

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Некоторые сведения из математики

Оператор «набла» (оператор Гамильтона) $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$

Градиент скалярной величины $\alpha - \quad grad \, a = \vec{\nabla} a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z.$

Дивергенция вектора \vec{a} (скалярная величина)

$$div \, \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор вектора $\vec{a} \quad - \quad rot \, \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x; & \vec{e}_y; & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x}; & \frac{\partial}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x; & a_y; & a_z \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

Теорема Остроградского-Гаусса

Поток вектора \vec{a} , характеризующего какое-либо поле, через произвольную замкнутую поверхность S , мысленно проведённую в этом поле, равен интегралу от дивергенции вектора \vec{a} , взятому по объёму V , ограниченному замкнутой поверхностью S

$$\oint_S \vec{a} \, d\vec{S} = \int_V div \, \vec{a} \, dV.$$

Теорема Стокса

Циркуляция вектора \vec{a} , характеризующего какое-либо поле, вдоль произвольного замкнутого контура l , мысленно проведённого в этом поле, равна потоку ротора вектора \vec{a} через поверхность S , натянутую на контур l .

$$\oint_l \vec{a} \, d\vec{l} = \int_S rot \, \vec{a} \, d\vec{S}.$$

Лекция 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электрический заряд.

Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд.

Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Заряды условно различают на положительные и отрицательные. Точечные заряды одного знака отталкиваются, разных знаков – притягиваются друг другом.

Заряд заряженных элементарных частиц (электронов, позитронов и протонов) одинаков по абсолютной величине и представляет собой наименьший встречающийся в природе электрический заряд, называемый элементарным зарядом

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Всякий заряд образуется совокупностью элементарных зарядов и является целым кратным e :

$$q = N \cdot e$$

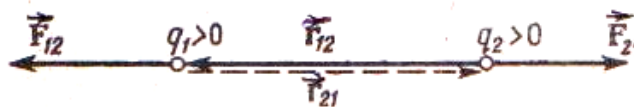
т.е. электрический заряд «квантуется».

Закон сохранения электрического заряда: суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться.

Этот закон тесно связан с релятивистской инвариантностью заряда т.е. величина заряда не зависит от того движется этот заряд или покоится.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой.

Точечным зарядом называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

\vec{F}_{12} — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$);

\vec{r}_{12} — вектор, направленный от q_2 к q_1 ;

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi / \text{м} -$ электрическая постоянная, относящаяся к числу фундаментальных физических постоянных $(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi})$.

Здесь Φ – размерность электрической ёмкости **фарад**.

Электрическое поле и его характеристики.

Всякий электрический заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создаёт в нём электрическое поле. Об «интенсивности» поля можно судить по воздействию, которое оказывает поле на пробный электрический заряд, помещённый в данную точку пространства.

Силовой характеристикой электрического поля является векторная величина, называемая напряжённостью электрического поля в данной точке пространства, которая численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}.$$

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Используя закон Кулона можно получить формулу для напряжённости поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Единица напряжённости в СИ имеет название вольт на метр – **В/м**

Электрическое поле можно описать с помощью линий напряжённости (**силовых линий**). Касательная к силовой линии в каждой точке совпадает с направлением вектора \vec{E} . Густота линий выбирается так, чтобы число линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно модулю вектора \vec{E} .

Для поля точечного заряда полное число линий, пересекающих сферическую поверхность произвольного радиуса r , будет равно произведению густоты линий на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$. Так как густота линий по условию равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \text{ то количество линий численно равно } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ т.е. число}$$

линий на любом расстоянии от заряда будет одним и тем же.

Силовые линии нигде не пересекаются. Они могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал, который определяют как отношение потенциальной энергии, которой обладает пробный заряд в данной точке пространства к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{W}{q_{np}} = \frac{A_{\infty}}{q_{np}}, \quad \text{где}$$

A_{∞} — работа сил поля по удалению пробного заряда из данной точки на бесконечность, где предполагается, что электрическое поле отсутствует, или в такую точку пространства, где потенциал принимается равным нулю, например, на заземлённый проводник.

В СИ потенциал измеряется в вольтах $\left(1B = \frac{1Дж}{1Кл}\right)$.

Энергия взаимодействия системы зарядов.

Для двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга

потенциальная энергия их взаимодействия равна
$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r}.$$

Для системы, состоящей из N точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_N энергия взаимодействия всех зарядов равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \varphi_i.$$

Суммирование производится по индексам i и k . Оба индекса пробегают, независимо друг от друга, все значения от 1 до N . Слагаемые, для которых значения индекса i совпадают со значением индекса k , не принимаются во внимание.

φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i в точке, где помещается заряд q_i .

Принцип суперпозиции полей:

а) Напряжённость поля системы зарядов равна **векторной сумме** напряжённости полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i;$$

б) Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен **алгебраической сумме потенциалов**, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Связь между напряжённостью и потенциалом электрического поля.

Из курса механики известно, что сила связана с потенциальной энергией соотношением $\vec{F} = -gradW$.

Для заряженной частицы, находящейся в электростатическом поле $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ и $W = q \cdot \varphi$, т.е. $q \cdot \vec{E} = -grad(q \cdot \varphi) = -q \cdot grad\varphi$. Тогда

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{или} \quad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Для произвольного направления l получаем $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$. Знак минус показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

Теперь можно легко получить выражение для потенциала точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Итак: по известным значениям φ можно найти напряжённость поля в каждой точке или по заданным значениям \vec{E} в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля, т.к. работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = \int_1^2 q\vec{E} d\vec{l}.$$

Вместе с тем $A_{12} = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Для обхода по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ и получаем **теорему о циркуляции вектора \vec{E}** :

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$$

циркуляция вектора напряжённости электростатического поля равна нулю. Эта формула справедлива **только для** электрического поля **неподвижных** зарядов.

Используя теорему Стокса можно получить **теорему о циркуляции вектора \vec{E} в дифференциальном виде:**

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

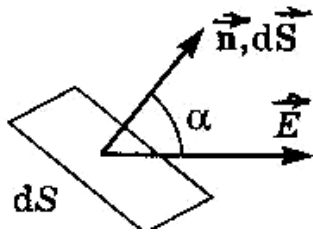
Силовое поле, обладающее таким свойством, называется **потенциальным**.

Воображаемую поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называют эквипотенциальной поверхностью. Её уравнение имеет вид:

$$\varphi(x; y; z) = \text{const}.$$

Силовые линии в каждой точке пространства направлены по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку.

Лекция 2



Число линий, пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль \vec{n} которой составляет угол α с вектором \vec{E} определяют как $E \cdot dS \cdot \cos \alpha$. Эту величину называют потоком $d\Phi_E$ вектора \vec{E} сквозь площадку dS :

$$d\Phi_E = E_n dS = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Если имеется некоторая произвольная поверхность S , то поток вектора \vec{E} сквозь неё

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Эта величина алгебраическая. В случае замкнутых поверхностей, положительное направление нормали \vec{n} принято выбирать наружу области, охватываемой этими поверхностями (внешняя нормаль).

Теорема Гаусса: поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы электрических зарядов, находящихся внутри этой поверхности, к электрической постоянной ϵ_0 .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{ВНУТР}}}{\epsilon_0}.$$

Если заряды распределены непрерывно с объёмной плотностью ρ , зависящей от координат, то

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV,$$

Где интегрирование производится только по объёму, заключённому внутри замкнутой поверхности S .

Если поле создаётся системой точечных зарядов $q_1, q_2, q_3 \dots$, то $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$. Тогда

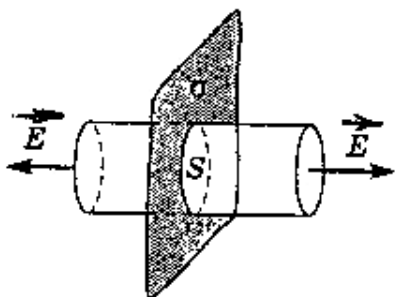
Само поле \vec{E} зависит от конфигурации всех зарядов, а поток Φ_E сквозь произвольную замкнутую поверхность S определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности S .

Применение теоремы Гаусса.

1) Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью $+\sigma = \frac{dq}{dS}$. Линии напряжённости перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от неё в обе стороны.

В качестве Гауссовой поверхности примем поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от неё.



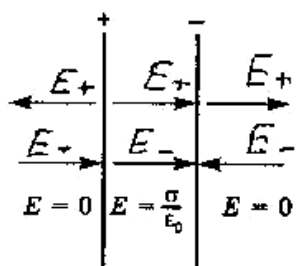
Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю. Поэтому полный поток через всю поверхность $\Phi_E = 2E \cdot S$. Внутри цилиндра заключён заряд $q_{\text{ВНУТР}} = \sigma \cdot S$.

По теореме Гаусса

$$2E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Полученный результат справедлив только для бесконечной плоской поверхности, однако он приближённо справедлив и для области, прилегающей к средней части конечной равномерно заряженной плоской поверхности, вдали от её краёв.

2) Поле двух бесконечных параллельных плоскостей, заряженных равномерно разноимёнными зарядами с плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$.

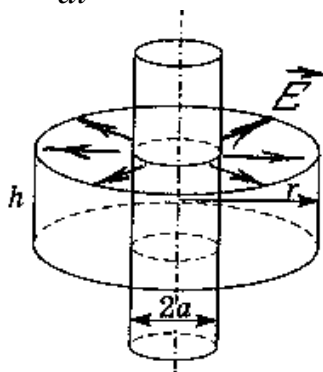


Это поле можно легко найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности.

Поле сосредоточено между плоскостями и является однородным в этой области — $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

3) Поле бесконечного круглого цилиндра радиуса R (или бесконечной нити), заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу длины приходится заряд

$$\lambda = \frac{dq}{dl}.$$



Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т.е. вектор \vec{E} в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r до оси цилиндра.

Возьмём замкнутую Гауссову поверхность в форме коаксиального прямого цилиндра радиуса r и высотой h .

Тогда $\Phi_E = E_r \cdot 2\pi \cdot rh$, а $q_{\text{ВНУТР}} = \lambda \cdot h$.

По теореме Гаусса
$$E_r \cdot 2\pi rh = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

для $r \geq R$ и $E = 0$ при $r < R$ т.к. внутри цилиндра зарядов нет. Внутри равномерно заряженного по поверхности круглого бесконечного цилиндра поля нет.

4) Поле сферической поверхности радиусом R , заряженной равномерно зарядом q .

Это поле центрально симметричное. Возьмём в качестве замкнутой Гауссовой поверхности концентрическую сферу радиусом $r > R$. Тогда $\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2$.

$$\text{По теореме Гаусса } E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

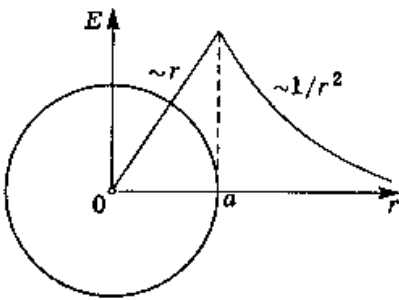
При $r < R$ замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов и поэтому внутри заряженной сферы $E = 0$.

5) Поле равномерно заряженного шара. Пусть заряд q равномерно распределён по шару радиусом R . Здесь поле также центрально симметричное. Вне шара ($r > R$) поле такое же как от заряженной сферы или точечного заряда $\left(E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)$.

Внутри шара для замкнутой поверхности в виде сферы радиусом $r < R$ имеем

$$\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2 \text{ и } q_{\text{ВНУТР}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{По теореме Гаусса } E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \Rightarrow E_r = \frac{q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



Внутри шара напряжённость растёт линейно с расстоянием r от его центра.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

Применив математическую теорему Остроградского-Гаусса к формуле

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV, \text{ получаем:}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Физический смысл дивергенции (от латинского – расхождение) – истечение из данной точки (положительная дивергенция) или сток в данную точку (отрицательная дивергенция).

Лекция 3

Проводники в электрическом поле

Распределение зарядов в проводнике.

В металлических проводниках свободные носители электрического заряда (электроны проводимости) могут под действием электрического поля перемещаться по всему проводнику (электронный газ).

Перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электростатического поля называется явлением электростатической индукции. Индуцированные (наведённые) заряды исчезают, как только проводник удаляется.

Индуцированные заряды создают дополнительное электрическое поле, которое вместе с исходным (внешним) полем образует результирующее электрическое поле, которое определяется как суперпозиция внешнего поля и поля индуцированных зарядов.

Внутри проводника $\vec{E} = 0$ т.к. перемещение зарядов под влиянием внешнего поля будет продолжаться до тех пор пока не установится определённое распределение зарядов, создающих индуцированное поле, которое полностью компенсирует внешнее поле.

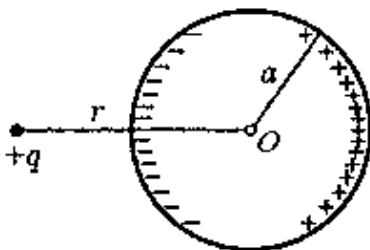
Из теоремы Остроградского – Гаусса следует, что раз $\vec{E} = 0$, то и плотность избыточных (не скомпенсированных) зарядов внутри проводника также всюду равна нулю ($\rho = 0$).

Избыточные заряды появляются лишь на поверхности проводника с поверхностной плотностью σ , различной в разных точках его поверхности.

Т.к. $\vec{E} = 0$, то потенциал во всех точках внутри проводника одинаков и его поверхность эквипотенциальна, т.е. непосредственно у поверхности проводника поле $\vec{E} = 0$ направлено по нормали к ней в каждой точке.

Пример 1 Найдём потенциал незаряженного проводящего шара, на расстоянии r от центра которого расположен точечный заряд q .

Потенциал всех точек шара одинаков, поэтому будем искать его в точке О:



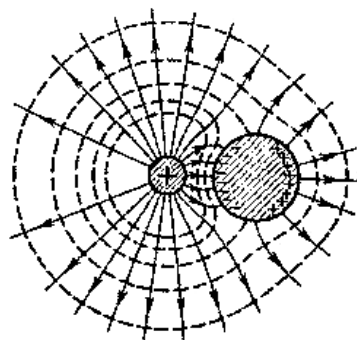
$$\varphi_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \sum \varphi_i, \text{ где}$$

$\sum \varphi_i = 0$ – потенциал в точке О от всех положительных и отрицательных зарядов на поверхности шара.

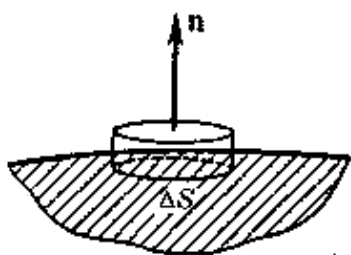
Таким образом, для потенциала шара получаем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Пример 2 Поле для системы из двух проводящих шаров, один из которых заряжен. Вследствие электрической индукции на правом (незаряженном) шаре произошло разделение зарядов противоположного знака.



Электрическое поле у поверхности проводника



В качестве замкнутой поверхности выбираем небольшой цилиндр с площадью оснований ΔS , расположенный так, чтобы его ось была направлена по нормали к поверхности проводника.

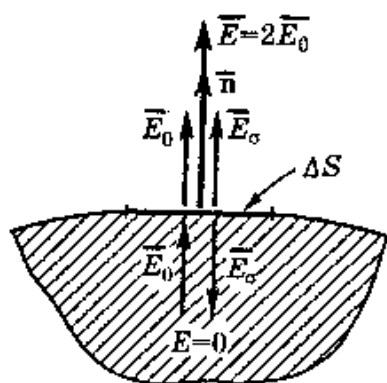
Потоки вектора \vec{E} через боковую поверхность и внутренний торец равны нулю. По теореме Гаусса имеем

$$E_n \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ где}$$

σ — локальная поверхностная плотность заряда на проводнике;

E_n — проекция вектора \vec{E} на внешнюю нормаль \vec{n} .

Силы, действующие на поверхность проводника



Пусть заряженный участок поверхности проводника граничит с вакуумом. На малый элемент ΔS с зарядом $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$ действует сила $\Delta \vec{F} = \sigma \cdot \Delta S \cdot \vec{E}_0$, где \vec{E}_0 — напряжённость поля, создаваемого всеми остальными зарядами системы в месте нахождения заряда Δq . Причём \vec{E}_0 не равно напряжённости \vec{E} поля вблизи данного элемента поверхности проводника.

Если \vec{E}_σ — напряжённость поля, создаваемого

зарядом Δq в точках очень близких к площадке ΔS , так, что можно принять её за бесконечную равномерно заряженную плоскость, то $\vec{E}_\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Результирующее поле определяем по принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\sigma.$$

Внутри проводника $E = 0$ и $E = E_0 - E_\sigma \Rightarrow E_0 = E_\sigma$. Тогда вне проводника $E = E_0 + E_\sigma = 2E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{E}{2}$.

Следовательно
$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \Delta S \cdot \vec{E}.$$

Сила, действующая на единицу поверхности проводника (поверхностная плотность сил или электрическое давление)

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \vec{E}.$$

Учитывая, что $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ или $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$ получаем

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \vec{n}.$$

Независимо от знака σ , а значит и направления \vec{E} , силы электрического давления всегда направлены наружу проводника, стремясь его растянуть.

Пример 1 Определить поверхностную плотность сил, растягивающих сферу радиусом R и с зарядом q .

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}, \text{ тогда } \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 R^4 \varepsilon_0}.$$

Пример 2 Найти выражение для электрической силы, действующей в вакууме на проводник в целом, полагая, что известна напряжённость \vec{E} поля во всех точках у поверхности проводника.

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \sigma \cdot E d\vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 d\vec{S}, \text{ где } d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS.$$

Результирующая сила, действующая на весь проводник, определяется интегрированием этого выражения по всей поверхности проводника

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_S E^2 dS.$$

Свойства замкнутой проводящей оболочки

В состоянии равновесия избыточных зарядов внутри проводника нет. Если внутри проводника сделать полость, то это никак не отразится на равновесном расположении зарядов.

Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля.

На этом основана **электростатическая защита** – экранирование приборов от влияния внешних электростатических полей. На практике сплошной проводник-оболочка заменяют достаточно густой металлической сеткой.

Если в полости находится заряженное тело, а всё внешнее пространство заполнено проводящей средой, то поле в этой среде при равновесии всегда равно нулю. По теореме Гаусса это означает, что алгебраическая сумма зарядов внутри этой замкнутой поверхности также будет равна нулю. Значит индуцированный заряд на внутренней поверхности полости равен по модулю и противоположен по знаку заряду внутри этой полости.

Если удалить всю проводящую среду вокруг полости кроме тонкой заземлённой оболочки с индуцированным зарядом, то поле нигде не изменится и вне оболочки оно останется равным нулю (внешний экран).

Вывод – замкнутая заземлённая проводящая оболочка разделяет всё пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении совершенно не зависящие друг от друга.

Общая задача электростатики. Уравнение Пуассона

Наиболее часто встречаются задачи, в которых распределение заряда неизвестно, но заданы потенциалы проводников, их форма и положение в пространстве. И требуется определить потенциал φ в любой точке поля, а зная распределение φ можно легко восстановить \vec{E} и по его значению непосредственно у поверхности проводников найти распределение поверхностных зарядов на них.

Подставив в выражение теоремы Гаусса в дифференциальной форме $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ вместо \vec{E} его выражение через φ , т.е. $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, получаем общее дифференциальное уравнение для потенциала – **уравнение Пуассона**:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{где} \quad \nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad - \quad \text{оператор Лапласа ((лапласиан)).}$$

В декартовых координатах
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если между проводниками нет зарядов ($\rho = 0$), то уравнение Пуассона переходит в более простое уравнение – уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Определение потенциала сводится к нахождению такой функции φ , которая во всём пространстве между проводниками удовлетворяет уравнениям Пуассона или Лапласа, а на поверхностях проводников принимает заданные значения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и т.д.

Ёлектроёмкость

Ёлектроёмкость уединённого проводника

Опыт показывает, что между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует прямая пропорциональность: $\varphi \sim q$.

Коэффициент пропорциональности $C = \frac{q}{\varphi}$ называют ёлектроёмкостью уединённого проводника. Единица ёмкости в СИ – фарад. (1Ф = 1Кл/1В).

Систему проводников, обладающей ёмкостью, значительно большей, чем уединённый проводник и не зависящей от окружающих тел называют конденсатором.

Простейший конденсатор состоит из двух обкладок, расположенных на малом расстоянии друг от друга. Заряды на обкладках должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку (q и $-q$).

Ёмкость конденсатора $C = \frac{q}{U}$, где U – разность потенциалов между обкладками (напряжение конденсатора).

Ёмкость конденсатора зависит от его геометрии (размеров и формы обкладок и зазора между ними) и от заполняющей конденсатор среды.

Плоский воздушный конденсатор (принимается, что диэлектрическая проницаемость воздуха близка к единице т.е. почти как в вакууме).

Пусть заряд конденсатора q , площадь каждой пластины – S , ширина зазора – h .

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S \cdot \varepsilon_0}; \quad \Rightarrow \quad U = E \cdot h = \frac{q \cdot h}{\varepsilon_0 \cdot S} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{h}.$$

Сферический воздушный конденсатор

Пусть R_1 – радиус внутренней обкладки;

R_2 – радиус внешней обкладки;

q – заряд конденсатора.

По теореме Гаусса $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

Напряжение $U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

Тогда
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Для малого зазора $h = R_2 - R_1$ получаем $R_1 \approx R_2 \approx R$ и $4\pi R^2 = S$, т.е. как и

для плоского конденсатора
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h}.$$

Цилиндрический воздушный конденсатор

Пусть R_1, R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок;

l – длина конденсатора.

По теореме Гаусса
$$E_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \epsilon_0};$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{q}{2\pi \cdot l \cdot \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \cdot l \cdot \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \cdot l \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Лекция 4

Электрическое поле в диэлектрике

Электрический диполь в электрическом поле

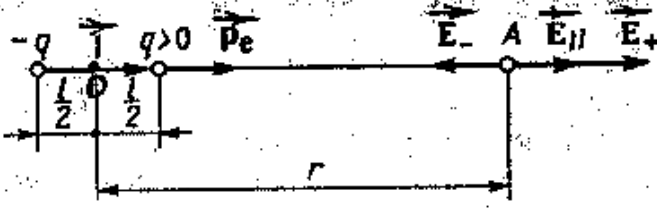
Электрический диполь – это система из двух одинаковых по модулю разноимённых точечных зарядов $(+q)$ и $(-q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля ($l \ll r$).

Плечо диполя \vec{l} – вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный по модулю расстоянию между ними.

Электрический момент диполя \vec{p}_e – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда q на плечо \vec{l} :

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l}.$$

1) Напряжённость и потенциал поля диполя на продолжении оси диполя в точке А на расстоянии r от центра диполя (точка О).



$$\vec{E}_{||} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-} ; \quad \varphi_{||} = \varphi_{+} + \varphi_{-}.$$

Тогда:

$$\vec{E}_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2r \cdot l}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} ;$$

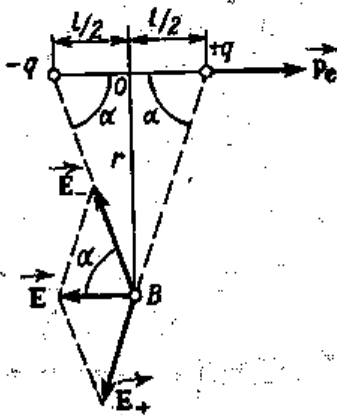
$$\varphi_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{\left(r - \frac{l}{2}\right)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{\left(r + \frac{l}{2}\right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{\left(r - \frac{l}{2}\right) \left(r + \frac{l}{2}\right)}.$$

Учитывая, что $l \ll r$, получаем:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \cdot l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3} \Rightarrow \vec{E}_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}_e}{r^3} ;$$

$$\varphi_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot l}{r^2}.$$

2) Напряжённость и потенциал поля диполя на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины (в точке В симметричной зарядам (+q) и (-q)) при $l \ll r$.



$$E_{+} = E_{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)} ;$$

$$\varphi_{\perp} = \varphi_{+} + \varphi_{-} = 0$$

$$\text{При } l \ll r \quad E_{+} = E_{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Из подобия треугольников

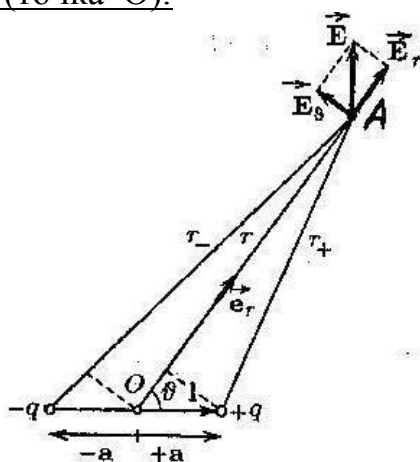
$$\frac{E_{\perp}}{E_{+}} = \frac{l}{r} ;$$

Тогда

$$E_{\perp} = E_{+} \cdot \frac{l}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3}.$$

\vec{E}_{\perp} и \vec{p}_e направлены в противоположные стороны.

