РК 2 Линейная алгебра

Оглавление

Введение

Здесь разобрана теория к РК 1 по интегралам и дифференциальным уравнениям. Основной источник информации - http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/70-lections/240-lin-al-fmp , конспекты лекций, интернет.

Теория

1 Метрика и окрестности в R^n. Открытые, замкнутые, ограниченные и связные множества. Область и ее граница. Определения и примеры.+?+

Метрика в R^n?

Окрестности в R^n

Определение 8.1. Множество $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ тех точек из $\mathbb{R}^n$, расстояние от которых до точки $a \in \mathbb{R}^n$ меньше ε, $\varepsilon > 0$, т.е. множество

$$\mathrm{U}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \rho(x,a) < \varepsilon\},$$

называют ***ε-окрестностью точки*** a, а множество

$$\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon) = \mathrm{U}(a,\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\} \quad —$$

проколотой ε-окрестностью точки a.

Открытые множества

Определение 8.2. Точку a множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называют ***внутренней точкой этого множества***, если существует ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки a, целиком содержащаяся в A: $\mathrm{U}(a,\varepsilon) \subset A$. Множество всех внутренних точек A называют ***внутренностью множества*** A и обозначают $\operatorname{Int} A$. Если каждая точка множества A является его внутренней точкой, то само множество A называют ***открытым множеством***.

Замкнутые множества

Определение 8.6. Множество, которое содержит все свои граничные точки (свою границу), называют ***замкнутым множеством***. Замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называют ***компактным множеством***, или ***компактом***.

Ограниченные множества

Определение 8.5. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называют ***ограниченным множеством***, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки $0 = (0, \ldots, 0)$ содержит множество A.

Связные множества и область

Определение 8.7. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют ***линейно связным***. Открытое линейно связное множество называют ***областью***.

Следующие множества являются областями:
- любая ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$;
- проколотая ε-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$;

– (открытое) кольцо в $\mathbb{R}^2$ с центром в точке $(a_1,\ a_2)$ и радиусами r и R, которое можно описать неравенствами

$$r^2 < (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2, \quad (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

– множество

$$\left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon r < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < R\right\},$$

где $(a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < r < R$.

2 Скалярная ФНП как отображение R^n -> R . Область определения, график функции двух переменных, линии и поверхности уровня. Определения и примеры.+++

Функция нескольких переменных (ФНП)

Отображение, которое упорядоченному набору из n чисел ставит в соответствие число, т.е. отображение вида $f\colon A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, называют ***функцией нескольких переменных***.

Область определения

Множество $D(f) = A$ точек из $\mathbb{R}^n$, в которых определена функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, называют ***областью определения (существования) функции*** f, а множество $R(f) = \{y \in \mathbb{R}\colon y = f(x),\ x \in D(f)\}$ — ***областью значений (изменения) функции*** f. Подчеркнем, что термины «область определения» и «область значений» никак не связаны с термином «область». Область определения функции и область ее значений могут и не быть областями в смысле определения 8.7.

График

Определение 8.8. ***Графиком функции*** нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют подмножество $\Gamma(f)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, которое задается следующим образом:

$$\Gamma(f) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon x \in D(f),\ y = f(x)\right\}.$$

Здесь $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$, а $(x,\ y)$ — сокращенное обозначение арифметического вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ y)$.

Поверхность уровня и линия уровня

Пусть задана функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Множество $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$ фиксированное, называют ***поверхностью уровня***, соответствующей значению c.

Отдавая дань традиции, мы будем называть множество $f^{-1}(c)$ ***линией уровня*** при $n = 2$ и поверхностью уровня во всех остальных случаях.

График функции двух переменных

Связь между графиком функции нескольких переменных и ее поверхностями уровня наиболее наглядно просматривается в случае функции двух переменных $z = f(x,y)$: линия уровня $f(x,y) = c$ совпадает с проекцией на координатную плоскость xOy сечения графика этой функции, т.е. поверхности $z = f(x,y)$, плоскостью $z = c$. Именно на этом основан *метод сечений*, применяемый при исследовании вида поверхности в пространстве по ее уравнению.

Пример

Пример 8.9. Опишем все линии уровня функции двух переменных $f(x,y) = x^2+y^2$. Уравнение линии уровня $x^2 + y^2 = c$ при $c < 0$ задает пустое множество, поскольку это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно переменных x и y, не имеет решений. Геометрически это означает, что при $c < 0$ плоскость $z = c$ не пересекается с графиком функции f. В случае $c = 0$ имеем равенство $x^2 + y^2 = 0$, которому удовлетворяют координаты единственной точки $(0,\ 0)$. Следовательно, при $c = 0$ линия уровня, являющаяся пересечением плоскости $z = 0$ с параболоидом вращения $z = x^2+y^2$, содержит единственную точку $(0,\ 0)$. Если $c > 0$, то линия уровня описывается уравнением $x^2+y^2 = c = r^2$ и представляет собой окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть проекция на координатную плоскость xOy пересечения плоскости $z = r^2$ с параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 8.7). #

