1. *Сформулировать определение первообразной*

Функцию $F(x)$называют первообразной функции $f(x)$в промежутке X, если $F(x)$дифференцируема в этом промежутке и для любого $x \in X$ значение производной $F'(x)$совпадает со значением функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in X$

2. *Сформулировать определение неопределённого интеграла*

Множество всех первообразных функции f(x) в некотором промежутке называют неопределенным интегралом от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx$. При этом символ $\int$ называют знаком интеграла, f(x)-подынтегральной функцией, f(x)dx-подынтегральным выражением, x-переменной интегрирования.

3. *Сформулировать определение определенного интеграла*

Определённым интегралом функции f(x) на отрезке [a,b] называют предел I интегральных сумм, при стремлении максимального шага разбиения этого отрезка к нулю. Определённый интеграл обозначают $I = \int_a^b f(x)dx$

4. *Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом*

~~Пусть функция f(x) определена на бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$. Тогда в полуинтервале $[a, +\infty)$определена функция $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ как определенный интеграл с переменным верхним пределом~~

5. *Сформулировать определение несобственного интеграла 1 рода*

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называют несобственным интегралом от функции f(x) первого рода и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

6. *Сформулировать определение несобственного интеграла 2 рода*

Пусть функция f(x) определена в полуинтервале [a,b) и неограничена при $x \to b$. Предел функции $\Phi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$ при $\eta \to b - 0$ называют несобственным интегралом функции f(x) второго рода и обозначают $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b-0} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)dx$

7. *Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1 рода*

Если существует и конечен предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$, то данный несобственный интеграл называют сходящимся

8. *Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1 рода*

Если наряду с несобственным интегралом от функции f(x) по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ сходится и интеграл по этому промежутку от функции |f(x)|, то первый интеграл называют сходящимся абсолютно и говорят об абсолютной сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку.

9. *Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1 рода*

Если несобственный интеграл от функции f(x) по промежутку $[a, +\infty)$ сходится, а интеграл от функции |f(x)| по этому промежутку расходится, то первый интеграл называют сходящимся условно.

10. *Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2 рода*

Если существует и конечен предел функции $\Phi(\eta) = \int_a^b f(x)dx$ при $\eta \to b - 0$, то данный несобственный интеграл называют сходящимся

11. *Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2 рода*

Если несобственный интеграл от неограниченной при $x \to b - 0$ функции по промежутку $[a, b)$ сходится и сходится интеграл от функции |f(x)| по этому же промежутку, то первый интеграл называют сходящимся абсолютно.

12. *Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2 рода*

Если несобственный интеграл от неограниченной при $x \to b - 0$ функции по промежутку $[a, b)$ сходится, а интеграл от функции |f(x)| по этому же промежутку расходится, то первый интеграл называют сходящимся условно.

---

1. *Сформулировать и доказать теорему об оценке определенного интеграла*

Теорема: Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на отрезке [a,b], а также $m \le f(x) \le M$ и $g(x) \ge 0\ \ \forall x \in [a, b]$. Тогда $m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство: По условию $m \le f(x) \le M\ \ \forall x \in [a, b]$. Умножая все части этого неравенства на $g(x) \ge 0$, получаем $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Так как определённый интеграл линеен и при $f(x) \ge g(x)$ $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$, то справедливость условия теоремы очевидна.

2. *Сформулировать и доказать теорему о среднем*

Теорема: Если определенная на отрезке [a,b] функция f(x) имеет на нем первообразную F(x), то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Доказательство: Согласно определению первообразной, F'(x)=f(x), $x \in [a, b]$, т.е. функция F(x) дифференцируема, а значит и непрерывна на отрезке [a,b]. Поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, и можно записать $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$, где $c \in (a, b)$.

3. *Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом*

Теорема: Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b] и непрерывна в некоторой точке x этого отрезка. Тогда функция $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ дифференцируема в точке x и $F'(x)=f(x)$.

Доказательство: Достаточно доказать что $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right)=0$ $(*)$. Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части равенства; имеем $\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_x^{x+\Delta x} f(x)dt\right)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\big(f(t)-f(x)\big)dt\right|\le\frac{1}{|\Delta x|}*\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right|$. Так как по условию функция f непрерывна в точке x, то для любого $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, такое, что при любом $t, |t-x|<\delta$, выполняется неравенство $|f(t)-f(x)|<\varepsilon/2$. Поэтому для указанных t $\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}*|\Delta x|$. Окончательно, $\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|\le\frac{1}{|\Delta x|}*\frac{\varepsilon}{2}*|\Delta x|<\varepsilon$, если $|\Delta x|<\delta$. Это означает справедливость (*).

4. *Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница*

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и Φ(x) – какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то $\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$.

