Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашнее работа №2

Дисциплина Логика и теория алгоритмов

Тема Булевые функции

Вариант 20

Москва — 2020 г.

Задача 1

Условие:

Для булевой функции f:

X	f(X)
0000	0
0001	0
0010	0
0011	0
0100	0
0101	1
0110	1
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	1
1110	1
1111	0

а) найти сокращенную ДНФ;
б) найти ядро функции;
в) получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными;
г) на картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

Решение:

1) Карта Карно для сокращенной ДНФ:

X_1/X_2 \ X_3/X_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

$K_1 = x_1\overline{x}_2$
$K_2 = x_1\overline{x}_4$
$K_3 = x_1\overline{x}_3$
$K_4 = \overline{x}_1x_2x_3$
$K_5 = x_2x_3\overline{x}_4$
$K_6 = \overline{x}_1x_2x_4$
$K_7 = x_2\overline{x}_3x_4$

Сокращенная ДНФ:

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$$

2) Ядровая импликанта $K_1 = x_1\overline{x}_2$, так как элементарная конъюнкция $x_1\overline{x}_2x_3x_4$ покрыта только этой импликантой.

3) Получение тупиковых и минимальных ДНФ:

$$(K_2 \vee K_3)(K_2 \vee K_5)(K_3 \vee K_7)(K_6 \vee K_7)(K_4 \vee K_6)(K_4 \vee K_5) =$$
$$(K_2 \vee K_3K_5)(K_3K_6 \vee K_7)(K_4 \vee K_5K_6) =$$
$$K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_4K_7 \vee K_2K_5K_6K_7 \vee K_3K_4K_5K_6 \vee$$
$$\vee K_3K_5K_6 \vee K_3K_4K_5K_7 \vee K_3K_4K_5K_6 =$$
$$K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_4K_7 \vee K_2K_5K_6K_7 \vee K_3K_5K_6 \vee K_3K_4K_5K_7$$

Присоеденив ядровую импликанту К1 к каждому члену, получим 5 тупиковых ДНФ:

1. $K_1K_2K_3K_4K_6 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4$
2. $K_1K_2K_4K_7 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3x_4$
3. $K_1K_2K_5K_6K_7 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$
4. $K_1K_3K_5K_6 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4$
5. $K_1K_3K_4K_5K_7 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$

Минимальными являются 2 и 4 ДНФ

4) Карта Карно для минимальной ДНФ $K_1K_2K_4K_7 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3x_4$

X_1/X_2 \ X_3/X_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

Ядро К1 - выделено красным цветом

Карта Карно для минимальной ДНФ $K_1K_3K_5K_6 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4$

X_1/X_2 \ X_3/X_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

Ядро К1 - выделено красным цветом

Задача 2

Условие:

Дана функция f

$$\overline{x}_1(x_1 \downarrow \overline{x}_2)(x_1 \oplus \overline{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$$

И функция w

$$w = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

Необходимо:
а) Вычислить таблицу значений функции f.
б) Найти минимальные ДНФ функций f и w.
в) Выяснить полноту системы f, w. Если система не полна, дополнить систему функцией g до полной системы.
Указание. Запрещается дополнять систему константами, отрицанием и базовыми функциями двух переменных ($\oplus, \vee, \wedge, |, \downarrow$, и т.д.) Не допускается дополнение функцией, образующей с f или w полную подсистему, кроме случаев, когда иное невозможно.
г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы f, w или f, w, g, построить функциональные элементы, реализующие базовые функции ($\vee, \wedge, \neg$, 0, 1)

Решение:

1) Составим таблицу значений функции f:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \downarrow \overline{x}_2$	$x_1 \oplus \overline{x}_3$	$\overline{x}_1(x_1 \downarrow \overline{x}_2)(x_1 \oplus \overline{x}_3)$	$x_2 \sim x_3$	f
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1

2) Карта Карно для фунции f:

X_3

X_1/X_2	0	1
00	1	1
01	0	1
11	1	1
10	1	1

Минимальная ДНФ:

$$f = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$$

Карта Карно для функции w:

X_3

X_1/X_2	0	1
00	0	0
01	0	0
11	1	1
10	1	1

Минимальная ДНФ:

$$w = x_1$$

3) Проверка на полноту системы {f, w}:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$w(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

1. Сохранение 0
$f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$
$w(0,0,0) = 0 \Rightarrow w \in T_0$

2. Сохранение 1
$f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$
$w(1,1,1) = 1 \Rightarrow w \in T_1$

3. Самодвойственность
$f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \notin S$
$\forall(a_1, a_2, a_3) \in E_2^3 \Rightarrow w(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3) = \overline{w(a_1, a_2, a_3)} \Rightarrow w \in S$

4. Монотонность
$f(0,0,1) = 1 > f(0,1,0) = 0 \Rightarrow f \notin M$
$\forall\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_3), \widetilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_3)$, где набор $\widetilde{\alpha}$ предшествует набору $\widetilde{\beta} \Rightarrow$
$w(a_1, a_2, a_3) \leq w(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \Rightarrow w \in M$

5. Линейность функций
Общий вид полинома Жегалкина для функции трёх переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_{12}x_1x_2 \oplus C_{23}x_2x_3 \oplus C_{13}x_1x_3 \oplus C_{123}x_1x_2x_3$$

