МГТУ им. Н.Э. Баумана

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Разобранные задачи по физике
3 семестр

2become1
ICQ: 723124

Москва, 2002

Задача 1.1

Вариант 1

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 ($R1=\frac{1}{2}(R_0+R)$). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=2/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=2/1$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=2\varepsilon,\ \varepsilon_3=2\varepsilon,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon, R\le r<R_1\\ 2\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$$\oiint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\frac{q}{4\pi r^2}$$

и не зависит от диэлектрической проницаемости ε

$$\frac{D(r)}{D(R)}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}q\Big/4\pi r^2\varepsilon_0\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q/8\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$, поэтому $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{\dfrac{2r^3}{R}-r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$,

поэтому

$$P(r)=\begin{cases}q/4\pi r^2-q\Big/4\pi r^2\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q(2\varepsilon-1)/8\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{2r\varepsilon-R(\varepsilon+1)}{(2r-R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Тогда $\sigma'(r) = \begin{cases} -q/4\pi r^2 + q\Big/4\pi r^2\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r - \varepsilon\right), R \le r < R_1 \\ q(2\varepsilon - 1)/8\varepsilon\pi r^2, r \ge R_1 \end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{q}{4\pi R^2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = \dfrac{q(2\varepsilon - 1)}{32\pi\varepsilon R^2}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$.

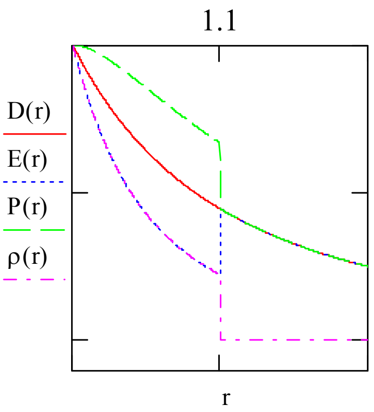
$$\rho'(r) = \begin{cases} -q\Big/2\pi\varepsilon R r^2\left(\dfrac{2}{R}r - 1\right)^2, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{r^2\left(\dfrac{2}{R}r - 1\right)^2}, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_1} E_1(r)dr + \int_{R_1}^{R_0} E_2(r)dr = \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2\left(\frac{2\varepsilon}{R}r - \varepsilon\right)}dr + \int_{R_1}^{R_0} q/8\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2\, dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2r - R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1} + \frac{q}{8\varepsilon\varepsilon_0 r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{24}\right).$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{\ln\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{24}}$.



Вариант 2

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 (R1=½(R_0+R)). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=2/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=1/2$; $R_0/R=3/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=2\varepsilon,\ \varepsilon_3=\varepsilon/2,\ R_0=3R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=2R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2 R-\varepsilon_1 R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{R}r, R\le r<R_1\\ \varepsilon/2, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса $\oiint \vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}\dfrac{qR}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}, R\le r<R_1\\ q/2\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$, $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^3}{r^3}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$

поэтому $P(r)=\begin{cases}q/4\pi r^2-qR/4\pi\varepsilon r^3, R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-2)/4\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{r\varepsilon-R}{r(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$.

Тогда $\sigma'(r)=\begin{cases}-q/4\pi r^2+qR/4\pi\varepsilon r^3, R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-2)/4\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{q}{4\pi R^2}+\dfrac{q}{6\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(3R)=\dfrac{q(\varepsilon-2)}{36\pi\varepsilon R^2}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

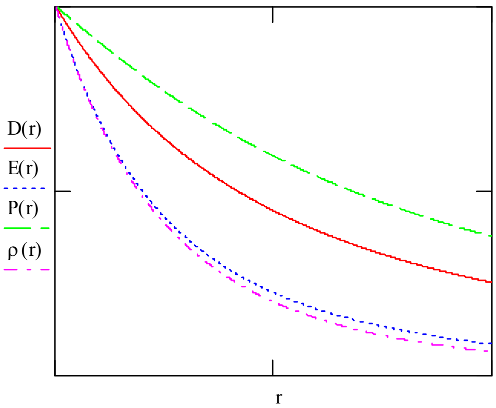
Поэтому $\rho'(r)=\begin{cases}-qR/2\pi\varepsilon r^4, R\le r<R_1\\ 0, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^4}{r^4}, R\le r<R_1\\ 0, r\ge R_1\end{cases}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\frac{qR}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}dr+\int_{R_1}^{R_0}\frac{q}{2\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}dr=-\frac{qR}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\bigg|_R^{R_1}-\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\bigg|_{R_1}^{R_0}=$$

$$=-\frac{q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}-\frac{q}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}+\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}=\frac{11q}{24\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Поэтому $C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{24}{11}\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.



Вариант 3

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 ($R1=½(R_0+R)$). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=2/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=3/2$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=2\varepsilon,\ \varepsilon_3=\tfrac{3}{2}\varepsilon,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon, R\le r<R_1\\ \tfrac{3}{2}\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}q\Big/4\pi r^2\varepsilon_0\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$, $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{\dfrac{2r^3}{R}-r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$,

поэтому

$$P(r)=\begin{cases}q/4\pi r^2-q\Big/4\pi r^2\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q(3\varepsilon-2)/12\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{2r\varepsilon-R(\varepsilon+1)}{(2r-R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Тогда $\sigma'(r) = \begin{cases} -q/4\pi r^2 + q\Big/4\pi r^2\left(\dfrac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right), R \le r < R_1 \\ q(3\varepsilon-2)/12\varepsilon\pi r^2, r \ge R_1 \end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{q}{4\pi R^2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = \dfrac{q(2\varepsilon-1)}{48\pi\varepsilon R^2}$.

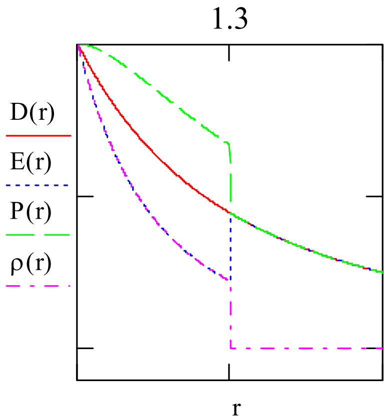
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

Поэтому $\rho'(r) = \begin{cases} -q\Big/2\pi\varepsilon R r^2\left(\dfrac{2}{R}r-1\right)^2, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{r^2\left(\dfrac{2}{R}r-1\right)^2}, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_1} E_1(r)dr + \int_{R_1}^{R_0} E_2(r)dr = \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2\left(\frac{2\varepsilon}{R}r-\varepsilon\right)}dr + \int_{R_1}^{R_0} q/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2\,dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\cdot\left(\ln\frac{16}{9}-\frac{7}{9}\right)$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{\ln\frac{16}{9}-\frac{7}{9}}$.



Вариант 4

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 ($R1=\frac{1}{2}(R_0+R)$). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/2$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=3/1$; $R_0/R=3/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), $\rho'(r)/\rho'(R)$ в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ \varepsilon_3=3\varepsilon,\ R_0=3R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=2R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2 R-\varepsilon_1 R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon}{2R}r+\dfrac{3}{2}\varepsilon, R\le r<R_1\\ 3\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R^2}{r^2}$.

