Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 6

Тема Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования

Студент Пересторонин Павел

Группа ИУ7-43Б

Оценка (баллы) ___________________

Преподаватель Градов В. М.

Москва.
2020 г.

Техническое задание

Тема: Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования.

Цель работы. Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций .

Задание.

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x},$$

параметры функции неизвестны **и определять их не нужно**..

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы:

1 - односторонняя разностная производная ,

2 - центральная разностная производная,

3- 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной,

4 - введены выравнивающие переменные.

В столбец 5 занести вторую разностную производную.

Результаты.

Заполненная таблица с краткими комментариями по поводу использованных формул и их точности

Вопросы при защите лабораторной работы.

Ответы на вопросы дать письменно в Отчете о лабораторной работе.

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2).$$

4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

Исходный код алгоритмов.

main.py

```
def left_side(Y, step, index):
    return (Y[index] - Y[index - 1]) / step if index > 0 else '---'

def right_side(Y, step, index):
    return (Y[index + 1] - Y[index]) / step if index < len(Y) - 1 else '---'

def center_side(Y, step, index):
    return (Y[index + 1] - Y[index - 1]) / 2 / step if index > 0 and index < len(Y) - 1 else '---'

def second_diff(Y, step, index):
    return (Y[index - 1] - 2 * Y[index] + Y[index + 1]) / step ** 2 if index > 0 and index < len(Y) - 1 else '---'

def runge_left(Y, step, index):
    if index < 2:
        return '---'
    F1 = left_side(Y, step, index)
    F2 = (Y[index] - Y[index - 2]) / 2 / step
    return F1 + F1 - F2

def align_vars_diff(Y, X, step, index):
    if index > len(Y) - 2:
        return '---'
    eta_ksi_diff = (1 / Y[index + 1] - 1 / Y[index]) / (1 / X[index + 1] - 1 / X[index])
    y = Y[index]
    x = X[index]
    return eta_ksi_diff * y * y / x / x


X = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
Y = [0.571, 0.889, 1.091, 1.231, 1.333, 1.412]
table = [[0 for i in range(6)] for j in range(5)]
methods = [left_side, center_side, runge_left, align_vars_diff, second_diff]

print('-' * (6 + 8 * 5))
for i in range(len(X)):
    print('|', end='')
    for j in range(len(methods) - 2):
        res = methods[j](Y, X[1] - X[0], i)
        print(f'{res:.3f}'.center(8) if res != '---' else res.center(8), '|', sep='', end='')
    res = align_vars_diff(Y, X, X[1] - X[0], i)
    print(f'{res:.3f}'.center(8) if res != '---' else res.center(8), '|', sep='', end='')
    res = second_diff(Y, X[1] - X[0], i)
    print(f'{res:.3f}'.center(8) if res != '---' else res.center(8), '|', sep='')
    print('-' * (6 + 8 * 5))
```

Интерфейс работы.

---	---	---	0.408	---
0.318	0.260	---	0.247	-0.116
0.202	0.171	0.144	0.165	-0.062
0.140	0.121	0.109	0.118	-0.038
0.102	0.090	0.083	0.089	-0.023
0.079	---	0.068	---	---

Моя программа выводит незаполненную часть таблицы.

Получаем заполненную таблицу:

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571	-	-	-	0.408	-
2	0.889	0.318	0.260	-	0.247	-0.116
3	1.091	0.202	0.117	0.144	0.165	-0.062
4	1.231	0.140	0.121	0.109	0.118	-0.038
5	1.333	0.102	0.090	0.083	0.089	-0.023
6	1.412	0.079	-	0.068	-	-

Прокомментируем используемые формулы и их значение (получение):

1. Левосторонняя разностная производная: $y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$. Получается из разложения функции в ряд Тейлора для точки, прозводную в которой хотим найти. Далее просто выражаем значение через этот ряд для следующей точке в ряде и выражаем 1 производную из него.

(выражение: $y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' - \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} - ....$)

Порядок точности: *O(h).*

2. Центральная разностная производная.

Выражение: $y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$. Получается при $f_{n+1} - f_{n-1}$, где f - ряд Тейлора построенный для точки, в которой требуется найти производную (n+1 - индекс следующей на сетке точке, n - 1 - индекс предыдущей точки на сетке)

3. Формула Рунге на основе левосторонней разностной производной. В данном случае левосторонняя разностная производная служит некоторой приближенной формулой для вычисления некоторой величины (в нашем случае производной) и Рунге позволяет увеличить точность исходя из следующих преобразований:

$\Omega = \Phi(h) + \psi(x)h^p + O(h^{p+1})$ - структура формулы для вычисления численного значения, которая может быть преобразована с помощью преобразований рунге. Запишем формулу для шага *mh,* где шаг удобно взять *m = 2*:

$$\Omega = \Phi(mh) + \psi(x)(mh)^p + O(h^{p+1})$$

Комбинируя 2 выражения получаем формулу: $\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$, точность которой выше.

4. Метод выравнивающих переменных. При удачном выборе этих переменных исходная кривая может быть преобразована в прямую линию, производная от которой вычисляется точно по самым простым формулам. В моем случае можно сделать следующее:

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x} \quad \Big/ \ {}^{\wedge -1}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1 + a_2 x}{a_0 x}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{a_2}{a_0} \\ \eta(y) = \frac{1}{y} \\ \xi(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \eta(\xi) = \frac{a_1}{a_0}\xi + \frac{a_2}{a_0}$$

$$y'_x = \frac{\eta'_\xi \xi'_x}{\eta'_y} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n}}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \right)$$

правая (односторонн.) разно-стная производная

5. Вторая разностная производная: $y_n'' = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)$. Получается так же при разложении функции в ряд тейлора и проведении некоторых преобразований (конкретно: ряд тейлора для точки, в которой надо найти производную, выразить через него следующую и предыдущую по индексам точки и сложить получившиеся выражения, выразив y")

Ответы на вопросы к защите.

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

№1

$$y_{N-1} = y_N - \frac{h}{1!}y'_N + \frac{h^2}{2!}y''_N \ldots \quad (1)$$

$$y_{N-2} = y_N - \frac{2h}{1!}y'_N + \frac{(2h)^2}{2!}y''_N \ldots \quad (2)$$

$$4\cdot(1) - 1\cdot(2): \quad 4y_{N-1} - y_{N-2} = 3y_N - 2y'_N \cdot h + O(h^2)$$

$$y'_N = -\frac{-3y_N + 4y_{N-1} - y_{N-2}}{2h} + O(h^2)$$

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

Нет ответа.

3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2).$$

№3

$$\Omega = \varphi(h) + \frac{\varphi(h) - \varphi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(h) &= \frac{y_1 - y_0}{h} \\ \varphi(2h) &= \frac{y_2 - y_0}{2h} \end{aligned}\right\} \quad \Omega = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2h} =$$

$$= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$

4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

№4

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{iv} \ldots$$

$$y_2 = y_0 + \frac{(2h)}{1!}y_0' + \frac{(2h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!}y_0''' + \frac{(2h)^4}{4!}y_0^{iv} \ldots$$

$$y_3 = y_0 + \frac{(3h)}{1!}y_0' + \frac{(3h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(3h)^3}{3!}y_0''' + \frac{(3h)^4}{4}y_0^{iv} \ldots$$

$$72(1) - 9(2) + 8(3):\ 72y_1 - 9y_2 + 8y_3 = 71y_0 + 78\overset{h}{y_0'} + O(h^3)$$

$$y_0' = \frac{-71y_0 + 72y_1 - 9y_2 + 8y_3}{78h} + O(h^3)$$