С помощью последовательных действий вычислим значенния коэффициентов C_i в полиноме Жегалкина для f:

$$\begin{cases} C_0 = 1 : f(0,0,0) = 1 \\ C_3 = 0 : f(0,0,1) = C_3 \oplus C_0 = 0 \oplus 1 = 1 \\ C_2 = 1 : f(0,1,0) = C_2 \oplus C_0 = 1 \oplus 1 = 0 \\ C_1 = 0 : f(1,0,0) = C_1 \oplus C_0 = 0 \oplus 1 = 1 \\ C_{23} = 1 : f(0,1,1) = C_{23} \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_0 = 1 \oplus 0 = 1 \\ C_{13} = 0 : f(1,0,1) = C_{13} \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_0 = 0 \oplus 1 = 1 \\ C_{12} = 1 : f(1,1,0) = C_{12} \oplus C_2 \oplus C_1 \oplus C_0 = 1 \oplus 0 = 1 \\ C_{123} = 1 : f(1,1,1) = C_{123} \oplus C_{23} \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_1 \oplus C_0 = 1 \oplus 0 = 1 \end{cases}$$

Полином Жегалкина функции f:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$$

Так как полином функции f содержит конъюнкции, то $f \notin L$

Так как функция w является функцией от одной переменной ⇒ w ∈ L

Критериальная таблица

	T_0	T_1	S	M	L
f	−	+	−	−	−
w	+	+	+	+	+

Система {f, w} не является функционально полным классом. Обе функции сохраняют константу 1. Дополняем систему функцией, которая не сохраняет 1, например:

$$g = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$$

1. Сохранение 0
$g(0,0,0) = 1 \Rightarrow g \notin T_0$

2. Сохранение 1
$g(1,1,1) = 0 \Rightarrow g \notin T_1$

3. Самодвойственность
$g(0,1,0) = f(1,0,1) = 1 \Rightarrow g \notin S$

4. Монотонность
$g(0,0,0) = 1 > g(0,0,1) = 0 \Rightarrow g \notin M$

5. Линейность функций
Найдём коэффициенты полинома Жегалкина для функции g:

$$\begin{cases} C_0 = 1 : g(0,0,0) = 1 \\ C_3 = 1 : g(0,0,1) = C_3 \oplus C_0 = 1 \oplus 1 = 0 \\ C_2 = 0 : g(0,1,0) = C_2 \oplus C_0 = 0 \oplus 1 = 1 \\ C_1 = 1 : g(1,0,0) = C_1 \oplus C_0 = 1 \oplus 1 = 0 \\ C_{23} = 0 : g(0,1,1) = C_{23} \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_0 = 0 \oplus 0 = 0 \\ C_{13} = 0 : g(1,0,1) = C_{13} \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_0 = 0 \oplus 1 = 1 \\ C_{12} = 1 : g(1,1,0) = C_{12} \oplus C_2 \oplus C_1 \oplus C_0 = 1 \oplus 0 = 1 \\ C_{123} = 0 : g(1,1,1) = C_{123} \oplus C_{23} \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_1 \oplus C_0 = 0 \oplus 0 = 0 \end{cases}$$

Полином Жегалкина функции g:

$$g(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_1x_2$$

Функция g не является линейной $\Rightarrow g \notin L$

Критериальная таблица

	T_0	T_1	S	M	L
f	−	+	−	−	−
w	+	+	+	+	+
g	−	−	−	−	−

Система {f, w, g} является функционально полным классом.

4) Выражаем константы 0 и 1, отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию:
1. Отрицание:

$$g(0,0,0) = 1 \text{ и } g(1,1,1) = 0 \Rightarrow g(x,x,x) = \overline{x}$$

2. Константа 1:

$$f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f(x,x,x) = 1$$

3. Константа 0:
Для построения константы 0 инвертируем константу 1:

$$\overline{f(x,x,x)} = g(f(x,x,x), f(x,x,x), f(x,x,x)) = 0$$

4. Дизъюнкция
Построим дизъюнкцию на основе функции $f = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$. Зафиксируем значение $x_2 = 1$. Получим дизъюнкцию:

Заменим $x_1 \leftrightarrow x$ и $x_3 \leftrightarrow y$:
$$\vee(x,y) = f(x,1,y) = x \vee \overline{1} \vee y = x \vee y$$

5. Конъюнкция
Для построения конъюнкции применим закон де Моргана $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, и навесим отрицание на обе части полученной дизъюнкции:

$$\overline{f(x_1, 1, x_3)} = \overline{x \vee y}$$
$$\overline{f}(x_1, 1, x_3) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$

Заменим $\overline{x}_1 \leftrightarrow x$ и $\overline{x}_3 \leftrightarrow y$:
$$\wedge(x,y) = \overline{f}(\overline{x}, 1, \overline{y}) = x \wedge y$$

Подставим функции одной переменной:
$$\overline{f}(g(x,x,x), f(x,x,x), g(y,y,y)) = x \wedge y$$

Произведя еще одну подстановку, получим:
$$g(f(g(x,x,x), f(x,x,x), g(y,y,y)),$$
$$f(g(x,x,x), f(x,x,x), g(y,y,y)),$$
$$f(g(x,x,x), f(x,x,x), g(y,y,y))) = x \wedge y$$