3) Напряжённость и потенциал поля диполя в произвольной точке А на расстоянии r от центра диполя (точка О).



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{r_{+}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_{-}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_{-} - r_{+})}{r_{+}r_{-}}.$$

Т.к. $l \ll r$ то $r_{+} \cdot r_{-} \approx r^2$ (r – расстояние от точки А до центра диполя точки О);

$$r_{-} - r_{+} = l \cdot \cos \vartheta.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot l \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e \cos \vartheta}{r^2}.$$

Потенциал поля диполя убывает с расстоянием r быстрее, чем потенциал точечного заряда ($\frac{1}{r^2}$, а не $\frac{1}{r}$).

Напряжённость поля \vec{E} в точке А определяем, разложив вектор \vec{E} на две проекции в направлениях \vec{e}_r и \vec{e}_{ϑ} .

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e \cos \vartheta}{r^3};$$

$$E_{\vartheta} = -\frac{\partial \varphi}{r \cdot \partial \vartheta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e \sin \vartheta}{r^3};$$

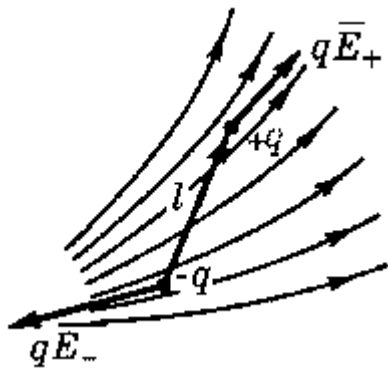
$$E = \sqrt{E_r^2 + E_g^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}.$$

В частности получаем:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}_e}{r^3} \quad \text{при} \quad \vartheta = 0 \quad \text{и} \quad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e}{r^3} \quad \text{при} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

($E_{\parallel} = 2E_{\perp}$ при одинаковых r).

Сила, действующая на диполь в электрическом поле



В неоднородном электрическом поле силы, действующие на концы диполя неодинаковы.

Результирующая сила \vec{F} , действующая на диполь равна

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-), \quad \text{где}$$

\vec{E}_+ ; \vec{E}_- — напряжённости внешнего

поля в точках, где расположены положительный и отрицательный заряды диполя.

$(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \Delta\vec{E}$ — приращение вектора \vec{E} на отрезке, равном длине диполя l в направлении вектора \vec{l} .

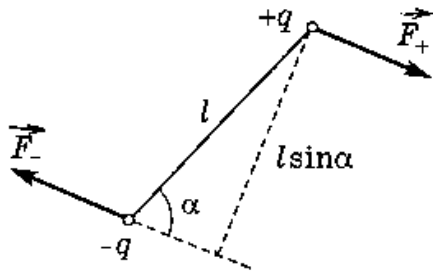
Вследствие малости этого отрезка можно записать $\Delta\vec{E} = \frac{\Delta\vec{E}}{l} l = \frac{\partial\vec{E}}{\partial l} l$.

Тогда
$$\vec{F} = ql \frac{\partial\vec{E}}{\partial l} = p_e \frac{\partial\vec{E}}{\partial l}.$$

Сила \vec{F} стремится втянуть диполь в область более сильного поля.

В однородном поле \vec{E} результирующая сила \vec{F} равна нулю, но может быть не равен момент сил:

$$\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}] = [\vec{l}, q\vec{E}] = [\vec{p}_e, \vec{E}].$$



Этот момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент \vec{p}_e установился по направлению внешнего поля \vec{E} . Такое положение диполя является устойчивым.

Энергия диполя во внешнем электрическом поле

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-), \text{ где}$$

$\varphi_+; \varphi_-$ — потенциал внешнего поля в точках, где находятся положительный и отрицательный заряды диполя.

$$(\varphi_+ - \varphi_-) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial l} l.$$

Но $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l$. Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial l} l = -E_l \cdot l = -\vec{E} \cdot \vec{l}$ и

$$W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}.$$

Видно, что минимальную энергию $W_{\min} = -p_e \cdot E$ диполь имеет в положении устойчивого равновесия $(\vec{p}_e \uparrow \uparrow \vec{E})$.

Поляризация диэлектрика

Диэлектриками (изоляторами) называют вещества, практически не проводящие электрический ток.

Диэлектрики состоят либо из нейтральных молекул, либо из заряженных ионов, находящихся в узлах кристаллической решётки. Сами же молекулы могут быть полярными и неполярными. Полярные молекулы обладают собственным дипольным моментом.

Под действием внешнего электрического поля происходит **поляризация** диэлектрика. В неполярных молекулах ($H_2, N_2, O_2 \dots$) происходит смещение зарядов — положительных ядер атомов по полю, а отрицательных электронных оболочек атомов против поля. Если же диэлектрик состоит из полярных молекул ($H_2O, NH_3, CO_2 \dots$), то при отсутствии внешнего поля их дипольные моменты ориентированы совершенно хаотически (из-за теплового движения). Под действием внешнего поля дипольные моменты ориентируются в пространстве **преимущественно в направлении внешнего поля.**

В диэлектрических ионных кристаллах типа KCl , $NaCl$ при включении внешнего поля все положительные ионы смещаются по полю, отрицательные – против поля.

Во всех перечисленных случаях включение внешнего электрического поля приводит к возникновению или переориентации дипольных моментов.

В результате поляризации на поверхности диэлектрика, а если диэлектрик неоднородный, то и в его объёме появляются нескомпенсированные заряды, которые называют поляризационными или связанными и обозначают q' ; ρ' ; σ' .

Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, называют сторонними или свободными. Они могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика.

Пусть \vec{E}_0 – напряжённость поля сторонних зарядов;

\vec{E}' – напряжённость поля связанных зарядов.

Поле \vec{E} в диэлектрике называют величиной, являющуюся суперпозицией полей \vec{E}_0 и \vec{E}' :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Для количественного описания поляризации диэлектрика естественно взять дипольный момент единицы объёма.

Поляризованностью в данной точке M пространства называют вектор \vec{P} :

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} = n \langle \vec{p}_e \rangle, \quad \text{где}$$

ΔV – физически бесконечно малый объём вокруг точки M , содержащий N диполей;

$\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}$ – сумма дипольных моментов всех молекул в объёме ΔV ;

$n = \frac{N}{\Delta V}$ – концентрация молекул;

$\langle \vec{p}_e \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}$ – средний дипольный момент одной молекулы.

В СИ поляризованность измеряется в Кл/м².

Как показывает опыт, вектор \vec{P} для большинства диэлектриков линейно зависит от напряжённости поля \vec{E} в диэлектрике. Если диэлектрик изотропный и \vec{E} не слишком велико, то

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \text{где}$$

χ – диэлектрическая восприимчивость вещества (безразмерная величина, характеризующая свойства самого диэлектрика). Всегда $\chi > 0$.

Для ионных кристаллов, электретов и сегнетоэлектриков зависимость \vec{P} от \vec{E} не является линейной.

Теорема Гаусса для вектора \vec{P} : поток вектора \vec{P} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объёме, охватываемом поверхностью S , т.е.

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q' = -\int_V \rho' dV.$$

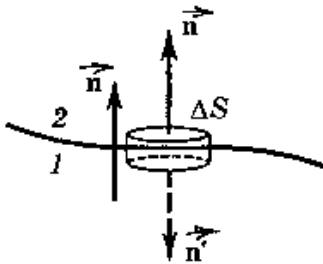
В дифференциальной форме Теорема Гаусса для вектора \vec{P} имеет следующий вид:

$$\text{div} \vec{P} = -\rho'.$$

Если диэлектрик однородный и внутри него нет сторонних зарядов ($\rho = 0$) то и $\rho' = 0$

На границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{P} испытывает разрыв, величина которого зависит от σ' :

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}.$$



Если среда 2 – вакуум, то $\sigma' = P_n = \chi \varepsilon_0 E_n$.

Вектор электрического смещения \vec{D}

Поскольку источниками поля \vec{E} внутри диэлектрика являются все электрические заряды – сторонние и связанные, то теорему Гаусса для поля \vec{E} можно записать так:

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = (q_{\text{ВНУТР.}} + q').$$

Но $q' = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$. Тогда $\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{\text{ВНУТР.}}$

Величину, стоящую под интегралом в скобках обозначают буквой \vec{D} и называют вектором электрического смещения или электрической индукцией. Это вспомогательный вектор. В СИ $[D] = \text{Кл/м}^2$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Теорема Гаусса для поля вектора \vec{D} : поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{ВНУТР.}}$$

В дифференциальной форме

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

Дивергенция поля вектора \vec{D} равна объёмной плотности стороннего заряда в той же точке.

В тех точках, где дивергенция \vec{D} положительна находятся источники поля \vec{D} , а в тех точках, где она отрицательна, – стоки поля \vec{D} ($\rho < 0$).

Связь между векторами \vec{D} и \vec{E}

Подставив выражение для изотропных диэлектриков $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ в определение вектора \vec{D} ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$), получаем соотношение

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \quad \text{или} \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \text{где}$$

$\epsilon = (1 + \chi)$ – диэлектрическая проницаемость вещества. Для всех веществ $\epsilon > 1$, для вакуума $\epsilon = 1$.

Поле вектора \vec{D} наглядно можно изобразить с помощью линий вектора \vec{D} . Источниками и стоками этого вектора являются **только сторонние заряды**. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора \vec{D} проходят не прерываясь.

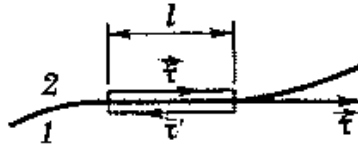
В некоторых симметричных случаях (см. дом. Задание №1) поле вектора \vec{D} можно определить, используя только сторонние заряды. Именно для таких случаев вектор \vec{D} является особенно полезным, резко упрощая расчёт.

Поле на границе раздела диэлектриков

Условия на границе раздела получают с помощью теоремы о циркуляции вектора

$$\vec{E}: \oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{и теоремы Гаусса для вектора} \quad \vec{D}: \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{ВНУТР.}}$$

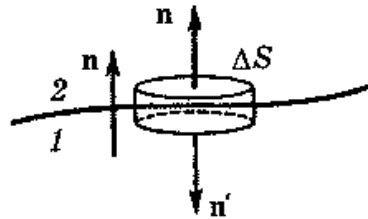
1). Для вектора \vec{E} выбираем прямоугольный контур, высота которого пренебрежимо мала, а поле \vec{E} на длине l одинаково:



$$E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

2). Для вектора \vec{D} выбираем цилиндр очень малой высоты, и чтобы в пределах

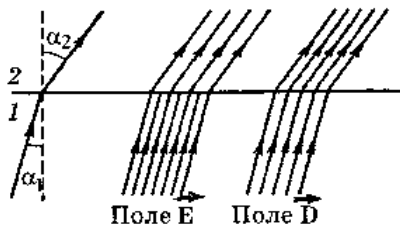
сечения ΔS вектор \vec{D} был одинаков:



$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma \cdot \Delta S \quad \Rightarrow \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad \text{где}$$

σ — поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела.

Если сторонние заряды на границе раздела отсутствуют ($\sigma = 0$), то $D_{2n} = D_{1n}$.



Таким образом, если на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков сторонних зарядов нет, то, при переходе этой границы, составляющие E_τ и D_n не изменяются, а составляющие E_n и D_τ претерпевают скачок.

Для преломления линий \vec{E} и \vec{D} имеем $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ($\epsilon_2 > \epsilon_1$; $\sigma = 0$).

Линии поля \vec{E} гуще в диэлектрике 1, а поля \vec{D} в диэлектрике 2.

Поле на границе проводник – диэлектрик

Если к заряженному участку поверхности проводника прилегает однородный диэлектрик, то внутри проводника $\vec{E} = 0$; $\vec{P} = 0$; $\vec{D} = 0$, а в диэлектрике $D_{2n} = \sigma'$ и на границе этого диэлектрика с проводником выступают связанные заряды с плотностью

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma, \quad \text{где}$$

σ — поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике.

Знаки зарядов σ и σ' противоположны.

Некоторые важные следствия по теме:

1). Если однородный диэлектрик заполняет всё пространство, занимаемое полем, то напряжённость \vec{E} поля будет в ε раз меньше напряжённости \vec{E}_0 поля тех же сторонних зарядов, но при отсутствии диэлектрика : $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$.

2). Потенциал во всех точках уменьшается в ε раз — $\varphi = \frac{\varphi_0}{\varepsilon}$.

3). Разность потенциалов — $U = \frac{U_0}{\varepsilon}$.

4). Ёмкость конденсатора, при заполнении его диэлектриком увеличивается в ε раз — $C = \varepsilon \cdot C_0$.

Лекция 5

Энергия электрического поля

Ранее было определено для энергии взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i.$$

Если заряды распределены непрерывно, то, разлагая систему зарядов на совокупность элементарных зарядов $dq = \rho dV$ и переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad \text{где}$$

φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в элементе объёмом dV . Аналогично можно записать для распределения заряда на поверхности

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS.$$

Для уединённого проводника, имеющего заряд Q и потенциал φ , потенциал можно вынести из под знака интеграла и получить

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Для **конденсатора**

$$W = \frac{1}{2}(q_+\varphi_+ + q_-\varphi_-) = \frac{1}{2}q_+(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Подставив в выражение $W = \frac{CU^2}{2}$ формулу для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}, \text{ получаем}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2h} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U}{h} \right)^2 S h = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V = \frac{ED}{2} V.$$

Если поле неоднородно, то для изотропных диэлектриков

$$W = \frac{1}{2} \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} dV.$$

Последнее выражение наводит на мысль, что носителем энергии является само электрическое поле, что на практике подтверждается на примере электромагнитных волн.

Для изотропных диэлектриков можно найти объёмную плотность электрической энергии

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2}.$$

Постоянный электрический ток –

– это направленное движение заряженных частиц (электронов или ионов) под действием электрического поля или сторонних сил. Количественной мерой электрического тока служит **сила тока** I , т.е. заряд, переносимый сквозь рассматриваемую поверхность S в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad [I] = A \text{ (ампер)}.$$

Для постоянного тока $I = \frac{q}{t}.$

Сила тока является **скалярной** величиной.

Для детальной характеристики тока вводят **вектор плотности тока** \vec{j} . Модуль

этого вектора – $j = \frac{dI}{dS}$, где dI – сила тока через элементарную площадку dS_{\perp} , расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей тока.

Если ρ_+ и ρ_- – объёмные плотности положительного и отрицательного зарядов-носителей, а \vec{v}_+ и \vec{v}_- – скорости их упорядоченного движения, то

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-.$$

В проводниках носителями тока являются электроны

$$\vec{j} = \rho_- \vec{v}_- = (-e)n\vec{v}, \quad \text{где}$$

n – концентрация электронов в проводнике.

Поле вектора \vec{j} можно изобразить графически с помощью линий тока.

Зная распределение вектора плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности S , можно найти силу тока через эту поверхность как **поток вектора** \vec{j} :

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Уравнение непрерывности

Выберем в проводящей среде замкнутую поверхность S . Интеграл $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$ определяет заряд, выходящий из объёма V , охватываемого поверхностью S в единицу времени:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Это соотношение называют **уравнением непрерывности** (или уравнением неразрывности). Знак « $-$ » показывает, что этот интеграл равен **убыли** заряда в единицу времени внутри объёма V .

В случае **постоянного тока** распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным, т.е.

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

И говорят, что для постоянного тока поле вектора \vec{j} не имеет источников.

Закон Ома открытый экспериментально, гласит: сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению) – U :

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{где}$$

R – электрическое сопротивление проводника, $[R] = \text{Ом}$.

Для цилиндрического проводника $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное электрическое сопротивление, $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$.

Если в окрестности некоторой точки проводящей среды выделить элементарный цилиндрический объём $dV = dS \cdot dl$, и принимая $U = E \cdot dl$, получаем **закон Ома в локальной (дифференциальной) форме:**

$$j \cdot dS = \frac{E \cdot dl}{\rho \frac{dl}{dS}} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad \text{где}$$

$\gamma = \frac{1}{\rho}$ – удельная электропроводимость среды. $[\gamma] = \text{См/м}$ (сименс на метр).

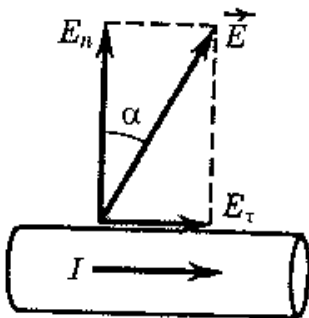
Подставив $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ в уравнение непрерывности для постоянного тока, получаем для однородного проводника

$$\oint_S \gamma \cdot \vec{E} \, d\vec{S} = \gamma \oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = 0.$$

По теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутр.}}}{\epsilon_0}$. Видно, что избыточный заряд внутри

проводника равен нулю. Избыточный заряд может появиться только **на поверхности** однородного проводника, в местах соприкосновения с другими проводниками, а также там, где проводник имеет неоднородности.

Электрическое поле проводника с током. Т.к. на поверхности проводника выступает избыточный заряд, то существует E_n , а из закона Ома следует наличие E_τ , т.е. вектор \vec{E} вблизи поверхности проводника составляет с нормалью к нему угол α отличный от нуля.



Электростатическое поле внутри проводника равно нулю, а электрическое поле стационарных токов существует и внутри проводника с током. Оно также как и электростатическое есть кулоновское поле, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении.

Сторонние силы.

Для обеспечения протекания постоянного электрического тока в замкнутой цепи наряду с участками, где положительные носители тока движутся в сторону уменьшения потенциала φ , должны иметься участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания φ , т.е. против сил электрического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью **сторонних сил** не электростатического происхождения, которые могут быть вызваны, например, химической и физической неоднородностью проводника (гальванические элементы, аккумуляторы, фотоэлементы) или проводников различной температуры (термоэлементы) и др.

Для количественной характеристики сторонних сил вводят понятие напряжённости поля сторонних сил \vec{E}^* (вектор численно равен стороне силе, действующей на единичный положительный заряд). Для неоднородного участка проводящей среды, т.е. для участка цепи, на котором действуют сторонние силы, получаем **обобщённый закон Ома в локальной (дифференциальной) форме:**

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^*),$$

а для провода между точками 1 и 2

$$\int_1^2 \vec{j} d\vec{l} = \gamma \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \gamma \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} \quad \text{или}$$

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}}{\gamma} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}, \quad \text{где}$$

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}}{\gamma} d\vec{l} = I \int_1^2 \rho \frac{d\vec{l}}{S} = IR;$$

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2;$$

$$\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = \xi - \text{электродвижущая сила (ЭДС), действующая на данном участке цепи.}$$

Если ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении, то $\xi_{12} > 0$, если же препятствует, то $\xi_{12} < 0$.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi$$

Разветвлённые цепи

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю (закон сохранения электрического заряда):

$$\sum I_K = 0.$$

Второе правило Кирхгофа: алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующей в этом контуре: (закон Ома для совокупности всех участков замкнутого контура):

$$\sum I_K R_K = \sum \xi_K.$$

При составлении уравнений по правилам Кирхгофа на практике следует поступать следующим образом:

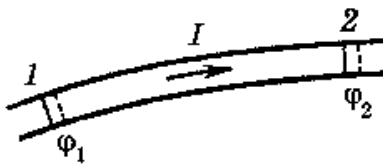
1). Обозначить стрелками предположительные направления токов, не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если в результате вычисления окажется, что какой-то ток положителен, то это значит, что его направление выбрано

правильно. Если же ток окажется отрицательным, то его истинное направление противоположно направлению стрелки.

2). Выбрав произвольно замкнутый контур, все его участки следует обойти в одном направлении, например, по часовой стрелке. Если предположительное направление некоторого тока совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слагаемое IR в уравнение по 2-ому правилу надо брать со знаком плюс. Если какая-то ЭДС ξ повышает потенциал в направлении обхода, её надо брать со знаком плюс, в противоположном случае – со знаком минус.

Закон Джоуля–Ленца

1). Однородный участок цепи



Если сила тока в проводнике на участке 1 – 2 равна I , то за время dt через каждое сечение проводника пройдёт заряд $dq = I dt$.

Совершаемая при переносе этого заряда от сечения 1 к сечению 2 работа сил поля

$$\delta A = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dq = I(\varphi_1 - \varphi_2) dt.$$

Если проводник неподвижен и в нём не происходят химические превращения, то эта энергия должна выделяться в форме внутренней (тепловой) энергии.

$$\delta A = \dot{Q} dt, \quad \text{где}$$

$$\dot{Q} = I(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{— тепловая мощность.}$$

С учётом закона Ома получаем закон Джоуля–Ленца:

$$\dot{Q} = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}.$$

Используя формулы $R = \rho \frac{dl}{dS}$ и $I = j dS$ для малого объёма $dV = dl \cdot dS$ получаем закон Джоуля–Ленца в локальной (дифференциальной) форме:

$$\delta Q = \rho j^2 dV dt; \quad \text{или} \quad \dot{Q}_{yd} = \rho j^2$$

удельная тепловая мощность постоянного тока пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке.

Если на носители тока действуют только электрические силы, то на основании закона Ома в локальной форме получаем

$$\dot{Q}_{yd} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{E^2}{\rho} = \gamma \cdot E^2.$$

2). Неоднородный участок цепи

Если в законе Ома для неоднородного участка цепи каждое слагаемое умножить на силу тока I получаем

$$I^2 R = I(\varphi_1 - \varphi_2) + I \xi, \quad \text{где}$$

$$I^2 R = \dot{Q} \quad \text{— тепловая мощность;}$$

$I\xi$ – мощность, развиваемая сторонними силами на данном участке цепи.

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$. Получаем

$$\dot{Q} = I \xi, \text{ т.е.}$$

Общее количество джоулевой теплоты, выделяемое за единицу времени в замкнутой цепи, равно мощности только сторонних сил.

В локальной форме для неоднородного участка цепи закон Джоуля–Ленца имеет вид

$$\dot{Q}_{yd} = \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*) = \rho j^2.$$

Лекция 6

Магнитное поле в вакууме

Опыт показывает, что сила, действующая на точечный заряд q , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости \vec{v} . Соответственно этому силу, действующую на точечный заряд, разделяют на две составляющие – электрическую $\vec{F}_Э$ (она не зависит от движения заряда) и магнитную \vec{F}_M (она зависит от скорости заряда). Все свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля, которое характеризуется вектором магнитной индукции \vec{B} .

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Полная электромагнитная сила, действующая на заряд q (**сила Лоренца**):

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]).$$

Это выражение является **универсальным**: оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей, при любых значениях скорости \vec{v} заряда.

Выражение для силы Лоренца можно рассматривать как определение электрического и магнитного полей.

Вектор \vec{B} аналогично вектору \vec{E} характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд.