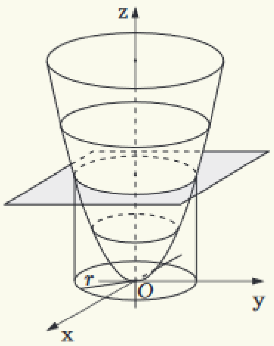

Рис. 8.7

3 Предел ФНП и его свойства. Бесконечно малые и бесконечно большие ФНП. Определения и примеры.+++

Предел ФНП

Определение 8.9. Пусть заданы функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, множество $A \subset D(f)$, включенное в область определения $D(f)$ функции f, и предельная точка a множества A. Точку $b \in \mathbb{R}$ называют ***пределом функции f в точке a по множеству*** A, если для любой ε-окрестности $\mathrm{U}(b,\varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что $f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon)$ при $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta) \cap A$, т.е.

$$\forall\, \mathrm{U}(b,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \;\; \exists\, \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n \;\; \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta) \cap A: \;\; f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon). \tag{8.2}$$

В этом случае записывают $b = \lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} f(x)$, или $f(x) \to b$ при $x \underset{A}{\to} a$ (запись $x \underset{A}{\to} a$ читают так: «x стремится к a по множеству A»).

Свойства предела ФНП

Сформулируем основные свойства предела функции нескольких переменных.

1°. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет предел в точке $a \in \mathbb{R}^n$ по множеству A, то этот предел единственный.

2°. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет (конечный) предел в точке a по множеству A, то она ограничена при $x \underset{A}{\to} a$.

3°. Если у функций $f,\ g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = d,$$

то существуют и пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} \big(f(x) + g(x)\big) = b + d, \qquad \lim_{x \underset{A}{\to} a} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4°. Если у функций $f,\ g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = d,$$

то существуют и пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} \big(f(x)\, g(x)\big) = bd, \quad \lim_{x \underset{A}{\to} a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{d} \quad (d \neq 0).$$

5°. Если функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет предел при $x \underset{A}{\to} a$, равный b, и $b > 0$ ($b < 0$), то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что в точках множества $A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ функция f положительна (отрицательна).

6°. Если у функций f, g: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = d, \tag{8.4}$$

причем $b < d$, то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что при $x \in A \cap$ $\cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

7°. Если у функций f, g: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы (8.4), причем существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant$ $\leqslant g(x)$, то $b \leqslant d$.

8°. Если функции f, g, h: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой проколотой окрестности точки a удовлетворяют неравенствам $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, $x \in A$, и существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = b,$$

то существует и предел $\lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} h(x) = b$.

9°. Произведение функции, бесконечно малой при $x \underset{A}{\to} a$, на функцию, ограниченную при $x \underset{A}{\to} a$, есть функция, бесконечно малая при $x \underset{A}{\to} a$.

Бесконечно большой и малый предел

Определение 8.10. Пусть задана функция нескольких переменных f: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества A. Если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$ или $|f(x)| > M$), то говорят, что функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ (соответственно $-\infty$ или ∞) при $x \underset{A}{\to} a$, и пишут

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = +\infty \quad \Big(\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = -\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = \infty \Big).$$

Во всех трех случаях функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой*** при $x \underset{A}{\to} a$.

4 Непрерывность ФНП в точке и на множестве. Точки, линии и поверхности разрыва. Определения и примеры.+++

Непрерывная в точке

Определение 8.11. Функцию нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in A$, предельной для множества A, если существует предел функции f при $x \underset{A}{\to} a$, равный значению функции в этой точке, т.е. если

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = f(a). \tag{8.5}$$

На множестве

Функцию $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, непрерывную во всех точках множества A, называют ***непрерывной на*** этом ***множестве***.

Точки линии и поверхности разрыва

Точки, в которых *функция нескольких переменных* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена, но не является *непрерывной*, называют ***точками разрыва*** этой ***функции***. Напомним, что точки, в которых функция исследуется на непрерывность, относятся к *области определения* этой *функции*. Точка разрыва функции $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ должна быть точкой множества A, являющейся для A предельной, так как в изолированных точках множества A функция f непрерывна всегда (см. **8.4**). К точкам разрыва функции f часто относят и точки, которые являются предельными точками A, но самому множеству не принадлежат.

Точки разрыва могут образовывать подмножества в $\mathbb{R}^n$, которые в зависимости от их вида называют ***линиями*** или ***поверхностями разрыва функции***.

5 Полное и частное приращение ФНП. Частные производные ФНП и их геометрическая интерпретация для n = 2+++

Частное приращение

Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в δ-окрестности $\mathrm{U}(a,\delta)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через Δx_i такое приращение независимого переменного x_i в точке a, при котором точка $a = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i{+}\Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ принадлежит $\mathrm{U}(a,\delta)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta x_i| < \delta$. Тогда определена разность значений функции f, соответствующая приращению Δx_i:

$$\Delta_i f(a, \Delta x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n).$$

Эту разность называют ***частным приращением функции нескольких переменных*** f в точке a по независимому переменному x_i. Частное приращение обозначают также через $\Delta_i f(a)$ или $\Delta_{x_i} f(a)$.

