1. **<u>Дать определение линейного (векторного) пространства.</u>**

Определение 1.1. Множество $\mathcal{L}$ элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, … любой природы называют ***линейным пространством***, если выполнены три условия:

1) задано ***сложение элементов*** $\mathcal{L}$, т.е. закон, по которому любым элементам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***суммой элементов*** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;

2) задано ***умножение элемента на число***, т.е. закон, по которому любому элементу $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***произведением элемента*** $\boldsymbol{x}$ ***на*** (действительное) ***число*** и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x}$;

3) указанные законы (***линейные операции***) подчиняются следующим ***аксиомам линейного пространства***:

а) сложение коммутативно: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;

б) сложение ассоциативно: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$;

в) существует такой элемент $\boldsymbol{0} \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$;

г) для каждого элемента $\boldsymbol{x}$ множества $\mathcal{L}$ существует такой элемент $(-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$;

д) произведение любого элемента $\boldsymbol{x}$ из $\mathcal{L}$ на единицу равно этому элементу: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

е) умножение на число ассоциативно: $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

ж) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по числам: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

з) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по элементам: $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

2. **<u>Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.</u>**

Определение 1.2. Систему векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют ***линейно зависимой***, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов,

равная *нулевому вектору*. Если же линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору только лишь в случае, когда она тривиальна, систему векторов называют ***линейно независимой***. Опуская слово «система», часто говорят: векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ ***линейно зависимы*** или соответственно ***линейно независимы***.

3. **<u>Дать определение базиса и размерности линейного пространства</u>**

Определение 1.3. ***Базисом линейного пространства*** $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1) эта *система векторов линейно независима*;

2) каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 1.5. Максимальное количество *линейно независимых векторов* в данном линейном пространстве называют ***размерностью линейного пространства***.

4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и новый $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\boldsymbol{b}$. В частности, каждый вектор из базиса $\boldsymbol{c}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов базиса $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\boldsymbol{b}_n, \qquad i = \overline{1,\, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,\, n},$$

или

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 1.6. Матрицу (1.5) называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$.

5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и новый $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\boldsymbol{b}$. В частности, каждый вектор из базиса $\boldsymbol{c}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов базиса $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\boldsymbol{b}_n, \qquad i = \overline{1,\, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,\, n},$$

или

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 1.6. Матрицу (1.5) называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$.

6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.

Определение 2.1. Подмножество $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называют ***линейным подпространством***, если выполнены следующие два условия:

1) *сумма* любых двух *векторов* из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H} \implies \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$;

2) *произведение* любого *вектора* из $\mathcal{H}$ *на* любое действительное *число* снова принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H},\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$.

7. **Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.**

Определение 2.3. Линейное пространство $\mathcal{E}$ называют ***евклидовым пространством***, если в этом пространстве задано ***скалярное умножение***, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое ***скалярным произведением***. При этом выполняются следующие ***аксиомы скалярного умножения***:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;
в) $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
г) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ лишь в случае, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

8. **Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.**

Теорема 2.2. Для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ справедливо ***неравенство Коши — Буняковского***

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}). \tag{2.3}$$

в) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

9. **Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.**

Определение 2.7. *Систему векторов* евклидова пространства называют ***ортогональной***, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Следующее свойство ортогональной системы является самым важным.

Определение 2.8. Ортогональный базис называют ***ортонормированным***, если каждый вектор этого базиса имеет *норму* (*длину*), равную единице.

10. **Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов**

Теорема 2.5. Любая ортогональная *система* ненулевых *векторов линейно независима.*

11. **Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.**

Определение 3.1. Отображение $\boldsymbol{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$ называют ***линейным отображением*** или ***линейным оператором***, если выполнены следующие условия:

а) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$;
б) $\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 3.3. Матрицу $A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ называют ***матрицей линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ является квадратной, ее порядок совпадает с *размерностью линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов и их матриц.

12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Теорема 3.5. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, записанные в базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением

$$A_e = U^{-1} A_b U, \tag{3.3}$$

где $U = U_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{e}$.

13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора

Определение 4.1. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическим многочленом матрицы*** A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — ***характеристическим уравнением матрицы*** A.

Определение 4.3. *Ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}$ в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. При этом число λ называют ***собственным значением*** (***собственным числом***) ***линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$.

14. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 4.5. Пусть *собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ попарно различны. Тогда *система* соответствующих им *собственных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ *линейно независима.*

15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.

