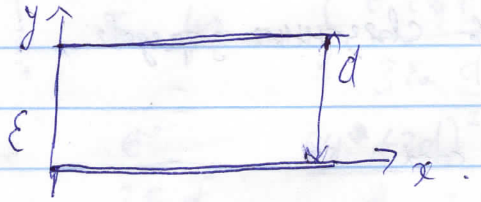
Задача 1.3 Вариант: 22



$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n + d^n}{y^n + d_0^n}$$

$$\frac{d_0}{d} = 2/1, \quad n = 1 \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{d_0 + d}{y + d_0} = \frac{3d}{y + 2d}$$

По теорема Гаусса:

$$\oiint \vec{D}\,d\vec{s} = q \Rightarrow 2D.S = q \Rightarrow D(y) = \frac{q}{S} = \sigma$$

$$\vec{D} = \varepsilon.\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow E(y) = \frac{D}{\varepsilon.\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon.\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(y) = \frac{\sigma(y+2d)}{3\varepsilon_0.d}; \quad E(0) = \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0}; \quad E(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Т.К } \vec{P} = \text{æ}.\varepsilon_0.\vec{E} \Rightarrow P(y) = \frac{\sigma.(\varepsilon-1).\cancel{\varepsilon_0}}{\varepsilon.\cancel{\varepsilon_0}} = \sigma\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

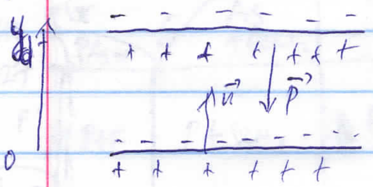
$$\Rightarrow P(y) = \sigma - \frac{\sigma(y+2d)}{3d}.$$

$$P(0) = \frac{\sigma}{3}; \quad P(d) = 0$$

поверхностную плотность связанных зарядов.

$$\sigma'(y) = P_n = \frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon} \cdot \cos\alpha$$

нижняя поверхность:

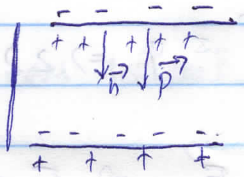


$$\Rightarrow \alpha = -\pi \Rightarrow \cos\alpha = -1$$

$$\Rightarrow \sigma'(y) = -\sigma\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = -\sigma + \frac{\sigma(y+2d)}{3d}$$

$$\sigma'(0) = -\frac{\sigma}{3}.$$

Верхняя поверхность:



$$\cos\alpha = 1.$$

$$\Rightarrow \sigma'(y) = \sigma\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = \sigma - \frac{\sigma(y+2d)}{3d}$$

$$\sigma'(d) = 0.$$

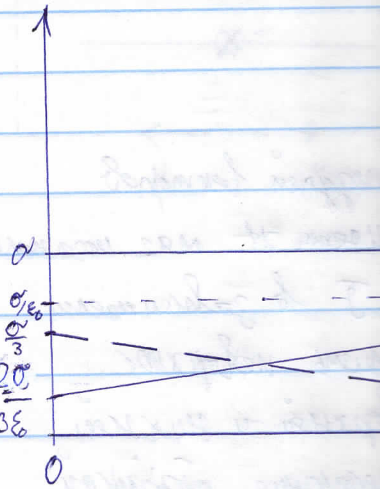
Объёмная плотность связанных зарядов.

$$\rho' = -\nabla P = -\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \rho'(y) = \frac{\sigma}{3d}.$$

$$U = \int_0^d E_r\, dr$$

$$= \frac{\sigma}{3\varepsilon_0 d}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{U.S}$$

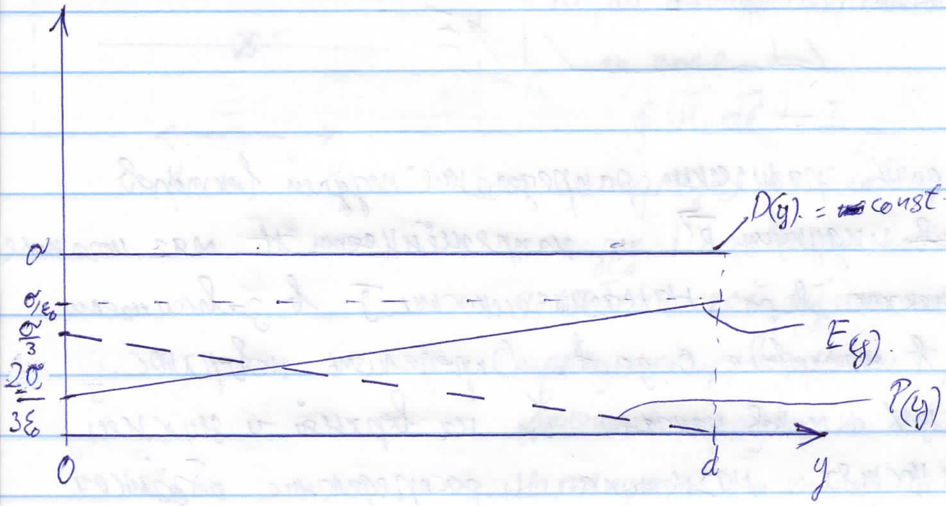


$$U = \int_0^d E_r\, dr = \int_0^d \frac{\sigma.(y+2d)}{3\varepsilon_0\, d} . dy$$

$$= \frac{\sigma}{3\varepsilon_0 . d} . \frac{(y+2d)^2}{2}\Bigg|_0^d = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0 . d . 2}(9d^2 - 4d^2)$$