Полное приращение

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta x = (\Delta x_1 \ \ldots \ \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ — такой вектор приращений независимых переменных, что точка $x + \Delta x$ тоже принадлежит этой окрестности. В этом случае определено ***полное приращение функции*** f

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

соответствующее приращению Δx переменных в точке x. Напомним, что

$$|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}.$$

Частные производные

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда в некоторой окрестности точки $a_1 \in \mathbb{R}$ определена *функция одного переменного* $\varphi_1(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, которая получается из функции $f(x)$ при фиксированных значениях всех аргументов, кроме первого. Производную $\varphi'(a_1)$ функции $\varphi(x_1)$ в точке $a_1 \in \mathbb{R}$ называют ***частной производной функции нескольких переменных f в точке*** a по переменному x_1. Аналогично можно определить частные производные функции f и по другим переменным.

Частную производную функции f в точке a по переменному x_i обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \qquad \text{или} \qquad f'_{x_i}(a).$$

Вычисление частных производных функции нескольких переменных сводится к дифференцированию функции одного действительного переменного, когда все переменные функции, кроме одного, «замораживаются».

Геометрическая интерпретация

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $a = (a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$. *Графиком* этой *функции* в пространстве является поверхность, которая в прямоугольной системе координат Oxyz описывается уравнением $z = f(x, y)$. Обозначим линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y = a_2$ через γ. Выберем на этой кривой точки $P(a_1,\ a_2,\ f(a_1, a_2))$ и $Q(a_1 + \Delta x,\ a_2,\ f(a_1 + \Delta x, a_2))$, а затем через эти точки проведем прямую L.

Пусть при стремлении точки Q по кривой γ к точке P прямая займет некоторое предельное положение. Соответствующую этому положению прямую называют касательной к кривой γ в точке P (рис. 9.1).

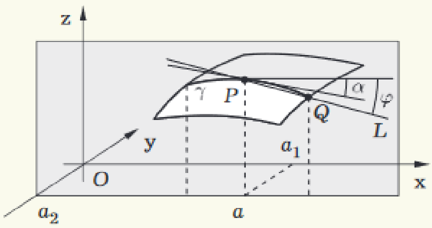

Рис. 9.1

Докажем, что касательная к кривой γ в точке P существует, если функция f имеет в точке $(a_1,\ a_2)$ частную производную по переменному x, причем угол α между касательной и положительным направлением оси Ox определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = f'_x(a_1, a_2).$$

6 Частные производные ФНП высших порядков. Матрица Гессе. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.+++

Частные производные от ФНП высших порядков

Предположим, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ во всех точках в некоторой *окрестности* $\mathrm{U}(a,\delta)$ *точки* a имеет *частную производную* $f'_{x_i}(x)$. Эта частная производная сама является *функцией нескольких переменных*, определенной в окрестности $\mathrm{U}(a,\delta)$, и может оказаться, что она имеет частную производную в точке a, например по переменному x_j. Частную производную

$$\left(f'_{x_i}\right)'_{x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{x=a}$$

функции $f'_{x_i}(x)$ называют ***частной производной второго порядка*** функции $f(x)$ в точке a по переменным x_i и x_j и обозначают

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{или} \qquad f''_{x_i x_j}(a).$$

Матрица Гессе

Если для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке x существуют все частные производные второго порядка, то из них можно составить квадратную матрицу порядка n

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

которую называют ***матрицей Гессе***.

Теорема

Теорема 9.4 (***теорема о смешанных частных производных***). Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные первого порядка f'_{x_i} и f'_{x_j}, $i \neq j$, а также смешанные производные $f''_{x_i x_j}$ и $f''_{x_j x_i}$. Если эти смешанные производные являются *непрерывными в точке a функциями по части переменных x_i и x_j*, то в этой точке их значения совпадают, т.е. $f''_{x_i x_j}(a) = f''_{x_j x_i}(a)$.

7 Дифференцируемость ФНП. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Полный дифференциал ФНП и его геометрический смысл для n = 2+++

Дифференцируемость ФНП

Определение 9.1. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots + a_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{9.2}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не зависят от приращений Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Необходимое условие

Теорема 9.1 (***необходимое условие дифференцируемости***). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то у этой функции в точке x существуют все (*конечные*) *частные производные* $f'_{x_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, причем коэффициенты a_i в представлении (9.2) равны значениям соответствующих частных производных в точке x:

$$a_i = f'_{x_i}(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Достаточное условие

Теорема 9.3 (***достаточное условие дифференцируемости***). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки a определена и имеет частные производные по всем переменным, причем все производные непрерывны в самой точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

Полный дифференциал

Определение 10.1. Линейную относительно Δx часть полного приращения функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x, т.е. выражение

$$f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n \tag{10.1}$$

называют (***полным***) ***дифференциалом функции*** f и обозначают через $df(x)$.