Это определение можно сформулировать по-другому. Линейный оператор самосопряженный, если для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ верно равенство

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

Теорема 5.2. *Матрица самосопряженного оператора* в любом *ортонормированном базисе* является симметрической. Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической, то этот оператор — самосопряженный.

16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

Теорема 5.3. Все корни *характеристического уравнения* самосопряженного оператора действительны.

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 5.4. *Собственные векторы самосопряженного оператора*, отвечающие различным *собственным значениям*, *ортогональны*.

18. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Теорема 5.5. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в *n-мерном евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, попарно различны, то в $\mathcal{E}$ существует *ортонормированный базис*, в котором *матрица* этого *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.

Определение 5.3. Квадратную матрицу O называют ***ортогональной***, если она удовлетворяет условию

$$O^{\mathrm{T}}O = E, \tag{5.8}$$

где E — единичная матрица.

Определение 5.4. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, действующий в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, называют ***ортогональным оператором*** (или ***ортогональным преобразованием***), если он сохраняет *скалярное произведение* в $\mathcal{E}$, т.е. для любых *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{5.10}$$

20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

Определение 6.1. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

называют ***квадратичной формой***.

Определение 6.2. *Квадратичную форму*

$$\alpha_1x_1^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.5}$$

не имеющую попарных произведений переменных, называют ***квадратичной формой канонического вида***. Переменные $x_1, \ldots, x_n$, в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют ***каноническими переменными***.

21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису

Пусть $T_{e\to e'}$ — матрица перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. Пусть A и A' — матрицы квадратичной формы Q в базисах e и e' соответственно. Пусть X — столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе e, а X' — столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе e'. Формула перехода координат:

$$X = T_{e\to e'}X'.$$

Т.к. для произведения матриц верна формула

$$(BC)^T = C^T B^T,$$

то

$$X^T = X'^T T^T_{e\to e'}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$Q(x) = X^T A X = \left(X'^T T^T_{e\to e'}\right) A \left(T_{e\to e'} X'\right) = X'^T \left(T^T_{e\to e'} A T_{e\to e'}\right) X' = X'^T A' X'.$$

Мы получили формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису:

$$A' = T^T_{e\to e'} A T_{e\to e'}. \tag{2}$$

---

22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.

Определение 6.3. Квадратичную форму $f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$, $x = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$, будем называть:

– ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$);

– ***неотрицательно*** (***неположительно***) ***определенной***, если $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$) для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$;

– ***знакопеременной*** (***неопределенной***), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

---

23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.

Пусть матрица квадратичной формы $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Рассмотрим ***угловые миноры*** этой матрицы (которые также называют ***главными минорами***):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n-го порядка представляет собой определитель матрицы.

Теорема 6.5 (***критерий Сильвестра***). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

24. <u>Сформулировать закон инерции квадратичных форм.</u>

Теорема 6.4. Для любых двух канонических видов

$$f_1(y_1, \ldots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2, \quad \lambda_i \neq 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{6.6}$$

$$f_2(z_1, \ldots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2, \quad \mu_j \neq 0, \ j = \overline{1, k}, \tag{6.7}$$

одной и той же квадратичной формы:

– $m = k$ и их общее значение равно рангу квадратичной формы;

– количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_j;

– количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_j.

<u>Часть Б</u>

1. <u>Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому</u>

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и новый $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\boldsymbol{b}$. В частности, каждый вектор из базиса $\boldsymbol{c}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов базиса $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\boldsymbol{b}_n, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots \\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}, \qquad i=\overline{1,\,n},$$

или

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 1.6. Матрицу (1.5) называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$.

---

2. **Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.**

Теорема 2.2. Для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ справедливо ***неравенство Коши — Буняковского***

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})\,. \tag{2.3}$$

◀ При $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ обе части неравенства (2.3) равны нулю согласно свойству 2.3, значит, неравенство выполняется. Отбрасывая этот очевидный случай, будем считать, что $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. Для любого действительного числа λ, в силу аксиомы г), выполняется неравенство

$$(\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя *аксиомы* и свойства *скалярного умножения*:

$$(\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\,\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \lambda^2\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}) - 2\lambda\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})\,.$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно параметра λ (коэффициент $(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})$ при λ^2 согласно аксиоме г) ненулевой, так как $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$), неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})^2 - (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y}) \leqslant 0. \qquad ▶$$

---

3. **Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.**

Теорема 3.5. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, записанные в базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением

$$A_e = U^{-1} A_b U, \tag{3.3}$$

где $U = U_{\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{e}}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{e}$.