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}q\Big/4\pi r^2\varepsilon_0\left(-\dfrac{\varepsilon}{2R}r+\dfrac{3\varepsilon}{2}\right), R\le r<R_1\\ q/12\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$, $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{-\dfrac{r^3}{2R}+\dfrac{3}{2}r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$,

$$P(r)=\begin{cases} q/4\pi r^2 - q\Big/4\pi r^2\left(-\frac{\varepsilon}{2R}r+\frac{3\varepsilon}{2}\right), R\le r<R_1 \\ q(3\varepsilon-1)/12\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow$$

поэтому

$$\frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-\frac{\varepsilon r}{2}+R(\varepsilon-1)}{(-\frac{r}{2}+\frac{3}{2}R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1 \\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$.

Тогда $\sigma'(r)=\begin{cases}-q/4\pi r^2+q\Big/4\pi r^2\left(-\frac{\varepsilon}{2R}r+\frac{3\varepsilon}{2}\right), R\le r<R_1 \\ q(3\varepsilon-1)/12\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{q}{4\pi R^2}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(3R)=\dfrac{q(3\varepsilon-1)}{96\pi\varepsilon R^2}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

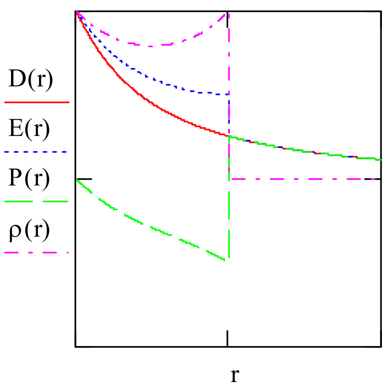
Поэтому $\rho'(r)=\begin{cases}q\Big/8\pi\varepsilon R r^2\left(-\frac{1}{2R}r+\frac{3}{2}\right)^2, R\le r<R_1 \\ 0, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{r^2\left(-\frac{1}{2R}r+\frac{3}{2}\right)^2}, R\le r<R_1 \\ 0, r\ge R_1\end{cases}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2\left(-\frac{\varepsilon}{2R}r+\frac{3\varepsilon}{2}\right)}dr+\int_{R_1}^{R_0}q/12\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2\,dr=\frac{q}{12\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\cdot\left(\frac{4}{3}\ln 2+\frac{7}{6}\right)$$

Поэтому $C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{72\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{8\ln 2+7}$.

1.4



Вариант 5

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 ($R1=\frac{1}{2}(R_0+R)$). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/2$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=1/2$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ \varepsilon_3=\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon}{R}r+2\varepsilon, R\le r<R_1\\ \tfrac{1}{2}\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oint\!\!\oint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}q\Big/4\pi r^2\varepsilon_0\left(-\dfrac{\varepsilon}{R}r+2\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q/2\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}$, $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{-\dfrac{r^3}{R}+2r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$,

поэтому

$$P(r)=\begin{cases}q/4\pi r^2-q\Big/4\pi r^2\left(-\dfrac{\varepsilon}{R}r+2\varepsilon\right), R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-2)/4\varepsilon\pi r^2, r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow\frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-\varepsilon r+R(2\varepsilon-1)}{(-r+2R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Тогда $\sigma'(r) = \begin{cases} -q/4\pi r^2 + q\Big/4\pi r^2\left(-\dfrac{\varepsilon}{R}r + 2\varepsilon\right), R \le r < R_1 \\ q(\varepsilon-2)/4\varepsilon\pi r^2, r \ge R_1 \end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{q}{4\pi R^2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = \dfrac{q(\varepsilon-2)}{16\pi\varepsilon R^2}$.

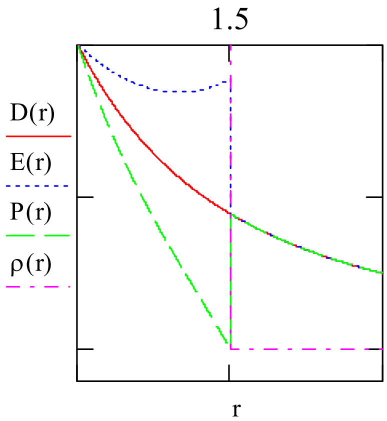
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$.

Поэтому $\rho'(r) = \begin{cases} q\Big/4\pi\varepsilon R r^2\left(-\dfrac{r}{R}+2\right)^2, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{r^2\left(-\dfrac{r}{R}+2\right)^2}, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_1} E_1(r)dr + \int_{R_1}^{R_0} E_2(r)dr = \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2\left(-\frac{\varepsilon}{R}r + 2\varepsilon\right)}dr + \int_{R_1}^{R_0} q/2\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\cdot\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\ln 3\right)$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\ln 3}$



Вариант 6

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1 и ε_3=const в интервале радиусов от R_1 до R_0 ($R1=\frac{1}{2}(R_0+R)$). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/2$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=2/1$; $R_0/R=3/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\frac{1}{2}\varepsilon,\ \varepsilon_3=2\varepsilon,\ R_0=3R,\ R_1=\frac{1}{2}(R+R_0)=2R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon}{2R}r+\dfrac{3\varepsilon}{2},R\le r<R_1\\ 2\varepsilon,r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oint\!\!\oint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot4\pi r^2=q\Rightarrow D(r)=\dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}q\Big/4\pi r^2\varepsilon_0\left(-\dfrac{\varepsilon}{2R}r+\dfrac{3\varepsilon}{2}\right),R\le r<R_1\\ q/8\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2,r\ge R_1\end{cases}$, $\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{-\dfrac{r^3}{2R}+\dfrac{3}{2}r^2},R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2},r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$,

$$P(r)=\begin{cases}q/4\pi r^2-q\Big/4\pi r^2\left(-\dfrac{\varepsilon}{2R}r+\dfrac{3\varepsilon}{2}\right),R\le r<R_1\\ q(2\varepsilon-1)/8\varepsilon\pi r^2,r\ge R_1\end{cases}\Rightarrow$$

поэтому

$$\frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-\dfrac{\varepsilon r}{2}+R(\dfrac{3}{2}\varepsilon-1)}{(-\dfrac{r}{2}+\dfrac{3}{2}R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2},R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2},r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Тогда $\sigma'(r) = \begin{cases} -q/4\pi r^2 + q\Big/4\pi r^2\left(-\dfrac{\varepsilon}{2R}r + \dfrac{3\varepsilon}{2}\right), R \le r < R_1 \\ q(2\varepsilon-1)/8\varepsilon\pi r^2, r \ge R_1 \end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{q}{4\pi R^2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(3R) = \dfrac{q(2\varepsilon-1)}{72\pi\varepsilon R^2}$.

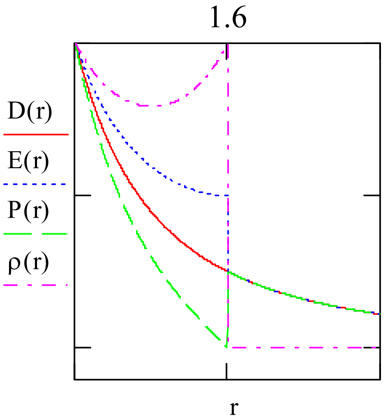
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

Поэтому $\rho'(r) = \begin{cases} q\Big/2\pi\varepsilon R r^2\left(-\dfrac{r}{2R} + \dfrac{3}{2}\right)^2, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{r^2\left(-\dfrac{r}{2R} + \dfrac{3}{2}\right)^2}, R \le r < R_1 \\ 0, r \ge R_1 \end{cases}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_1} E_1(r)dr + \int_{R_1}^{R_0} E_2(r)dr = \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2\left(-\frac{\varepsilon}{2R}r + \frac{3\varepsilon}{2}\right)}dr + \int_{R_1}^{R_0} q/8\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\cdot\left(\frac{4}{9}\ln 2 - \frac{7}{24}\right)$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{\frac{4}{9}\ln 2 - \frac{7}{24}}$.