Геометрический смысл

Понятие касательной плоскости позволяет дать геометрическую интерпретацию *дифференциалу функции нескольких переменных*. Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных дифференцируема в точке (a, b). Тогда ее дифференциал dz в этой точке равен

$$dz = f'_x(a, b)\,dx + f'_y(a, b)\,dy. \tag{12.7}$$

8 Необходимые и достаточные условия, при которых дифференциальная форма P (x; y)dx+Q(x; y)dy является полным дифференциалом.---

9 Дифференцируемость сложной функции. Частная и полная производные.+++

Дифференцируемость сложной функции

На функции нескольких переменных можно распространить ***правило дифференцирования сложной функции***, установленное для функций одного действительного переменного.

Пусть на некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^m$ определены функции $g_i\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, причем $(g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_n(x)) \in B \subset \mathbb{R}^n$ при $x \in A$. Пусть на множестве B задана функция $f\colon B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда на A определена сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$.

Сложную функцию $F(x)$ часто задают в виде $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, вводя дополнительный набор переменных $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$. Эти переменные называют ***промежуточными переменными***, подчеркивая роль, которую они играют при задании сложной функции.

Частные и полные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{10.9}$$

В равенствах (10.9) следует обратить внимание на то, как в них входят промежуточные и остальные переменные. Запись частных производных сложной функции в виде (10.9) называют ***правилом дифференцирования сложной функции*** или, иногда, ***цепным правилом***.

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференцирования сложных функций при различных значениях n и m. Будем предполагать, не оговаривая этого специально, что условия теоремы 10.1 (или следствия 10.1) для этих функций выполнены в соответствующих точках.

При $n = 1$ у функции f всего лишь один аргумент и частная производная будет фактически обыкновенной производной. Это должно быть отражено в обозначениях производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{10.10}$$

где частные и обыкновенная производные вычисляются в соответствующих точках.

При $m = 1$ функции g_i имеют один аргумент, а правило дифференцирования сложной функции записывается в виде (10.4) или, если использовать промежуточные переменные, в виде

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{10.11}$$

Производную сложной функции $z = f(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$ (т.е. действительной функции действительного переменного, получаемой через несколько промежуточных переменных), вычисляемую в соответствии с формулой (10.11), называют ***полной производной функции*** $f(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$.

10 Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка. Дифференциалы высших порядков.+++

Инвариантность

Дифференциал функции нескольких переменных, как и функции одного действительного переменного, имеет свойство, которое называют ***инвариантностью формы записи дифференциала***. Фактически это свойство есть простая и удобная форма представления правила дифференцирования сложной функции.

Пусть функции $g_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно следствию 10.1, сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a в соответствии с определением дифференциала и правилом дифференцирования сложной функции имеет вид

$$dF(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(a)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

где

$$du_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j$$

дифференциал функции g_i в точка a. Таким образом,

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

Мы видим, что дифференциал dz сложной функции $z = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ выражается через дифференциалы $du_1, du_2, \ldots, du_n$ промежуточных переменных так же, как и в случае, когда эти переменные являются независимыми. Другими словами, если $z = f(u)$, то $dz = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} du_i$ и эта формула не зависит от того, каковы переменные $du_1, du_2, \ldots, du_n$, промежуточные или независимые. Это свойство дифференциала и называют инвариантностью его формы записи.

Дифференциалы высших порядков

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в *окрестности точки* x. Тогда ее *дифференциал*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

как функция от переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может оказаться дифференцируемой функцией в точке x. В этом случае выражение

$$d(df(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial df(x)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i\, dx_j, \qquad (10.12)$$

представляющее собой дифференциал от дифференциала функции $f(x)$, называют ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$ в точке x и обозначают $d^2 f(x)$. В этой связи дифференциал $df(x)$ называют ***дифференциалом первого порядка*** функции f.

Итак, если $f \in C^2(U)$, где U — некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой окрестности существуют непрерывные частные производные первого и второго порядка, а значит, в U существуют как дифференциал первого порядка df, так и дифференциал второго порядка $d^2 f$.

Дифференциал второго порядка, зависящий от набора независимых переменных x и вектора их приращений dx (дифференциалов независимых переменных), может оказаться дифференцируемой функцией по совокупности переменных x. Повторяя последовательно процесс вычисления дифференциалов, приходим к ***дифференциалу*** функции ***k-го порядка***, который является дифференциалом первого порядка от дифференциала $(k-1)$-го порядка функции f:

$$d^k f(x) = d\big(d^{k-1} f(x)\big).$$

Достаточным условием существования дифференциала k-го порядка в области X является k-й *порядок гладкости* функции в этой области, т.е. условие $f \in C^k(X)$.