Магнитная сила всегда перпендикулярна вектору скорости заряда и потому работы над зарядом не совершает. Это означает, что в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы всегда остаётся неизменной.

В нерелятивистском приближении сила Лоренца, как и любая другая сила, не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта. Вместе с тем магнитная сила меняется при переходе от одной системы отсчёта к другой из-за \vec{v} . Поэтому должна

меняться и электрическая составляющая $\vec{F}_Э = q\vec{E}$. Следовательно разделение $\vec{F}_Л$ на $\vec{F}_Э$ и $\vec{F}_М$ зависит от выбора системы отсчёта.

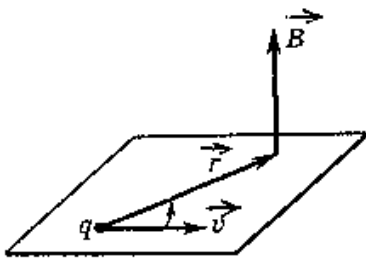
Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами (электрическими токами). Экспериментально была установлена зависимость

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad \text{где}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная;

\vec{r} – радиус-вектор, проведённый от заряда q к точке, где определяется вектор \vec{B} .



Т.к. начало радиус-вектора \vec{r} движется вместе с зарядом со скоростью \vec{v} , то вектор \vec{B} в данной системе отсчёта зависит не только от координат точки, но и от времени.

Вектор \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \vec{r} и \vec{v} по правилу правого винта.

Единицей магнитной индукции в СИ является тесла (Тл).

Так как, электрическое поле точечного заряда q , движущегося с нерелятивистской скоростью, описывается выражением

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad \text{то можно записать}$$

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}], \quad \text{где}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

Принцип суперпозиции – магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$$

Закон Био – Савара

Этот закон позволяет находить индукцию магнитного поля, создаваемого постоянным электрическим током.

Подставим в выражение для индукции магнитного поля движущегося точечного заряда $\rho \cdot dV$ вместо q , где dV – элементарный объём, ρ – объёмная плотность электрического заряда.

Так как $\rho \vec{v} = \vec{j}$, то получаем

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}] dV}{r^3}.$$

Учитываем, что $\vec{j} \cdot dV = \vec{j} \cdot \Delta S \cdot dl = I \cdot dl$, где dl – элемент длины провода.

Введя вектор $d\vec{l}$ в направлении тока I можно записать $\vec{j} \cdot dV = I \cdot d\vec{l}$.

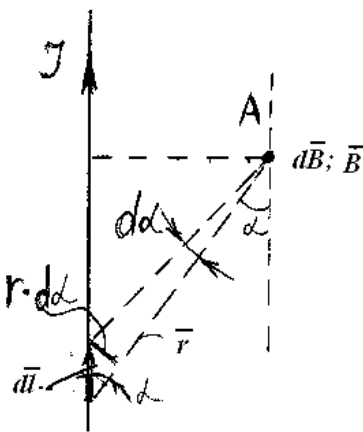
И тогда окончательно получаем **закон Био – Савара** (иногда называют **закон Био – Савара – Лапласа**):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Полное поле \vec{B} в соответствии с принципом суперпозиции получается интегрированием:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV \quad \text{или} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Пример 1. Магнитное поле прямого тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины.



В произвольной точке А векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление (от нас).

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot r \cdot \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}.$$

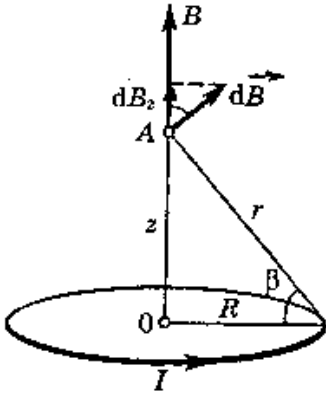
Из рисунка видно, что $dl \sin \alpha = r \cdot d\alpha$ и $r = \frac{b}{\sin \alpha}$.

Тогда
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол α для всех элементов бесконечного прямого проводника с током изменяется в пределах от нуля до π .

Интегрируя, получаем

$$\vec{B} = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Пример 2. Магнитное поле на оси кругового тока.

От всех элементов тока будет образовываться конус векторов $d\vec{B}$, а результирующий вектор \vec{B} в точке A будет направлен по оси Z.

Проекция $d\vec{B}$ на ось Z:

$$dB_z = dB \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos \beta.$$

Интегрируя по всему круговому витку получаем

$$\vec{B} = \int dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \beta}{r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{r^2} \cos \beta.$$

Т.к. $\cos \beta = \frac{R}{r}$ и $r^2 = Z^2 + R^2$, то
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(Z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

При $Z = 0$ (в центре витка)
$$B_{Z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

На большом расстоянии ($Z \gg R$)
$$B_{Z \gg 0} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{Z^3}.$$

Основные законы магнитного поля

Как и любое другое векторное поле, поле \vec{B} может быть представлено с помощью линий вектора \vec{B} . Их проводят обычным способом – так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{B} , а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора \vec{B} в данной точке пространства.

1). Теорема Гаусса для поля \vec{B} : поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Т.е. линии вектора \vec{B} не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий вектора \vec{B} , выходящих из любого объёма, ограниченного замкнутой поверхностью S, всегда равно числу линий, входящих в этот объём.

Из теоремы Гаусса следует так же то, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора \vec{B} , т.е. магнитное поле не имеет источников в противоположность полю электрическому.

В дифференциальной форме теорема Гаусса для поля \vec{B} имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{т.е.}$$

Дивергенция поля \vec{B} всюду равна нулю. Этот закон справедлив не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей.

2). Теорема о циркуляции вектора \vec{B} (для магнитного поля постоянных токов в вакууме).

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_K \quad \text{или} \quad \oint_l B_l dl = \mu_0 \cdot \sum I_K$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

Если ток I распределён по объёму, то его можно представить как $I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$, где S – произвольная поверхность, натянутая на контур l .

Вектор $d\vec{S}$ образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

В общем случае
$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 \int_S j_n dS.$$

Из теоремы о циркуляции следует, что магнитное поле не потенциальное (в отличие от электростатического). Такое поле называют **вихревым или соленоидальным.**

Теорема о циркуляции вектора \vec{B} позволяет намного легче чем закон Био – Савара вычислять магнитные поля в некоторых симметричных системах.

В дифференциальной форме теорема о циркуляции вектора \vec{B} имеет вид:

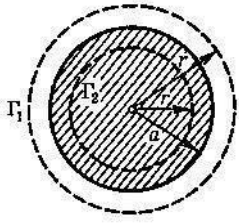
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{или} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ротор поля вектора магнитной индукции равен произведению магнитной постоянной на плотность электрического тока в данной точке пространства.

Применение теоремы о циркуляции вектора \vec{B}

1). Магнитное поле прямого тока I :

Пусть ток течёт вдоль бесконечно длинного прямого провода, имеющего круглое сечение радиуса R .



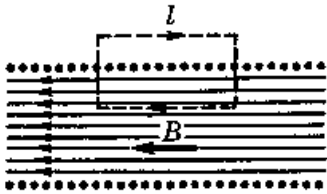
Вне провода: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$

Внутри провода:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 I \left(\frac{r}{R} \right)^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi R^2}.$$

2). Магнитное поле соленоида, по которому протекает ток I :

Пусть на единицу длины соленоида приходится n витков проводника.



Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближённо заменить замкнутым круговым витком. Будем также предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток можно считать текущим по поверхности.

Опыт показывает, что для достаточно длинных соленоидов индукция магнитного поля снаружи соленоида вблизи его поверхности практически равна нулю.

Из соображения симметрии ясно, что линии вектора \vec{B} внутри соленоида направлены вдоль его оси.

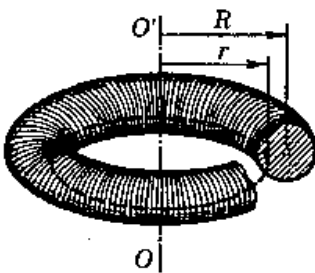
Выбираем прямоугольный контур (на рисунке изображён пунктиром) со стороной l , расположенной параллельно оси соленоида.

По теореме о циркуляции $B \cdot l = \mu_0 n \cdot l \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 n I,$

где $n I$ — число ампервитков.

3). Магнитное поле тороида:

Из соображения симметрии следует, что линии вектора \vec{B} должны быть окружностями, центры которых расположены на оси OO' .



В качестве контура выбираем одну из таких окружностей.

Пусть N — число витков в тороиде;

I — сила тока в каждом витке;

r — радиус контура.

По теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \text{ внутри тороида.}$$

Вне тороида $B \cdot 2\pi r = 0$, т.е. магнитного поля нет.

Лекция 7

Проводники с током в магнитном поле

Закон Ампера

Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передаётся проводнику, по которому движутся заряды. В результате магнитное поле действует с определённой силой на сам проводник с током.

$$d\vec{F}_M = \rho dV \cdot [\vec{v}, \vec{B}], \quad \text{где}$$

ρ — объёмная плотность электрического заряда;

dV — объём малого элемента проводника;

\vec{v} — скорость упорядоченного движения зарядов.

Т.к. $\rho \vec{v} = \vec{j}$, то $d\vec{F}_M = [\vec{j}, \vec{B}]dV$.

Если ток течёт по тонкому проводнику, то $\vec{j}dV = I \cdot d\vec{l}$ и получаем закон Ампера

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , которые находятся на расстоянии b друг от друга.

Ток I_1 создаёт вокруг себя магнитное поле с индукцией $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{b}$.

На единицу длины проводника с током I_2 действует сила $F_{eo} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}$.

Токи одинаково направленные, притягиваются, а противоположно направленные — отталкиваются.

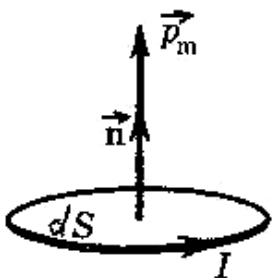
Сила, действующая на контур с током

$$\vec{F}_l = I \oint_l [d\vec{l}, \vec{B}]$$

Если магнитное поле однородно, то $\vec{B} = const$ и

$$\vec{F}_l = I \cdot \vec{B} \oint_l d\vec{l} = 0.$$

Для неоднородного магнитного поля рассмотрим поведение элементарного плоского контура малого размера площадью dS .



Вводится понятие магнитного момента

$$\vec{p}_M = I \cdot dS \cdot \vec{n} = I \cdot d\vec{S} \quad [p_M] = A \cdot m^2.$$

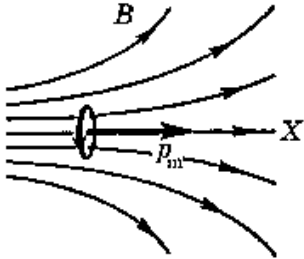
Сила, действующая на элементарный контур с током в неоднородном магнитном поле

$$\vec{F}_l = p_M \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}.$$

Это выражение аналогично выражению для силы, действующей на электрический диполь в электрическом поле.

Вектор силы \vec{F}_l совпадает лишь с направлением элементарного приращения вектора \vec{B} , взятого в направлении вектора \vec{p}_M в месте расположения контура.

Пример:



В направлении оси X направлен \vec{p}_M и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} < 0$, т.е. на контур действует сила, направленная влево – в сторону, где индукция магнитного поля больше.

Момент сил, действующих на контур с током

Замкнутый проводящий контур с током произвольной геометрической формы, помещённый в однородное магнитное поле, испытывает действие вращающего момента сил, равного:

$$\vec{M} = [\vec{p}_M, \vec{B}] \quad \text{или} \quad M = p_M B \sin \alpha, \quad \text{где}$$

α — угол между векторами \vec{p}_M и \vec{B} .

Вращающий момент стремится привести контур в положение устойчивого равновесия, при котором вектор \vec{p}_M совпадает по направлению с вектором \vec{B} .

Магнитное поле в веществе

Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, ввести вещество, то поле изменится

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad \text{где}$$

\vec{B}_0 — первичное поле (в вакууме);

\vec{B}' — магнитное поле, создаваемое намагниченным веществом.

Поле \vec{B}' , как и поле \vec{B}_0 не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля \vec{B} при наличии вещества справедлива теорема Гаусса :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Это означает, что линии вектора \vec{B} и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

Механизм намагничивания заключается в том, что в веществе под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно, поэтому, обусловленное ими результирующее магнитное поле равно нулю.

В веществах, молекулы которых при отсутствии внешнего магнитного поля не имеют магнитного момента, намагничивание связано с индуцированием в молекулах элементарных круговых токов под воздействием внешнего магнитного поля.

Сильными магнитными свойствами обладают только ферромагнитные вещества: железо, кобальт, никель и их сплавы.

Степень намагничивания вещества характеризуют магнитным моментом единицы объёма. Эту величину называют **намагниченностью** и обозначают \vec{J} . По определению

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_M, \quad \text{где}$$

ΔV — физически бесконечно малый объём в окрестности данной точки пространства;

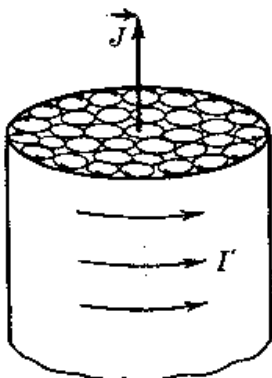
\vec{p}_M — магнитный момент отдельной молекулы.

Аналогично тому, как было сделано для поляризованности \vec{P} намагниченность можно представить как $\vec{J} = n \langle \vec{p}_M \rangle$, где

n — концентрация молекул;

$\langle \vec{p}_M \rangle$ — средний магнитный момент одной молекулы.

В веществах, где намагничивание связано с молекулярными круговыми токами, появляются макроскопические токи намагничивания I' .



Оказывается

$$\oint_l \vec{J} d\vec{l} = I'$$

Циркуляция вектора намагниченности по замкнутому контуру равна макроскопическому молекулярному току намагничивания.

При определении намагниченности подразумеваются усреднённые величины, благодаря чему магнитные моменты молекул представляются как бы непрерывно размазанными по всему объёму, а молекулярные токи — текущими по объёму магнетика, как в непрерывной среде.

На основании предыдущей формулы можно записать **теорему о циркуляции вектора \vec{J} в дифференциальной форме:**

$$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}' \quad \text{или} \quad \vec{\nabla} \times \vec{J} = \vec{j}', \quad \text{где}$$

\vec{j}' – объёмная плотность молекулярных токов (в СИ $[\vec{j}'] = \text{А}/\text{м}^2$).

Молекулярные токи, текущие по поверхности раздела между магнетиками или между магнетиком и вакуумом называют поверхностными молекулярными токами. Для таких токов вводят понятие поверхностной плотности молекулярных токов

$$\vec{i}'_{\text{пов}} = [\vec{n}, \vec{J}] - \text{ для границы магнетик – вакуум ;}$$

$$\vec{i}'_{\text{пов}} = [\vec{n}, (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)] - \text{ для границы между двумя магнетиками.}$$

В СИ $\vec{i}'_{\text{пов}}$ имеет размерность А/м.

Вектор \vec{H} – вектор напряжённости магнитного поля

В веществе, помещённом во внешнее магнитное поле, циркуляция вектора \vec{B} будет теперь определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания.

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I').$$

Вычисление I' является сложной задачей, но можно воспользоваться тем, что

$$\oint_l \vec{J} d\vec{l} = I'.$$

Тогда

$$\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I.$$

Величина, стоящая под интегралом в скобках называется напряжённостью магнитного поля и обозначается буквой \vec{H} .

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

В СИ $[\vec{H}] = \text{А}/\text{м}$

Теорема о циркуляции вектора \vec{H} : циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i.$$

В дифференциальной форме теорема о циркуляции вектора \vec{H} имеет вид

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{или} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

Ротор вектора напряжённости магнитного поля равен плотности тока проводимости в той же точке вещества.

Для многих веществ зависимость между векторами \vec{J} и \vec{H} носит линейный характер: $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Для этих веществ $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$, где $\mu = (1 + \chi)$ – магнитная проницаемость вещества.

В соленоиде при наличии магнетика $B = \mu \mu_0 I n$;

Внутри прямого провода из магнетика с током $B = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r}$.

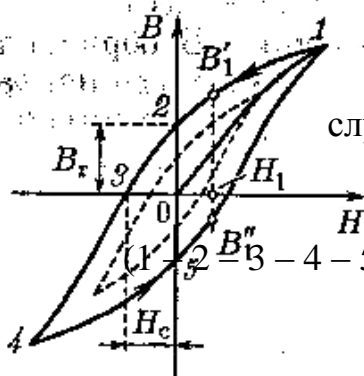
Вещества, у которых $\mu > 1$ называются парамагнетиками. У них $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$.

Вещества, у которых $\mu < 1$ называются диамагнетиками. У них $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$.

Существуют так же ферромагнетики, у которых зависимости $\vec{J}(\vec{H})$ и $\vec{B}(\vec{H})$ носит нелинейный, сложный характер.

Парамагнетики и диамагнетики являются веществами слабомагнитными, а ферромагнетики – сильномагнитными.

Ферромагнетики обладают спонтанной намагниченностью, т.е. могут быть намагниченными и при отсутствии внешнего магнитного поля. При включении внешнего магнитного поля домены (кристаллические области размером $1 \sim 10$ мкм) ориентированные своими магнитными моментами по полю растут за счёт доменов, ориентированных против поля. В сильных полях этот процесс является необратимым, что служит причиной гистерезиса.



(0 – 1) – основная кривая намагничивания;

(1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1) – петля гистерезиса;

$B_2 = B_r$ – остаточная индукция (при $H = 0$);

$H_3 = H_C$ – коэрцитивная сила (величина

напряжённости магнитного поля, необходимая для обращения в нуль магнитной индукции).

Значения H_C и B_r для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. У магнитомягких материалов (трансформаторное железо) петля гистерезиса узкая (H_C мало), а у магнитотвёрдых – широкая ($H_C > 50000$ А/м; $B_r \sim 1$ Тл).

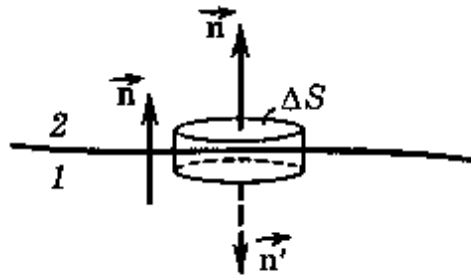
Для размагничивания ферромагнетик помещают в катушку, по которой пропускают переменный ток с уменьшающейся до нуля амплитудой. Петли гистерезиса циклически уменьшаются, стягиваясь к точке О.

При повышении температуры до величины, называемой точкой Кюри, ферромагнитные свойства исчезают.

Магнитное поле на границе раздела магнетиков

Для определения условий на границе двух однородных магнетиков используют теорему Гаусса для вектора \vec{B} : $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ и теорему о циркуляции вектора \vec{H} : $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I$.

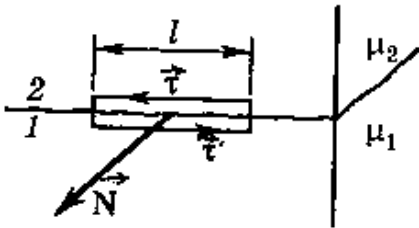
1). Условие для вектора \vec{B} :



$$B_{2n} \cdot \Delta S + B_{1n'} \cdot \Delta S = B_{2n} \cdot \Delta S - B_{1n} \cdot \Delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n} = B_{1n}.$$

Т.о. нормальная составляющая вектора \vec{B} на границе раздела не испытывает скачка.

2). Условие для вектора \vec{H} :



Пусть вдоль границы раздела магнетиков течёт поверхностный ток проводимости с линейной плотностью \vec{i} .

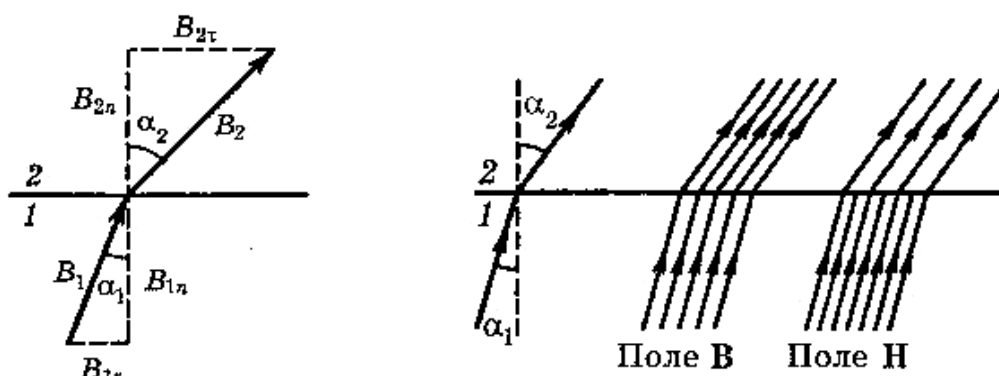
Выбираем прямоугольный контур, высота которого пренебрежимо мала по сравнению с его длиной l . Пренебрегая вкладом в циркуляцию на левой и правой сторонах контура, получаем

$$H_{2\tau} \cdot l + H_{1\tau'} \cdot l = H_{2\tau} \cdot l - H_{1\tau} \cdot l = i_N \cdot l \quad \Rightarrow \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N, \quad \text{где}$$

i_N — проекция вектора на нормаль \vec{N} к контуру.

Если на границе раздела тока проводимости нет ($\vec{i} = 0$), то тангенциальная составляющая вектора \vec{H} не испытывает скачка: $H_{2\tau} = H_{1\tau}$.

Составляющие векторов B_τ и H_n претерпевают скачок при переходе границы раздела.



$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{1\tau}}{B_{2n}}.$$

Но $\frac{B_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2}$ (т.к. $H_{2\tau} = H_{1\tau}$) и $B_{2n} = B_{1n}$.

Тогда $\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

На преломлении магнитных линий основана **магнитная защита**: внутри замкнутой железной оболочки (слоя) магнитное поле оказывается сильно ослабленным по сравнению с внешним полем (экранирование чувствительных приборов).

Лекция 8

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле

В однородном магнитном поле при отсутствии электрического поля на частицу действует сила

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

А) Если частица влетает в однородное магнитное поле так, что её скорость направлена вдоль линии магнитной индукции (угол α между \vec{v} и \vec{B} равен 0 или π), то $\vec{F}_M = 0$, и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно.

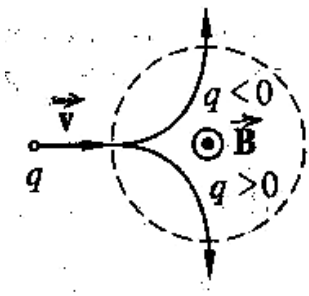
Б) Если угол $\alpha = \pi/2$ т.е. $\vec{v} \perp \vec{B}$, то частица движется равномерно по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна линиям индукции.

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}.$$

Если скорость частицы сравнима со скоростью света, то согласно соотношению релятивистской механики вместо $m\upsilon$ записываем $\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}.$$

Т.о. для релятивистской частицы $r = \frac{m\upsilon}{|q|B\sqrt{1-\beta^2}}$.



Направление силы $\vec{F}_M = 0$ определяется правилом правого винта и зависит от знака заряда частицы.

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{|q|B\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi W}{|q|Bc^2}, \text{ где}$$

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \text{полная энергия частицы.}$$

Для частицы, движущейся с нерелятивистской скоростью ($\upsilon \ll c$), период обращения не зависит от скорости

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

В) Частица движется со скоростью $\vec{\upsilon}$, направленной под произвольным острым углом α к вектору магнитной индукции \vec{B} .

Разложим вектор $\vec{\upsilon}$ на две составляющие:

$$\upsilon_{||} = \upsilon \cos \alpha \quad - \text{параллельна вектору } \vec{B};$$

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin \alpha \quad - \text{перпендикулярна вектору } \vec{B}.$$

Скорость $\upsilon_{||}$ в магнитном поле не изменяется.