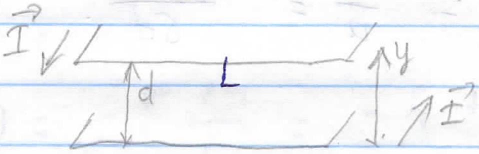
$$= \frac{5\sigma d}{6\varepsilon_0} .$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{q}{U.S} = \frac{\sigma}{U} = \frac{6\varepsilon_0}{5d} .$$



Задача 2.3; Вариант: 22, Магнитостатика

Два плоских проводника с токами I, текущими в ~~прот~~ противоположных направлениях, разделены слоем магнетика толщиной d. Ширина проводников равна L ($L \gg d$). Магнитная проницаемость μ магнетика меняется в направлении оси y по закону $\mu = f(y)$

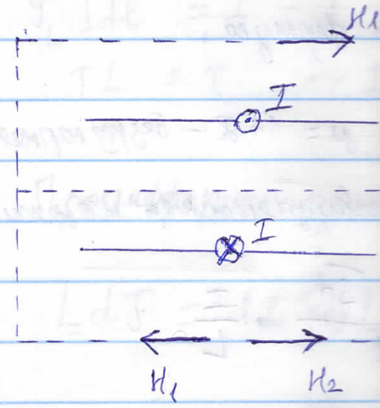


Построить графически распределения модулей векторов ~~индуктив~~ индукции $\vec{B}$ и напряжённости H маг. ного поля, а также в-ра намагниченности J в зависимости ~~от~~ от y в интервале 0 до d. Определить поверхнос. плотность токов намагн. i_n на верхней и нижней поверхностях магнетика и распределение объёмной ~~пло~~ плотности токов намагничивания $i_{об}(y)$. Определить индуктивность единицы длины этой двухполосной линии.

По результатам проведения вычислений построить графики зависимости $\frac{B(y)}{B(0)}$, $\frac{H(y)}{H(0)}$ в интервале $0 \leq y \leq d$

$$\mu = \frac{y^n + d_0^n}{d_0^n}$$

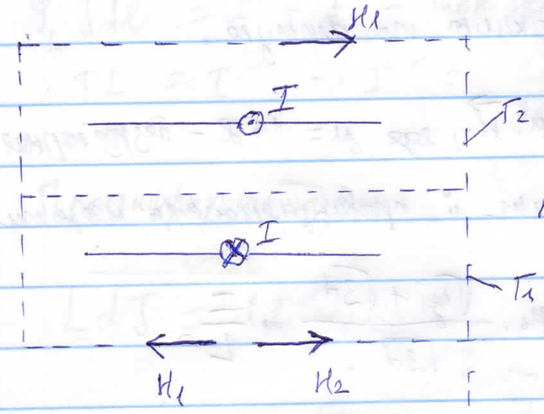
$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{y^{3.5}}{\ldots}$$



Возьмём ток в ни...
качестве линии инте...
перпендикулярном сечени...
поэтому вектор на...
ней, направлен...

$$\mu = \frac{y^n + d_0^n}{d_0^n} \quad ; \quad \frac{d_0}{d} = \frac{3}{1}, \quad n = 0{,}5$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{y^{0,5} + (3d)^{0,5}}{(3d)^{0,5}} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}} .$$



Напряжённость между двумя такими проводниками вычислим по теореме о циркуляции вектора напряжённости маг-го поле.

$$\oint (\vec{H}, \vec{dl}) = I$$

Циркуляция по любому замкнутому контуру L зависит только от алгебраической суммы токов ~~проводника~~ проводимости I, пронизывающих произвольно поверхность натянутую на контур L.

Возьмём ток в нижнем проводнике внутрь рисунка. В качестве линии интегрирования, прямоугольник $Г_1$ в перпендикулярном сечении линии. Поле считаем однородным, поэтому вектор напряжённости поле внутри постоянный, направлен вдоль сторон контура

$$\oint_{P_1} (\vec{H}, \vec{dl}) = \oint_{P_1} H \cos 0 \cdot dl = HL.$$

$$HL = I. \Rightarrow H = \frac{I}{L} = const. \qquad \Big| \; \frac{H(y)}{H(0)} = 1$$

Напряженность магн-го поля постоянна

Вычислим магнитную ~~#~~ индукцию по формуле:

$$\vec{B} = \mu_0 (1+\chi) \cdot \vec{H} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H},$$ где $\mu = 1+\chi$ – безразмерная величина, называемая магнит-й проницаемостью магнетика.

$$\mu = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}}; \quad B(y) = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 \cdot I}{L}; \quad B(d) = \mu_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{I}{L}.$$

$$\Big| \; \frac{B(y)}{B_0} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}}.$$

Вычислим вектор намагниченности среды: $\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

$$J = (\mu - 1) \cdot H = \left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}} - 1\right) \cdot \frac{I}{L} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L}.$$

$$\Big| \; J(y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L}.$$

$$J(0) = 0; \quad J(d) = \frac{I}{\sqrt{3} \cdot L}.$$

Из теоремы циркуляции вектора намагниченности ~~ко~~ находим поверхностную плотность токов намагничивания: $i'_п$.