◀ Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Обозначим *координаты векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ через x_b и y_b, а в новом базисе $\boldsymbol{e}$ — через x_e и y_e. Поскольку действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в матричной форме в базисе $\boldsymbol{b}$ имеет вид $y_b = A_b x_b$ (см. теорему 3.3), а координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в новом и старом базисах связаны между собой равенствами (см. **1.8**)

$$x_b = U x_e, \qquad y_b = U y_e,$$

то получаем

$$y_e = U^{-1} y_b = U^{-1}(A_b x_b) = U^{-1}(A_b U x_e) = \big(U^{-1} A_b U\big)\, x_e.$$

Равенство $y_e = (U^{-1} A_b U)\, x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и поэтому, согласно теореме 3.4, $U^{-1} A_b U = A_e$. ▶

4. **<u>Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.</u>**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \lambda^k, \tag{4.1}$$

где множители $(-1)^k$ введены для удобства.

Определение корректно, так как характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. При этом коэффициенты d_k характеристического многочлена, представленного в виде (4.1), также не связаны с используемым базисом, т.е. являются ***инвариантами*** относительно выбора базиса. Другими словами, коэффициенты d_k отражают свойства самого оператора, а не его матрицы A, являющейся записью оператора в конкретном базисе.

Коэффициенты d_k могут быть выражены в виде многочленов от элементов матрицы оператора. Таким образом, хотя коэффициенты матрицы меняются при замене базиса, некоторые выражения от этих коэффициентов остаются неизменными. Наиболее просто выражается коэффициент

$$d_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

равный сумме диагональных элементов матрицы A. Этот коэффициент называют ***следом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ (***следом матрицы*** A) и обозначают $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ ($\operatorname{tr}A$) или $\operatorname{sp}\boldsymbol{A}$ ($\operatorname{sp}A$). Коэффициент d_0 характеристического многочлена совпадает со значением этого многочлена при $\lambda = 0$ и равен определителю линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

5. **<u>Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.</u>**

Теорема 4.5. Пусть *собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ попарно различны. Тогда *система* соответствующих им *собственных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ *линейно независима.*

◀ Доказательство опирается на метод математической индукции, проводимый по количеству r векторов в системе. При $r = 1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот *вектор ненулевой*, а собственный вектор, согласно определению 4.3, является ненулевым.

Пусть утверждение верно при $r = m$, т.е. для произвольной системы из m собственных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Добавим к системе векторов еще один собственный вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$, отвечающий собственному значению λ_{m+1}, и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы собственных векторов и предположим, что она равна *нулевому вектору*:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{4.7}$$

К равенству (4.7) применим линейный оператор $\boldsymbol{A}$ и в результате получим еще одно векторное равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}.$$

Учтем, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+1}$ являются собственными:

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m\boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1}\lambda_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{4.8}$$

Умножив равенство (4.7) на коэффициент λ_{m+1} и вычтя его из равенства (4.8), получим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, равную нулевому вектору:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_m = \mathbf{0}.$$

Вспоминая, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, по предположению, линейно независима, делаем вывод, что у полученной линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{4.9}$$

Поскольку все собственные значения λ_i попарно различны, то из равенств (4.9) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Значит соотношение (4.7) можно записать в виде $\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}$, а так как вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$ ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$. В итоге получаем, что равенство (4.7) выполняется лишь в случае, когда все коэффициенты α_i, $i = \overline{1, m{+}1}$, равны нулю. Тем самым мы доказали, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}$ линейно независима. ▶

6. **<u>Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису</u>**

Пусть $T_{e\to e'}$ — матрица перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. Пусть A и A' — матрицы квадратичной формы Q в базисах e и e' соответственно. Пусть X — столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе e, а X' — столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе e'. Формула перехода координат:

$$X = T_{e\to e'} X'.$$

Т.к. для произведения матриц верна формула

$$(BC)^T = C^T B^T,$$

то

$$X^T = X'^T T^T_{e\to e'}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$Q(x) = X^T A X = \left(X'^T T^T_{e\to e'}\right) A \left(T_{e\to e'} X'\right) = X'^T \left(T^T_{e\to e'} A T_{e\to e'}\right) X' = X'^T A' X'.$$

Мы получили формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису:

$$A' = T^T_{e\to e'} A T_{e\to e'}. \tag{2}$$