Частица одновременно участвует в двух движениях: она равномерно вращается со скоростью υ_{\perp} по окружности радиуса r и движется поступательно с постоянной скоростью $\upsilon_{||}$ в направлении, перпендикулярном плоскости вращения. Траектория заряженной частицы представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с линией вектора \vec{B} . Шаг винтовой линии (расстояние между витками): $h = \upsilon_{||} \cdot T$.

$$\text{Для нерелятивистской частицы} \quad r = \frac{m\upsilon \sin \alpha}{|q|B} \quad \text{и} \quad h = \frac{2\pi m\upsilon \cos \alpha}{|q|B};$$

$$\text{Для релятивистской частицы} \quad r = \frac{m\upsilon \sin \alpha}{|q|B\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad h = \frac{2\pi m\upsilon \cos \alpha}{|q|B\sqrt{1-\beta^2}}.$$

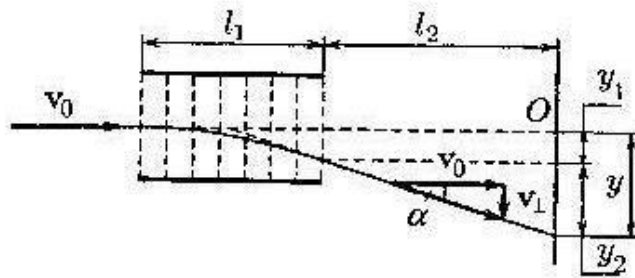
Г) Если заряженная частица движется в неоднородном магнитном поле, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то по мере перемещения

частицы значения r и h уменьшаются. В этом случае заряженная частица движется по скручивающейся винтовой линии, которая навивается на линию магнитной индукции.

На этом принципе основана магнитная фокусировка пучков заряженных частиц (например, в электронной оптике).

Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями

1). Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц, попадающий в отсутствие полей на перпендикулярный ему экран в точке O . Определим смещение следа пучка, вызываемое перпендикулярным пучку электрическим полем, действующим на пути длиной l_1 при расстоянии от границы области, в которой имеется поле, до экрана l_2 .



Пусть первоначальная скорость частиц равна \vec{v}_0 . Войдя в область поля каждая частица будет двигаться с постоянным по модулю и направлению ускорением

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_\partial}{m} = \frac{q \vec{E}}{m}.$$

Движение под действием поля продолжается в течение времени $t = \frac{l_1}{v_0}$. За это

время частицы сместятся на расстояние $y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qEl_1^2}{2mv_0^2}$ и приобретут,

перпендикулярную к \vec{v}_0 составляющую скорости $v_\perp = a \cdot t = \frac{qEl_1}{mv_0}$.

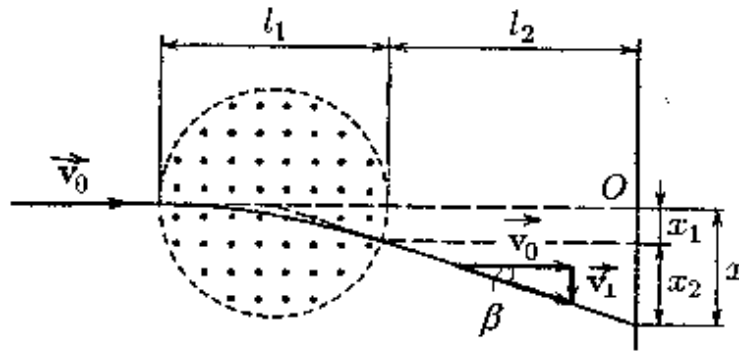
В дальнейшем частицы летят прямолинейно в направлении, которое образует с вектором \vec{v}_0 угол α , определяемый соотношением

$$\text{Смещение } y_2 = l_2 \cdot \tan \alpha = \frac{qEl_1l_2}{mv_0^2}.$$

$$\text{Общее смещение пучка } y = y_1 + y_2 = \frac{qEl_1}{mv_0^2} \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) \quad \text{или} \quad y = \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) \cdot \tan \alpha.$$

2). Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц, имеющих скорость \vec{v}_0 , проходящих на пути l_1 участок с однородным магнитным полем, вектор индукции

которого перпендикулярен скорости частиц. Определим смещение x пучка на экране, отстоящем на расстоянии l_2 от границы участка с магнитным полем \vec{B} .



Под действием поля каждая частица получит постоянное по модулю ускорение

$$a_{\perp} = \frac{F_M}{m} = \frac{q v_0 B}{m}.$$

Ограничиваясь случаем, когда отклонение пучка полем невелико, можно считать, что ускорение \vec{a}_{\perp} почти постоянно по направлению и $\vec{a}_{\perp} \perp \vec{v}_0$. Тогда для расчёта смещения можно воспользоваться формулой, полученной для предыдущего случая,

заменив в ней ускорение $a = \frac{qE}{m}$ значением $a_{\perp} = \frac{q v_0 B}{m}$:

$$x = \frac{q B l_1}{m v_0} \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right).$$

Угол, на который отклонится пучок магнитным полем определяют соотношением

$$\operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta = \frac{q B l_1}{m v_0}.$$

Получаем окончательно $x = \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Ускорители заряженных частиц

Для лабораторных исследований в области ядерной физики, а также для промышленных установок и электроракетных двигателей нашли применения направленные пучки заряженных частиц (электронов, протонов, ионов разных элементов), обладающих кинетической энергией от нескольких сотен эВ до десятков ГэВ.

По форме траектории ускоряемых частиц все ускорители можно разделить на две основные группы: линейные ускорители и циклические ускорители. В первых траектории частиц близки к прямым линиям, во вторых – к окружностям или раскручивающимся спиральям.

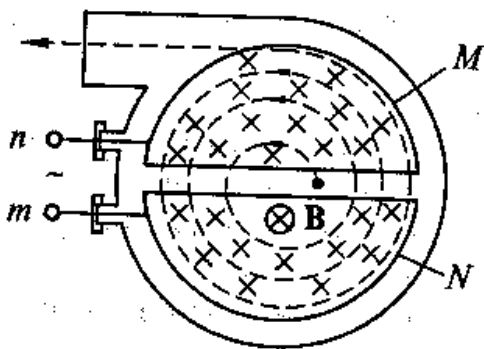
Энергия частиц увеличивается при их движении в электрическом поле ускорителя.

В электростатическом линейном ускорителе заряженная частица проходит через ускоряющее электрическое поле однократно. Если q – заряд частицы, а φ_1 и

φ_2 — потенциалы поля в начальной и конечной точках траектории в поле, то энергия, приобретаемая частицей в ускорителе, равна $W = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$. Здесь можно получить энергии не превышающие 15 МэВ.

Значительно большие энергии (до 22 ГэВ) можно сообщать заряженным частицам в линейных резонансных ускорителях, в которых переменное электрическое поле сверхвысокой частоты изменяется синхронно с движением ускоряемых частиц.

Циклотрон состоит из двух металлических дуантов M и N , представляющих собой две половины невысокой тонкостенной цилиндрической коробки разделённые узкой щелью.



Дуанты заключены в плоскую замкнутую камеру A , помещённую между полюсами сильного электромагнита. Вектор \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости чертежа.

Дуанты с помощью электродов m и n присоединены к полюсам электрического генератора, создающего в щели между ними переменное электрическое поле. Ускорение

частиц возможно только в том случае, если движение частицы и изменение электрического поля в зазоре будут происходить строго синхронно.

В циклотроне магнитное поле постоянно, а напряжённость электрического поля в зазоре изменяется во времени по гармоническому закону $E = E_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ с

постоянным периодом $T = \frac{2\pi m}{q B \sqrt{1 - \beta^2}}$.

В синхрофазотроне изменяются и частота ускоряющего напряжения, создаваемого генератором напряжения меняющейся частоты, и индукция магнитного поля. Ускоряемые частицы движутся не по спирали, а по кольцу. По мере увеличения скорости частиц индукция магнитного поля растёт так, чтобы радиус окружности, по которой движутся частицы оставался постоянным. При этом период обращения изменяется как из-за скорости \vec{v} так и из-за магнитной индукции \vec{B} .

Большой адронный коллайдер — ускоритель адронов (частиц, состоящих из кварков) на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжёлых ионов в противоположных направлениях и изучения продуктов их соударений.

Коллайдер построен на границе Швейцарии и Франции. Длина основного кольца ускорителя составляет 26 659 м.

Скорость частиц в БАК на встречных пучках близка к скорости света в вакууме. На первом этапе низкоэнергетичные линейные ускорители производят инжекцию протонов и ионов свинца в синхротрон, где они приобретают энергию в 28 ГэВ. После этого ускорение частиц продолжается в суперсинхрофазотроне, где энергия частиц достигает 450 ГэВ. Затем пучок направляют в основное кольцо и в точках столкновения шесть детекторов фиксируют происходящие события.

В разных инерциальных системах отсчёта электрическое и магнитное поля одной и той же совокупности зарядов оказываются различными.

При переходе от системы отсчёта **K** к движущейся относительно неё со скоростью \vec{v}_0 системе отсчёта **K'** ($\vec{v}_0 \parallel x \parallel x'$) справедливы следующие соотношения:

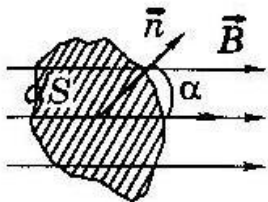
$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ B'_x &= B_x; & B'_y &= \frac{B_y + v_0 E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & B'_z &= \frac{B_z - v_0 E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Если $v_0 \ll c$ ($\beta \ll 1$), то

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + [\vec{v}_0, \vec{B}] \\ \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_0, \vec{E}]. \end{aligned}$$

Лекция 9

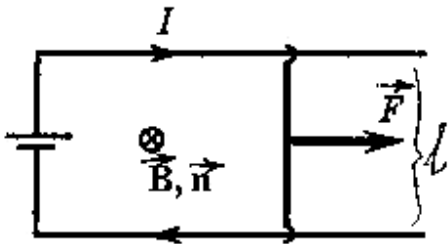
Поток вектора магнитной индукции



$$d\Phi_B = \vec{B} dS \vec{n} = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad [\Phi_B] = \text{Вб}.$$

Работа по перемещению проводника с током в постоянном магнитном поле



При перемещении перемычки вправо на dx сила Ампера совершает работу

$$\delta A = F_A \cdot dx = I B l dx = I B dS = I \cdot d\Phi_B.$$

В общем случае $\delta A = d\vec{F}_A \cdot d\vec{r} = I \cdot d\Phi_B$, где

$$d\Phi_B = \int_l \vec{B} [d\vec{r}, d\vec{l}] - \text{магнитный поток через малую}$$

площадку $d\vec{S}$;

$d\vec{S} = [d\vec{r}, d\vec{l}]$ – вектор малой площадки, прочерчиваемой элементом $d\vec{l}$ проводника при его малом перемещении $d\vec{r}$.

Работа по перемещению проводника с током I из положения **1** в положение **2**:

$$A_{1-2} = \int_1^2 I d\Phi_B = I \cdot \Delta\Phi_B, \quad \text{где}$$

$\Delta\Phi_B$ – магнитный поток сквозь поверхность, прочерченную проводником при перемещении из **(1)** в **(2)**.

Для замкнутого контура при перемещении его из положения **1** в положение **2**:

$$A_{1-2} = \int_1^2 I d\Psi = I \cdot \Delta\Psi_{1-2} = I(\Psi_2 - \Psi_1), \quad \text{где}$$

$\Psi = N \cdot \Phi_B$ – потокосцепление контура, содержащего N витков.

Электромагнитная индукция

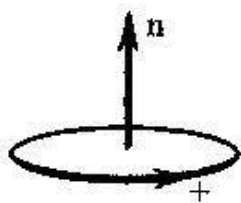
Закон Фарадея: в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т.е. потока вектора \vec{B}), охватываемого этим контуром, возникает индукционный электрический ток (явление электромагнитной индукции).

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции:

$$\xi_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d(B \cdot S \cdot \cos \alpha)}{dt}.$$

Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Индукционные токи возбуждаются и в массивных сплошных проводниках. Они имеют вихревой характер, и их называют **токами Фуко**.



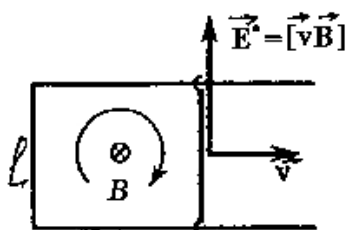
Знак магнитного потока Φ_B связан с выбором нормали к поверхности S , а знак ЭДС индукции ξ_i с выбором положительного направления обхода по контуру, которые связаны друг с другом правилом правого винта.

Если замкнутый контур, в котором индуцируется ЭДС состоит не из одного витка, а из n витков, то ξ_i будет равна сумме ЭДС, индуцированных в каждом витке.

Природа электромагнитной индукции

А). Контур движется в постоянном магнитном поле.

Рассмотрим контур с подвижной перемычкой длины l .



Если перемычку двигать вправо со скоростью \vec{v} , то все электроны в ней тоже будут двигаться с этой скоростью, и на них будет действовать сила $\vec{F}_M = -e[\vec{v}, \vec{B}]$, т.е. электроны начнут перемещаться по перемычке вниз – потечёт индукционный ток. Магнитная сила играет роль сторонней силы. Ей соответствует поле

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}_M}{(-e)} = [\vec{v}, \vec{B}].$$

Циркуляция вектора \vec{E}^* по контуру даёт по определению величину ЭДС индукции

$$\xi_i = -v B l.$$

То же самое получаем и из закона Фарадея:

$$\xi_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = -B \cdot l \frac{dx}{dt} = -v B l.$$

Формулой $\xi_i = -v B l$ можно пользоваться при движении любой перемычки, в любом контуре и с любой скоростью в однородном магнитном поле.

Б). Контур покоится в переменном магнитном поле.

Магнитных сил $\sim [\vec{v}, \vec{B}]$ нет. Индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем \vec{E} . Именно это поле обеспечивает появление ЭДС индукции в неподвижном контуре при изменении во времени магнитного поля.

Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от наличия проводящего контура.

Циркуляция вектора \vec{E} этого поля по любому неподвижному контуру определяют как

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}.$$

Символ $\frac{\partial}{\partial t}$ подчёркивает тот факт, что контур неподвижен.

Т. к. $\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{S}$ то $\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$. Тогда

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Используя теорему Стокса, получаем в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{или} \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Изменение индукции магнитного поля во времени в данной точке пространства определяет ротор напряжённости электрического поля в этой же точке.

Явление самоиндукции

Если в некотором контуре течёт изменяющийся во времени электрический ток, то магнитное поле этого тока также будет меняться. Это влечёт за собой изменение магнитного потока через контур, а следовательно, и появление ЭДС индукции.

Возникновение ЭДС индукции в контуре, вызванное изменением тока в этом же контуре называется **явлением самоиндукции**.

Если в пространстве, где находится контур с током I , нет ферромагнетиков, поле \vec{B} , а значит и полный магнитный поток Φ_B через контур будут пропорциональны силе тока I , и можно записать

$$\Phi_B = L \cdot I, \quad \text{где}$$

L — коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью контура. В СИ $[L] = \text{Гн}$ (генри).

Пример: индуктивность соленоида.

Пусть V — объём соленоида ($V = l \cdot S$);

n — число витков на единицу длины;

μ — магнитная проницаемость сердечника.

При токе I магнитная индукция в соленоиде $B = \mu \mu_0 n \cdot I$.

Магнитный поток через один виток $\Phi_{B1} = B \cdot S = \mu \mu_0 n \cdot I \cdot S$.

Магнитный поток через N витков

$$\Phi_B = N \cdot \Phi_{B1} = n \cdot l \cdot B \cdot S = \mu \mu_0 n^2 \cdot V \cdot I.$$

Для индуктивности получаем

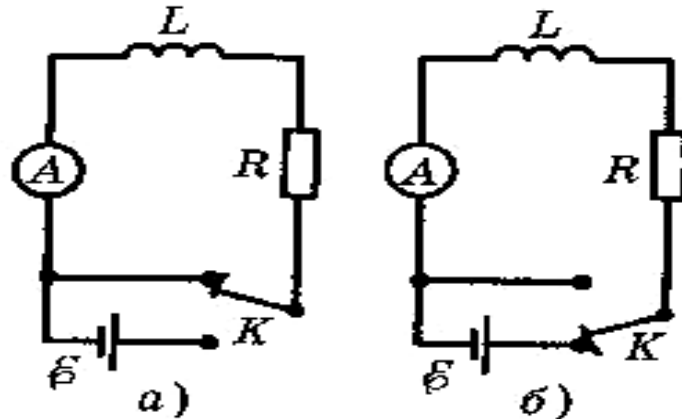
$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu\mu_0 n^2 \cdot V.$$

ЭДС самоиндукции (при $L = \text{const}$)

$$\xi_S = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt}.$$

Характерные проявления самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании тока в цепи.

Любой большой электромагнит обладает большой индуктивностью и поэтому при размыкании цепи возникает огромная ЭДС самоиндукции, что часто приводит к образованию вольтовой дуги между контактами выключателя.



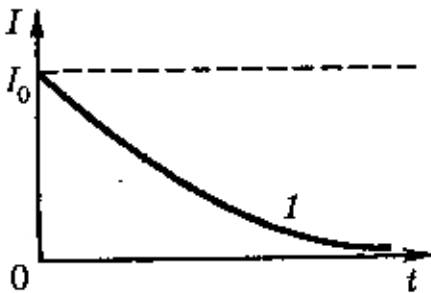
При размыкании (переход от схемы б) к схеме а))

$$\xi_S = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{и по закону Ома} \quad I = \xi_S / R, \text{ т.е.}$$

$$R \cdot I = -L \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$I = I_0 \exp\left(-t/\tau\right)$$

Где $\tau = \frac{L}{R}$ – время релаксации.



Замыкание цепи (переход от схемы а) к схеме б)).

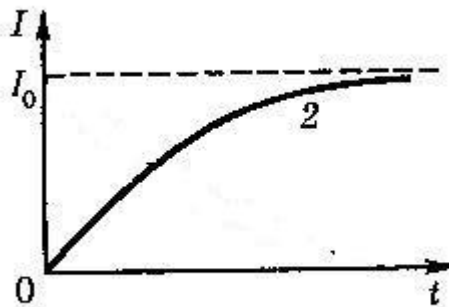
В этом случае происходит подключение к индуктивности L источника питания с ЭДС ξ .

По закону Ома $R \cdot I = \xi + \xi_s$ или $R \cdot I = \xi - L \frac{dI}{dt} \Rightarrow R \cdot I - \xi = -L \frac{dI}{dt}$.

Вводим новую переменную $U = R \cdot I - \xi$, тогда $dU = R dI \Rightarrow dI = \frac{dU}{R}$

или $U = -\frac{L}{R} \frac{dU}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{L}{R} \frac{dU}{U}$.

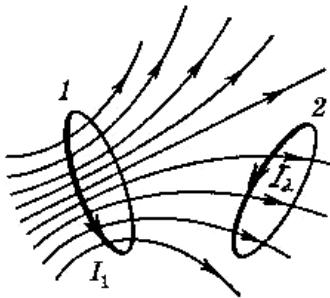
После интегрирования получаем окончательно $I = I_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$



Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2

$$\Phi_{B1} = L_{12} \cdot I_2 \quad \Phi_{B2} = L_{21} \cdot I_1$$



L_{12} и L_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Эти коэффициенты зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров.

По теореме взаимности $L_{12} = L_{21}$. Смысл теоремы взаимности в том, что в любом случае магнитный поток Φ_{B1} сквозь контур 1, созданный током I в контуре 2, равен магнитному потоку Φ_{B2} сквозь контур 2, созданному таким же током I в контуре 1.

Взаимной индукцией называется явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре при изменении тока в другом. Если контуры неподвижны и отсутствуют ферромагнетики, то

$$\xi_{1i} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt};$$

$$\xi_{2i} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

С учётом явления самоиндукции ток в контуре 1 при изменении токов в обоих контурах определяется по закону Ома:

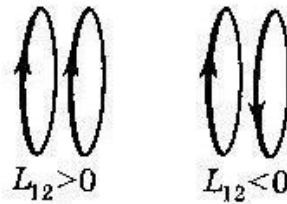
$$R_1 I_1 = \xi_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \text{где}$$

ξ_1 – сторонняя ЭДС в контуре 1.

Для I_2 получаем симметрично:

$$R_2 I_2 = \xi_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

В отличие от индуктивности L , которая всегда является положительной величиной, взаимная индуктивность L_{12} – величина алгебраическая.



На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов.

Энергия магнитного поля

При отсутствии ферромагнетиков контур с индуктивностью L , по которому течёт ток I , обладает энергией

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi_B}{2} = \frac{\Phi_B^2}{2L}.$$

Рассмотрим длинный соленоид, пренебрегая краевыми эффектами. Его индуктивность $L = \mu\mu_0 n^2 V$. Тогда

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2 V}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} V,$$

т.к. $n \cdot I = H = \frac{B}{\mu\mu_0}.$

Формула $W_M = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} V$ справедлива для любого однородного поля, заполняющего объём V .

Если магнитное поле неоднородно (но при отсутствии ферромагнетиков), то

$$W_M = \int_V \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} dV.$$

Объёмная плотность магнитной энергии при отсутствии ферромагнетиков:

$$w_M = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Напомним, что для электрического поля $w_{\text{э}} = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Магнитное давление

Рассмотрим соленоид, по которому течёт ток I . Используя метод виртуальной работы, увеличим мысленно радиус сечения соленоида на dr .

Виртуальная работа, совершаемая силами Ампера:

$$\delta A = dW_M = d\left(\frac{B^2}{2\mu\mu_0} V\right) = \frac{B^2 S}{2\mu\mu_0} dr, \quad \text{где}$$

S — боковая поверхность соленоида.

В тоже время механическую работу можно представить как $\delta A = p \cdot S \cdot dr$, где p — искомое давление.

Таким образом $\frac{B^2 S}{2\mu\mu_0} dr = p \cdot S \cdot dr \Rightarrow p = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2}$.

Если по разные стороны от поверхности с током (током проводимости или током намагничивания) магнитное поле разное — \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , то

$$p = \left| \frac{\vec{B}_1 \vec{H}_1}{2} - \frac{\vec{B}_2 \vec{H}_2}{2} \right|.$$

Область с более высокой плотностью магнитной энергии является и областью с более высоким давлением.

Полученное соотношение для давления является одним из основных в магнитогидродинамике.

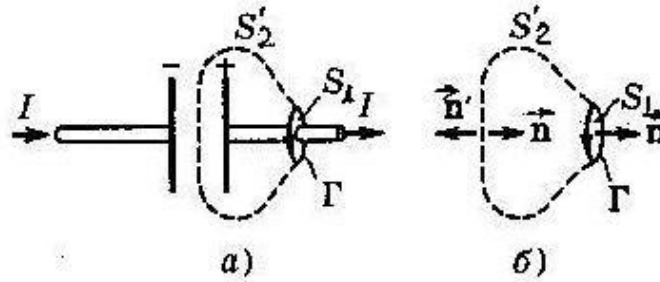
Лекция 10

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Максвелл предположил, что в зависимости электрического и магнитного полей должна быть симметрия. Поскольку меняющееся во времени магнитное поле $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ создаёт электрическое поле, следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ создаёт магнитное поле.

Есть теорема о циркуляции вектора \vec{H} : $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$.

Рассмотрим процесс разрядки конденсатора.



Через поверхность S_1 течёт ток I , а через поверхность S_2 ток не течёт, хотя обе поверхности имеют равные права с точки зрения теоремы о циркуляции вектора \vec{H} . Но для поверхности S_2 можно вместе с поверхностью S_1 записать теорему

Гаусса $\oint_{(S_1+S_2)} \vec{D} d\vec{S} = q$. Дифференцируя по времени, получаем $\oint_{(S_1+S_2)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}$.

Из уравнения неразрывности тока имеем $\frac{\partial q}{\partial t} = - \oint_{(S_1+S_2)} \vec{j} d\vec{S}$.