Доказательство: Одной из первообразных функции f(x) является $F(x)=\int_a^x f(t)dt$; две первообразные функции f(x) различаются не более чем на константу, т.е. $\Phi(x)-F(x)=C$. Подставляя сюда $x=a$ получаем что $C=\Phi(a)$, поэтому $\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)-\Phi(a)$. При x=b получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

5. *Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям и определённом интеграле*

Теорема: Пусть функции u(x) и v(x) непрерывно дифференцируемы на отрезке [a,b]. Тогда $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\big(u(x)v(x)\big)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

Доказательство: Рассмотрим функцию $F(x)=u(x)v(x)-\int_a^x u'(t)v(t)dt$. Имеем $F'^{(x)}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-u'(x)v(x)=u(x)v'(x)$. Следовательно, функция F(x) – первообразная для u(x)v'(x). По формуле Ньютона-Лейбница получаем что $\int_a^b u(x)v'(x)dx=F(x)|_a^b=\left(u(x)v(x)-\int_a^x u'(t)v(t)dt\right)|_a^b=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$. Теорема доказана.

6. *Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1 рода*

Теорема: Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на любом отрезке $[a,b]\subset[a,+\infty)$, причём $0\le f(x)\le g(x)$ $\forall x\ge a$. Тогда если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а если расходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Доказательство: Пусть сходится несобственный интеграл от функции g(x), тогда существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dx=c<+\infty$. Поскольку по условию теоремы $g(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,+\infty)$, то $\int_a^b g(x)dx\le c$ $\forall b\ge a$. Согласно условию теоремы и свойству 8 определённого интеграла, $0\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\le c$. Так как $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,+\infty)$, то функция $\Phi(b)$ $\int_a^b f(x)dx$ монотонно возрастает и ограничена сверху значением с. Следовательно, такая функция имеет предел, и $\lim_{b\to+\infty}\Phi(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\le c$, что означает сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Второе утверждение теоремы доказывается от противного. Предположим, что интеграл от функции g(x) сходится. Но тогда, как только что было доказано, сходится и интеграл от функции f(x), что противоречит условию теоремы.

7. *Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1 рода*

Теорема: Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на любом отрезке $[a,b]\subset[a,+\infty)$и положительны при $x\ge a$. Если существует конечный положительный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся

Доказательство: В теореме содержатся четыре утверждения. Докажем лишь одно из них: если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Возьмём $\epsilon=\frac{A}{2}>0$, тогда при всех $x>\delta(\epsilon)$выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\epsilon\Leftrightarrow A-\epsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\epsilon$. Так как $A-\epsilon=\frac{A}{2}$, то при всех указанных x выполняется неравенство $\frac{A}{2}g(x)<f(x)$. На основании теоремы о признаке сравнения получаем, что сходится интеграл $\int_{\delta(\epsilon)}^{+\infty}\frac{K}{2}g(x)dx$, а тогда сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

8. *Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1 рода*

Теорема: Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, тон он сходится.

Доказательство: Для любого $x\ge a$ $\quad 0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$. Т. к. $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ по условию сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty}2|f(x)|dx$. Следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)dx$. Но тогда сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)dx-\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$. Теорема доказана.

9. *Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами* $\phi=\alpha,\phi=\beta$ *и кривой* $r=r(\phi)$.

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение $\alpha=\phi_0<\phi_1<\dots<\phi_n=\beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$. Предположив, что $r=r(\phi)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке, напишем неравенство $\frac{1}{2}r_i^2(\eta_i)\Delta\phi\le S_i\le\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\phi_i$, где Si – площадь криволинейного сектора, отвечающего изменению ϕ на отрезке $[\phi_{i-1},\phi_i]$; $r(\eta_i)$ и $r(\xi_i)$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $r(\phi)$ на указанном частичном отрезке разбиения. Предполагаем дополнительно, что $r(\phi)$непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Суммируя неравенства по i=1,2…n получим, что для площади S рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенство $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n r_i^2(\eta_i)\Delta\phi\le S\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n r^2(\xi_i)\Delta\phi_i$. Переходя здесь к пределу при $\max_i\Delta\phi_i\to 0$, получаем требуемую формулу: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)d\phi$.

10. *Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции* $y=f(x)$, *отсечённой прямыми* $x=a$ *и* $x=b$

Производная переменной длины дуги вычисляется по формуле: $S'(t)=\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}$.Т.к. одной из первообразных функции из правой части этого равенства является $F(t)=\int_a^t\sqrt{\big(x'(\tau)\big)^2+\big(y'(\tau)\big)^2}\,d\tau$, то отсюда, поскольку F(a)=0, следует равенство $S(t)=\int_a^t\sqrt{\big(x'(\tau)\big)^2+\big(y'(\tau)\big)^2}\,d\tau$. Поэтому для длины всей кривой имеем формулу $l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt$. Если кривая Г задана явно уравнением $y=y(x)$, $a\le x\le b$, то, беря x в качестве параметра, получаем формулу $l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx$.