Задача 1.2

Вариант 7

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону от значения ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n + R^n}{R^n + r^n}$$

$R_0/R=2/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^2 + R^2}{R^2 + r^2} = \frac{5R^2}{R^2 + r^2}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D\cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

$$D(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{D(r)}{D(R)} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0 \pi r^2}$.

Поэтому $E(r) = \dfrac{q(R^2 + r^2)}{20\pi\varepsilon_0 r^2 R^2}$. $E(R) = \dfrac{q}{10\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \dfrac{E(r)}{E(R)} = \dfrac{R^2 + r^2}{2r^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{R^2}{2r^2}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \pi r^2} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q(R^2 + r^2)}{20\pi R^2 r^2}.\ P(R) = \frac{q}{4\pi R^2} - \frac{q}{10\pi R^2} = \frac{3q}{20\pi R^2} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{4R^2}{3r^2} - \frac{1}{3}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда

$\sigma'(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}\cos\varphi - \dfrac{q(R^2 + r^2)}{20\pi R^2 r^2}\cos\varphi$. Поэтому

$\sigma'(R) = -\dfrac{3q}{20\pi R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = 0$.

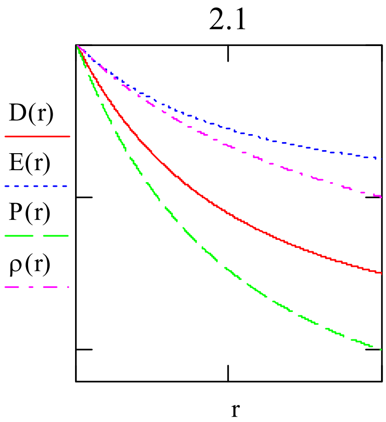
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

Поэтому $\rho'(r) = -\dfrac{q}{10\pi R^2 r}$. $\rho'(R) = -\dfrac{q}{10\pi R^3} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{1}{r}$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{q(R^2 + r^2)}{20\pi\varepsilon_0 R^2 r^2} dr = \left(\frac{qr}{20\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{q}{20\pi\varepsilon_0 r} \right)\Bigg|_R^{R_0} = \frac{3q}{40\pi\varepsilon_0 R}$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{40}{3}\pi\varepsilon_0 R$.



Вариант 8

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону от значения ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

$R_0/R=2/1$, n=3.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса $\varepsilon = f(r) = \dfrac{R_0^3}{R_0^3 + R^3 - r^3} = \dfrac{8R^3}{9R^3 - r^3}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

$$D(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{D(r)}{D(R)} = \frac{R^2}{r^2}$$

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$. Поэтому $E(r) = \dfrac{q(9R^3 - r^3)}{32\pi\varepsilon_0 r^2 R^3}$.

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \frac{9R^3 - r^3}{8r^2 R}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q(9R^3 - r^3)}{32\pi R^3 r^2},\ P(R) = \frac{q}{4\pi R^2} - \frac{q}{4\pi R^2} = 0 \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{4R^2}{3r^2} - \frac{1}{3}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда

$$\sigma'(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\cos\varphi - \frac{q(9R^3 - r^3)}{32\pi R^3 r^2}\cos\varphi.$$

Поэтому $\sigma'(R) = 0$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = \dfrac{7q}{128\pi R^2}$.

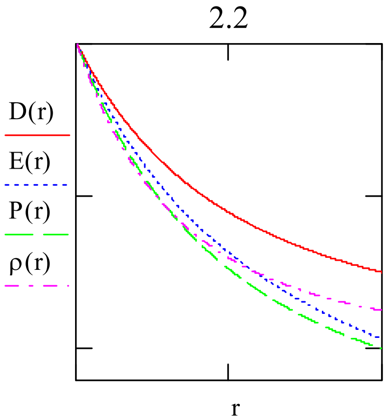
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

Поэтому $\rho'(r) = \dfrac{q}{32\pi R^3} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{R^3}{r^3}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{q(9R^3 - r^3)}{20\pi\varepsilon_0 R^3 r^2} dr = \left(-\frac{qr^2}{20\pi\varepsilon_0 R^3} - \frac{9q}{20\pi\varepsilon_0 r} \right)\Bigg|_R^{R_0} = \frac{9q}{40\pi\varepsilon_0 R}$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{40}{9}\pi\varepsilon_0 R$.



Вариант 9

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону от значения ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n + R^n}{R^n + r^n}$$

$R_0/R=3/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 3R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^2 + R^2}{R^2 + r^2} = \frac{10R^2}{R^2 + r^2}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$D(R) = \dfrac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{D(r)}{D(R)} = \dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r) = \dfrac{q(R^2 + r^2)}{40\pi\varepsilon_0 r^2 R^2}$, $E(R) = \dfrac{q}{20\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \dfrac{E(r)}{E(R)} = \dfrac{R^2 + r^2}{2r^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{R^2}{2r^2}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{q \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2} = \dfrac{q}{4\pi r^2} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q(R^2 + r^2)}{40\pi R^2 r^2},\ P(R) = \frac{q}{4\pi R^2} - \frac{q}{20\pi R^2} = \frac{q}{5\pi R^2} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{9R^2}{8r^2} - \frac{1}{8}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда

$$\sigma'(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\cos\varphi - \frac{q(R^2 + r^2)}{40\pi R^2 r^2}\cos\varphi .$$

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{q}{5\pi R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(3R) = 0$.

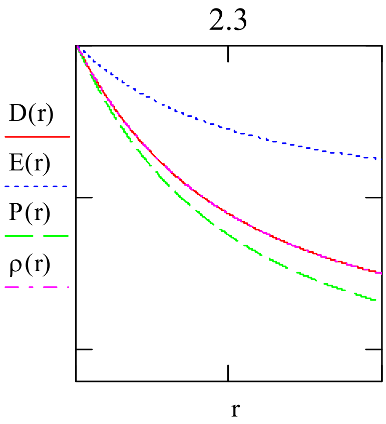
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \frac{(r^2 P)'}{r^2}$,

Поэтому $\rho'(r) = -\frac{q}{20\pi R^2 r} \Rightarrow \frac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \frac{R^2}{r^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{q(R^2 + r^2)}{40\pi\varepsilon_0 R^2 r^2} dr = \left(\frac{qr}{40\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{q}{40\pi\varepsilon_0 r} \right)\Bigg|_R^{R_0} = \frac{q}{15\pi\varepsilon_0 R}$$

Поэтому $C = \frac{q}{U} = 15\pi\varepsilon_0 R$.



Вариант 10

Условие:

Сферический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_1 и R_0 соответственно. Заряд конденсатора равен q. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону от значения ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

$R_0/R=3/1$, n=3.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^3}{R_0^3 + R^3 - r^3} = \frac{27R^3}{28R^3 - r^3}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D\cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$D(R) = \dfrac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{D(r)}{D(R)} = \dfrac{R^2}{r^2}$. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}$.