11 Неявные ФНП. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной ФНП.+++

Неявные ФНП

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \end{cases} \tag{11.1}$$

где функции $f_1(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$ определены в некоторой *области* $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Предположим, что эта система разрешима относительно части переменных, например x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+m}. Разрешимость системы в данном случае следует понимать в широком смысле как существование для любых значений x_1, $\ldots$, x_n единственного решения системы относительно переменных x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+m}. Тогда определена *функция нескольких переменных* $y = h(x)$, которая точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точку $y = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^m$ так, что в совокупности переменные $x_1, \ldots, x_{n+m}$ составляют решение рассматриваемой системы. В этом случае о функции $h(x)$ говорят как о ***неявной функции***, или ***неявно заданной функции***. Отметим, что термин «неявная функция» относится не к виду или структуре функции, а лишь к способу ее задания.

Теорема о существовании и дифференцируемости (возможно только 1-ая теорема)

Теорема 11.1 (***теорема о неявной функции***). Пусть уравнение $f(x,y) = 0$, x, $y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим трем условиям:

1) координаты точки $(a,\ b)$ удовлетворяют уравнению, т.е. $f(a,b) = 0$;

2) *функция* $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности U точки $(a,\ b)$ и *непрерывно дифференцируема* в U, т.е. $f \in C^1(U)$;

3) *частная производная функции* $f(x,y)$ в точке $(a,\ b)$ по переменному y отлична от нуля, т.е. $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда на плоскости существует прямоугольник P, определяемый неравенствами $|x-a| < \delta_x$, $|y-b| < \delta_y$, имеющий центр симметрии в точке $(a,\ b)$, такой, что в P уравнение $f(x,y) = 0$ разрешимо относительно переменного y и тем самым задает функцию $y = \varphi(x)$, $x \in T = (a-\delta_x,\ a+\delta_x)$. При этом функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на T, а ее производная может быть вычислена по формуле

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \quad \# \tag{11.2}$$

Теорема 11.2. Пусть в *окрестности* V *точки* $(a,\ b)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, задана функция $f(x,y)$ от $n+1$ переменных ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая условиям:

а) $f(a,b) = 0$;

б) *функция* $f(x,y)$ *непрерывно дифференцируема* в V;

в) $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда точка $(a,\ b)$ имеет окрестность вида

$$\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x-a| < \delta_x,\ |y-b| < \delta_y\right\},$$

в которой уравнение $f(x,y) = 0$ разрешимо относительно y, т.е. в окрестности $U(a,\delta_x) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-a| < \delta_x\}$ определена функция нескольких переменных $\varphi(x)$, удовлетворяющая тождеству $f\big(x, \varphi(x)\big) \equiv 0$. При этом функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $U(a, \delta_x)$, а ее частные производные в $U(a, \delta_x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varphi'_{x_k}(x_k) = -\frac{f'_{x_k}(x, y)}{f'_y(x, y)}\bigg|_{y=\varphi(x)}, \quad k = \overline{1,\, n}. \quad \# \tag{11.3}$$

12.Производная ФНП по направлению и градиент ФНП (определения, свойства и формула вычисления).+++

Производная по направлению

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$ и задан вектор $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Обозначим через $\boldsymbol{n}^\circ$ *единичный вектор*, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}^\circ = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

Определение 11.1. ***Производной*** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ ***по направлению вектора*** $\boldsymbol{n}$ называют число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}, \tag{11.4}$$

если этот предел существует.

Из этого определения и содержащегося в нем соотношения (11.4) легко сделать вывод о том, что производная по направлению вектора представляет собой скорость изменения значений функции f в точке a в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Градиент

Определение 11.2. Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x имеет все *частные производные первого порядка*. Вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(f'_{x_1}(x), \ldots, f'_{x_n}(x)\big),$$

составленный из частных производных первого порядка функции $f(x)$ в точке x, называют ***градиентом функции*** f в точке x.

Понятие градиента позволяет упростить запись формулы (11.5) для вычисления производной по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ *дифференцируемой* в точке x *функции*. Используя стандартное скалярное умножение в $\mathbb{R}^n$, формулу (11.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = (\operatorname{grad} f(x), \boldsymbol{n}^\circ)\,. \tag{11.6}$$

13 Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения.+++

Рассмотрим некоторую поверхность* S в пространстве. Пусть точка M принадлежит поверхности S и существует такая плоскость π, проходящая через точку M, которая содержит *касательные*, построенные в точке M ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M. Плоскость π называют ***касательной плоскостью*** к поверхности S в точке M (рис. 12.1). Прямую L, проходящую через точку M и перпендикулярную плоскости π, называют ***нормалью к поверхности*** S в точке M.

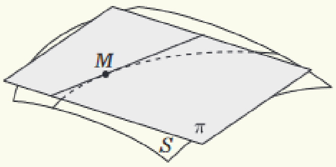

Рис. 12.1

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M на этой поверхности найдем в предположении, что в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и выполнены следующие четыре условия.

1°. Поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.
2°. Известны координаты a, b, c точки $M \in S$.
3°. *Функция* $F(x, y, z)$ *дифференцируема* в точке M.
4°. *Градиент функции* $F(x, y, z)$ в точке M отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad} F(a, b, c) \neq 0$.

