1. Дать определение линейного (векторного) пространства

Множество L элементов x, y, z… любой природы называется **линейным пространством**, если выполнены три условия:

- Задано **сложение элементов** L по которому любым элементам x, y (принадлежат L) ставится в соответствие элемент z (принадлежит L), называемый суммой элементов x и y и обозначаемый z=x+y
- Задано **умножение элемента на число** по которому любому элементу x ($x \in L$) и любому числу α ($\alpha \in R$) ставится в соответствие элемент z ($z \in L$), называемый произведением элемента x на действительное число α и обознач. $z = \alpha x$
- Указанные законы (**линейные операции**) подчиняются следующим аксиомам линейного пространства:

a) $\boldsymbol{x + y = y + x}$ **-коммутативность**

b) $\boldsymbol{(x + y) + z = x + (y + z)}$ **–ассоциативность**

c) существует такой элемент 0 ($\boldsymbol{0 \in L}$**), что** $\boldsymbol{x + 0 = x}$ **для любого x**

d) для каждого элемента x ($\boldsymbol{x \in L}$**) существует такой элемента (-x) (**$\boldsymbol{(-x) \in L}$**), что** $\boldsymbol{x + (-x) = 0}$

e) существует такой элемент 1 ($\boldsymbol{1 \in L}$**),** $\boldsymbol{1 * x = x}$ **для любого x**

f) $\boldsymbol{\alpha(\mu x) = (\alpha\mu)x}$ **(**$\boldsymbol{\alpha, \mu \in R}$**)-ассоциативность**

g) $\boldsymbol{(\alpha + \mu)x = \alpha x + \mu x}$ **(**$\boldsymbol{\alpha, \mu \in R}$**) -дистрибутивность**

h) $\boldsymbol{\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y}$ **(**$\boldsymbol{\alpha \in R}$**)-дистрибутивность**

Элементы векторного пространства принято называть **векторами**. Элемент 0 называется **нулевым вектором**, элемент -x **вектором противоположным вектору x.**

2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов

Систему векторов x_1, x_2, … , x_k в линейном пространстве L называют **линейно зависимой**, если существует **нетривиальная** (хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации не равен нулю) линейная комбинация этих векторов равная нулевому вектору. Если же линейная комбинация этих векторов равна нулевому только когда она **тривиальна** (все коэффициенты линейной комбинации векторов равны 0), то систему векторов называют **линейно независимой.**

$$\boldsymbol{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k} \text{ -линейная комбинация}$$

3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства

Базисом линейного пространства L называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполняются два условия:

1)Эта система векторов **линейно независима**

2)Каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы

Пусть $b_1, \dots, b_n$ базис в L. По определению любой вектор $x \in L$ может быть записан в виде $\boldsymbol{x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n}$ разложение вектора x по базису b.

Максимальное количество линейно независимых векторов в линейном пространстве называется **размерностью** линейного пространства. Размерность линейного пространства может быть бесконечномерной или конечномерной.

4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому

5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому (вопросы объединены)

Пусть в n-мерном линейном пространстве L заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b = (b_1, \dots, b_n)}$ и новый $\boldsymbol{c = (c_1, \dots, c_n)}$. Любой вектор можно разложить по базису b. В частности, каждый вектор из базиса c может быть представлен в виде линейно комбинации векторов базиса b: $\boldsymbol{c_i = \alpha_{1i} b_1 + \dots + \alpha_{ni} b_n}$ где $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$

Запишем это представление в матричной форме $\boldsymbol{c_i = b \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}}$, где $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$ **или c=bU, где** $\boldsymbol{U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}$. Матрицу U называют матрицей перехода от старого базиса b к новому базису c. Матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов

Подмножество H линейного пространства L называется **линейным подпространством**, если выполнены следующие два условия:

1)Сумма любых двух векторов из H принадлежит H: $x, y \in H \rightarrow x + y \in H$

2)Произведение любого вектора из H на любое действительное число снова принадлежит H: $x \in H,\ \alpha \in R \rightarrow \alpha x \in H$

Пусть x, y, …, z-конечная система векторов линейного пространства R над полем P. **Линейной оболочкой** данной системы называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы, т.е. совокупность вектор вида $\alpha x + \beta y + \cdots + \gamma z$ с произвольными коэффициентами $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ взятыми из поля P.

7.Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства

Линейное пространство ε называется **евклидовым пространством**, если в этом пространстве задано **скалярное умножение**, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $x, y \in \varepsilon$ поставлено в соответствие действительное число (x, y), называемое **скалярным произведением**. При этом выполняются аксиомы скалярного умножения:

1)$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

2)$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

3)$(\boldsymbol{\alpha x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$

4)$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$, **причем** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ **лишь в случае, когда** $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Скалярное произведение вектора на себя называют **скалярным квадратом**

8.Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника

Для любых векторов x, y евклидова пространства ε справедливо неравенство Коши-Буняковского: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$

Для любых $x, y \in \varepsilon$ имеет место неравенство треугольника $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. Равенство выполняется только если x, y сонаправлены.

9.Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства

Два вектора в евклидовом пространстве называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0.

Систему векторов евклидова пространства называют **ортогональной**, если любые два вектора из этой системы ортогональны. (любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима)

Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то его называют ортогональным.

Ортогональный базис называют **ортонормированным**, если каждый вектор этого базиса имеет норму (длину), равную единице.

10.Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов

Пусть V-векторное пространство с невырожденным скалярным умножением.

