# ТФКП-1. Элементарные функции

## Формы представления комплексных чисел

**Алгебраическая форма**:



 - действительная часть числа z,

 - мнимая часть числа z.

 - модуль (абсолютная величина) числа z.

r

y

x

При этом число называется *сопряженным* к z и обозначается . Понятно, что точки, соответствующие числу и сопряженному с ним, симметричны относительно действительной оси.

**Тригонометрическая форма**:

,

где

 - модуль числа z,

а угол  - аргумент числа z – есть угол, образованный радиус-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс (действительной оси). Аргумент числа z, обозначаемый , является -периодической функцией:



причем

,

и главное значение аргумента, угла , рассматривается в промежутке  , обозначается  и тогда



Эти соотношения легко усматриваются из графика большого арктангенса.

Исходя из определений показательной и тригонометрической функций в виде сумм степенных рядов,

 ,

сходящихся абсолютно, как доказывается, на всей комплексной плоскости, можно получить следующие формулы:



Используя первую, можно тригонометрическую форму преобразовать в показательную, более удобную при выполнении действий над комплексными числами:

.

Полезно иметь в виду и определения гиперболических функций:

 .

Отсюда нетрудно получить такие соотношения:



(Использовано очевидное равенство .)

Заметим, что свойства четности и нечетности тригонометрических и гиперболических функций сохраняются и в комплексном случае.

 **Замечание**. Экспоненту, логарифм, тригонометрические и гиперболические функции можно определить иначе (см. [Лаврентьев-Шабат]).

Именно, по определению полагаем

.

После этого определяется логарифм, а тригонометрические и гиперболические функции определяются согласно записанным выше формулам.

## Сложение и умножение



## Степени и корни

Выражение для произвольной целой степени комплексного числа легко получить, используя показательную форму:

.

(Доказывается в комплексной алгебре, что все свойства степеней для действительных чисел сохраняются и для комплексных. Равно, как и свойства вещественной экспоненты.)

Таким образом, при возведении в целую степень модуль числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть аргумент ведет себя подобно логарифму.

Пример:



В частности, при n=-1 .

Функция извлечения корня целой положительной степени определяется как функция, обратная функции возведения в целую положительную степень.

А именно, по определению

.

Пусть  , тогда

 .

Это запись равенства двух комплексных чисел. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы совпадают с точностью до любого слагаемого, кратного .

То есть  


откуда аргумент числа w определяется в виде:

 .

Эта формула дает ровно n попарно различных значений аргумента при k=0,…,n-1.

Корни n-й степени из комплексного числа , таким образом, находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса  и повернутого относительно положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки на угол .

**Примеры**.

1) 

Получаем три числа:



Эти числа располагаются в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность единичного радиуса, одна из вершин которого лежит на оси абсцисс в точке (-1, 0).

2).

Здесь мы имеем 4 корня, расположенные в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2, диагонали которого лежат на биссектрисах координатных углов:



Заметим, что здесь возникают две комплексно-сопряженных пары: . И нет ни одного действительного корня.

3) 

Перечислить явно полученные корни предлагается самостоятельно.

## Логарифм

Логарифм определяется, естественно, как функция, обратная экспоненте:

.

Положим . Тогда



откуда



То есть

.

Это значит, что комплексный логарифм есть периодическая функция с чисто мнимым периодом .

Функция



Называется главным значением логарифма.

Областью определения логарифма является вся комплексная плоскость, кроме точки (0, 0).

В комплексной области определен логарифмы отрицательных чисел, например:

.

С помощью логарифма можно определить степенную и показательную функции для произвольных комплексных оснований и показателей степени, положив



**Примеры**

1)



Если ограничиться главным значением логарифма, то получим следующее значение степени:



2)  .

Рассматривая только главное значение, получим:



## Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Выведем выражение для функции , обратной к синусу.

То есть

.

Вспоминая выражение синуса через экспоненту, получим:

.

Обозначая , получим относительно t квадратное уравнение:

.

Отсюда



(Мы не пишем  перед корнем, так как имеется в виду двузначность функции извлечения квадратного корня.)

Итак,

,

откуда



В частности,

.

Раскрывая логарифм (и ограничиваясь его главным значением), получим:



Заметим, что число  положительно, и можно обойтись без знака модуля под логарифмом.