Поэтому $E(r) = \dfrac{q(28R^3 - r^3)}{108\pi\varepsilon_0 r^2 R^3}$, $E(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \dfrac{E(r)}{E(R)} = \dfrac{28R^3 - r^3}{27r^2 R}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{q\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$P(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2} - \dfrac{q(28R^3 - r^3)}{108\pi R^3 r^2}$, $P(R) = \dfrac{q}{4\pi R^2} - \dfrac{q}{4\pi R^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{P(r)}{P(R)} = \dfrac{4R^2}{3r^2} - \dfrac{1}{3}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}\cos\varphi - \dfrac{q(28R^3 - r^3)}{108\pi R^3 r^2}\cos\varphi$.

Поэтому $\sigma'(R) = 0$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(3R) = \dfrac{2q}{243\pi R^2}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

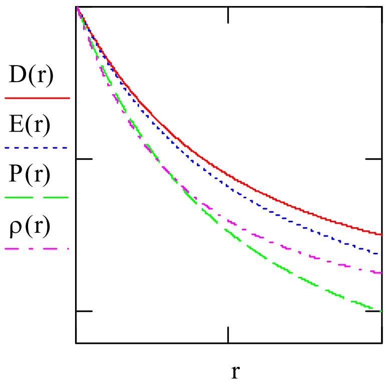
Поэтому $\rho'(r) = \dfrac{q}{36\pi r^3} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{R^3}{r^3}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{q(28R^3 - r^3)}{108\pi\varepsilon_0 R^3 r^2} dr = \left(-\frac{qr^2}{108\pi\varepsilon_0 R^3} - \frac{28q}{108\pi\varepsilon_0 r} \right)\Bigg|_R^{R_0} = \frac{14q}{81\pi\varepsilon_0 R}$$

Поэтому $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{81}{14}\pi\varepsilon_0 R$.

2.4



Задача 1.3

Вариант 11

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=2/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=2/1$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=2\varepsilon,\ \varepsilon_3=2\varepsilon,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right),R\le r<R_1\\ 2\varepsilon,r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 2\pi rh=\lambda h\Rightarrow D(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. Поэтому $E(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right),R\le r<R_1\\ \lambda/4\varepsilon\varepsilon_0\pi r\ \ ,r\ge R_1\end{cases}$,

$$\Rightarrow\frac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{2r^2-Rr},R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r},r\ge R_1\end{cases}.$$

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right),R\le r<R_1\\ q(2\varepsilon-1)/4\varepsilon\pi r,r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{2r\varepsilon-R(\varepsilon+1)}{(2r-R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r},R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r},r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда

$$\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right),R\le r<R_1\\ \lambda(2\varepsilon-1)/4\varepsilon\pi r,r\ge R_1\end{cases}.$$

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(2\varepsilon-1)}{8\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

Поэтому

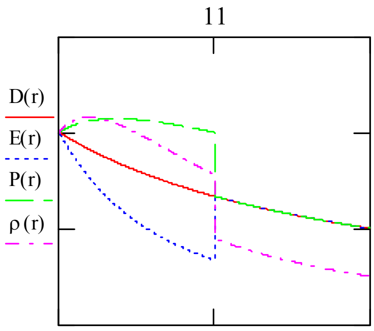
$$\rho'(r)=\begin{cases}-\lambda\Big/2\pi r^2+\lambda\Big/2\pi\varepsilon r^2\left(\dfrac{2}{R}r-1\right)^2,R\le r<R_1\\ \lambda(2\varepsilon-1)/4\pi\varepsilon r^2,r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(2r-R)^2-R^2}{(2r-R)^2(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2},R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2},r\ge R_1\end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{2}{R}r-1\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/4\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2r-R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Bigg|_{R_1}^{R_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}.$$

Поэтому $C_h=\dfrac{q}{Uh}=\dfrac{\lambda}{U}=\dfrac{2}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}\pi\varepsilon\varepsilon_0$.



Вариант 12

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=3/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=1/2$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = 3\varepsilon,\ \varepsilon_3 = \varepsilon/2,\ R_0 = 2R,\ R_1 = \tfrac{1}{2}(R + R_0) = \tfrac{3}{2}R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R - R_1} r + \dfrac{\varepsilon_2 R - \varepsilon_1 R_1}{R - R_1} \\ \varepsilon_3 \end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{4}{R} r - 3\right), R \le r < R_1 \\ \varepsilon/2, r \ge R_1 \end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D} d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 2\pi r h = \lambda h \Rightarrow D(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)} = \dfrac{R}{r}$. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}$. Поэтому $E(r) = \begin{cases} \lambda \Big/ 2\pi r \varepsilon_0 \varepsilon\left(\dfrac{4}{R} r - 3\right), R \le r < R_1 \\ \lambda / \varepsilon\varepsilon_0 \pi r \ \ , r \ge R_1 \end{cases}$,

$$\Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{4r^2 - 3Rr}, R \le r < R_1 \\ \dfrac{R}{r}, r \ge R_1 \end{cases}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{\lambda \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda}{2\pi r} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{4}{R}r-3\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{r\varepsilon-R(3\varepsilon+1)}{(4r-3R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда $\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{4}{R}r-3\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases}$.

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(\varepsilon-2)}{4\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

Поэтому

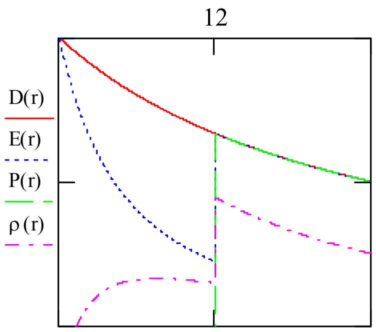
$$\rho'(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r^2+3\lambda R^2/2\pi\varepsilon r^2(4r-3R)^2, R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(4r-3R)^2-3R^2}{(\varepsilon+3)(4r-3R)^2}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{4}{R}r-3\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{4r-3R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Bigg|_{R_1}^{R_0}=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\ln 3+6\ln\frac{3}{4}\right).$$

Поэтому $C_h=\dfrac{q}{Uh}=\dfrac{\lambda}{U}=\dfrac{6}{\ln 3+6\ln\dfrac{3}{4}}\pi\varepsilon\varepsilon_0$.



Вариант 13

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=2/1$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=3/1$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=2\varepsilon,\ \varepsilon_3=3\varepsilon,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right), R\le r<R_1\\ 3\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s}=q \Rightarrow D\cdot 2\pi rh=\lambda h \Rightarrow D(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. Поэтому $E(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right), R\le r<R_1\\ \lambda/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r\ \ , r\ge R_1\end{cases}$,

$$\Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{2r^2-Rr}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right), R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-1)/6\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{2r\varepsilon-R(\varepsilon+1)}{(2r-R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда

$$\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(\dfrac{2}{R}r-1\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/6\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases}.$$

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{12\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$. Поэтому

$$\rho'(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r^2+\lambda\Big/2\pi\varepsilon r^2\left(\dfrac{2}{R}r-1\right)^2, R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/6\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(2r-R)^2-R^2}{(2r-R)^2(\varepsilon+1)}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

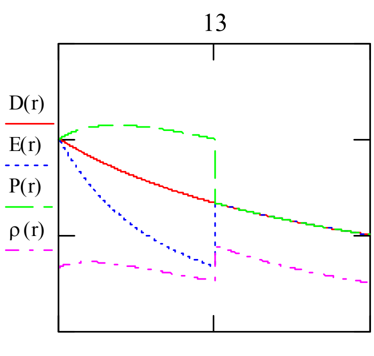
Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{2}{R}r-1\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2r-R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Bigg|_{R_1}^{R_0}=\frac{2\lambda}{3\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$C_h=\frac{q}{Uh}=\frac{\lambda}{U}=\frac{3}{2\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}\pi\varepsilon\varepsilon_0.$$



Вариант 14

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/2$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=3/1$; $R_0/R=3/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\varepsilon/2,\ \varepsilon_3=3\varepsilon,\ R_0=3R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=2R$$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2 R-\varepsilon_1 R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ 3\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 2\pi rh=\lambda h\Rightarrow D(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. Поэтому $E(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ \lambda\big/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r\ \ , r\ge R_1\end{cases}$,

$$\Rightarrow\frac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{2R^2}{-r^2+3Rr}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-1)/6\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-\frac{1}{2}r\varepsilon+R(\frac{3}{2}\varepsilon-1)}{(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда

$$\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/6\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases}.$$

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{12\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$.

