Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашнее работа №2

Дисциплина Логика и теория алгоритмов

Тема Математическая логика

Вариант 20

Преподаватель Белоусов Алексей Иванович

Москва — 2020 г.

Задание №3

Условие:

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$(\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B)) \equiv A \vee (B \vee C)$$

Решение:

Преобразуем правую часть формулы, используя определение дизъюнкции $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \to \psi$:

$A \vee (B \vee C) = \neg A \to (B \vee C) = \neg A \to (\neg B \to C)$

Для доказательства эквивалентности необходимо доказать вывод в обе стороны:

1) $\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \to B) \to C$

2) $\neg(\neg A \to B) \to C \vdash \neg C \to \neg(\neg A \& \neg B)$

1) Доказательство вывода правой части формулы из левой

$\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \to B) \to C$.

Согласно теореме дедукции, достаточно доказать, что

$\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B), \neg(\neg A \to B) \vdash C$

1.	$\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B)$	гипотеза 1
2.	$\neg(\neg A \to B)$	гипотеза 2
3.	$(\neg A \& \neg B) \to C$	правило контрапозиции для (1)
4.	$A \to (\neg A \to B)$	секвенция 5
5.	$\neg(\neg A \to B) \to \neg A$	правило обратной контрапозиции для (4)
6.	$\neg A$	Modus ponens для (5) и (2)
7.	$B \to (\neg A \to B)$	аксиома 1
8.	$\neg(\neg A \to B) \to \neg B$	правило обратной контрапозиции для (7)
9.	$\neg B$	Modus ponens для (8) и (2)

10.	$\neg A \& \neg B$	свойство конъюнкции для (6), (9)
11.	C	Modus ponens для (3) и (11)

Теперь так как доказан вывод $\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B), \neg(\neg A \to B) \vdash C$, то используем теорему дедукции и получим, что $\neg C \to \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \to B) \to C$.

2) Доказательство вывода левой части формулы из правой $\neg(\neg A \to B) \to C \vdash \neg C \to \neg(\neg A \& \neg B)$.

Согласно теореме дедукции, достаточно доказать, что $\neg(\neg A \to B) \to C, \neg C \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$.

1.	$\neg(\neg A \to B) \to C$	гипотеза 1
2.	$\neg C$	гипотеза 2
3.	$\neg C \to \neg\neg(\neg A \to B)$	правило обратной контрапозиции для (1)
4.	$\neg\neg(\neg A \to B)$	Modus ponens для (3) и (2)
5.	$\neg A \to B$	правило снятия двойного отрицания для (4)
6.	$B \to \neg\neg B$	секвенция 4
7.	$\neg A \to \neg\neg B$	секвенция 1 для (5) и (6)
8.	$\neg\neg(\neg A \to \neg\neg B)$	правило введения двойного отрицания для (7)
9.	$\neg(\neg A \& \neg B)$	отрицание конъюнкции для (8)

Вновь используя теорему дедукции для вывода $\neg(\neg A \to B) \to C, \neg C \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$, получаем, что $\neg(\neg A \to B) \to C \vdash \neg C \to \neg(\neg A \& \neg B)$.

Доказательство проведено в обе стороны, следовательно доказана требуемая эквивалентность.