Уравнения

Зная координаты a, b, c точки M, через которую проходит плоскость π, и координаты нормального вектора $\operatorname{grad} F(a, b, c)$ этой плоскости, можем записать *общее уравнение плоскости* π:

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0. \tag{12.3}$$

Нормаль в точке M поверхности S определяется той же точкой M и тем же вектором $\operatorname{grad} F(a, b, c)$, который является *направляющим вектором* этой *прямой*. По этим данным можно записать уравнения нормали к поверхности S в точке M как *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x - a}{F'_x(a, b, c)} = \frac{y - b}{F'_y(a, b, c)} = \frac{z - c}{F'_z(a, b, c)}. \tag{12.4}$$

14 Формулы Тейлора и Маклорена для ФНП.+++

Теорема 10.2 (*теорема Тейлора*). Пусть функция нескольких переменных f определена в некоторой *окрестности* U *точки* $a \in \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^{m+1}(U)$. Если отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n)$, содержится в U, то для функции $f(x)$ имеет место ***формула Тейлора***

$$f(a + \Delta x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x)}{(m+1)!}, \qquad (10.15)$$

где $\vartheta \in (0, 1)$ — некоторое число, а $d^0 f(a) = f(a)$ по определению.

Как и в случае функций одного переменного, при $a = 0$ формулу Тейлора (10.15) часто называют ***формулой Маклорена***. Число m, определяющее количество слагаемых в формуле

Тейлора, называют ***порядком формулы Тейлора***. Последнее слагаемое в формуле Тейлора (10.15) называют ***остаточным членом в форме Лагранжа***. Остаточный член можно также записать в виде

$$o(|\Delta x|^m) \qquad (10.17)$$

(читается: «о малое от $|\Delta x|^m$»), и тогда его называют ***остаточным членом в форме Пеано***. Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(x)}{k!} + o(|\Delta x|^m). \qquad (10.18)$$

15 Экстремум ФНП. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.+++

Экстремум

Определение 13.1. Говорят, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, имеет в этой точке ***локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая *проколотая окрестность* $\mathring{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ точки a, что для любой точки $x \in \mathring{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(a)$, $(f(x) \geqslant f(a))$. Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием ***экстремум функции***.

Если неравенства в определении 13.1 являются строгими, то говорят о ***строгом экстремуме функции***.

Необходимые условия

Теорема 13.1 (***необходимое условие экстремума функции***)**.** Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Если функция $f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ имеет в точке a *частную производную первого порядка* по переменному x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

Достаточные условия

Теорема 13.2 (***достаточное условие экстремума функции***)**.** Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в *окрестности* $U(a)$ *точки* a, дважды *непрерывно дифференцируема* в $U(a)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный минимум*;

2) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный максимум*;

3) если квадратичная форма $d^2 f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет *экстремума*.

16 Условный экстремум ФНП. Уравнения связи. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования условного экстремума. Достаточные условия существования условного экстремума.+++

Условный экстремум

Определение 14.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке ***условного локального максимума (минимума)*** при условиях $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, …, $\varphi_m(x) = 0$, где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые функции нескольких

переменных, определенные в окрестности точки a, если существует такая *проколотая окрестность* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ *точки* a, что для всех точек $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) \geqslant f(a)). \tag{14.2}$$

Понятия условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием ***условный экстремум функции***. Если в определении 14.1 неравенства строгие, то говорят о ***строгом условном экстремуме функции***.

Уравнения связи

Уравнения связи – уравнения, задающие ограничения аргумента функции.

Функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

Необходимое условие существования условного экстремума

Теорема 14.1 (***необходимое условие условного экстремума***). Пусть *функции* двух переменных $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и *непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $P(a; b)$. Если функция $f(x, y)$ имеет в точке P *условный экстремум* при условии $\varphi(x, y) = 0$, причем $\operatorname{grad}\varphi(a, b) \neq 0$, то существует такое число λ, которое вместе с координатами a и b точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

Достаточное условие

Достаточные условия *условного экстремума* в задаче (14.3), (14.4) можно сформулировать с помощью *функции Лагранжа.* Пусть в задаче на условный экстремум функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при условиях $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, заданных функциями $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, в точке $a \in \mathbb{R}^n$ выполнено *необходимое условие условного экстремума.* В этом случае в точке a определен вектор λ_a *множителей Лагранжа.* Зафиксируем в функции Лагранжа $L(x, \lambda)$ значения множителей Лагранжа, представив ее как функцию только переменных x: $L(x) = L(x, \lambda_a)$. Чтобы выяснить, является ли точка a точкой условного экстремума рассматриваемой функции, нужно проанализировать *дифференциал второго порядка* $d^2L(a)$ функции $L(x)$ в точке a, являющийся квадратичной формой от приращений переменных. Рассмотрим этот дифференциал как квадратичную форму $d^2L(a)_H$ на *линейном подпространстве* H в $\mathbb{R}^n$, заданном системой линейных уравнений $d\varphi_i(a) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 14.3. Пусть *функции* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, *дважды непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, $\mathrm{Rg}\Big(\dfrac{\partial\varphi_i(a)}{\partial x_j}\Big) = m$ и координаты точки a вместе с координатами некоторого вектора λ_a удовлетворяют системе уравнений (14.10). Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ положительно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный минимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

2) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ отрицательно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный максимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

3) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ знакопеременная, то функция $f(x)$ в точке a не имеет условного экстремума. #

Теорема 14.3 утверждает, что для проверки точек, подозрительных на условный экстремум, необходимо проанализировать квадратичную форму $d^2L(a)$, т.е. дифференциал второго порядка функции Лагранжа, при значениях дифференциалов dx_j, $j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют системе линейных уравнений

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi_i(a)}{\partial x_j}\, dx_j = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{14.11}$$

19 Векторная функция нескольких переменных (ВФНП), координатные функции. Предел ВФНП. Теорема о связи предела ВФНП и пределов ее координатных. Непрерывность ВФНП в точке и на множестве.+++

ВФНП

В общем случае мы называем ***функцией многих переменных*** (***функцией нескольких переменных***) отображение вида $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Если $m = 1$, т.е. значением отображения является действительное число (*скалярная величина*), отображение называют ***скалярной функцией нескольких переменных***. Если же $m > 1$, то указанное отображение называют ***векторной функцией нескольких переменных*** (или ***векторной функцией векторного аргумента***).

Координатные функции

Функции нескольких переменных $f_i, i=\overline{1, m}$, называют координатными функциями векторной функции f.

Предел ВФНП

На векторные функции нескольких переменных естественным образом распространяется понятие предела, введенное для скалярных функций нескольких переменных. Пусть заданы векторная функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество $A \subset D(f)$ и предельная точка a множества A. Точку $b \in \mathbb{R}^m$ называют ***пределом функции f в точке a по множеству*** A, если для любой ε-окрестности $\mathrm{U}(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$ при $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta) \cap A$, В этом случае, как и в скалярном, записывают $b = \lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} f(x)$, или $f(x) \to b$ при $x \underset{A}{\to} a$.

Если $A = \mathbb{R}^n$, то говорят просто о ***пределе функции в точке*** a и обозначают его, опуская упоминание множества A: $b = \lim_{x \to a} f(x)$. Отметим, что если множество A включает некоторую проколотую окрестность точки a (в частности, если точка a внутренняя для A), то можно считать, что $A = \mathbb{R}^n$, поскольку такая замена не изменяет ситуацию.

Теорема о связи

Теорема 15.1. Векторная функция нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет предел при $x \underset{A}{\to} a$, равный b тогда и только тогда, когда существуют пределы ее координатных функций $f_i(x)$ при $x \underset{A}{\to} a$, равные b_i, $i = \overline{1, m}$, где

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Непрерывность

На *векторные функции нескольких переменных* естественным образом переносится понятие непрерывности скалярной функции (см. определение 8.11). Говорят, что ***векторная функция нескольких переменных*** $f\colon \Lambda \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ***непрерывна в точке*** $a \in \Lambda$, если для любой окрестности $\mathrm{U}(f(a), \varepsilon)$ точки $f(a) \in \mathbb{R}^m$ существует такая окрестность $\mathrm{U}(a, \delta)$ точки a, что для любой точки $x \in \mathrm{U}(a, \delta) \cap \Lambda$ верно включение $f(x) \in \mathrm{U}(f(a), \varepsilon)$ (или, короче, $f\big(\mathrm{U}(a, \delta) \cap \Lambda\big) \subset$ $\subset \mathrm{U}(f(a), \varepsilon)$).

Каждая точка $a \in \Lambda$ является либо *предельной точкой множества* Λ, либо его *изолированной точкой*. В первом случае условие непрерывности функции f в этой точке означает существование предела

$$\lim_{x \underset{\Lambda}{\to} a} f(x) = f(a). \tag{15.2}$$

В изолированной точке множества Λ, согласно определению, функция $f\colon \Lambda \to \mathbb{R}^m$ всегда непрерывна.

Функцию $f\colon \Lambda \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, непрерывную во всех точках множества Λ, называют ***непрерывной на*** этом ***множестве***.

20 Частные и полные приращения, частные производные ВФНП. Теорема о связи частных производных ВФНП и ее координатных функций.+++

Частное приращение

Пусть векторная функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в δ-окрестности $\mathrm{U}(a,\delta)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через Δx_i такое приращение независимого переменного x_i в точке a, при котором точка $a = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i+\Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ принадлежит $\mathrm{U}(a,\delta)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta x_i| < \delta$. Тогда определена разность значений функции f, соответствующая приращению Δx_i:

$$\Delta_i f(a, \Delta x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n).$$

Эту разность называют ***частным приращением функции нескольких переменных*** f в точке a по независимому переменному x_i. Частное приращение обозначают также через $\Delta_i f(a)$ или $\Delta_{x_i} f(a)$.