Поэтому

$$\rho'(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r^2-3\lambda\Big/4\pi\varepsilon r^2\left(-\dfrac{r}{2R}+\dfrac{3}{2}\right)^2, R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/6\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases},$$

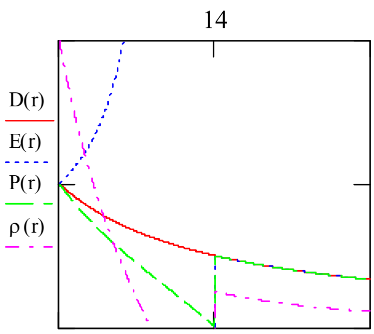
$$\frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)^2-\frac{3}{2}R^2}{(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)^2(\varepsilon-\frac{3}{2})}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(-\frac{1}{2R}r+\frac{3}{2}\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/6\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2r-3R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Bigg|_{R_1}^{R_0}=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{3}{2}.$$

Поэтому $C_h=\dfrac{q}{Uh}=\dfrac{\lambda}{U}=\dfrac{6}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\pi\varepsilon\varepsilon_0$.



Вариант 15

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/3$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=1/2$; $R_0/R=2/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\varepsilon/3,\ \varepsilon_3=\varepsilon/2,\ R_0=2R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=\tfrac{3}{2}R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon\left(-\dfrac{2}{9R}r+\dfrac{7}{3}\right), R\le r<R_1\\ \varepsilon/2, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 2\pi rh=\lambda h\Rightarrow D(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε,

$\dfrac{D(r)}{D(R)}=\dfrac{R}{r}$. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Поэтому $E(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(-\dfrac{2}{9R}r+\dfrac{7}{3}\right), R\le r<R_1\\ \lambda/\varepsilon\varepsilon_0\pi r\ \ , r\ge R_1\end{cases}$, $\Rightarrow\dfrac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{4r^2-3Rr}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{2}{9R}r+\dfrac{7}{3}\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-2r\varepsilon-R(3\varepsilon+1)}{(4r-3R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда

$$\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{2}{9R}r+\dfrac{7}{3}\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases}.$$

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{9\lambda}{38\pi\varepsilon R}=-\dfrac{5\lambda}{19\pi\varepsilon K}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(\varepsilon-2)}{4\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$. Поэтому

$$\rho'(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r^2-7\lambda\Big/6\pi\varepsilon r^2\left(-\dfrac{2}{9R}r+\dfrac{7}{3}\right)^2, R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-2)/2\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases},$$

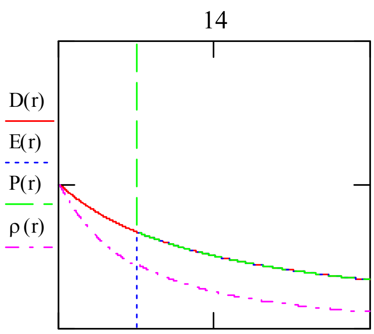
$$\frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(-\frac{2}{19}r+\frac{21}{19}R)^2-\frac{189}{361}}{(-\frac{2}{19}r+\frac{21}{19}R)^2(\varepsilon-\frac{189}{361})}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{4}{R}r-3\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{4r-3R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Big|_{R_1}^{R_0}=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}(\ln 3+6\ln\frac{3}{4}).$$

Поэтому $C_h=\dfrac{q}{Uh}=\dfrac{\lambda}{U}=\dfrac{6}{\ln 3+6\ln\frac{3}{4}}\pi\varepsilon\varepsilon_0$.



Вариант 16

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по линейному закону от значения ε_1 до ε_2 в интервале радиусов от R до R_1, и ε_3=const в интервале радиусов R_1 до R_0. Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/2$; $\varepsilon_3/\varepsilon_1=2/1$; $R_0/R=3/1$

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\varepsilon/2,\ \varepsilon_3=2\varepsilon,\ R_0=3R,\ R_1=\tfrac{1}{2}(R+R_0)=2R$

Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R-R_1}r+\dfrac{\varepsilon_2R-\varepsilon_1R_1}{R-R_1}\\ \varepsilon_3\end{cases}$$

Для данного варианта $\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ 2\varepsilon, r\ge R_1\end{cases}$.

По теореме Гаусса

$\oiint\vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow D\cdot 2\pi rh=\lambda h\Rightarrow D(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. Поэтому $E(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ \lambda\big/4\varepsilon\varepsilon_0\pi r\ \ , r\ge R_1\end{cases}$,

$$\Rightarrow\frac{E(r)}{E(R)}=\begin{cases}\dfrac{2R^2}{-r^2+3Rr}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(r)=\dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r)=\begin{cases}\lambda/2\pi r-\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ q(\varepsilon-1)/4\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases},\quad \frac{P(r)}{P(R)}=\begin{cases}\dfrac{-\frac{1}{2}r\varepsilon+R(\frac{3}{2}\varepsilon-1)}{(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)(\varepsilon-1)}\cdot\dfrac{R}{r}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R}{r}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r)=P_n=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда

$$\sigma'(r)=\begin{cases}-\lambda/2\pi r+\lambda\Big/2\pi r\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2R}r+\dfrac{3}{2}\right), R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/4\varepsilon\pi r, r\ge R_1\end{cases}.$$

Поэтому $\sigma'(R)=-\dfrac{\lambda}{2\pi R}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(2R)=\dfrac{q(\varepsilon-1)}{18\pi\varepsilon R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P$, для полярных координат $\rho'=\dfrac{(r^2P)'}{r^2}$. Поэтому

$$\rho'(r)=\begin{cases}\lambda\Big/2\pi r^2-3\lambda\Big/4\pi\varepsilon r^2\left(-\dfrac{r}{2R}+\dfrac{3}{2}\right)^2, R\le r<R_1\\ \lambda(\varepsilon-1)/4\pi\varepsilon r^2, r\ge R_1\end{cases},$$

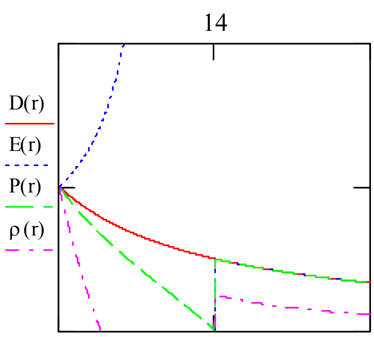
$$\frac{\rho'(r)}{\rho'(R)}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)^2-\frac{3}{2}R^2}{(-\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}R)^2(\varepsilon-\frac{3}{2})}\cdot\dfrac{R^2}{r^2}, R\le r<R_1\\ \dfrac{R^2}{r^2}, r\ge R_1\end{cases}.$$

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_R^{R_1}E_1(r)dr+\int_{R_1}^{R_0}E_2(r)dr=\int_R^{R_1}\lambda/2\pi r\varepsilon_0\varepsilon\left(-\frac{1}{2R}r+\frac{3}{2}\right)dr+\int_{R_1}^{R_0}\lambda/4\varepsilon\varepsilon_0\pi r\,dr=\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2r-3R}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1}+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\ln(r)\Bigg|_{R_1}^{R_0}=\frac{\lambda}{12\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{9}{32}.$$

Поэтому $C_h=\dfrac{q}{Uh}=\dfrac{\lambda}{U}=\dfrac{12}{\ln\left(\dfrac{9}{32}\right)}\pi\varepsilon\varepsilon_0$.