Тогда $\oint_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{см}$ — плотность тока смещения;

$\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \vec{j}_{полн}$ — плотность полного тока.

$$I_{полн} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Теперь теорему о циркуляции вектора \vec{H} , которая была установлена для постоянных токов, можно обобщить для произвольного случая и записать

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} = I_{полн}.$$

В дифференциальной форме

$\text{rot } \vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ т.е. ротор вектора

напряжённости магнитного поля \vec{H} определяется плотностью тока проводимости и тока смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в той же точке.

Ток смещения может существовать без носителей тока и даже в вакууме.

Открытие Максвеллом тока смещения – чисто теоретическое открытие, причём первостепенной важности. Оно позволило создать единую теорию электрических и магнитных явлений.

В интегральной и дифференциальной форме система уравнений Максвелла в неподвижных средах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} & \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 2) \quad \oint_s \vec{B} d\vec{S} &= 0 & \text{div } \vec{B} &= 0 \\
 3) \quad \oint_l \vec{H} d\vec{l} &= \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 4) \quad \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= \int_v \rho dV & \text{div } \vec{D} &= \rho
 \end{aligned}$$

ρ – объёмная плотность сторонних зарядов;

\vec{j} – плотность тока проводимости.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов \vec{E} и \vec{H} следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из них приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая **единое электромагнитное поле**.

Если же поля стационарны ($\vec{E} = \text{const}$ и $\vec{B} = \text{const}$), то уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

$$\begin{aligned}
 \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0; & \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= \int_v \rho dV \\
 \text{и} \quad \oint_s \vec{B} d\vec{S} &= 0 & \oint_l \vec{H} d\vec{l} &= \int_s (\vec{j}) d\vec{S}.
 \end{aligned}$$

Из уравнений Максвелла видно, что электрическое поле может возникнуть по двум причинам.

Во первых, его источником являются электрические заряды, как сторонние так и связанные. Это следует из уравнения $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, если учесть, что $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ и $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$.

Во-вторых, поле \vec{E} образуется всегда, когда меняется во времени магнитное поле (закон электромагнитной индукции Фарадея). Причём электрическое поле в этом случае является вихревым ($\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$), т.е. силовые линии \vec{E} не имеют в этом случае ни начала, ни окончания.

Эти же уравнения говорят о том, что магнитное поле \vec{B} может возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно. Это следует из уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Никаких источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (магнитных зарядов) в природе не существует, что следует из уравнения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме не только в том, что они выражают основные законы электромагнитного поля, но и в том, что путём их решения (интегрирования) могут быть найдены сами поля \vec{E} и \vec{B} .

Для описания всех электромагнитных явлений систему уравнений Максвелла дополняют уравнением движения заряженных частиц под действием силы Лоренца

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

и так называемыми материальными уравнениями, которые для слабых полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и времени имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^*),$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды;

μ — магнитная проницаемость среды;

γ — электропроводимость среды;

\vec{E}^* — напряжённость электрического поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Лекция 11

Электромагнитные волны

Электромагнитные волны – это переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью, равной скорости света (в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла, которые в области пространства, не содержащей свободных электрических зарядов и макроскопических токов, имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Первостепенную роль в этом явлении играет ток смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Именно его присутствие наряду с величиной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и означает появление электромагнитных волн.

Всякое изменение во времени магнитного поля возбуждает поле электрическое. Изменение электрического поля, в свою очередь, возбуждает магнитное поле.

Если среда – однородный и изотропный диэлектрик, не обладающий сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами ($\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$), то получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Используя известное из математики соотношение

$$\nabla^2 \vec{\xi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\xi} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\xi}, \text{ получаем}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

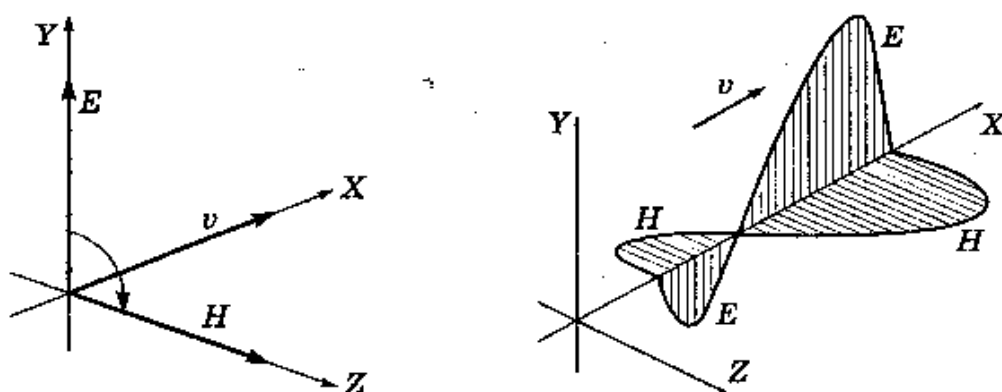
Так как распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается **волновым уравнением** типа $\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, то

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

1) полученные дифференциальные уравнения для \vec{E} и \vec{H} являются волновыми уравнениями, где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ – **фазовая скорость**

электромагнитной волны, а $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость электромагнитной волны в вакууме;

2) векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} взаимно перпендикулярны и образуют **правовинтовую систему** независимо от выбора координатной системы и всегда колеблются в одинаковых фазах, причём мгновенные значения \vec{E} и \vec{H} в любой точке связаны соотношением



$$E_y \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_z \sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Это означает, что \vec{E} и \vec{H} одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль.

Волновым уравнениям $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$ удовлетворяют плоские монохроматические электромагнитные волны, описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{и} \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad \text{где}$$

E_0 и H_0 – амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей волны;

ω – круговая частота волны;

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{– волновое число;}$$

φ_0 – начальная фаза колебаний, одинаковая для \vec{E} и \vec{H} .

Теория Максвелла позволяет установить перечисленные свойства для любой электромагнитной волны независимо от её формы (т.е. это может быть не только гармоническая волна, но и электромагнитное возмущение произвольной формы).

Энергия электромагнитного поля

Исходя из представления о локализации энергии в самом поле и руководствуясь принципом сохранения энергии, можно заключить, что если в какой-то определённой области энергия уменьшается, то это может происходить только за счёт её «вытикания» через границы рассматриваемой области (среда предполагается неподвижной).

Принимается, что существует не только плотность энергии w в данной области пространства, но и некоторый вектор $\vec{P} = w \cdot \vec{v}$, характеризующий плотность потока энергии и называемый вектором Пойнтинга

Теорема Пойнтинга: убыль энергии за единицу времени в данном объёме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограниченную этим объёмом, плюс мощность P , которую силы поля производят над зарядами вещества внутри данного объёма

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + P, \quad \text{где}$$

$$W = \int_V w dV;$$

$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ – может быть как положительной так и отрицательной (там, где есть поле сторонних сил \vec{E}^* и ток течёт против ЭДС);

Пойнтинг получил выражение для вектора \vec{P} , воспользовавшись уравнениями Максвелла.:

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} EH, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Получаем: $w = \frac{E \cdot H}{v}.$

Таким образом, если среда не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков (т.е. нет явления гистерезиса) то

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Импульс электромагнитного поля

Максвелл теоретически показал, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, на которые они падают, оказывают на них давление. Это давление возникает в результате воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны (сила Ампера).

Поскольку электромагнитная волна оказывает давление на вещество, последнее приобретает импульс.

В замкнутой системе, состоящей из вещества и электромагнитной волны, закон сохранения импульса может выполняться только при условии, что волна обладает импульсом, т.е. вещество приобретает импульс за счёт импульса, передаваемого ему электромагнитным полем.

Пусть \vec{G} – плотность импульса.

Расчёты показывают, что $\vec{G} = \frac{\vec{P}}{c^2}$ и $G = \frac{w}{c}$ так как в вакууме $P = w \cdot c.$

Излучение электромагнитных волн ускоренно движущимися зарядами и диполем

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является электрический диполь.

Рассмотрим диполь, образованный неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся около него по гармоническому закону точечным зарядом $-q$. Дипольный электрический момент этой системы изменяется по закону

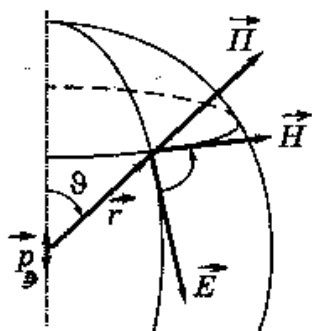
$\vec{p}_\Sigma = -q \cdot \vec{l} = \vec{p}_m \cos \omega t$, где \vec{p}_m – амплитудное значение электрического момента диполя.

Диполь называют элементарным если его размер мал по сравнению с

длиной волны $l \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

Волновая зона диполя рассматривается на расстояниях r , значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$).

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим.



Векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны к лучу (вектору \vec{r}).

Причём вектор \vec{E} в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор \vec{H} по касательной к параллели.

В каждой точке векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - k \cdot r)$.

Амплитуды \vec{E}_m и \vec{H}_m зависят от расстояния r до излучателя и от угла ϑ между направлениями радиус-вектора \vec{r} и осью диполя. Эта зависимость для волны в вакууме имеет вид

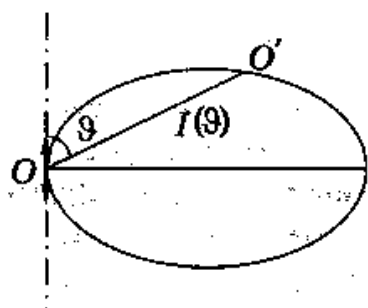
$$E_m \sim H_m \sim \frac{\sin \vartheta}{r}.$$

Среднее значение плотности потока энергии пропорциональна произведению $E_m H_m$ и, следовательно:

$$I = \langle P \rangle \sim \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}.$$

Т.е. **интенсивность волны** I изменяется вдоль луча (при $\vartheta = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя.

Эту зависимость наглядно изображают с помощью **диафрагмы направленности излучения диполя**:



Длина отрезка OO' , отсекаемая от луча под углом ϑ равна интенсивности излучения под этим углом. Видно, что максимум излучения происходит по направлению перпендикулярному оси диполя ($\vartheta = \pi/2$), а вдоль оси ($\vartheta = 0$)

диполь не излучает совсем.

Мощность излучения диполя, т.е. энергия, излучаемая в единицу времени по всем направлениям, пропорциональна квадрату второй производной $\ddot{\vec{p}}_{\vartheta}$ по времени и определяется формулой

$$\frac{dW}{dt} = P = \alpha \cdot \ddot{\vec{p}}_{\vartheta}^2, \text{ где}$$

$$\alpha = \frac{\mu_0}{6\pi c} \text{ в СИ.}$$

Для гармонических колебаний получаем $P = \alpha \cdot \omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t$.

Т.к. среднее за период значение $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}$, то средняя по времени мощность излучения диполя

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \alpha \cdot \omega^4 p_m^2.$$

Видно, что средняя мощность излучения осциллирующего диполя зависит от квадрата его амплитуды и очень сильно от частоты колебаний (ω^4). Следовательно, излучение линий электропередач переменного тока промышленной частоты 50 Гц оказывается незначительным, а радиостанции и мобильная телефонная связь должны использовать высокие частоты.

Т.к. $\vec{p}_э = -q \cdot \vec{l}$, то $\ddot{\vec{p}}_э = -q \cdot \ddot{\vec{l}} = -q \cdot \vec{a}$, где
 \vec{a} – ускорение колеблющегося заряда.

Получаем для мощности излучения заряда, движущегося с ускорением:

$$P = \alpha \cdot q^2 \cdot a^2 = \frac{q^2 a^2 \mu_0}{6\pi \cdot c}.$$

Эта формула справедлива лишь для зарядов, движущихся с малыми скоростями ($v \ll c$).

Заряд, движущийся в вакууме с постоянной скоростью, не излучает.

Заряд, движущийся в веществе, может приводить к появлению излучения даже если его ускорение равно нулю. В этом случае он переводит электроны в оболочках атомов в возбуждённое состояние.

Заряд, колеблющийся с частотой ω , излучает монохроматическую электромагнитную волну с той же частотой ω .

Если заряд движется с произвольным ускорением, то его излучение представляет собой спектр различных частот.

Лекция 12

Электромагнитная природа света

Электромагнитные волны условно делятся на несколько видов по длине волны в вакууме (по частоте):

1. Радиоволны: $\lambda > 50 \text{ мкм}$ ($\nu < 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$).
2. Свет:
 - 2.1. Инфракрасные волны: $1 \text{ мм} > \lambda > 760 \text{ мкм}$ ($0,3 \cdot 10^{12} \text{ Гц} < \nu < 0,4 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$).
 - 2.2. Видимый свет: $760 \text{ нм} > \lambda > 380 \text{ нм}$ ($\nu = (0,4 \div 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}$).
 - 2.3. Ультрафиолетовое излучение: $380 \text{ нм} > \lambda > 10 \text{ нм}$ ($\nu = (0,75 \div 30) \cdot 10^{15} \text{ Гц}$).
3. Рентгеновское излучение: $100 \text{ нм} > \lambda > 0,01 \text{ нм}$ ($\nu = (3 \div 30000) \cdot 10^{15} \text{ Гц}$).
4. γ – излучение: $0,1 \text{ нм} > \lambda$ ($3 \cdot 10^{18} \text{ Гц} < \nu$).

В среде, где фазовая скорость волны $v = \frac{c}{n}$ (n – показатель преломления среды), длина волны также уменьшается в n раз. Частота ν не зависит от среды.

Волновой оптикой называется круг явлений, в основе которых лежит волновая природа света.

Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие свойства света вызываются колебаниями вектора \vec{E} (магнитный вектор световой волны нас не интересует).

Изменение во времени и пространстве проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, описывается уравнением

$$E = E_0 \cos(\omega t - kr + \varphi_0).$$

Для плоской волны в непоглощающей среде $E_0 = \text{const}$, а в сферической волне E_0 убывает как $1/r$.

Для электромагнитных волн мы уже отмечали, что $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Тогда показатель преломления $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}$.

Для подавляющего большинства прозрачных веществ $\mu \approx 1$. Поэтому можно считать, что

$$n = \sqrt{\epsilon}.$$

Необходимо отметить, что ϵ сильно зависит от частоты. Например, для воды из электростатических измерений получаем $\epsilon = 81$, а $n = 1,33$.

Подстановка в формулу $n = \sqrt{\epsilon}$ значения ϵ , полученного для соответствующей частоты, приводит к правильному значению n .

Зависимость ϵ от частоты объясняет дисперсию света, т.е. зависимость показателя преломления среды (или скорости света в данной среде) от частоты. Среда с большим n называется **оптически более плотной**.

Частота изменения вектора плотности потока энергии, переносимой волной в два раза выше частоты самой световой волны, которая и так очень велика. Поэтому любой приёмник световой волны может регистрировать только усреднённый по времени поток.

Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной (модуль среднего вектора Пойнтинга) носит название **интенсивности света** I в данной точке пространства:

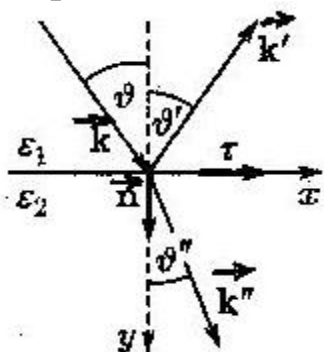
$$I = \left\langle \vec{P} \right\rangle = \left\langle \vec{E} \times \vec{H} \right\rangle.$$

Измеряется интенсивность света либо в энергетических единицах (Вт/м^2), либо в световых (лм/м^2 – люмен на метр квадратный).

Так как $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$, то легко получить $I \sim n \cdot E_0^2$, т.е. интенсивность света пропорциональна показателю преломления среды и квадрату амплитуды световой волны (коэффициент пропорциональности $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$). В однородной среде $I \sim E_0^2$.

Отражение и преломление плоской световой волны на границе двух диэлектриков

Пусть диэлектрик, в котором распространяется падающая волна, характеризуется диэлектрической проницаемостью ε_1 , а второй диэлектрик – ε_2 . Считаем, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Опыт показывает, что в этом случае, кроме распространяющейся во втором диэлектрике плоской преломлённой волны, возникает плоская отражённая волна, распространяющаяся в 1-ом диэлектрике.



\vec{k} – волновой вектор падающей волны;

\vec{k}' – волновой вектор отражённой волны;

\vec{k}'' – волновой вектор преломлённой волны.

Плоскость, в которой лежат векторы \vec{k} и \vec{n} , называется плоскостью падения волны.

Из соображений симметрии ясно, что векторы \vec{k}' и \vec{k}'' могут лежать лишь в плоскости падения.

В первой среде на поле падающей волны (\vec{E}, \vec{H}) накладывается поле отражённой волны (\vec{E}', \vec{H}') , а во второй среде имеется поле только преломлённой волны (\vec{E}'', \vec{H}'') .

Анализ показывает, что при падении на гладкую плоскую поверхность раздела двух сред плоской монохроматической волны, выполняются (независимо от характера поляризации этой волны) следующие законы отражения и преломления электромагнитных волн:

1. Отражённая и преломлённая волны также являются монохроматическими волнами той же частоты, что и падающая. Вектор \vec{E}'' всегда сонаправлен с вектором \vec{E} . Оба вектора колеблются синфазно. При прохождении через границу раздела фаза не претерпевает скачок.

2. Закон отражения – отражённый луч лежит в плоскости падения, причём угол отражения равен углу падения

$$\vartheta' = \vartheta.$$

3. Закон преломления – преломлённый луч лежит в плоскости падения, а угол преломления связан с углом падения соотношением

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (\text{или} \quad n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2).$$

При переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную луч удаляется от нормали к поверхности раздела сред. Увеличение угла падения ϑ сопровождается более быстрым ростом угла преломления ϑ'' и по достижении углом ϑ предельного значения

$$\vartheta_{\text{ПРЕД}} = \arcsin n_{21} \quad \text{при} \quad \vartheta'' = \pi/2.$$

Энергия, которую несёт с собой падающий луч, распределяется между отражённым и преломлённым лучами. По мере увеличения угла ϑ интенсивность отражённого луча растёт, а интенсивность преломлённого луча убывает, обращаясь в нуль при предельном угле. При $\vartheta_{\text{ПРЕД}} < \vartheta < \pi/2$ световая волна проникает во вторую среду на расстояние $\sim \lambda$ и затем возвращается в 1-ую среду. Это явление называется **полным внутренним отражением**.

При отражении световой волны от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной ($n_1 > n_2$), фаза колебаний светового вектора скачком претерпевает изменения на π . При отражении от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной ($n_2 > n_1$), такого изменения фазы колебаний не происходит.

Интенсивность падающей волны равна сумме интенсивностей отражённой и преломлённой волн (закон сохранения энергии)

$$I = I' + I''.$$

Коэффициент отражения - ρ

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E_0'^2}{n_1 E_0^2} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2.$$

Коэффициент пропускания - τ

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2 E_0''^2}{n_1 E_0^2} = n_{21} \left(\frac{2}{n_{21} + 1} \right)^2.$$

Легко убедиться, что $\rho + \tau = 1$.

Угол падения, при котором отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны, называется углом Брюстера - \mathcal{G}_{Br} .
 $\operatorname{tg} \mathcal{G}_{Br} = n_{21}$.

Лекция 13**Интерференция световых волн**

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$E_{01} \cos(\omega t + \varphi_{01}) \quad \text{и} \quad E_{02} \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

Амплитуда результирующего колебания так же как и для механических волн определяется из выражения

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \delta \quad \text{где} \quad \delta = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

Если разность фаз δ возбуждаемых волнами колебаний остаётся постоянной во времени, то волны называются **когерентными**.

Для некогерентных волн δ непрерывно меняется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего $\langle \cos \delta \rangle = 0$ и

$$\langle E_0^2 \rangle = \langle E_{01}^2 \rangle + \langle E_{02}^2 \rangle \Rightarrow I = I_1 + I_2.$$

В случае когерентных волн

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta.$$

В тех точках пространства, для которых $\cos \delta > 0$ имеем, а там, где $\cos \delta < 0 \Rightarrow I < I_1 + I_2$.

Интерференцией световых волн называется явление появления максимумов интенсивности света в одних точках пространства и минимумов в других.

Особенно чётко проявляется интерференция при $I_1 = I_2$. Тогда в максимумах $I = 4I_1$, а в минимумах $I = 0$.

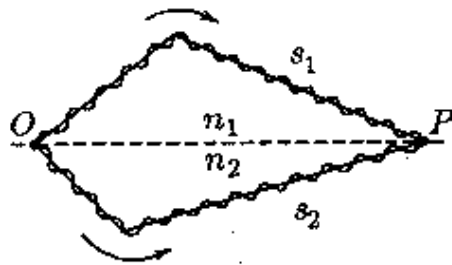
Получить интерференционную картину от нескольких естественных источников света нельзя, т.к. такие источники всегда не когерентны.

Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых многими атомами. Отдельные атомы излучают так называемые **цуги волн** длительностью порядка 10^{-8} с и протяжённостью около 3 м. Фаза нового цуга никак не связана с фазой предыдущего цуга. Фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения.

Наблюдать интерференцию можно, если разделить с помощью отражений или преломлений волну, излучаемую одним источником, на две части, заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить друг на друга.

Разность оптических длин путей, проходимых интерферирующими волнами, не должна быть очень большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн.

Пусть когерентные **O.**



разделение на две волны происходит в точке

До т. **P** первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 путь s_1 , вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 путь s_2 .

Если в т. **O** фаза колебаний равна ωt , то разность фаз колебаний, возбуждаемых в т. **P**

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1) = \frac{2\pi\nu}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где

λ_0 — длина волны в вакууме;

$\Delta = (n_2 s_2 - n_1 s_1)$ — оптическая разность хода.

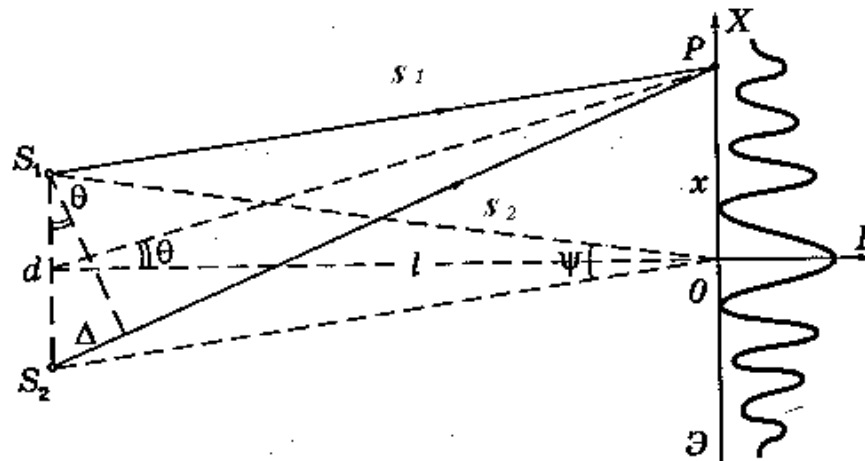
Условие максимума (волны приходят в т. **P** в одной фазе):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \pm m \cdot \lambda_0 \quad (m = 0; 1; 2; \dots) \\ \delta = \pm m \cdot 2\pi \end{array} \right\}.$$

Условие минимума (волны приходят в т. **P** в противофазе):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \pm (2m + 1) \cdot \lambda_0 / 2 \quad (m = 0; 1; 2; \dots) \\ \delta = \pm (2m + 1) \cdot \pi \end{array} \right\}.$$

Пусть S_1 и S_2 – источники двух когерентных цилиндрических световых волн, например, две светящиеся узкие щели.



Область, в которой эти волны перекрываются, называется **полем интерференции**. Если в это поле внести экран (\mathcal{E}), параллельный плоскости, в которой находятся источники S_1 и S_2 , то на нём будет видна интерференционная картина.

