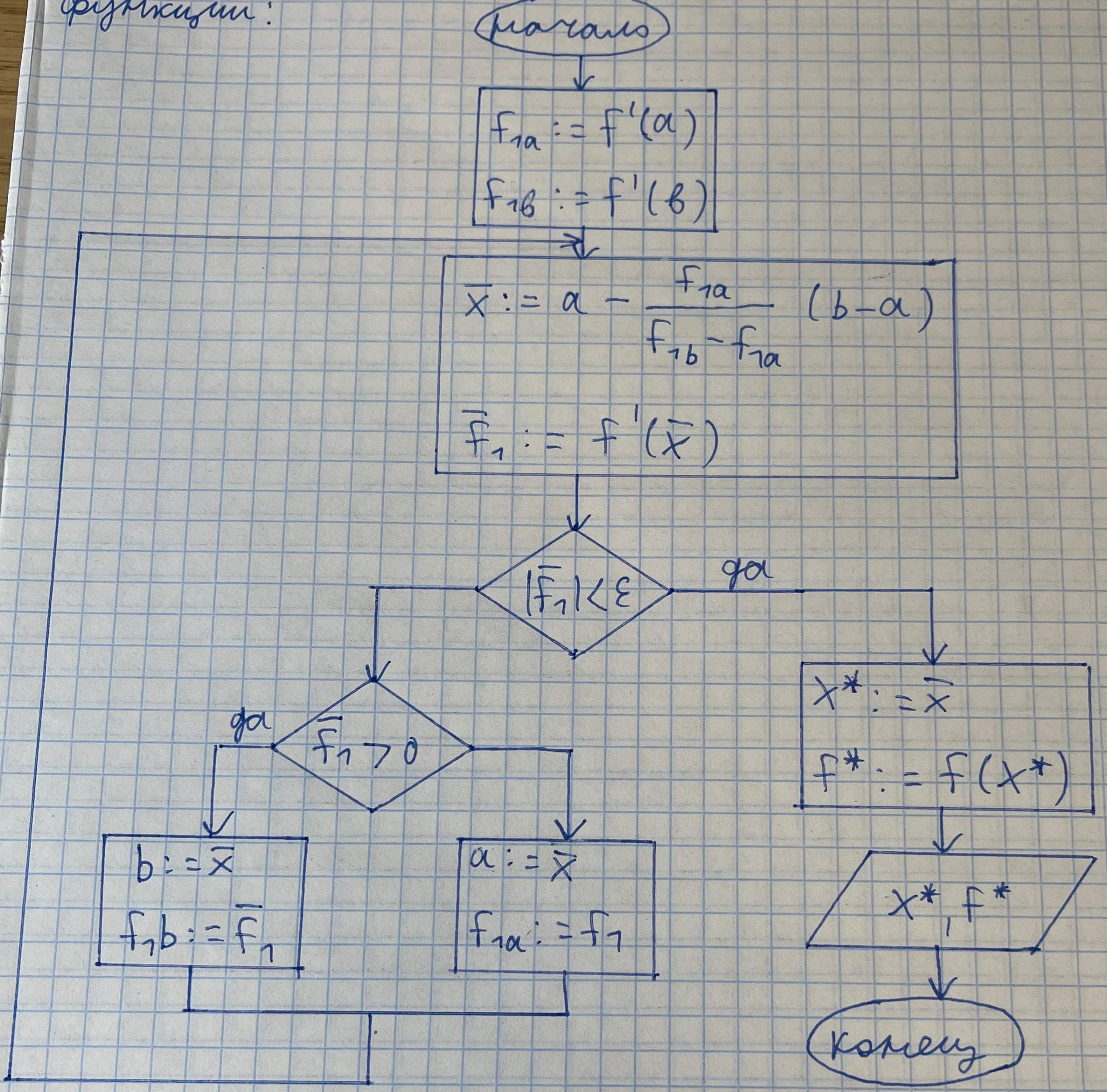
Точка $\bar{x}=(\text{хорда})\cap(Ox)$

$$y=0$$

$$x=a-\frac{g(a)}{g(b)-g(a)}(b-a)=\bar{x}$$

Коваленко Кирилл ИУ7-22М

Метод хорд для задачи минимизации унимод. функции:



На каждой итерации, кроме 1-ой, нужно вычислять только одно значение $f'(x)$.

Коваленко Кирилл ИУ7-22М

Билет 5.

Типовая задача оптимизации имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in G \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу (1) в случае произвольной функции f и произвольного подмножества $G \subseteq R^n$

Если $G = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, то задача (1) называется задачей одномерной оптимизации.

Рассмотрим задачу одномерной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Опр.

