1. **Дать определение открытой окрестности и открытого множества в R^n.**
Определение 8.1. Множество U(a, ε) тех точек из R^n , расстояние от которых до точки a ∈ R n меньше ε, ε > 0, т.е. множество U(a, ε) = {x ∈ R n : ρ(x, a) < ε} , называют ε-окрестностью точки a, а множество ◦ U(a, ε) = U(a, ε) \ {a} = {x ∈ R n : 0 < ρ(x, a) < ε} — проколотой ε-окрестностью точки a.
Определение 8.2. Точку a множества A ⊂ R^n называют внутренней точкой этого множества, если существует ε-окрестность U(a, ε) точки a, целиком содержащаяся в A: U(a, ε) ⊂ A. Если каждая точка множества A является его внутренней точкой, то само множество A называют открытым множеством.
2. **Дать определение предельной точки, граничной точки множества, и замкнутого множества в R^n.**
Точку a ∈ R n называют предельной точкой множества A ⊂ R^n , если в любой ее проколотой окрестности есть точки из множества A.
Определение 8.4. Точку a ∈ R^n называют граничной точкой множества A ⊂ R^n , если любая ε-окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество всех граничных точек множества A называют его границей.
Определение 8.6. Множество, которое содержит все свои граничные точки (свою границу), называют замкнутым множеством.
3. **Дать определение ограниченного и связного множества в R^n.**
Определение 8.5. Множество A ⊂ R^n называют ограниченным множеством, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки 0 = (0, . . . , 0) содержит множество A.
Определение 8.7. Множество A ⊆ R^n , любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют линейно связным.
4. **Дать определение предела функции нескольких переменных (ФНП) по множеству и непрерывной ФНП.**
Определение 8.9. Пусть заданы функция нескольких переменных f: R^n → R, множество A ⊂ D(f), включенное в область определения D(f) функции f, и предельная точка a множества A. Точку b ∈ R называют пределом функции f в точке a по множеству A, если для любой ε-окрестности U(b, ε) точки b существует такая проколотая δ-окрестность ◦ U(a, δ) точки a, что f(x) ∈ U(b, ε) при x ∈ ◦ U(a, δ) ∩ A, т.е. ∀ U(b, ε) ⊂ R m ∃ ◦ U(a, δ) ⊂ R n ∀x ∈ ◦ U(a, δ) ∩ A : f(x) ∈ U(b, ε)
5. **Дать определение частной производной ФНП в точке.**
Производную φ 0 (a1) функции φ(x1) в точке a1 ∈ R называют частной производной функции нескольких переменных f в точке a по переменному x1.
6. **Дать определение дифференцируемой ФНП в точке.**
Определение 9.1. Функцию f: R^n → R, определенную в некоторой окрестности точки x, называют дифференцируемой в точке x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде Δf(x) = a1Δx1 + a2Δx2 + . . . + anΔxn + α(Δx)|Δx|, (9.2) где коэффициенты a_1, a_2, . . . , a_n не зависят от приращений Δx, а функция α(Δx) является бесконечно малой при Δx → 0.
7. **Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП**.
Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.
8. **Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.**
Если функция нескольких переменных f: R^n → R дифференцируема в некоторой точке a, то она имеет в этой точке частные производные по всем переменным.
9. **Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.**

Если функция нескольких переменных f: $R^n \to R$ в некоторой окрестности точки a определена и имеет частные производные по всем переменным, причем все производные непрерывны в самой точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

10. **Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП**.
Полным первым дифференциалом ФНП в точке a называется линейная часть полного приращения ФНП в данной точке.

$$df = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

11. **Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.**

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$$ – Матрица Гёссе.

Дифференциал второго порядка:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2.$$

Дифференциал от дифференциала функции f(x), называют дифференциалом второго порядка функции f(x) в точке x и обозначают d 2 f(x).

12. **Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.**
Пусть функция f(x1, x2, . . . , x_n) (n > 1) в некоторой окрестности точки a ∈ R n имеет частные производные первого порядка f 0 x_i и f 0 x_j , i 6= j, а также смешанные производные f 00 x_i x_j и f 00 x_i x_j . Если эти смешанные производные являются непрерывными в точке a функциями по части переменных x_i и x_j , то в этой точке их значения совпадают, т.е. $f''_{xi\,xj}$ (a) = $f''_{xj\,xi}$ (a).

13. **Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение P(x, y) dx + Q(x, y) dy было полным дифференциалом.**
Пусть функция P(x,y)и Q(x,y) и их частные производные dP/dy , и dQ/dx непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy.
Тогда чтобы выражение Δ = P(x, y)dx + Q(x, y)dy было полным диффреренциалом необходимо и достаточно, чтобы dP/dy=dQ/dx

14. **Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида z = f(u(x, y), v(x, y)).**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

15. **Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида u = f(x(t), y(t), z(t)).**

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

16. **Сформулировать теорему о неявной функции.**

Теорема 11.1 (***теорема о неявной функции***). Пусть уравнение $f(x, y) = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим трем условиям:

1) координаты точки (a, b) удовлетворяют уравнению, т.е. $f(a, b) = 0$;

2) *функция* $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности U точки (a, b) и *непрерывно дифференцируема* в U, т.е. $f \in C^1(U)$;

3) *частная производная функции* $f(x, y)$ в точке (a, b) по переменному y отлична от нуля, т.е. $f'_y(a, b) \neq 0$.