Ортогональная система ненулевых векторов пространства V линейно независима

11.Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора

Отображение $A: L \rightarrow L'$ из линейного пространства L в линейное пространство L' называют линейным отображением или линейным оператором, если выполнены следующие условия:

1)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$ **для** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$

2)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha x}) = \boldsymbol{\alpha A}(\boldsymbol{x})$ **для** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$

Матрицу $A = (a_1 \dots a_n)$ составленную из координатных столбцов векторов $Ab_1, \dots, Ab_n$ в базисе $b = (b_1 \dots b_n)$ называют матрицей линейного оператора A в базисе b

12.Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Матрицы A_b и A_e линейного оператора $A: L \to L'$ записанные в базисах b и e линейного пространства L, связаны друг с другом соотношением: $\boldsymbol{A_e = U^{-1}A_bU}$ где $\boldsymbol{U = U_{b\to e}}$ матрица перехода от базиса b к базису e.

13.Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора

Многочлен $\boldsymbol{x_A(\alpha) = \det(A - \alpha E)}$ называют характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение $\boldsymbol{x_A(\alpha) = 0}$ характеристическим уравнением матрицы A.

Характеристическое уравнение линейного оператора $A: L \to L'$ это характеристическое уравнение его матрицы A.

Ненулевой вектор x в линейном пространстве L называют собственным вектором линейного оператора $A: L \to L'$, если для некоторого действительного числа α выполняется соотношение $Ax = \alpha x$. При этом число α называют собственным числом линейного оператора A.

14.Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям

Пусть собственные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ линейного оператора A попарно различны. Тогда система соответствующих им собственных векторов $e_1, \dots, e_r$ линейно независима.

15.Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе

Пусть ε-евклидово пространство. Линейный оператор $A^*: \varepsilon \to \varepsilon$ называется сопряженным к линейному оператору $A: \varepsilon \to \varepsilon$, если для любых векторов $x, y \in \varepsilon$ верно равенство $\boldsymbol{(Ax, y) = (x, A^*y)}$

Теорема: Любому линейному оператору $A: \varepsilon \to \varepsilon$ соответствует единственный сопряженный оператор A^*, причем его матрицей в любом **ортонормированном базисе e** является матрица A^T, транспонированная матрице A линейного оператора A в том же базисе e.

16.Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора

Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве, называют самосопряженным, если $\boldsymbol{A^* = A}$

Теорема: Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора **действительны**.

17.Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям

Теорема: Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.

18.Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид

Теорема: для любого самосопряженного оператора A существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица A самосопряженного оператора A в этом базисе имеет диагональный вид, на ее диагонали расположены собственные значения оператора A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

19.Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы

Квадратную матрицу O называют ортогональной, если она удовлетворяет условию $O^TO = E$, где E-единичная матрица

Линейный оператор $A: \varepsilon \to \varepsilon$, действующий в евклидовом пространстве ε, называют ортогональным оператором, если он сохраняет скалярное произведение в ε, т.е. для любых векторов $x, y \in \varepsilon$ выполняется равенство $\boldsymbol{(Ax, Ay) = (x, y)}$

20.Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы

Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами $\boldsymbol{\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\ \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\, x_i x_j\ \ a_{ij} \in R}$, называется **квадратичной формой**. Квадратичную форму можно записать в матричном виде x^TAx, где $x = (x_1, \dots ,\ x_n)^T$- столбец, составленный из переменных, а $A = (a_{ij})$ симметричная матица порядка n, называемая **матрицей квадратичной формы**.

Квадратичную форму $\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2,\ a_i \in R,\ i = \overline{1,n}$ не имеющую попарных произведений переменных, называют **квадратичной формой канонического вида**.

Переменные $x_1, \dots,\ x_n$, в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют каноническими переменными.

21.Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису

Матрица А квадратичной формы при переходе к новому базису изменяется по формуле $A' = U^T AU$

22.Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax, x = (x_1, \dots,\ x_n)^T$ будем называть:

Положительно/отрицательно определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0/f(x) < 0$

Неотрицательно/неположительно определенной, если $f(x) \gg 0/f(x) \leq 0$ для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$

Знакопеременной(неопределенной), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$

23.Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм

Теорема (Критерий Сильвестра): для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была **положительно определена**, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $u_1 > 0, u_2 > 0, \dots, u_n > 0$, где $u_1,\ u_2, \dots,\ u_n > 0$-угловые(главные) миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие: для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была **отрицательно определена**, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-u_1 > 0, u_2 > 0, -u_3 > 0 \dots, (-1)^n u_n > 0$, где $u_1,\ u_2, \dots,\ u_n > 0$-угловые(главные) миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие: невырожденная квадратичная форма знакопеременная тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий: 1) один из угловых равен нулю; 2) один из угловых миноров четного порядка отрицателен; 3) два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки

24.Сформулировать закон инерции квадратичных форм

Для любых двух канонических видов:

$$f_1(y_1,\ y_2, \dots,\ y_m) = \ \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_m y_m^2,\ \alpha_i \neq 0,\ i = \overline{1,m}$$
$$f_2(z_1,\ z_2, \dots,\ z_k) = \ \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2,\ \mu_i \neq 0,\ i = \overline{1,k}$$

одной и той же квадратичной формы:

1)m=k и их общее значение равно рангу квадратичной формы;

2)количество положительных коэффициентов α_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_i;

3)количество отрицательных коэффициентов α_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_i