Заметим также, что все значения

,

что и следовало ожидать (а «большой» арксинус 2 в вещественной области, конечно, не определен).

## Действительная и мнимая части некоторых функций

Функция комплексной переменной  может быть представлена в виде

,

где функции u(x,y) и v(x,y) называются соответственно действительной и мнимой частью исходной функции.

Найдем действительную и мнимую части функции .

Имеем:



При этом



Отсюда видно, что комплексный синус неограничен по модулю; в существенном отличии от обычного вещественного синуса.

Аналогично можно показать, что

.

Найдем теперь действительную и мнимую части функции

.

Рассмотрим сначала просто тангенс: 

Знаменатель дроби можно преобразовать так:

 

Итак,

 .

Заметим, что при  получим для действительной части:



Возвращаясь к исходной задаче, получим, очевидно, так как , следующее:

.

Рассмотрим еще один пример:

 .

Преобразуем, подставляя вместо  :



Обозначим подкоренное выражение через . Тогда



Рассмотрим сначала случай, когда знаменатель последней дроби отличен от нуля.

Тогда



Расписывая экспоненту через тригонометрические функции, получим действительную и мнимую части. Однако зависимость их от x и y скрыта в аргументе функции w.

Пусть теперь (можно заметить, что это уравнение гиперболы , то есть точки, обращающие выражение в нуль, лежат на этой гиперболе) .

Тогда



и



Эту задачу можно решить иначе, записав аргумент z в показательной форме, то есть

 .

Опять обозначая подкоренное выражение через , получим



Дальше действуем аналогично предыдущему.

Заметим, что действительная и мнимая части функции комплексной переменной могут быть, в случае представления аргумента в тригонометрической или показательной форме, выражены как функции от  и :



Предлагается самостоятельно найти действительные и мнимые части следующих функций:

1)

2) 

3) 

4)  (можно использовать связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями)

5)  .

## Области на комплексной плоскости

Наиболее важной для дальнейшего областью является кольцо с внутренним радиусом r и внешним R и центром в точке . Она задается двойным неравенством:



Если хотя бы одно неравенство нестрогое, то соответствующая граница (окружность) включается в область.

Рассмотрим еще некоторые примеры.

1) 

Полагая, как обычно, , получим

,

откуда



или

 .

Это неравенство описывает часть комплексной плоскости строго слева от параболы .

2) №13.10



Если неравенство заменить равенством, получим определение эллипса с фокусами в точках . Уравнение этого эллипса можно найти так. Точки пересечения эллипса с мнимой осью и, тем самым, большая полуось эллипса определяется из условия принадлежности эллипсу точки :

.

Так как половина межфокусного расстояния , то малая полуось равна 

Итак, получаем уравнение эллипса:

.

Исходное неравенство описывает область, ограниченную эллипсом строго внутри него.

3) №13.12



Решить самостоятельно, заметив, что замена неравенства равенством дает определение гиперболы с фокусами в точках .

3) №13.18

Описать неравенством область, ограниченную эллипсом (строго внутри) с фокусами в точках  и большой полуосью, равной 3.

Центр эллипса находится в точке , а эллипс пересекает прямую y=1 в точке 5i. Сумма расстояний от этой точки до фокусов равна 2+4=6. Следовательно, область строго внутри эллипса описывается неравенством



Уравнение самого эллипса имеет вид:



4) №13.11



Решение



Таким образом, условие задачи дает уравнение окружности



Исключается точка -2i, в которой знаменатель обращается в нуль.

5) №13.13



Решение



причем точка  исключается.

Равенство нулю аргумента комплексного числа означает, что мнимая часть равна нулю, а действительная положительна.

То есть



Первое условие дает уравнение прямой, проходящей через точки ,

 ,

а по поводу второго надо заметить, что точка (x, y), находящаяся между указанными выше двумя точками дает в каждой паре скобок отрицательное значение, точка , как и точка , обращает левую часть неравенства в нуль.

**Замечание**. Раскрыв скобки в первом выражении, уравнение прямой можно записать в виде:



Нетрудно проверить, что то же самое уравнение мы получим из стандартного уравнения прямой, проходящей через две точки:

.

Итак, исходное равенство определяет на комплексной плоскости множество точек, лежащих на прямой, проходящей через точки , кроме точек отрезка, соединяющего их.