17. **Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции z(x, y), заданной уравнением F(x, y, z) = 0.**

тождеству $f\big(x, \varphi(x)\big) \equiv 0$. При этом функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $U(a, \delta_x)$, а ее частные производные в $U(a, \delta_x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varphi'_{x_k}(x_k) = -\frac{f'_{x_k}(x, y)}{f'_y(x, y)}\bigg|_{y=\varphi(x)}, \quad k = \overline{1, n}. \quad \# \tag{11.3}$$

18. **Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению**

Определение 11.1. ***Производной*** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ ***по направлению вектора $\boldsymbol{n}$*** называют число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}, \tag{11.4}$$

если этот предел существует.

Определение 11.2. Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x имеет все *частные производные первого порядка*. Вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(f'_{x_1}(x), \ \ldots, \ f'_{x_n}(x)\big),$$

составленный из частных производных первого порядка функции $f(x)$ в точке x, называют ***градиентом функции*** f в точке x.

19. **Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению**.

Определение 11.1. ***Производной*** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ ***по направлению вектора $\boldsymbol{n}$*** называют число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}, \tag{11.4}$$

если этот предел существует.

20. **Перечислить основные свойства градиента ФНП**

Свойство 11.1. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \text{пр}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{grad} f(x), \tag{11.7}$$

где $\text{пр}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b}$.

Свойство 11.2. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{grad} f(x) \neq \boldsymbol{0}$, то при $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} f(x)$ имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Свойство 11.3. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $\operatorname{grad} f(x)$ указывает направление наибольшего роста функции $f(x)$.

Свойство 11.4. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то в этой точке вектор $-\operatorname{grad} f(x)$ задает направление наибольшего убывания функции $f(x)$.

Свойство 11.5. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то наибольшая скорость роста (убывания) функции $f(x)$ в этой точке равна $|\operatorname{grad} f(x)|$ $(-|\operatorname{grad} f(x)|)$.

21. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных

Теорема 10.2 (***теорема Тейлора***). Пусть функция нескольких переменных f определена в некоторой *окрестности* U *точки* $a \in \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^{m+1}(U)$. Если отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n)$, содержится в U, то для функции $f(x)$ имеет место ***формула Тейлора***

$$f(a + \Delta x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x)}{(m+1)!}, \tag{10.15}$$

где $\vartheta \in (0, 1)$ — некоторое число, а $d^0 f(a) = f(a)$ по определению.

22. Сформулировать теорему об условиях существовании касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением F(x, y, z) = 0.

Касательная плоскость существует если выполнены следующие условия:

1°. Поверхность S задана уравнением $F(x,y,z) = 0$.
2°. Известны координаты a, b, c точки $M \in S$.
3°. *Функция* $F(x,y,z)$ *дифференцируема* в точке M.
4°. *Градиент функции* $F(x,y,z)$ в точке M отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad} F(a,b,c) \neq 0$.

23. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности F(x, y, z) = 0 в точке (x0, y0, z0).

$$F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0$$

ур-е касательной

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

ур-е нормали

24. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП.

Определение 13.1. Говорят, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, имеет в этой точке ***локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая *проколотая окрестность* $\mathring{U}(a, \varepsilon)$ точки a, что для любой точки $x \in \mathring{U}(a, \varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(a)$, $(f(x) \geqslant f(a))$. Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием ***экстремум функции***.

25. Сформулировать необходимые условия экстремума ФНП

Теорема 13.1 (***необходимое условие экстремума функции***). Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Если функция $f(x)$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$) имеет в точке a *частную производную первого порядка* по переменному x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

26. **Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП.**

Теорема 13.2 (***достаточное условие экстремума функции***). Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в *окрестности* $U(a)$ *точки* a, дважды *непрерывно дифференцируема* в $U(a)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный минимум*;

2) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный максимум*;

3) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет *экстремума*.

27. **Дать определение условного экстремума ФНП.**

Определение 14.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке ***условного локального максимума*** (***минимума***) при условиях $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, ..., $\varphi_m(x) = 0$, где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые функции нескольких переменных, определенные в окрестности точки a, если существует такая *проколотая окрестность* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ *точки* a, что для всех точек $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) \geqslant f(a)). \tag{14.2}$$

28. **Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.**

$$f\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \tag{1}$$

при условиях

$$g_i\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) = b_i,\quad i = 1,\quad \ldots,\ m;\ m < n. \tag{2}$$

Функция F(x,l), определенная выражением

$$F\ (x,\ \lambda) = \lambda_0 f\ (x) + \lambda_1 [b_1 - g_1\ (x)] + \ldots + \\ + \ldots + \lambda_m [b_m - g_m\ (x)], \tag{3}$$

наз. функцией Лагранжа, а числа λ_i - *Лагранжа множителями.* Имеет м

29. **Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП**

Теорема 14.1 (***необходимое условие условного экстремума***). Пусть *функции* двух переменных $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены и *непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $P(a;b)$. Если функция $f(x,y)$ имеет в точке P *условный экстремум* при условии $\varphi(x,y) = 0$, причем $\operatorname{grad}\varphi(a,b) \neq 0$, то существует такое число λ, которое вместе с координатами a и b точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

30. Сформулировать достаточные условия условного экстремума ФНП.

Теорема 14.3. Пусть *функции* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, *дважды непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, $\operatorname{Rg}\left(\frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right) = m$ и координаты точки a вместе с координатами некоторого вектора λ_a удовлетворяют системе уравнений (14.10). Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ положительно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный минимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

2) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ отрицательно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный максимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

3) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ знакопеременная, то функция $f(x)$ в точке a не имеет условного экстремума. #