Полное приращение

Пусть векторная функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой *окрестности точки* $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta x = (\Delta x_1 \ \ldots \ \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ — такой вектор приращений независимых переменных, что точка $x + \Delta x$ тоже принадлежит этой окрестности. В этом случае определено ***полное приращение функции*** f

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

соответствующее приращению Δx переменных в точке x. Полное приращение функции $f(x) = (f_1(x) \ \ldots \ f_m(x))^{\mathrm{T}}$ в точке x можно выразить через полные приращения координатных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x+\Delta x) \\ \vdots \\ f_m(x+\Delta x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} f_1(x+\Delta x) - f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x+\Delta x) - f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta f_1(x) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, напомним, что $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$.

Частная производная

Определение 16.1. Если для функции нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определенной в окрестности точки a, существует предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i} \tag{16.1}$$

отношения частного приращения функции по переменному x_i к приращению Δx_i этого же переменного при $\Delta x_i \to 0$, то этот предел называют ***частной производной векторной функции нескольких переменных*** f ***в точке*** a по переменному x_i и обозначают f'_{x_i}.

Теорема о связи

Теорема 16.1. Для того чтобы *векторная функция* $f\colon \mathrm{U}(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имела частную производную в точке a по переменному x_i, необходимо и достаточно, чтобы все ее *координатные функции* имели частную производную в точке a по тому же переменному x_i.

21 Дифференцируемость ВФНП, частный и полный дифференциалы. Матрица Якоби, якобиан.+++

Дифференцируемость ВФНП

Определение 16.2. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{16.5}$$

где A — матрица типа $m \times n$, элементы которой не зависят от Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

При $m = 1$ функция f скалярная, и в равенстве (16.5) матрица A является строкой длины n, т.е. $A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$, а функция $\alpha(\Delta x)$ — это бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ скалярная функция. Поэтому в данном случае равенство (16.5) сводится к равенству (9.2).

Следующая теорема сводит исследование дифференцируемости *векторной функции* к скалярному случаю.

Теорема 16.2. Векторная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее *координатные функции*.

Частный дифференциал

Представив матрицу Якоби $f'(x)$ как набор столбцов: $f'(x) = \left(f'_{x_1}\ f'_{x_2}\ \ldots f'_{x_n}\right)$, равенство (16.14) можно записать следующим образом:

$$df(x) = f'_{x_1}(x)\,dx_1 + f'_{x_2}(x)\,dx_2 + \ldots + f'_{x_n}(x)\,dx_n.$$

Слагаемые $f'_{x_i}\,dx_i$ в правой части равенства называют ***частными дифференциалами функции*** $f(x)$ в точке x. Каждое слагаемое $f'_{x_i}\,dx_i$ представляет собой линейную часть *частного приращения* $\Delta_i f(x)$ *функции* $f(x)$ в данной точке.

(пояснение)

Дифференциалы независимых переменных x_i, $i = \overline{1,\, n}$, как и в случае скалярных функций, по определению равны приращениям этих переменных: $dx_i = \Delta x_i$. С учетом этого дифференциал функции f можно записать в виде

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad dx = (dx_1\ dx_2\ \ldots\ dx_n)^{\mathrm{T}}. \tag{16.14}$$

Полный дифференциал

Пусть *векторная функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в *окрестности точки* $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и *дифференцируема* в этой точке. Тогда, согласно следствию 16.1, *полное приращение* этой *функции* в точке x в зависимости от приращения $\Delta x = (\Delta x_1\ \ldots\ \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ независимых переменных можно представить в виде

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $f'(x)$ — *матрица Якоби* функции $f(x)$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой функцией* при $\Delta x \to 0$. Как и в случае скалярных функций, можно ввести следующее понятие.

Определение 16.3. Линейную относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ полного приращения функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x, называют (***полным***) ***дифференциалом функции*** f и обозначают через $df(x)$.

Матрица Якоби

Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные по всем независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то из этих производных (а точнее, из частных производных координатных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ векторной функции $f(x)$) можно составить матрицу $\left(\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ типа $m \times n$, где i соответствует номеру строки матрицы, а j — номеру столбца. Эту матрицу называют ***матрицей Якоби*** функции f в точке a и обозначают

$$f'(x) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

Часто используют запись матрицы Якоби в виде блочной матрицы-строки

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

или блочной матрицы-столбца

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{16.4}$$

В последнем случае каждый блок представляет собой матрицу Якоби соответствующей координатной функции.

Якобиан

Поставим вопрос: при каких условиях система $F(x, y) = 0$ разрешима относительно переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в окрестности данной точки $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+m}$? Через $F'_x(x, y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ и $F'_y(x, y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ будем обозначать соответственно матрицы Якоби функции F по части переменных x и по части переменных y, т.е.

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица $F'_y(x, y)$ является квадратной порядка m, а матрица Якоби $F'(x, y)$ по всей совокупности переменных может быть записана как блочная матрица $\begin{pmatrix} F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \end{pmatrix}$. Отметим также, что определитель квадратной матрицы Якоби (по части переменных или по всем переменным — неважно) называют ***якобианом***.

Теория с доказательством

Такого нет)

Практика

Следите за обновлениями