Функция f называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists\ a_1, b_1 \in [a, b]$, такие, что

1) $a_1 \leq b_1$
2) если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a, a_1]$,
   если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1, b]$
3) $\forall x \in [a_1, b_1] \quad f(x) = \min\limits_{t \in [a,b]} f(t)$

Метод Ньютона

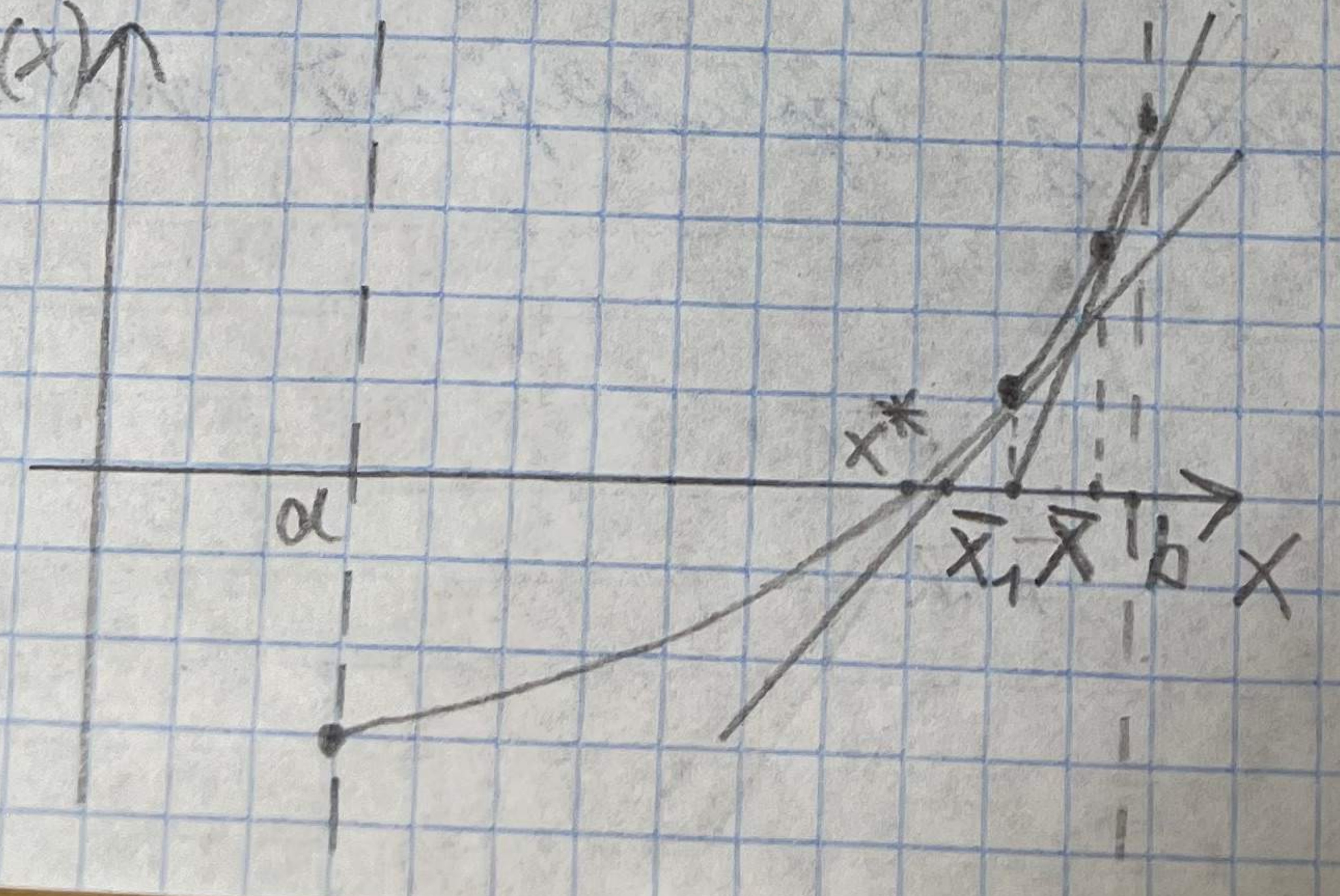
Пусть: 1) $f \in C^2[a, b]$
2) $f''(x) > 0$, $x \in [a, b] \Rightarrow f$ - выпукла

Т.к. f дифф. и выпукла, то f - унимодальна на $[a, b]$.

Замечание

Решение уравнения $g(x) = 0$

Пусть:
1) $g \in C^1[a, b]$
2) g имеет единственный корень



Для приближения корня x^* используется точка $\bar{x}$ пересечения касательной к графику $g(x)$ в точке текущего приближения с осью Ox.