В практически важных случаях для получения различимой интерференционной картины должно выполняться условие $d \ll l$, где d – расстояние между источниками S_1 и S_2 , l – расстояние от источников до экрана. Тогда $\theta \ll 1$ и разность хода можно записать как $\Delta = d \cdot \theta$,

Так как $\theta \approx x/l$, то для максимумов получаем: $x_m = \frac{m\lambda l}{d}$.

В точке $x=0$ расположен максимум, соответствующий нулевой разности хода. Для него порядок интерференции $m = 0$. Это центр интерференционной картины.

При переходе к соседнему максимуму m меняется на единицу и x на величину Δx , которую называют шириной **интерференционной картины**.

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} \quad \text{или} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{\psi}, \quad \text{где}$$

$\psi = d/l$ – угол, под которым видны оба источника из центра экрана.

Для увеличения ширины полосы следует увеличивать l и уменьшать d (т.е. уменьшать ψ).

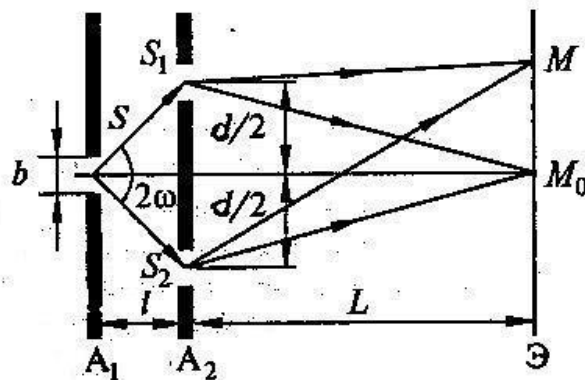
Зависимость Δx от λ приводит к тому, что по мере удаления от центра картины максимумы разных цветов (разных λ) смещаются

относительно друг друга всё больше и больше. Это приводит к смазыванию интерференционной картины при наблюдении её в белом свете.

Зная l и d и измерив расстояние между полосами Δx были впервые определены длины волн для световых лучей разного цвета.

Если $I_1 = I_2 = I_0$, то $I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$. Так как $\delta \sim \Delta$ то δ растёт пропорционально x . Следовательно, интенсивность изменяется вдоль экрана по закону квадрата косинуса.

Классический опыт Юнга



Источником света служит ярко освещённая узкая щель S в преграде A_1 . Свет от неё падает на вторую непрозрачную преграду A_2 , в которой имеются две одинаковые узкие щели S_1 и S_2 , параллельные S .

Для наблюдения интерференционной картины на экране \mathcal{E} необходимо, чтобы размеры d и b были очень малы для соблюдения когерентности складываемых волн.

Когерентность

Когерентностью называют согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов.

Временная когерентность.

Всякая реальная световая волна образуется наложением колебаний различных частот, заключённых в более или менее узком, но конечном интервале $\Delta \nu$, следовательно и $\Delta \omega$ и $\Delta \lambda$. Амплитуда волны E_0 и фаза претерпевают со временем непрерывные случайные изменения. Поэтому для двух накладывающихся друг на друга световых волн колебания можно записать в следующем виде:

$$E_{01}(t) \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \varphi_{01}(t))$$

$$E_{02}(t) \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \varphi_{02}(t))$$

и

Случайные изменения функций $E_{01}(t), (\omega(t), \varphi_{01}(t)), E_{02}(t), (\omega(t), \varphi_{02}(t))$ являются совершенно независимыми.

Для наблюдения интерференции необходимо выполнение следующих условий:

$$|s_2 - s_1| < c \cdot t_{\text{КОГ}} \quad \text{или} \quad \Delta = |s_2 - s_1| < l_{\text{КОГ}}, \quad \text{где}$$

$t_{\text{КОГ}}$ и $l_{\text{КОГ}}$ – время и длина когерентности света.

$$\text{Расчёты показывают, что} \quad t_{\text{КОГ}} \sim \frac{\lambda^2}{c \cdot \Delta\lambda} \quad \Rightarrow \quad l_{\text{КОГ}} \sim \lambda^2 / \Delta\lambda$$

Квазимонохроматический свет, содержащий длины волн в интервале $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$, характеризуется $t_{\text{КОГ}} \sim 10^{-12} \text{ с}$. У гелий-неонового лазера $t_{\text{КОГ}} \sim 10^{-3} \text{ с}$.

Видимостью интерференционных полос называют величину

$$V = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}.$$

Если $t \geq t_{\text{КОГ}}$, то складываемые колебания не когерентны и не интерферируют ($V = 0$). Глаз уверенно различает полосы, если их видимость $V \geq 0,1$ т.е. если $I_{\text{min}} < 0,82 I_{\text{max}}$.

Для улучшения временной когерентности в опыте Юнга необходимо уменьшать размер d .

Пространственная когерентность.

Если источник света S , служащий для создания в опыте Юнга источников S_1 и S_2 не точечный, например, ярко освещённая щель конечной ширины, то интерференционные полосы, получающиеся на экране от различных узких щелей, на которые можно мысленно разбить щель S , смещены друг относительно друга. Видимость

интерференционных полос уменьшается по мере увеличения ширины b щели S .

Когерентность колебаний, которые совершаются в один и тот же момент времени в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, называют пространственной когерентностью (в отличие от временной когерентности колебаний, совершающихся в одной и той же точке, но в разные моменты времени).

Световая волна, излучаемая точечным источником, обладает полной пространственной когерентностью, так же как и идеальная плоская волна.

Пространственная когерентность сохраняется по всему поперечному сечению пучка света, излучаемого лазером.

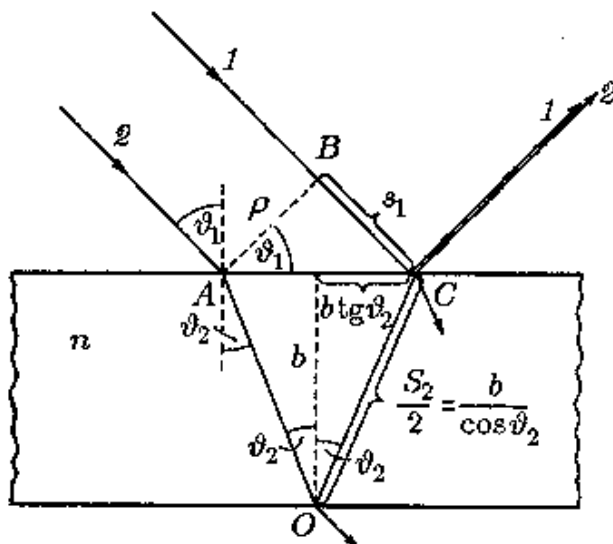
Частично когерентный свет, общая интенсивность которого I , можно рассматривать как совокупность двух составляющих: когерентной с интенсивностью $\gamma \cdot I$ и некогерентной с интенсивностью $(1 - \gamma) \cdot I$, где γ — степень когерентности света.

При наложении частично когерентных волн с интенсивностями I_1 и I_2 интерферируют только их когерентные составляющие. Некогерентные составляющие создают равномерно освещённый фон интерференционной картины.

В этом случае

$$V = \frac{2\gamma\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Если $I_1 = I_2$, то $V = \gamma$.



Интерференция света в тонких плёнках

При падении
световой волны на
тонкую прозрачную

пластинку или плёнку происходит отражение от обеих поверхностей пластинки. В результате возникают две световые волны, которые, при определённых условиях могут интерферировать. Падающую волну можно рассматривать как параллельный пучок лучей. Пластинка отбрасывает вверх два параллельных пучка света, из которых один образовался за счёт отражения от верхней поверхности пластинки, а второй – от нижней поверхности.

Кроме этих двух пучков пластинка отбросит вверх пучки, возникшие в результате трёхкратного, пятикратного и т.д. отражения от поверхностей пластинки. Однако ввиду их малой интенсивности эти пучки можно не принимать во внимание.

Оптическая разность хода между лучами 1 и 2

$$\Delta = ns_2 - s_1 = n \frac{2b}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

Произведя замену $n \sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1$ и учитывая, что

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}$$

Получаем

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}.$$

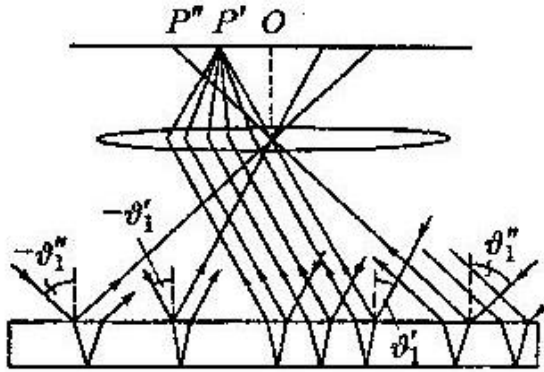
В точке С отражение происходит от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной. Поэтому фаза волны претерпевает изменение на π . В точке О отражение происходит от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной, так что скачка фазы не происходит.

В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз, равная π . Её можно учесть, добавив к разности хода $\frac{\lambda_0}{2}$. В результате

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2}.$$

1. Плоскопараллельная пластинка.

Волны 1 и 2 могут интерферировать, если будут соблюдены условия временной и пространственной когерентности.



Для соблюдения временной когерентности необходимо, чтобы Δ была меньше длины когерентности

$$l_{\text{КОГ}} \sim \lambda^2 / \Delta\lambda \approx \lambda_0^2 / \Delta\lambda_0, \text{ т.е.}$$

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0} \Rightarrow b < \frac{\lambda_0 \left(\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} + \frac{1}{2} \right)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}}.$$

С учётом некоторых допущений

$$(\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} \sim 1 \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{2} \ll \lambda_0^2 / \Delta\lambda_0) \text{ получают } b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0}.$$

Если взять $\lambda_0 \sim 500 \text{ нм}$ ($5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$) и $\Delta\lambda_0 \sim 2 \text{ нм}$, то получаем

$$b_{\text{max}} \approx 0,06 \text{ мм}.$$

Для соблюдения пространственной когерентности рассматривают **радиус когерентности**, который равен

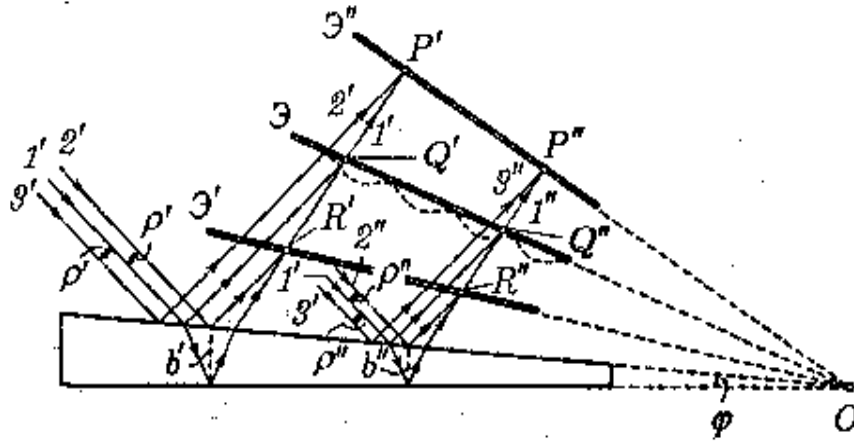
$$\rho = 2b \cdot \operatorname{tg} \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_1 = \frac{b \cdot \sin 2\vartheta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}}.$$

Для солнечного света $\rho \sim 0,05 \text{ мм}$ и при $\vartheta_1 = 45^\circ$ получаем $b \approx \rho \approx 0,05 \text{ мм}$.

Т.о. для наблюдения интерференции толщина пластинки не должна превышать несколько сотых миллиметра.

На практике интерференцию от плоскопараллельной пластинки наблюдают, поставив на пути отражённых пучков линзу, которая собирает лучи в одной из точек экрана, расположенного в фокальной плоскости линзы. На экране возникает система чередующихся светлых и тёмных круговых полос с центром в точке О. Каждая полоса образована лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом ϑ_1 (**полосы равного наклона**).

2. Пластинка переменной толщины.



Интерференционная картина, получающаяся при отражении плоской волны от клина, оказывается локализованной в некоторой области вблизи поверхности клина, причём эта область тем уже, чем меньше степень пространственной когерентности падающей волны. При освещении клина светом, испускаемым лазером, при любом расстоянии экрана от клина на нём будет наблюдаться интерференционная картина в виде полос, параллельных вершине клина O.

Отчетливость картины уменьшается при перемещении от вершины клина к его основанию.

При наблюдении в белом свете полосы будут окрашенными (радужная окраска цветов побежалости на стали, в мыльных плёнках, в пятнах нефтепродуктов на воде и т.д.). Эти полосы называют **полосами равной толщины**.

Полосы равного наклона получаются при освещении пластинки постоянной толщины ($b = \text{const}$) рассеянным светом, в котором содержатся лучи различных направлений ($\vartheta_1 = \text{var}$).

Полосы равной толщины наблюдаются при освещении пластинки переменной толщины ($b = \text{var}$) параллельным пучком света ($\vartheta_1 = \text{const}$).

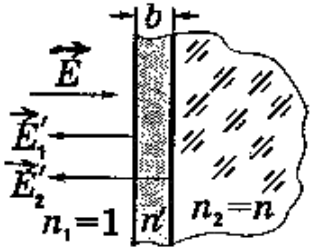
Интерференция от тонких плёнок может наблюдаться не только в отражённом, но и в проходящем свете.

Просветление оптики.

Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением $\sim 4\%$ падающего света. В сложных оптических системах такие отражения совершаются многократно и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины.

В просветлённой оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая плёнка вещества с показателем преломления

$$n' \approx \sqrt{n}.$$



Толщина плёнки подбирается так, чтобы волны, отражённые от обеих её поверхностей, погашали друг друга.

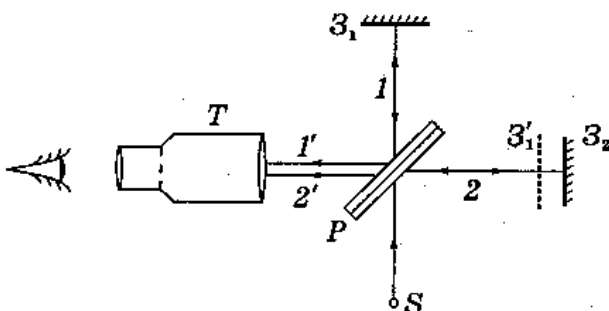
$$2bn' = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{2\sqrt{n}}.$$

Интерферометры.

Интерферометры – это приборы, принцип работы которых основан на явлении интерференции. Эти приборы могут применяться для очень точного измерения линейных и угловых размеров, например для измерения толщины плёнки, наносимой на кварцевую пластину при изготовлении микросхем ЧИП. Точность измерения сравнима с длиной волны видимого света.

Один из наиболее известных интерферометров – интерферометр Майкельсона.



Пучок света от источника S падает на полупрозрачную пластинку P , которая разделяет падающий свет на два взаимно перпендикулярных пучка 1 и 2 одинаковой интенсивности. Пучок 1, отражённый от зеркала Z_1 , вторично падает на пластинку P , где снова разделяется на две части. Одна из них отражается в сторону зрительной трубы T , другая возвращается к источнику S и не представляет интереса.

Пучок 2, прошедший пластинку P , отражается от зеркала Z_2 , возвращается к пластине P , где опять разделяется на две части, одна из которых попадает в трубу T .

Зеркало Z_1 неподвижно, а зеркало Z_2 можно перемещать поступательно и изменять его наклон.

Если заменить мысленно зеркало Z_I его мнимым изображением $Z_I'^{21}$, то пучки 1' и 2' можно рассматривать как, возникающие при отражении от прозрачной «пластинки», ограниченной плоскостями Z_I и Z_I' .

При соблюдении условий временной и пространственной когерентности пучки 1' и 2' будут интерферировать. Смещение картины на одну полосу соответствует перемещению зеркала Z_2 на половину длины волны. Существуют методы, позволяющие обнаружить смещение картины на 0,001 полосы.

Лекция 14

Дифракция света

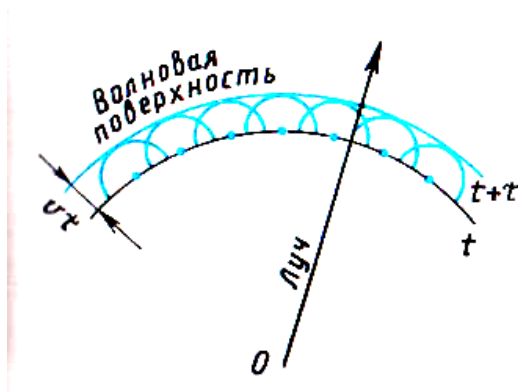
Дифракцией называют совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики.

Между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн.

Перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией, а перераспределение интенсивности, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

Если лучи от источника света S , падающие на препятствие и лучи, идущие в точку наблюдения P , образуют практически параллельные пучки, то говорят о **дифракции Фраунгофера** (дифракция в параллельных лучах). В случае непараллельных лучей между препятствием и экраном говорят о **дифракции Френеля**.

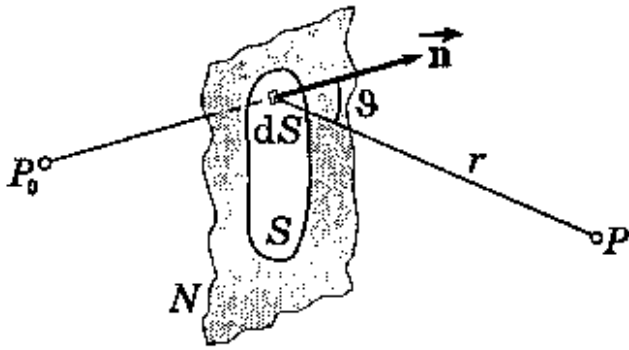
Гюйгенс предложил каждую точку среды, которой достигла волна, рассматривать как источник вторичных сферических волн, распространяющихся по всем направлениям со скоростью, свойственной среде.



Огибающая поверхность, т.е. поверхность, касающаяся всех сферических вторичных волн в том положении, которого они достигнут к моменту времени t , представляет собой волновой фронт в этот момент.

При применении принципа Гюйгенса центры вторичных волн можно выбирать наиболее удобным для решения конкретной задачи способом.

Френель, заимствовав из принципа Гюйгенса представление о вторичных волнах, применил к ним законы интерференции, т.е. при использовании **принципа Гюйгенса-Френеля** для рассмотрения конкретной задачи используется информация не только об амплитуде вторичных волн, но и о их фазе. Правило построения огибающей заменяется расчётом взаимной интерференции вторичных волн.



Рассмотрим преграду N с некоторым отверстием, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника P_0 и определим напряжённость электрического поля E в любой точке P за преградой.

Каждый элемент dS волновой поверхности S служит источником вторичной световой волны, амплитуда которой пропорциональна величине

элемента dS .

Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием r от источника по закону

$$A \sim 1/r.$$

Следовательно, от каждого участка световой поверхности в точку P , лежащую перед этой поверхностью, приходит колебание

$$dE = K \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr), \quad \text{где}$$

ωt — фаза колебаний в месте расположения волновой поверхности ;

r — расстояние от dS до точки P ;

$k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Коэффициент K зависит от угла ϑ между нормалью \vec{n} к элементу dS и направлением от dS к точке P , и монотонно убывает с ростом угла ϑ .

Множитель a_0 определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится dS .

Результирующее колебание в т. P представляет собой суперпозицию колебаний взятых для всей волновой поверхности S :

$$E = \int_S K(\vartheta) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr) dS.$$

Суть принципа Гюйгенса-Френеля в следующем: для определения колебания в точке P , лежащей перед некоторой поверхностью S , надо найти колебания, приходящие в эту точку от всех элементов dS поверхности S и затем сложить их с учётом амплитуд и фаз. При этом предполагается, что все элементы поверхности S взаимно когерентны.

Если рассматривать несколько первых зон (m – мало), то слагаемым $\left(m^2 \frac{\lambda^2}{4}\right)$ можно пренебречь из-за малости λ . В то же время $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 \approx 2ah_m$ т.к. $a \gg h_m$.

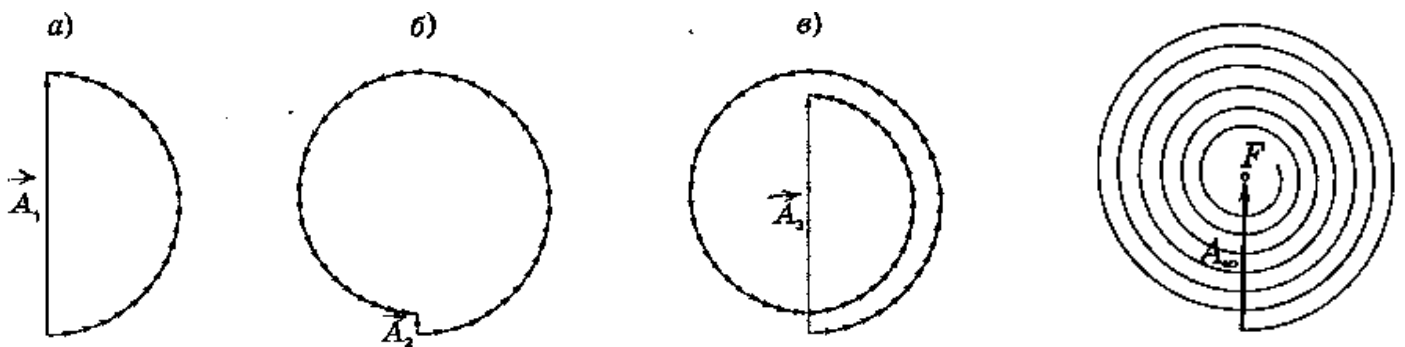
Т.о. $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$. При $a=b=1\text{ м}$ и $\lambda=5 \cdot 10^{-7}\text{ м}$ получаем для 1-ой зоны $r_1 = 0,5\text{ мм}$.

Если **волна плоская** ($a \rightarrow \infty$) то $r_m = \sqrt{m\lambda b}$.

Результирующая амплитуда (следовательно, и интенсивность) зависит от того, чётное или нечётное число m зон Френеля уместится в отверстии. Если число зон нечётное, в т. P наблюдается максимум, если же число зон чётное – минимум.

Спираль Френеля

Разобьём мысленно волновую поверхность на очень узкие кольцевые зоны с амплитудами $d\vec{A}$, которые с увеличением r будут убывать по модулю и отставать по фазе от колебаний, создаваемых предыдущей зоной. Изобразив отставание по фазе поворотом каждого вектора $d\vec{A}$ против часовой стрелки на соответствующий угол, получаем цепочку векторов, векторная сумма которых и есть результирующая амплитуда колебаний в т. P .



- а) – результат действия 1-й зоны Френеля;
- б) – результат действия первых двух зон Френеля;
- в) – результат действия первых трёх зон Френеля.

Цепочка по мере увеличения числа узких кольцевых зон «закручивается» в спираль, и в результате амплитуда от действия всех зон (всей волновой поверхности) должна равняться A_∞ .

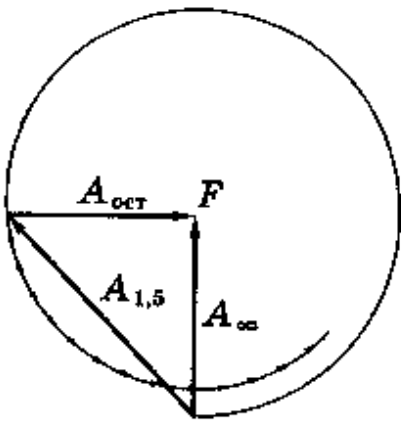
Видно, что амплитуда колебаний в точке P при наличии преграды с круглым отверстием, открывающим только 1-ю зону Френеля, в 2 раза больше,

а интенсивность в 4 раза больше ($I \sim A^2$) чем от полностью открытой волновой поверхности (преграды вообще нет).

При отверстии в преграде, открывающем для точки P две зоны Френеля, интенсивность в этой точке падает практически до нуля.