Задача 1.4

Вариант 17

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n + R^n}{R^n + r^n}$$

$R_0/R=2/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^2 + R^2}{R^2 + r^2} = \frac{5R^2}{R^2 + r^2}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D} d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 2\pi rh = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon\varepsilon_0 \pi r}$. Поэтому

$$E(r) = \frac{\lambda(R^2 + r^2)}{10\pi\varepsilon_0 r R^2} \Rightarrow E(R) = \frac{\lambda}{5\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \frac{R^2 + r^2}{2rR}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{\lambda \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda}{2\pi r} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} - \frac{\lambda(R^2 + r^2)}{10\pi R^2 r} \Rightarrow P(R) = \frac{\lambda}{2\pi R} - \frac{\lambda}{5\pi R} = \frac{3\lambda}{10\pi R} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{4R^2 - r^2}{Rr}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{\lambda(\varepsilon-1)}{2\pi\varepsilon r}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\cos\varphi - \dfrac{\lambda(R^2+r^2)}{10\pi R^2 r}\cos\varphi$.

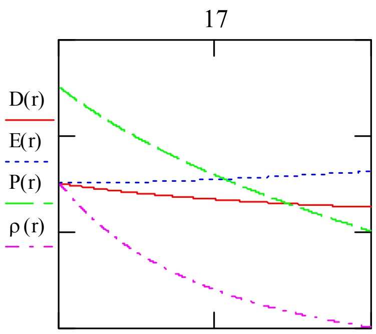
Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{3\lambda}{10\pi R^2}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = 0$..

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2P)'}{r^2}$,поэтому $\rho'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r^2} - \dfrac{\lambda(R^2+3r^2)}{10\pi R^2 r^2} \Rightarrow \rho'(R) = \dfrac{\lambda}{10\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{4R^2-3r^2}{r^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{\lambda(R^2+r^2)}{10\pi\varepsilon_0 R^2 r}dr = \left.\left(\frac{\lambda\ln r}{10\pi\varepsilon_0} + \frac{\lambda r^2}{20\pi R^2\varepsilon_0}\right)\right|_R^{R_0} = \frac{\lambda(\ln 4+3)}{20\pi\varepsilon_0}.$$

Поэтому $C_h = \dfrac{q}{Uh} = \dfrac{\lambda}{U} = \dfrac{20\pi\varepsilon_0}{\ln 4+3}$.



Вариант 18

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

R_0/R=2/1, n=3/2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^{3/2}}{R_0^{3/2} + R^{3/2} - r^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}R^{3/2}}{(2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2}}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 2\pi rh = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon\varepsilon_0\pi r}$. Поэтому

$$E(r) = \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 rR^{3/2}} \Rightarrow E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \frac{(2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2}}{2\sqrt{2}R\,r}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} - \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{4\sqrt{2}\pi rR^{3/2}} \Rightarrow P(R) = -\frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi R} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{R^{3/2} + r^{3/2}}{2r\sqrt{R}}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{\lambda(\varepsilon - 1)}{2\pi\varepsilon r}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда

$$\sigma'(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\cos\varphi - \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{4\sqrt{2}\pi r R^{3/2}}\cos\varphi .$$

Поэтому $\sigma'(R) = \dfrac{\lambda}{2\pi R}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(2R) = \dfrac{(1-4\sqrt{2})\lambda}{4\pi R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

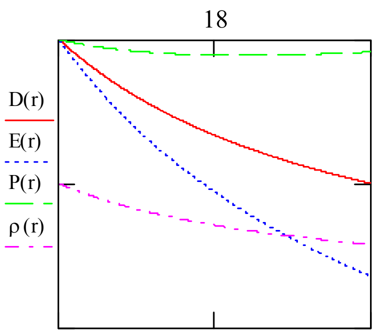
поэтому $\rho'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r^2} - \dfrac{\lambda((2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - \frac{5}{2}r^{3/2})}{4\sqrt{2}\pi r^2 R^{3/2}} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{R^{3/2} + \frac{5}{2}r^{3/2}}{7r^2\sqrt{R}}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r R^{3/2}}dr = \left.\left(\frac{\lambda(2\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\ln r - \frac{\lambda r^{3/2}}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^{3/2}}\right)\right|_R^{R_0} =$$

$$= \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)\ln 2 + 2\sqrt{2} - 1)}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_h = \dfrac{q}{Uh} = \dfrac{\lambda}{U} = \dfrac{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}{(2\sqrt{2}+1)\ln 2 + 2\sqrt{2} - 1}$.



Вариант 19

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n + R^n}{R^n + r^n}$$

$R_0/R=3/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 3R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса $\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^2 + R^2}{R^2 + r^2} = \frac{9R^2}{R^2 + r^2}$.

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D} d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 2\pi r h = q \Rightarrow D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, то $E(r) = \frac{\lambda}{2\varepsilon\varepsilon_0 \pi r}$. Поэтому

$$E(r) = \frac{\lambda(R^2 + r^2)}{18\pi\varepsilon_0 r R^2} \Rightarrow E(R) = \frac{\lambda}{9\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \frac{R^2 + r^2}{2Rr}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \frac{\lambda \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} - \frac{\lambda(R^2 + r^2)}{18\pi R^2 r} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{8R^2 - r^2}{7Rr}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(r) = P_n = \dfrac{\lambda(\varepsilon - 1)}{2\pi\varepsilon r}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Тогда $\sigma'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\cos\varphi - \dfrac{\lambda(R^2 + r^2)}{18\pi R^2 r}\cos\varphi$.

Поэтому $\sigma'(R) = -\dfrac{7\lambda}{18\pi R}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(3R) = \dfrac{\lambda}{18\pi R}$.

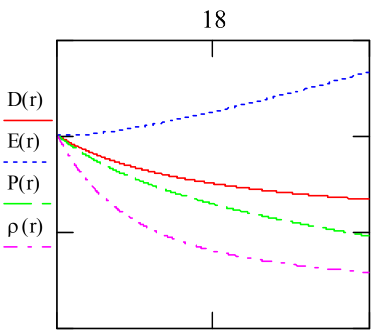
Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

Поэтому $\rho'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r^2} - \dfrac{\lambda(R^2 + 3r^2)}{18\pi R^2 r^2} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{8R^2 - 3r^2}{5r^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{\lambda(R^2 + r^2)}{18\pi\varepsilon_0 R^2 r}dr = \left(\frac{\lambda \ln r}{18\pi\varepsilon_0} + \frac{\lambda r^2}{36\pi R^2 \varepsilon_0}\right)\Bigg|_R^{R_0} = \frac{\lambda(\ln 3 + 5)}{18\pi\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_h = \dfrac{q}{Uh} = \dfrac{\lambda}{U} = \dfrac{18\pi\varepsilon_0}{\ln 3 + 5}$.