$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'$, I' – ток намагниченности.

$JL = I' \to I' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L} \cdot L = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \cdot I$.

Продифференцируем:

$L dJ = dI' \Leftrightarrow L \frac{dJ}{dy} = \frac{dI'}{dy}$. (т.к. $\frac{dJ}{dy} = i'_п$)

$\Rightarrow L \cdot i'_п = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{I}{\sqrt{3d}} \Rightarrow i'_п = \frac{I}{2\sqrt{3d} \cdot L} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Поверхностная плотность тока намагничивания на верхней и нижней поверхностях магнетика:

$i'_п(0) = +\infty$; $i'_п(d) = \frac{I}{2\sqrt{3} \cdot d \cdot L}$.

Определим объёмную плотность токов намагничивания $i'_{об}$.

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора намагниченности: $\vec{J}$; $\mathrm{rot}\,\vec{J} = i'_{об}$

Так как в-р намагниченности сонаправлен в-ру напряженности маг-го поля, то $J_y = 0$, $J_z = 0$

$$\operatorname{rot}\vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_y = 0 \\ J_z = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_x}, & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ J_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e_x}\left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z}\right) + \vec{e_y}\left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x}\right) + \vec{e_z}\left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)$$

$$= \vec{e_y}\,\frac{\partial J_x}{\partial z} - \vec{e_z}\left(\frac{\partial J_x}{\partial y}\right) \quad \cancel{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}}$$

$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ — единичные вектора; $\frac{\partial J_x}{\partial z} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{J} = -\vec{e_z}\cdot\frac{\partial J_x}{\partial y}$$

$$= -\vec{e_z}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}}\cdot\frac{I}{L}\right)$$

$$= -\vec{e_z}\cdot\frac{I}{L\cdot\sqrt{3d}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = -\vec{e_z}\cdot\frac{I}{2\sqrt{3d}\cdot L\sqrt{y}}$$

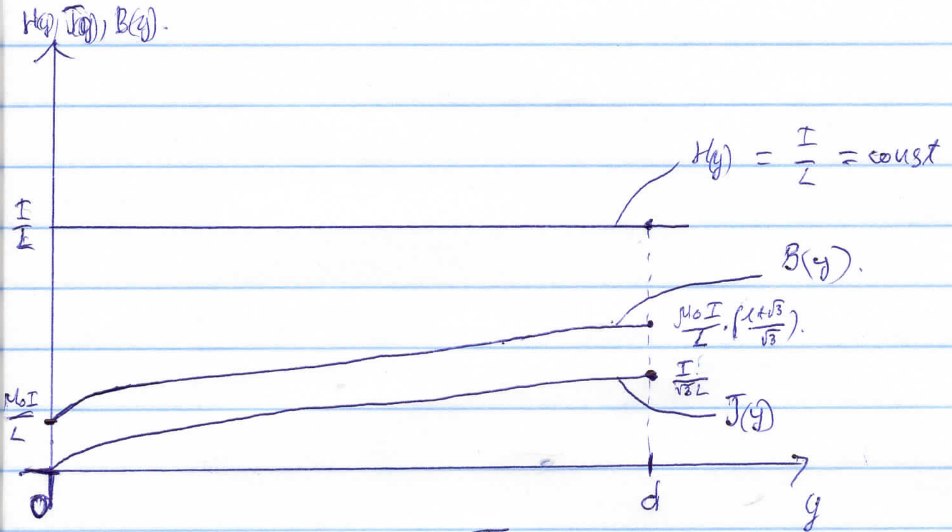
$$\Rightarrow \quad i'_{об} = \operatorname{rot}\vec{J} = -\vec{e_z}\,\frac{I}{2\sqrt{3d}\cdot L\,\sqrt{y}}.$$

Для нахождения индуктивности единицы длины двухполосной линии найдём поток вектора $\vec{B}$ через продольное сечение единичной длины:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^d B(y)\cdot dy = \int_0^d \mu_0\,\frac{I}{L}\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{3d}}{\sqrt{3}\,d}\right) dy$$

$$= \frac{\mu_0 I}{L} \cdot \left(y + \frac{2}{3\sqrt{3d}} \cdot \sqrt{y^3} \right) \Big|_0^d = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\mu_0 I}{L} \cdot d.$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{9} \, \frac{\mu_0}{L} \cdot d.$$



$$B(y) = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{3d}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L} = \frac{\mu_0 I}{L} \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} + 1 \right).$$

$$J(y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \cdot \frac{I}{L}.$$