Дифракция Френеля от круглого диска

Рассмотрим спираль Френеля для непрозрачного диска, перекрывающего, например, 1,5 зоны Френеля.



Результирующий вектор \vec{A}_∞ при полностью открытой волновой поверхности можно представить как сумму двух векторов:

$$\vec{A}_\infty = \vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{ост}.$$

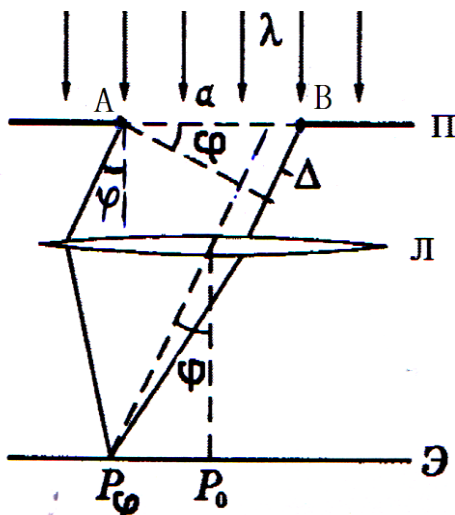
Так как первые полторы зоны закрыты, то остаётся только вектор $\vec{A}_{ост}$ от всех остальных зон. Этот вектор по модулю лишь немного меньше вектора \vec{A}_∞ .

В центре геометрической тени за непрозрачным диском **всегда находится светлое пятно (пятно Пуассона).**

Дифракция Фраунгофера

На дифракционный объект (отверстие, щель, царапина, пылинка и т.д.) падает плоская волна и дифракционную картину наблюдают на достаточно большом расстоянии, т.е. практически в параллельных лучах.

Дифракция Фраунгофера на щели



Пусть параллельный пучок лучей падает перпендикулярно на непроницаемую плоскость Π с длинной прямоугольной щелью, ширина которой a соизмерима с длиной волны света: $AB = a$. За плоскостью Π , параллельно ей ставится линза L , в фокальной плоскости которой на экране \mathcal{E} можно наблюдать дифракционную

картину – чередующиеся светлые и темные полосы, параллельные щели.

Для расчета дифракционной картины используется принцип Гюйгенса-Френеля, согласно которому каждая точка волновой поверхности, совпадающей с плоскостью щели, становится источником новых когерентных волн, то есть из каждой точки под всевозможными углами будут выходить когерентные лучи. Линза собирает пучок параллельных лучей, выходящих из точек щели под некоторым углом φ к падающим на нее лучам в одну точку в фокальной плоскости. В результате наложения всех волн в этой точке, в зависимости от фазовых соотношений между колебаниями, возбуждаемыми волнами, может получиться усиление или, наоборот, ослабление интенсивности вплоть до гашения света. Все лучи, идущие от щели в том же направлении, что и падающие, придут в одинаковой фазе. В центре дифракционной картины в точке P_0 получается максимум.

В точку P_φ дифракционной картины придут когерентные волны с одинаковой амплитудой от разных точек щели, но с разными фазами: разность фаз δ от волн, идущих от краев щели, зависит от оптической разности хода этих волн $\Delta = a \sin \varphi$ согласно известному соотношению

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda},$$

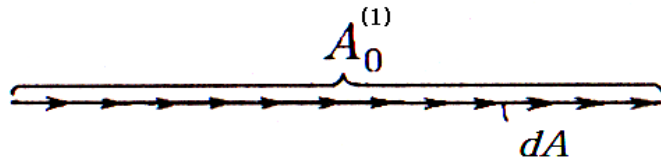
где λ – длина волны света, то есть

$$\delta = \frac{2\pi \cdot a}{\lambda} \sin \varphi$$

Разобьем щель a на очень узкие по ширине одинаковые зоны-полоски, параллельные боковым граням щели. Суммирование волн, пришедших в точку P_φ проведем с помощью векторной диаграммы. От каждой полоски амплитуда в точке наблюдения (в точке P_φ) одинакова и равна dA (здесь для удобства dE_m заменили на dA). В точке P_0 между dA нет сдвига по фазе и поэтому

$$A_O^{(1)} = dA + dA + \dots + dA ,$$

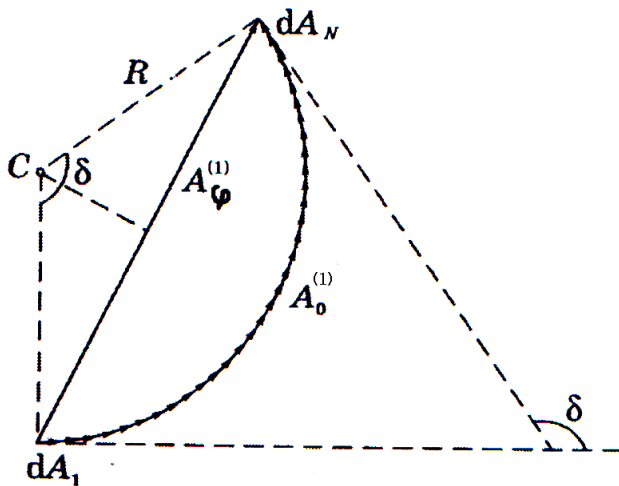
где индекс (1) у A_O отмечает, что это амплитуда волны от одной щели. То есть эта цепочка образует прямую, что соответствует максимуму интенсивности .



В точке P_φ при графическом изображении мы получим цепочку векторов $d\vec{A}_i$, одинаковых по модулю и повернутых друг относительно друга на один и тот же угол; а разность фаз между $d\vec{A}_1$ и $d\vec{A}_N$, где N – число полосок в щели, равно

$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \varphi .$$

Это сложение показано на рисунке.



Результирующая амплитуда изобразится вектором $A_\varphi^{(1)}$ – хордой окружности с центром в точке C .

$$\text{Видно, что } \frac{A_\varphi^{(1)}}{2} = R \sin(\delta/2) ,$$

$A_O^{(1)} = R \cdot \delta$, где R - радиус окружности. Исключив R , получим

$$A_\varphi^{(1)} = A_O^{(1)} \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} .$$

$$\text{Но } \frac{\delta}{2} = \pi \frac{\Delta}{\lambda} = \pi \frac{a \sin \varphi}{\lambda} . \text{ В итоге}$$

$$A_\varphi^{(1)} = A_O^{(1)} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}} \right| ,$$

где $A_0^{(1)}$ – амплитуда колебаний дифракционного максимума нулевого порядка, то есть, при $\varphi = 0$. Модуль ставится потому, что амплитуда всегда положительна.

$A_\varphi^{(1)}$ обращается в нуль для углов φ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} = m \pi \quad \text{или} \quad a \sin \varphi = m \lambda, \quad \text{где} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Последнее выражение определяет положение минимумов (число m является номером минимума). Кроме того из этого выражения видно, что уменьшение ширины щели a приводит к расширению дифракционной картины. Между минимумами располагаются максимумы. Амплитуда $A_\varphi^{(1)}$ в максимумах определяется максимумами функции

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin \psi}{\psi}, \quad \text{где} \quad \psi = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}.$$

Амплитуда имеет максимум при выполнении условия

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\sin \psi}{\psi} \right) = 0, \quad \text{то есть} \quad \frac{\cos \psi}{\psi} - \frac{\sin \psi}{\psi^2} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \psi = \psi.$$

Очевидное решение $\frac{\pi a \sin \varphi_0}{\lambda} = 0$, что соответствует центральному максимуму. Последующие решения дают:

$$\frac{\pi a \sin \varphi_1}{\lambda} = \pm 1,43\pi; \quad \frac{\pi a \sin \varphi_2}{\lambda} = \pm 2,46\pi; \quad \frac{\pi a \sin \varphi_3}{\lambda} = \pm 3,47\pi; \dots$$

Условия 1-го, 2-го и 3-го максимумов можно записать в виде:

$$a \sin \varphi_1 = \pm 1,43\lambda; \quad a \sin \varphi_2 = \pm 2,46\lambda; \quad a \sin \varphi_3 = \pm 3,47\lambda.$$

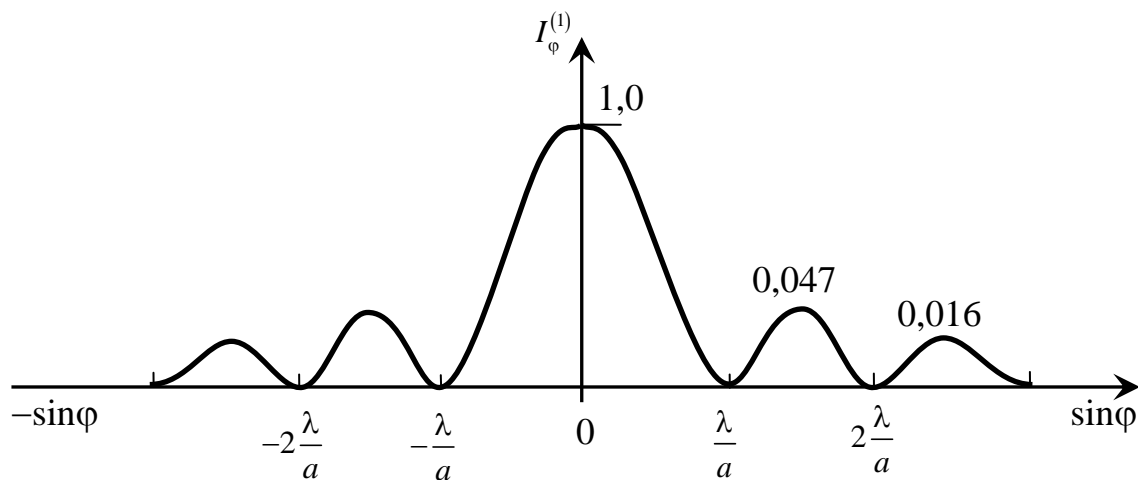
Так как интенсивность монохроматической волны пропорциональна квадрату амплитуды $A_{\varphi}^{(1)}$, можно записать

$$I_{\varphi}^{(1)} = I_O^{(1)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi} \right)^2.$$

Приняв $I_O^{(1)} = 1$, получим, что интенсивности центрального (нулевого) и боковых (первого, второго, третьего) максимумов относятся друг к другу, как

$$I_O^{(1)} : I_1^{(1)} : I_2^{(1)} : I_3^{(1)} : \dots = 1 : 0,047 : 0,016 : 0,008 : \dots$$

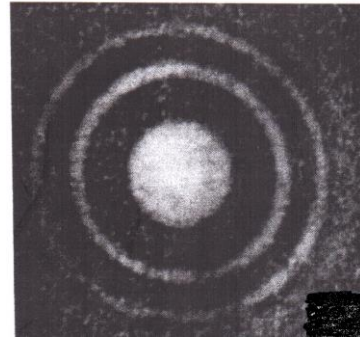
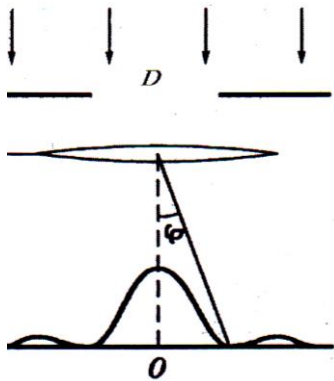
В центральном максимуме сосредоточена основная доля световой энергии, проходящей через щель. Ниже представлено распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы (без соблюдения масштаба). Угловая полуширина центрального максимума равна $\frac{\lambda}{a}$ (для малых углов $\sin \varphi = \varphi$..).



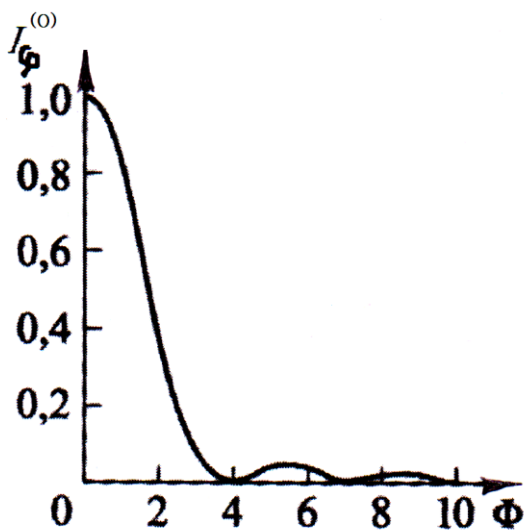
Дифракция Фраунгофера от круглого отверстия

Дифракцию Фраунгофера от круглого отверстия диаметром D можно наблюдать на удаленном экране или в фокальной плоскости собирающей линзы, направив на отверстие в непрозрачной преграде нормально плоскую световую

волну. Дифракционная картина будет иметь вид центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.



Ниже изображена зависимость интенсивности света $I_{\varphi}^{(o)}$ от величины $\Phi = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \varphi$. Имеется главный максимум при $\varphi = 0$ (в него все вторичные волны



приходят в одинаковых фазах) и ряд максимумов (светлые кольца) и минимумов (темные кольца), тем более близких между собой, чем больше D и чем меньше λ . Индекс (о) у I_{φ} отмечает, что это интенсивность света при дифракции от круглого отверстия.

Соответствующий расчет дает для первого минимума (первого темного кольца): $\sin \varphi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

Для экрана, установленного на большом расстоянии L от преграды с отверстием, с учётом малости угла φ_1 ($\sin \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{d_1}{2L}$), получаем для диаметра первого тёмного кольца:

$$d_1 = 2,44L \frac{\lambda}{D}.$$

В центре фраунгоферовой дифракционной картины от круглого отверстия всегда образуется максимум.

Подавляющая часть светового потока ($\sim 84\%$), проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого пятна, которое можно рассматривать как изображение удалённого точечного источника, уширенного дифракцией от краёв круглого отверстия диаметра D . Размер дифракционной картины тем меньше, чем больше диаметр отверстия.

Случай круглого отверстия на практике представляет большой интерес, так как все оправы линз и объективов имеют обычно круглую форму.

Критерий применимости геометрической оптики

Пусть на отверстие падает плоская волна. Для m -ой зоны Френеля ($a \rightarrow \infty$) имеем:

$$r_m = \sqrt{m\lambda b} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\lambda b}.$$

Если размер неоднородности h намного меньше 1-ой зоны Френеля ($h \ll \sqrt{\lambda b}$), то наблюдают дифракцию Фраунгофера.

Если размер h сравним с размером 1-ой зоны Френеля (либо чуть меньше, либо равен нескольким первым зонам Френеля) т.е. $h \sim \sqrt{\lambda b}$, то наблюдают дифракцию Френеля.

Если размер неоднородности значительно больше чем несколько первых зон Френеля $h \gg \sqrt{\lambda b}$, то надо пользоваться только законами геометрической оптики.

Лекция 15

Дифракционная решётка

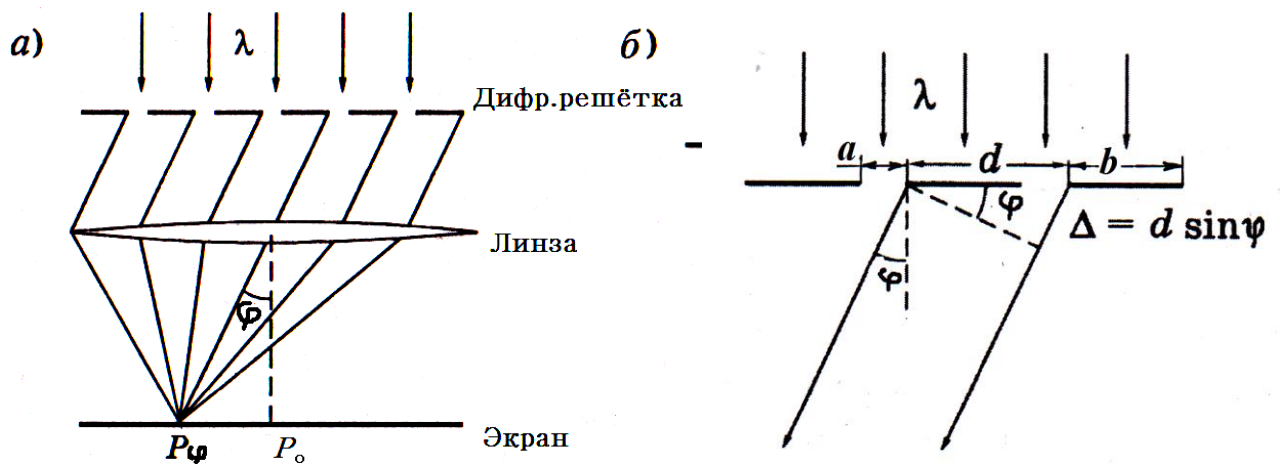
Дифракционную решётку может представлять система параллельных щелей одинаковой ширины a , находящихся друг от друга на одинаковом расстоянии b . Величина $d = a + b$ называется постоянной решётки или её периодом.

Традиционным способом изготовления дифракционной решётки является нанесение на стеклянную пластинку параллельных штрихов через одинаковые интервалы с помощью делительной машины, снабжённой алмазным резцом (штрихи свет не пропускают, обеспечивая одинаковые непрозрачные промежутки между щелями). В настоящее время разработаны и другие технологии изготовления дифракционных решёток.

Общий размер решётки в направлении, перпендикулярном к её элементам

$$l = N \cdot d,$$

где N – число штрихов решётки.



Пусть на решётку падает плоская монохроматическая волна перпендикулярно её плоскости. Наблюдение дифракционной картины производится в параллельных лучах с помощью линзы, собирающей свет на экран, помещённый в её фокальной плоскости или на значительном удалении экрана от места расположения дифракционной решетки.

При дифракции на решётке колебания во всех точках щелей происходят в одной фазе, поскольку эти точки принадлежат одной и той же волновой поверхности. Следовательно, колебания, приходящие в точку наблюдения P_0 , P_φ , ... , от разных щелей когерентны. Для нахождения результирующей амплитуды (и интенсивности) необходимо найти фазовые соотношения между этими когерентными колебаниями.

При расчёте дифракционной картины на экране, необходимо учитывать интерференцию вторичных волн как от разных участков одной щели (дифракция Фраунгофера от щели), так и от разных щелей решётки (многолучевая интерференция). Для учёта многолучевой интерференции также как и при рассмотрении дифракции Фраунгофера на щели удобно использовать метод векторных диаграмм.

В фокус линзы, т.е. в середину дифракционной картины, когерентные колебания от всех щелей приходят в одинаковой фазе. Это означает, что если амплитуда от одной щели равна A_{01} , а число щелей в решётке N , то результирующая амплитуда в точке P_0 равна

$$A_0 = A_{01}N.$$

В точку P_φ придут колебания одинаковой амплитуды $A_{\varphi 1}$, но с разными фазами: разность фаз колебаний от соседних щелей одинакова и равна $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \varphi$, так как разность хода для них $\Delta = d \cdot \sin \varphi$.

Выберем начало отсчёта времени так, чтобы фаза электрического поля, создаваемого в точке наблюдения P_φ первой (крайней) щелью, была равна нулю. Векторная диаграмма в этом случае – ломаная линия, состоящая из звеньев одинаковой длины $A_{\varphi 1}$, причём каждое звено образует одинаковый угол γ с предыдущим звеном.

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi, \quad \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \varphi, \quad I_{01} - \text{интенсивность от одной}$$

щели при $\varphi = 0$.

Очевидно $A_\varphi = 0$, когда векторная диаграмма образует замкнутый многоугольник. Первый раз цепочка векторов замыкается и вектор \vec{A}_φ обращается в нуль, когда угол $N\gamma$ становится равным 2π ; затем 4π , 6π и т.д. Цепочка распрямляется, и A_φ имеет наибольшее возможное значение, а именно: $A_\varphi = N A_{\varphi 1}$ ($I_\varphi = N^2 I_{\varphi 1}$), если $\gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ т.е. векторная цепочка вытягивается в прямую. При $\sin \frac{\gamma}{2} \rightarrow 0$, будут максимумы

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}, \quad \sin \frac{N\gamma}{2} \approx N \frac{\gamma}{2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\sin \frac{N\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right| = N \right).$$

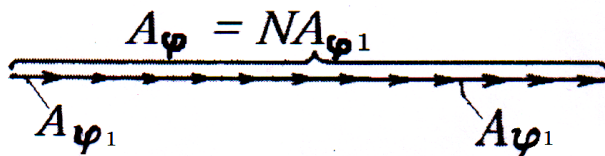
С учётом того, что $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \varphi$ и что в максимумах

$\frac{\gamma}{2} = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) получаем условие максимумов:

$$d \cdot \sin \varphi_m = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Волны от соседних щелей усиливают друг друга, т.е. волны от всех щелей усиливают друг друга. Это означает, что последнее соотношение определяет направления, по которым образуются главные максимумы.

Графически сложение амплитуд от отдельных щелей, приводящее к образованию главных максимумов показано на рисунке.



Амплитуда A_φ главных максимумов, не одинакова. Она модулируется

множителем $\left| \frac{\sin \delta / 2}{\delta / 2} \right|$, т.е. амплитуда главных максимумов модулируется

дифракцией Фраунгофера от отдельных щелей. Максимальное значение

$\left| \frac{\sin \delta / 2}{\delta / 2} \right|$ равно единице. Оно достигается при условии $\delta / 2 = 0$, которое соответствует центральному максимуму ($\varphi = 0$). Амплитуда всех остальных главных максимумов меньше. Если главный максимум приходится на направление, для которого $\sin \delta / 2 = 0$ (а значит $a \sin \varphi = m\lambda$), то этот главный максимум отсутствует.

Целое число m в условии главных максимумов называют порядком главного максимума или порядком спектра.

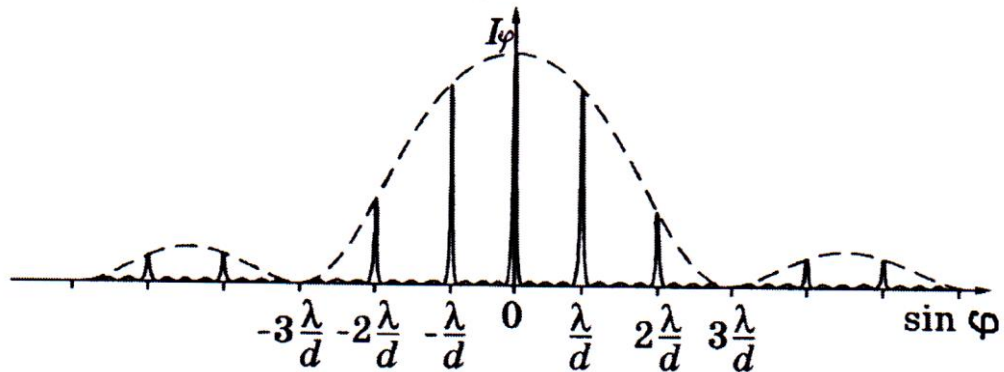
Минимумы излучения образуются тогда, когда в результате сложения векторов амплитуд от отдельных щелей получается результирующая нулевая амплитуда, т.е. $A_\varphi = 0$. Это происходит, если $N\gamma$ будет равен чётному числу π . Поэтому условие минимумов амплитуд (и интенсивностей) в дифракционной картине записывается в виде

$$N\gamma = 2\pi m' \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Между двумя соседними главными максимумами имеется $(N - 1)$ минимумов. Ясно, что между минимумами должны быть максимумы, которые называются второстепенными. Следовательно, между двумя соседними главными максимумами имеется $(N - 2)$ второстепенных максимумов. На эти максимумы и минимумы накладываются минимумы, возникающие при дифракции от отдельной щели. Второстепенные максимумы слабы по сравнению с главными максимумами. Они создают более или менее равномерный слабый фон. На нём выступают узкие и резкие

главные максимумы, в которых концентрируется практически весь дифрагированный свет.

На эти максимумы и минимумы накладываются минимумы, возникающие при дифракции от отдельной щели. Наиболее яркими получаются максимумы в пределах центрального максимума при дифракции от одной щели.



Пунктирная кривая изображает интенсивность от одной щели, умноженную на N^2 .