Вариант 20

Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε(r)=f(r). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора.

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

$R_0/R=3/1$, n=3/2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(r)/D(R), E(r)/E(R), P(r)/P(R), ρ′(r)/ρ′(R) в интервале значений r от R до R_0.

Решение:

$R_0 = 2R$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию радиуса

$$\varepsilon = f(r) = \frac{R_0^{3/2}}{R_0^{3/2} + R^{3/2} - r^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R^{3/2}}{(3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2}}.$$

По теореме Гаусса

$\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow D \cdot 2\pi rh = q \Rightarrow D(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon\varepsilon_0\pi r}$. Поэтому

$$E(r) = \frac{\lambda((3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 r R^{3/2}} \Rightarrow \frac{E(r)}{E(R)} = \frac{(3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2}}{2\sqrt{3}Rr}.$$

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(r) = \dfrac{\lambda\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} - \frac{\lambda((3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{6\sqrt{3}\pi r R^{3/2}} \Rightarrow \frac{P(r)}{P(R)} = \frac{r^{3/2} - R^{3/2}}{\sqrt{3}Rr}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(r) = P_n = \dfrac{\lambda(\varepsilon - 1)}{2\pi\varepsilon r}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\cos\varphi - \dfrac{\lambda((3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{6\sqrt{3}\pi r R^{3/2}}\cos\varphi$.

Поэтому $\sigma'(R) = 0$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(3R) = \dfrac{(3\sqrt{3}-1)\lambda}{18\sqrt{3}\pi R}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P$, для полярных координат $\rho' = \dfrac{(r^2 P)'}{r^2}$,

Поэтому $\rho'(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r^2} - \dfrac{\lambda((3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - \frac{5}{2}r^{3/2})}{6\sqrt{3}\pi r^2 R^{3/2}} \Rightarrow \dfrac{\rho'(r)}{\rho'(R)} = \dfrac{5r^{3/2} - R^{3/2}}{3r^2\sqrt{R}}$.

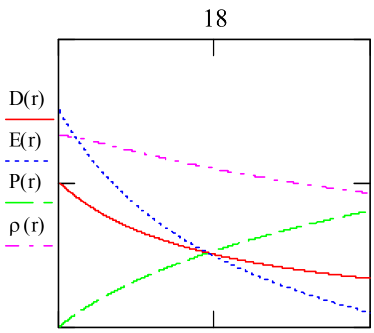
Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_R^{R_0} E(r)dr = \int_R^{R_0} \frac{\lambda((3\sqrt{3}+1)R^{3/2} - r^{3/2})}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 r R^{3/2}}dr = \left.\left(\frac{\lambda(3\sqrt{3}+1)}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\ln r + \frac{\lambda r^{3/2}}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^{3/2}}\right)\right|_R^{R_0} =$$

$$= \frac{\lambda((2\sqrt{2}+1)\ln 3 + 3\sqrt{3} - 1)}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}$$

Поэтому

$$C_h = \frac{q}{Uh} = \frac{\lambda}{U} = \frac{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}{(3\sqrt{3}+1)\ln 3 + 3\sqrt{3} - 1}.$$



Задача 1.5

Вариант 21

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n + d^n}{y^n + d^n}$$

$d_0/d=2/1$, n=1.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0 = 2d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты $\varepsilon = f(y) = \dfrac{d_0 + d}{y+d} = \dfrac{3d}{y+d}$.

По теореме Гаусса

$2\oint\!\!\oint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow 2D \cdot S = q \Rightarrow D(y) = \dfrac{q}{2S} = \dfrac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε.

Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y) = \dfrac{\sigma(y+d)}{6\varepsilon_0 d}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(y) = \dfrac{\sigma\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому $P(y) = \dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{\sigma(y+d)}{6d}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов

$\sigma'(y) = P_n = \dfrac{\sigma(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности

$\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(y) = \dfrac{\sigma}{2}\cos\varphi - \dfrac{\sigma(y+d)}{6d}\cos\varphi$.

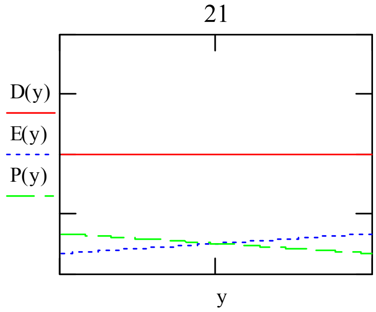
Поэтому $\sigma'(0) = -\dfrac{\sigma}{3}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(d) = \dfrac{\sigma}{6}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y) = \dfrac{\sigma}{6d}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_0^d E(r)dr = \int_0^d \frac{\sigma(y+d)}{6\varepsilon_0 d}dy = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0 d}(y+d)^2\Big|_0^d = \frac{3\sigma d}{2\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s = \dfrac{q}{US} = \dfrac{\sigma}{U} = \dfrac{2}{3d}\varepsilon_0$.



Вариант 22

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n}{-y^n + d_0^{\,n}}$$

$d_0/d=2/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0 = 2d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты $\varepsilon = f(y) = \dfrac{d_0^2 + d^2}{y^2 + d^2} = \dfrac{4d^2}{4d^2 - y^2}$.

По теореме Гаусса

$2\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow 2D\cdot S = q \Rightarrow D(y) = \dfrac{q}{2S} = \dfrac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y) = \dfrac{\sigma(4d^2 - y^2)}{8\varepsilon_0 d^2}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(y) = \dfrac{\sigma\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому

$$P(y) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma(-y^2 + 4d^2)}{8d^2}.$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(y) = P_n = \dfrac{\sigma(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(y) = \frac{\sigma}{2}\cos\varphi - \frac{\sigma(-y^2 + 4d^2)}{8d^2}\cos\varphi$.

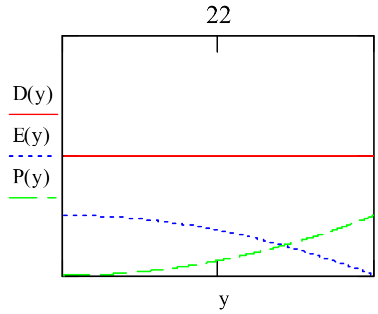
Поэтому $\sigma'(0) = 0$, а $\sigma'(d) = \frac{\sigma}{8}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P = -\frac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y) = \frac{\sigma y}{4d^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_0^d E(r)dr = \int_0^d \frac{\sigma(-y^2 + 4d^2)}{8\varepsilon_0 d^2}dy = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0 d^2}\left(-\frac{y^3}{3} + 4d^2 y\right)\Bigg|_0^d = \frac{5\sigma d}{3\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s = \frac{q}{US} = \frac{\sigma}{U} = \frac{3}{5d}\varepsilon_0$.



Вариант 23

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n + d^n}{y^n + d^n}$$

$d_0/d=2/1$, n=1.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0 = 2d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты $\varepsilon = f(y) = \frac{d_0 + d}{y + d} = \frac{3d}{y + d}$.

По теореме Гаусса

$2\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow 2D \cdot S = q \Rightarrow D(y) = \frac{q}{2S} = \frac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y) = \frac{\sigma(y + d)}{6\varepsilon_0 d}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(y) = \frac{\sigma \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому $P(y) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma(y + d)}{6d}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(y) = P_n = \frac{\sigma(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(y) = \frac{\sigma}{2}\cos\varphi - \frac{\sigma(y + d)}{6d}\cos\varphi$.