Пусть $\bar{x}$ – текущее приближение точки x^*. Уравнение касательной к графику функции g в точке $(\bar{x}, g(\bar{x}))$:

$$y - \bar{y} = g'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Пересечение с Ox:

$$\cancel{y}^{0} - g(\bar{x}) = g'(\bar{x})(x - \bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x} - \frac{g(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$$

Или:

$$\bar{x} = \bar{x}' - \frac{g(\bar{x}')}{g'(\bar{x}')},$$

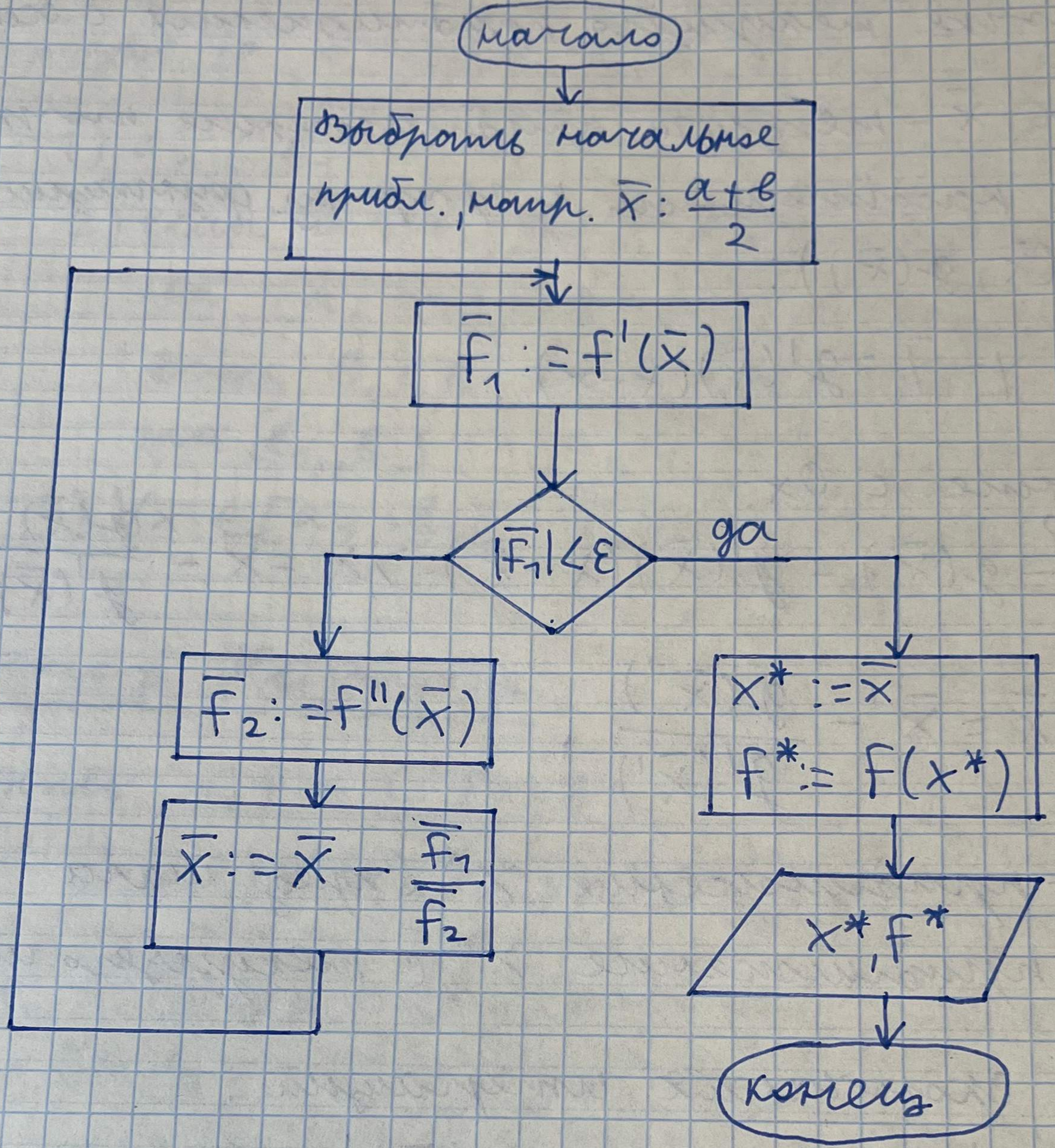
где $\bar{x}'$ – приближение x^* с пред. шага

$\bar{x}$ – приближение x^* с текущего шага

Условие окончания итераций:

$$|\bar{x} - \bar{x}'| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |g(\bar{x})| < \varepsilon$$

Метод Ньютона для задачи минимизации унимодальной функции:

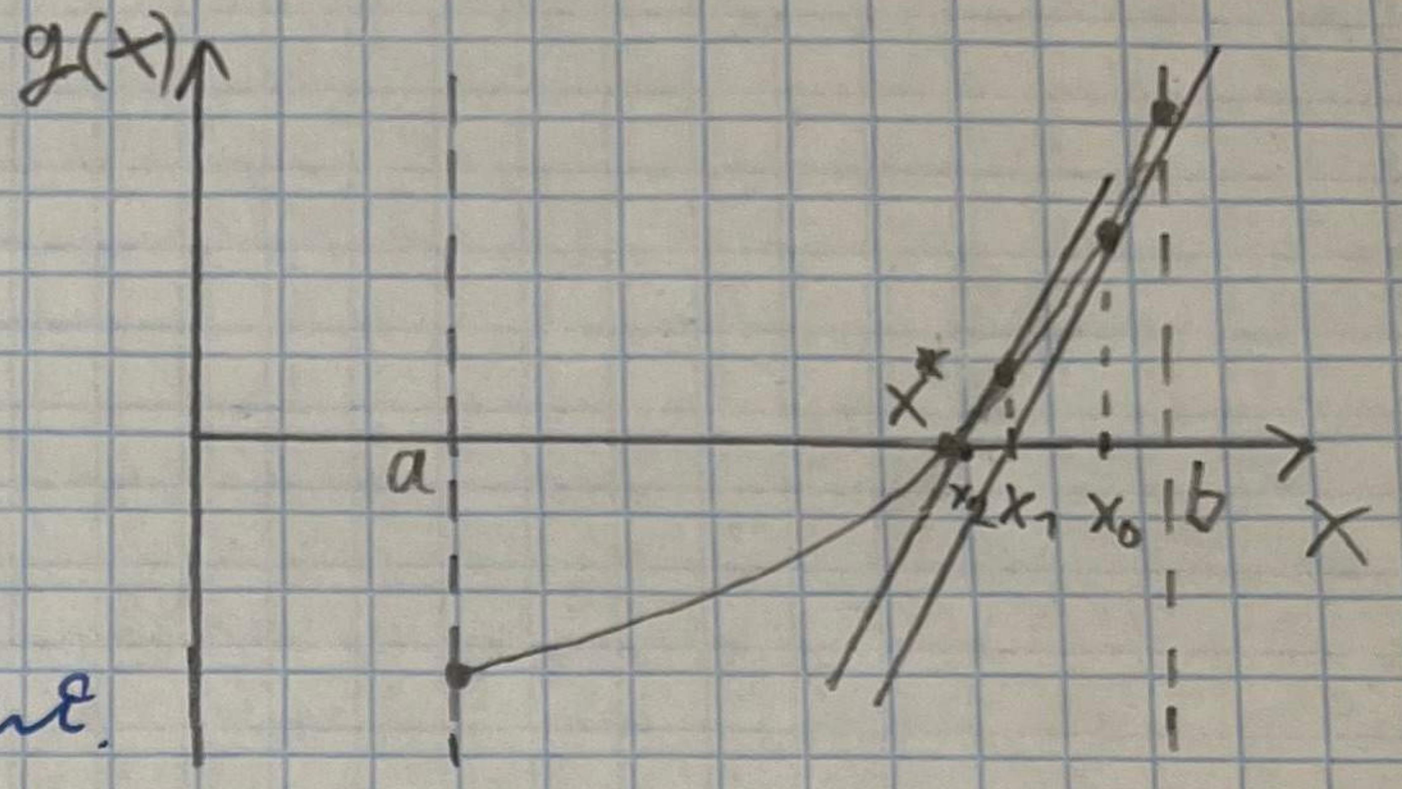


Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может разойтись. Тогда стоит выполнить несколько итераций другого метода, например, золотого сечения.

Модифицированный метод Ньютона

Одна касательная.

$$\overline{x} = \overline{x}' - \frac{g(\overline{x}')}{g'(x_0)},$$



где x_0 — начальное приближение корня.

В качестве очередного приближения для корня x^* используется точка пересечения прямой, проходящей через x_n и ||-ой касательной в точке x_0, с осью Ox.

В данном методе меньше вычислений в рамках одной итерации, но самих итераций больше.

О вычислении производных

Конечно-разностная аппроксимация производных:

$$f'(\overline{x}) \approx \frac{f(\overline{x}+\delta) - f(\overline{x}-\delta)}{2\delta}, \quad \delta > 0$$

$$f''(\overline{x}) \approx \frac{f(\overline{x}-\delta) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x}+\delta)}{\cancel{2}\delta^2}, \quad \delta > 0$$