Дифракционная решётка как спектральный прибор

Решётка в каждом порядке $m \neq 0$ разлагает падающий на неё свет в спектр различных порядков (наибольшее отклонение в каждом порядке испытывает красная часть спектра).

Основными характеристиками любого спектрального прибора являются угловая дисперсия, разрешающая способность и область дисперсии.

1. Угловая дисперсия D характеризует степень пространственного (углового) разделения волн с различными длинами λ . По определению,

$$D = d\varphi/d\lambda.$$

Дифференцируя формулу $d \cdot \sin \varphi_m = m\lambda$ получаем
 $d \cdot \cos \varphi_m d\varphi = m \cdot d\lambda$, откуда

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}.$$

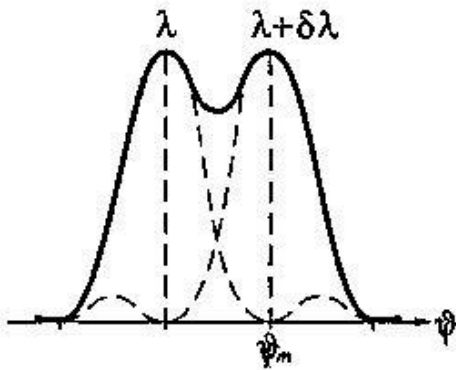
2. Разрешающая способность R. По определению,

$$R = \lambda / \delta\lambda, \text{ где}$$

$\delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются ещё раздельно, т.е. **разрешаются**.

Согласно **критерию Рэлея**, спектральные линии с разными длинами волн, но **одинаковой** интенсивности, считаются разрешёнными, если главный

максимум одной спектральной линии совпадает с первым минимумом другой.



Между двумя максимумами возникает провал, составляющий около 20% от интенсивности в максимумах, и линии ещё воспринимаются раздельно. В этом случае справедливо соотношение

$$R = \lambda / \delta\lambda = m \cdot N.$$

Для повышения разрешающей способности нужно увеличивать число штрихов N в решётке и повышать порядок m .

3. Область дисперсии $\Delta\lambda = \lambda / m$ – это ширина спектрального

интервала, при которой ещё нет перекрытия спектров соседних порядков. Для исследования излучения, занимающего достаточно широкий

спектральный интервал, работают со спектрами низких порядков (обычно второго или третьего).

Дифракция от пространственной решётки

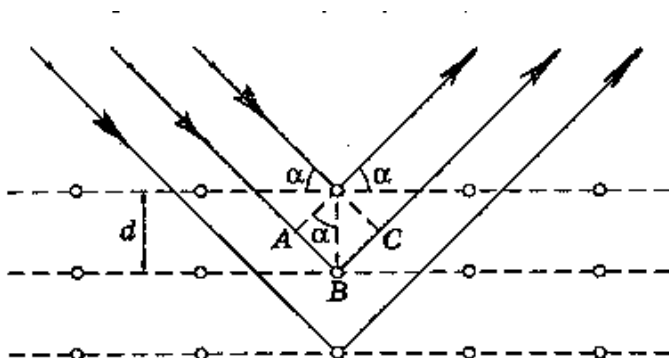
Пространственной или трёхмерной дифракционной решёткой

называют такую оптически неоднородную среду, неоднородности которой периодически повторяются при изменении всех трёх пространственных координат.

Пример такой решётки - кристаллическая решётка твёрдого тела. Частицы, находящиеся в узлах этой решётки (атомы, молекулы или ионы), играют роль упорядоченно расположенных центров, когерентно рассеивающих падающую на них электромагнитную волну.

Постоянные кристаллических решёток значительно меньше длины волны видимого света ($d \sim 0,5 \text{ нм}$, $\lambda \sim 500 \text{ нм}$), поэтому для видимого света кристаллы являются оптически однородными средами (не рассеивающими), но кристаллы представляют естественные дифракционные решётки для рентгеновского излучения.

По методу, предложенному англичанином Брэггом и русским учёным Ю.В.Вульфом, дифракцию рентгеновского излучения в кристалле можно рассматривать как результат зеркального отражения от системы параллельных кристаллических плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решётки.



Вторичные волны, отразившись от разных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой.

Направления, в которых

возникают дифракционные максимумы, определяется **формулой Брэгга-Вульфа**:

$$2d \sin \alpha = \pm m \cdot \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов находит два основных применения.

1. Рентгеновская спектроскопия. Определяя направления максимумов, получающихся при дифракции исследуемого рентгеновского излучения от кристаллов с известной структурой, можно вычислить длины волн.

2. Рентгенно-структурный анализ (изучение структуры кристаллов). Дифракционная картина, зафиксированная на фотоплёнке, называется **рентгенограммой** образца. Расшифровка рентгенограммы позволяет определить структуру кристалла.

Лекция 16

Поляризация света

Свет, испускаемый обычными (нелазерными) источниками, представляет собой набор множества цугов волн, электрические векторы которых \vec{E} колеблются вдоль всевозможных направлений, перпендикулярных лучу.

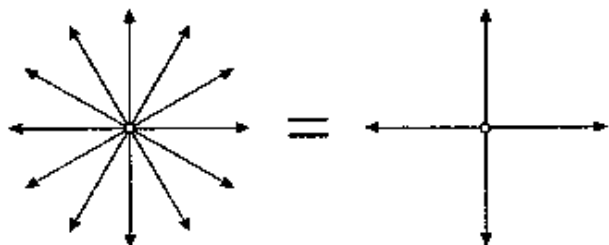
Свет называют **естественным** или **неполяризованным**, если ни одно из указанных направлений колебаний не является преимущественным.

Свет называют частично-поляризованным, если в нём имеется преимущественное направление колебаний вектора \vec{E} .

Если колебания светового вектора происходят только в одной, проходящей через луч плоскости, свет называют **плоско** или **линейно поляризованным**.

Упорядоченность направления вектора \vec{E} может заключаться в том, что вектор \vec{E} поворачивается вокруг луча так, что его амплитуда одновременно

изменяется по величине. В результате конец вектора \vec{E} описывает эллипс. Такой свет называют эллиптически поляризованным.



Естественный свет можно представить как сумму двух некогерентных плоско-поляризованных волн с взаимно ортогональными плоскостями

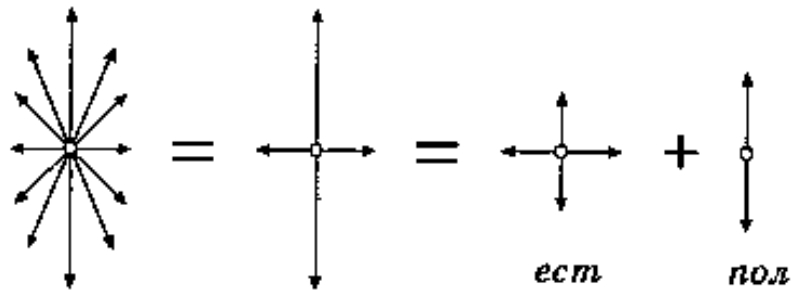
поляризации.

Из естественного света можно получить плоско-поляризованный с помощью приборов, которые называются поляризаторами. Их действие основывается на поляризации света при его отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектрических сред, а также на явлениях двойного лучепреломления и дихроизма.

Поляризаторы свободно пропускают колебания светового вектора, параллельные плоскости, которую называют «плоскостью пропускания поляризатора». Колебания, перпендикулярные к этой плоскости, задерживаются полностью или частично.

Степень поляризации

Частично-поляризованный свет можно представить в виде наложения двух некогерентных плоско-поляризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, но разными по интенсивности. Его также можно рассматривать как сумму естественной (*ест*) и плоско-поляризованной (*пол*) составляющих.



Степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\text{МАКС}} - I_{\text{МИН}}}{I_{\text{МАКС}} + I_{\text{МИН}}} = \frac{I_{\text{ПОЛ}}}{I_0}, \quad \text{где}$$

$I_{\text{ПОЛ}}$ — интенсивность поляризованной составляющей;

$I_0 = I_{\text{МАКС}} + I_{\text{МИН}}$ — полная интенсивность частично-поляризованного света.

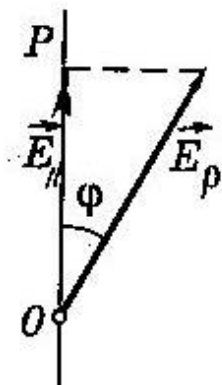
Для плоско-поляризованного света ($I_{\text{ПОЛ}} = I_0$) степень поляризации $P = 1$.

Для естественного света ($I_{\text{ПОЛ}} = 0$) получаем $P = 0$.

Для эллиптически-поляризованного света понятие «степень поляризации» не применимо.

Закон Малюса

Поляризаторы можно использовать и в качестве анализаторов — для определения характера и степени поляризации света.



Пусть на анализатор падает линейно-поляризованный свет, вектор \vec{E}_p которого составляет угол φ с плоскостью пропускания $P-P$ (имеется в виду амплитудное значение вектора \vec{E}_p).

Анализатор пропускает только ту составляющую вектора \vec{E}_p , которая параллельна плоскости пропускания

$$E_{\parallel} = E_p \cos \varphi.$$

Так как $I \sim E^2$, то интенсивность, прошедшего через анализатор света (закон Малюса)

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi$$

Если поставить на пути естественного света поляризатор, то из поляризатора выйдет плоско-поляризованный свет, интенсивность которого

$$I_p = I_{ECT} \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2} I_{ECT}.$$

Через поляризатор и анализатор проходит свет с интенсивностью

$$I_a = \frac{1}{2} I_{ECT} \cos^2 \varphi.$$

Максимальная интенсивность $I_{МАКС} = \frac{1}{2} I_{ECT}$ получается при $\varphi = 0$, а при $\varphi = \pi/2$ интенсивность равна нулю, т.е. скрещенные поляризаторы свет не пропускают.

Вращая поляризатор вокруг направления эллиптически-поляризованного света интенсивность анализируемого света изменяется в пределах от $I_{МАКС}$ до $I_{МИН}$.

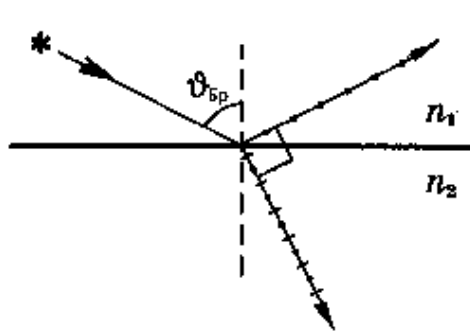
Поляризация при отражении и преломлении

При отражении от проводящей поверхности (металлического зеркала) получается эллиптически-поляризованный свет.

При падении света на границу раздела двух диэлектриков (например, из воздуха на поверхность стеклянной пластинки) под углом отличным от нуля, отражённый и преломлённый лучи оказываются частично поляризованными.

В отражённом луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения, в преломлённом луче – колебания, параллельные плоскости падения.

Закон Брюстера: отражённый свет полностью линейно-поляризован при угле падения равным **углу Брюстера** $\vartheta = \vartheta_{Br}$, который удовлетворяет условию



$$\operatorname{tg} \vartheta_{Br} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{где}$$

$\frac{n_2}{n_1}$ – отношение показателей преломления второй среды и первой.

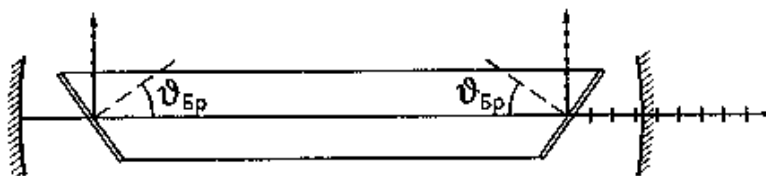
При $\vartheta = \vartheta_{Br}$ отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны.

Проходящий свет поляризован лишь частично.

Степень поляризации проходящего света можно повысить, подвергая его ряду последовательных отражений и преломлений. Это осуществляется в стопе, состоящей из нескольких одинаковых и параллельных друг другу пластин из прозрачного диэлектрика, установленных под углом Брюстера к падающему пучку света (**стопа Столетова**). Если число пластин достаточно велико, то проходящий через стопу свет оказывается практически тоже линейно-поляризованным. В отсутствии поглощения света в стопе

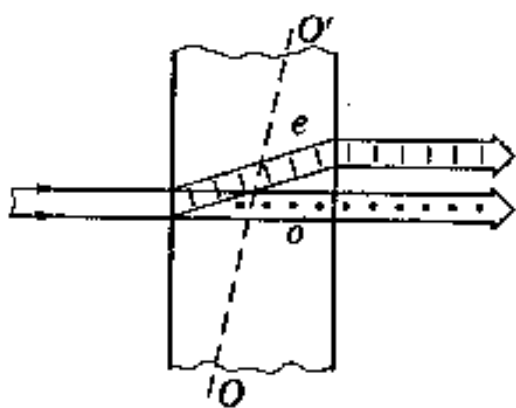
$$I_P = \frac{1}{2} I_{ECT}.$$

Идея стопы нашла высокоэффективное использование в газовых лазерах, где торцы разрядной трубки представляют собой плоскопараллельные стеклянные пластинки, расположенные под углом Брюстера к оси трубки.



Поляризация света при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы кроме кристаллов, принадлежащих кубической системе, наблюдается явление, получившее название двойного лучепреломления.



В кристалле один из лучей, образующихся при двойном лучепреломлении, подчиняется обычным законам преломления света. Его называют обыкновенным лучом и обозначают буквой *o*.

Для другого луча, который называют необыкновенным (его обозначают буквой *e*), отношение синусов угла падения и угла преломления не остаётся постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч отклоняется от нормали и не лежит, как правило, в плоскости падения.

Обыкновенный и необыкновенный лучи линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Это используют при изготовлении поляризаторов в виде *поляризационных призм или поляроидов*.

Поляроиды

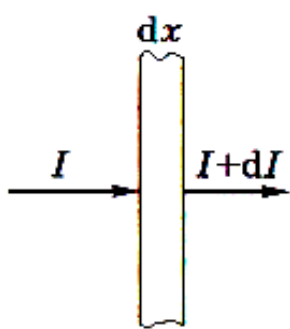
Существуют кристаллы, в которых один из лучей (*o* или *e*) поглощается сильнее другого. Это явление называют дихроизмом и используют для изготовления поляризаторов в виде светофильтров – поляроидов. Поляроиды представляют собой тонкую ($\sim 0,1$ мм) плёнку, линейно поляризующую проходящий через неё свет.

Лекция 17

Взаимодействие света с веществом

Поглощение света

Прохождение световой волны через вещество сопровождается потерей энергии этой волны, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых колеблющимися электронами, а частично во внутреннюю энергию вещества.



Пусть через однородное вещество распространяется параллельный световой пучок. Выделим мысленно в этом веществе бесконечно тонкий плоский слой толщины dx . При прохождении этого слоя интенсивность света уменьшается так, что её убыль можно представить как $-dI$. Эта величина пропорциональна интенсивности в данном поглощении слое и его толщине dx :

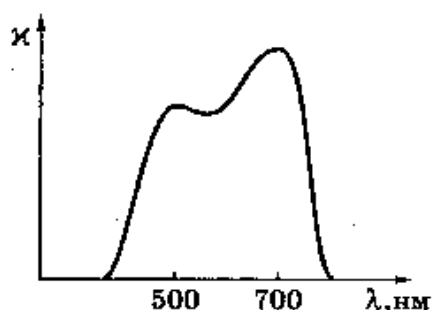
$$-dI = \chi \cdot I \cdot dx, \quad \text{где}$$

χ — коэффициент поглощения среды.

После разделения переменных и интегрирования получаем

$$I = I_0 e^{-\chi x}.$$

Закон Бугера: интенсивность плоской волны монохроматического света уменьшается по мере прохождения через поглощающую среду по экспоненциальному закону.



На рисунке показана зависимость $\chi(\lambda)$ для жидких и твёрдых веществ. Сильное

поглощение обнаруживается в достаточно широком интервале длин волн.

На следующем рисунке приведена

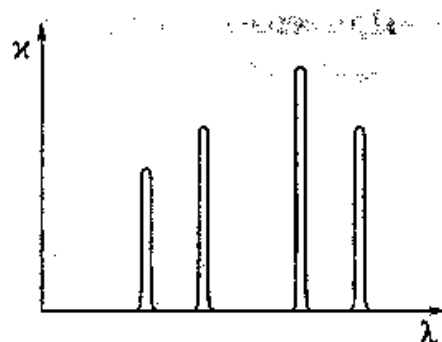
зависимость $\chi(\lambda)$ для газов и паров

металлов при невысоком давлении. Для всех

длин волн $\chi \approx 0$ кроме очень узких

спектральных интервалов $\delta\lambda$. Эти

максимумы соответствуют резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов.



Рассеяние света

Вторичные волны, порождаемые колеблющимися электронами при прохождении света через вещество, оказываются когерентными между собой и распространяясь по всем направлениям интерферируют. **В однородной среде** эти волны гасят друг друга кроме направления распространения первичной волны и рассеяния света не происходит.

В оптически неоднородной (мутной) среде (дым, туман, эмульсии, матовые стёкла и т.п.) вторичные волны дифрагируя на мелких неоднородностях дают дифракционную картину в виде довольно равномерного распределения интенсивности по всем направлениям. Это явление называют рассеянием света.

Для мутной среды с частицами, размеры r_0 которых малы по сравнению с длиной волны λ , справедлив закон Рэлея: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвёртой степени длины волны в вакууме

$$I \sim \lambda^{-4}.$$

Коротковолновая часть спектра рассеивается значительно более интенсивно, чем длинноволновая. Голубой свет, длина волны которого

примерно в 1,5 раза меньше длины волны красного света, рассеивается в 5 раз интенсивнее, чем красный (голубой – цвет рассеянного света, а красноватый – прошедшего).

При $r_0 \sim \lambda$ закон Рэлея нарушается и $I \sim \lambda^{-2}$.

Если размеры неоднородности значительно больше световой волны, то спектральный состав рассеянного света практически совпадает со спектральным составом первичного пучка. Этим объясняется белый цвет облаков.

Молекулярное рассеяние. Абсолютно чистые жидкости и газы слабо рассеивают свет из-за *флуктуаций плотности* в пределах малых объёмов. Молекулярным рассеиванием объясняется голубой цвет неба.

При восходе и заходе Солнца прямой солнечный свет проходит через большую толщу атмосферы, и при этом большая доля коротковолновой части спектра теряется на рассеяние. До поверхности Земли доходит преимущественно красная составляющая спектра. Поэтому восход и заход Солнца кажутся красного цвета.

Ослабление узкого светового пучка. В результате рассеяния интенсивность узкого светового пучка убывает в направлении распространения быстрее чем в случае одного лишь поглощения. В случае мутной среды в законе Бугера вместо коэффициента поглощения χ должен стоять *коэффициент ослабления*

$$\mu = \chi + \chi', \text{ где}$$

χ' – *коэффициент экстинкции*, связанный с рассеивающими свойствами среды.

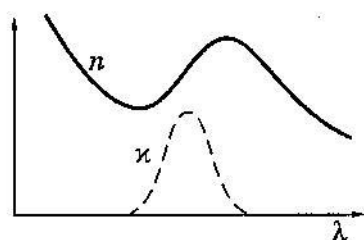
$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

Дисперсия света

Дисперсией света называют явление, обусловленное зависимостью показателя преломления вещества от длины волны

$$n = f(\lambda_0), \quad \text{где}$$

λ_0 — длина волны света в *вакууме*.



Интервал длин волн, в котором $dn/d\lambda_0 < 0$ соответствует **нормальной дисперсии**.

Интервал длин волн, в котором $dn/d\lambda_0 > 0$ соответствует **аномальной дисперсии**.

Область аномальной дисперсии совпадает с полосой поглощения $\chi(\lambda_0)$.

Аналитический вид зависимости $n(\lambda_0)$ в области нормальной дисперсии может быть представлен приближённой формулой

$$n = a + b/\lambda_0^2 = a + \frac{b}{c^2} \nu^2, \quad \text{где}$$

a и b — положительные постоянные, различные для каждого вещества.

c — скорость света в вакууме.

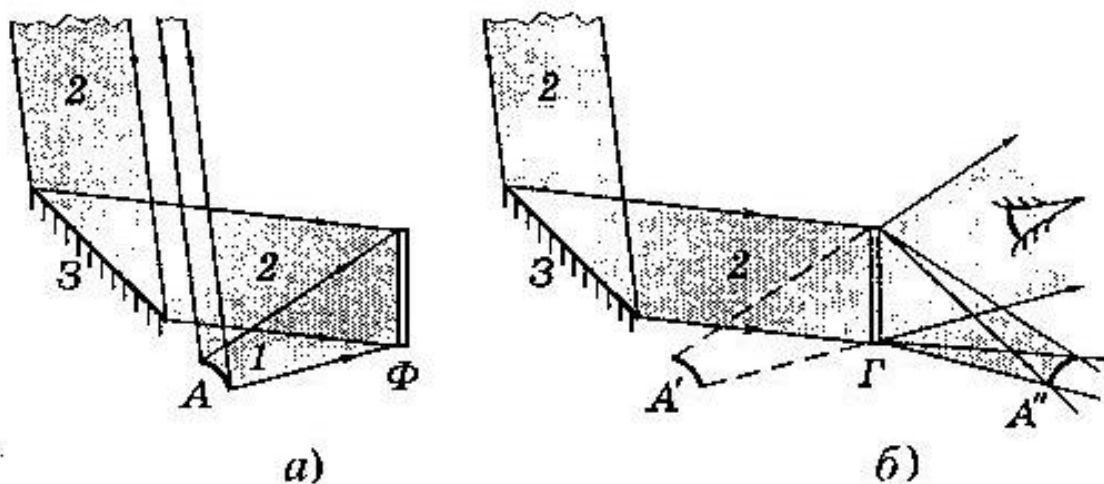
Впервые дисперсия света была исследована Ньютоном при разложении узкого пучка солнечного света в спектр на стеклянной призме.

Лекция 18

Голография

Голографией называют способ записи и последующего восстановления структуры световых волн, основанный на явлениях дифракции и интерференции когерентных световых пучков.

В голографии регистрируется не оптическое изображение предмета (как в фотографии), а **интерференционная картина**, возникающая при наложении световой волны, рассеянной предметом, и когерентной с ней **опорной** волны. Эта интерференционная картина фиксирует информацию о распределении не только амплитуд, но и фаз в **предметной** волне.



Фотопластинка Φ (рис.а) регистрирует интерференционную картину, возникающую при наложении отражённой **предметной волны 1**, рассеянной объектом A , и когерентной с ней **опорной волны 2**. Волна 2 испускается тем же источником света, который освещает объект A , и после отражения от зеркала 3 падает непосредственно на фотопластинку Φ .

Голограмма (интерференционная картина, зафиксированная на фотопластинке после её проявления) в закодированной форме содержит полную информацию об амплитудах и фазах рассеянной предметной волны.

Восстановление (декодирование) изображения предмета показано на рисунке б. Голограмму Γ просвечивают как диапозитив той же опорной волной 2, которая использовалась для её получения, причём при той же ориентации голограммы, что и исходная фотопластинка по отношению к опорной волне. Эта световая волна дифрагирует на голограмме. В результате наблюдаются два объёмных изображения объекта. Мнимое изображение A'

находится в том месте, где был объект A при съёмке и полностью тождественно ему.

Действительное изображение A'' расположено по другую сторону голограммы и является зеркальным изображением объекта.

Обычно пользуются мнимым изображением A' .

Изменяя положение глаза, можно видеть предмет в разных ракурсах и даже заглядывать за него.

Каждый участок голограммы содержит информацию обо всём объекте. С помощью даже небольшого её кусочка можно восстановить изображение всего объекта но менее чёткое и яркое.

На одной фотопластинке можно последовательно записать несколько голограмм от разных объектов. Изображение каждого объекта можно восстановить без помех со стороны других изображений.