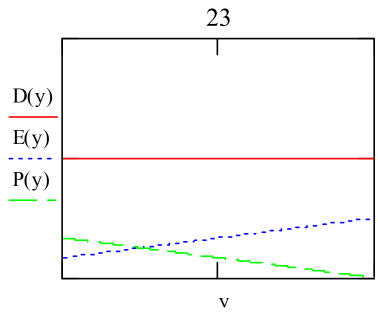
Поэтому $\sigma'(0) = -\dfrac{\sigma}{3}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(d) = \dfrac{\sigma}{6}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y) = \dfrac{\sigma}{6d}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_0^d E(r)dr = \int_0^d \frac{\sigma(y+d)}{6\varepsilon_0 d}dy = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0 d}(y+d)^2\Big|_0^d = \frac{3\sigma d}{2\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s = \dfrac{q}{US} = \dfrac{\sigma}{U} = \dfrac{2}{3d}\varepsilon_0$.



Вариант 24

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n}{-y^n + d_0^n}$$

$d_0/d=3/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0 = 3d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты $\varepsilon = f(y) = \dfrac{9d^2}{9d^2 - y^2}$.

По теореме Гаусса

$2\oint\!\!\oint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow 2D \cdot S = q \Rightarrow D(y) = \dfrac{q}{2S} = \dfrac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y) = \dfrac{\sigma(-y^2 + 9d^2)}{18\varepsilon_0 d^2}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(y) = \dfrac{\sigma \cdot (\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, поэтому $P(y) = \dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{\sigma(-y^2 + 9d^2)}{18d^2}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(y) = P_n = \dfrac{\sigma(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(y) = \dfrac{\sigma}{2}\cos\varphi - \dfrac{\sigma(-y^2 + 9d^2)}{18d^2}\cos\varphi$.

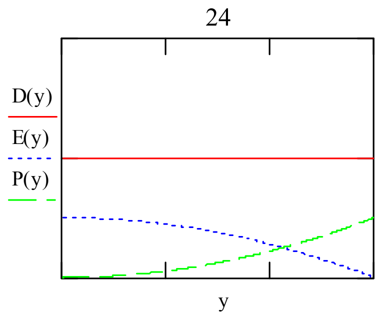
Поэтому $\sigma'(0)=0$, а $\sigma'(R_0)=\sigma'(d)=\dfrac{\sigma}{18}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho'=-\nabla P=-\dfrac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y)=\dfrac{\sigma y}{9d^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U=\int_0^d E(r)dr=\int_0^d \frac{\sigma(-y^2+9d^2)}{18\varepsilon_0 d^2}dy=\frac{\sigma}{18\varepsilon_0 d}(-\frac{y^3}{3}+9d^2y)\Big|_0^d=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s=\dfrac{q}{US}=\dfrac{\sigma}{U}=\dfrac{\varepsilon_0}{d}$.



Вариант 25

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ'(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon=f(y)=\frac{d_0^n+d^n}{y^n+d^n}$$

$d_0/d=3/1$, n=1.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0=3d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты $\varepsilon=f(y)=\dfrac{d_0+d}{y+d}=\dfrac{4d}{y+d}$.

По теореме Гаусса

$2\oiint \vec{D}d\vec{s}=q\Rightarrow 2D\cdot S=q\Rightarrow D(y)=\dfrac{q}{2S}=\dfrac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε. Т.к. $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y)=\dfrac{\sigma(y+d)}{8\varepsilon_0 d}$.

Т.к. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi=\varepsilon-1$, то $P(y)=\dfrac{\sigma\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому $P(y)=\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac{\sigma(y+d)}{8d}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(y)=P_n=\dfrac{\sigma(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi=\cos\pi=-1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi=\cos 0=1$. Тогда $\sigma'(y)=\dfrac{\sigma}{2}\cos\varphi-\dfrac{\sigma(y+d)}{8d}\cos\varphi$.

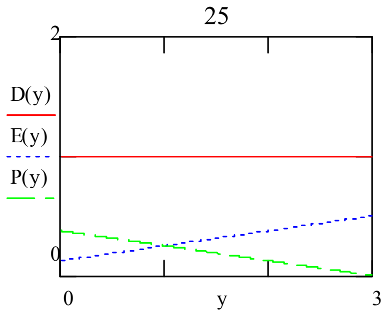
Поэтому $\sigma'(0) = -\frac{3\sigma}{8}$, а $\sigma'(R_0) = \sigma'(d) = \frac{\sigma}{4}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P = -\frac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y) = \frac{\sigma}{8d}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_0^d E(r)dr = \int_0^d \frac{\sigma(y+d)}{8\varepsilon_0 d}dy = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0 d}(y+d)^2\Big|_0^d = \frac{2d\sigma}{\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s = \frac{q}{US} = \frac{\sigma}{U} = \frac{1}{2d}\varepsilon_0$.



Вариант 26

Условие:

Плоский диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Величина диэлектрической проницаемости между обкладками меняется по закону ε=f(y). Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектриков, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ’(r), максимальную напряжённость электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу площади.

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n}{-y^n + d_0^n}$$

$d_0/d = 3/1$, n=2.

По результатам вычислений построить графически зависимости D(y), E(y), P(y).

Решение:

$d_0 = 3d$. Определим диэлектрическую проницаемость, как функцию ординаты

$$\varepsilon = f(y) = \frac{9d^2}{-y^2 + 9d^2}.$$

По теореме Гаусса

$2\oiint \vec{D}d\vec{s} = q \Rightarrow 2D\cdot S = q \Rightarrow D(y) = \frac{q}{2S} = \frac{\sigma}{2}$ и не зависит от диэлектрической проницаемости ε. Т.к. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то $E(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Поэтому $E(y) = \frac{\sigma(-y^2+9d^2)}{18\varepsilon_0 d^2}$.

Т.к. $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, а $\chi = \varepsilon - 1$, то $P(y) = \frac{\sigma\cdot(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, поэтому $P(y) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma(-y^2+9d^2)}{18d^2}$.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'(y) = P_n = \frac{\sigma(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}\cos\varphi$, где $\cos\varphi$ - косинус угла между нормалью между рассматриваемой поверхностью и поляризованностью, для внутренней поверхности $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, а для внешней поверхности $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Тогда $\sigma'(y) = \frac{\sigma}{2}\cdot\cos\varphi - \frac{\sigma(-y^2+9d^2)}{18d^2}\cos\varphi$.

Поэтому $\sigma'(0)=0$, а $\sigma'(d)=\dfrac{\sigma}{18}$.

Объёмная плотность связанных зарядов $\rho' = -\nabla P = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$, поэтому $\rho'(y) = \dfrac{\sigma y}{9d^2}$.

Для определения ёмкости вычислим напряжение на его обкладках

$$U = \int_0^d E(r)dr = \int_0^d \frac{\sigma(-y^2+9d^2)}{18\varepsilon_0 d^2}dy = \frac{\sigma}{18\varepsilon_0 d}\left(-\frac{y^3}{3}+9d^2 y\right)\Bigg|_0^d = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0}$$

Поэтому $C_s = \dfrac{q}{US} = \dfrac{\sigma}{U} = \dfrac{\varepsilon_0}{d}$.