

Кто не сможет на экзамене пояснить смысл этих уравнений, получит «неуд».

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_\Sigma$ $\oint_\Gamma (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$ $\oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$ $\oint_\Gamma (\vec{H}, d\vec{l}) = I_\Sigma + \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$
---	--

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}), \quad \operatorname{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} - H_{1t} = i$$

### Лекции 1-2. Электрическое поле системы неподвижных зарядов в вакууме.

#### Теорема Гаусса для электростатического поля.

*Электрический заряд. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряжённости. Связь напряжённости и потенциала. Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электростатических полей. Уравнение Пуассона.*

Наряду с массой, одним из свойств частиц вещества является электрический заряд. Различают два вида электрического заряда: положительный и отрицательный. Ядро любого атома считается положительно заряженным. Электроны имеют, по определению, отрицательный заряд. О наличии заряда у тела судят по его взаимодействию с другими заряженными частицами. При этом одноименно заряженные тела отталкиваются, разноименно заряженные – притягиваются.

Элементарным зарядом называется абсолютная величина электрического заряда электрона или ядра атома водорода – протона. В СИ величина элементарного заряда равна  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл (единицы измерения – Кулон.) В природе любой электрический заряд кратен элементарному заряду.

Электрические заряды могут появляться или исчезать только попарно. Отсюда следует: закон сохранения электрического заряда – сумма зарядов в замкнутой системе остается постоянной.

В классической теории электромагнитных явлений широко применяется понятие *неподвижного точечного заряда*.

Точечным электрическим зарядом называется заряженное тело, размерами которого (в условиях данной задачи) можно пренебречь. *Можно говорить о точке, имеющей электрический заряд*.

При рассмотрении микроскопических заряженных частиц ( $\sim 10^{-6}$  м) в качестве точечных зарядов можно применять классическую теорию электромагнетизма только с учётом «усреднения по времени и пространству»: любая микрочастица, находящаяся, например, в газе, постоянно совершает хаотическое (броуновское) движение. Поэтому если необходимо рассматривать положение даже одной электрически заряженной частицы в газе (при отсутствии других микроскопических зарядов и фонового излучения), то приходится рассматривать физические величины, усредненные по времени и пространству.

В масштабах, соизмеримых с размерами атомов ( $\sim 10^{-10}$  м) методы классической электродинамики, вообще говоря, неприменимы. Однако, в некоторых частных случаях, классическое рассмотрение взаимодействия ядра и электрона с окружающим электромагнитным полем приводит к качественно верным результатам. Это бывает полезно с методологической точки зрения, т.к. как классический подход приводит к менее «трудоемким» моделям.

Опыт показывает, что взаимодействие точечных зарядов определяется следующим законом (закон Кулона):

*Два точечных неподвижных заряда, находящиеся на расстоянии  $R$  друг от друга взаимодействуют друг с другом с силой, величина которой пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$F = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{R^2}.$$

В СИ постоянный коэффициент  $k$  (не путайте с постоянной Больцмана!) равен

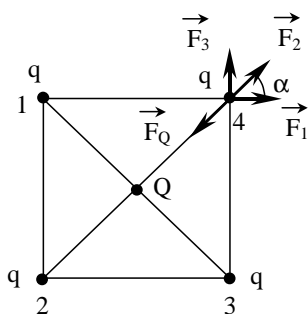
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \approx \frac{9 \cdot 10^9}{\epsilon} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \text{ для среды с диэлектрической проницаемостью } \epsilon.$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \text{ для вакуума } \epsilon=1 \text{ (}\epsilon_0 \text{ - диэлектрическая постоянная).}$$

Для силы Кулона справедливо утверждение:

*вектор силы, действующей на точечный заряд со стороны остальных зарядов равен векторной сумме сил, действующих со стороны каждого заряда в отдельности*  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ . Поэтому, при рас-

смотрении (статического) взаимодействия макроскопических заряженных тел, необходимо раз-



бить каждое из них на точечные заряды, и затем найти вектор суммарной силы попарных взаимодействий между всеми точками этих тел.

**Пример.** В вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся одинаковые одноименные заряды, равные  $q$ . Какой заряд  $Q$  необходимо поместить в центре квадрата, чтобы система находилась в равновесии?

*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов, например, 4-й. Со стороны зарядов 1, 2, 3 на него действуют силы отталкивания. Величина равнодействующей этих сил (в проекции на диагональное направление) равна

$$F_{\text{рез}} = F_1 \cos \alpha + F_3 \cos \alpha + F_2 =$$

$$= k \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + k \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + k \frac{q^2}{2a^2} = k \frac{q^2}{2a^2} (2\sqrt{2} + 1).$$

Тогда, чтобы заряд находился в равновесии, он должен притягиваться к **противоположному** по знаку заряду с силой

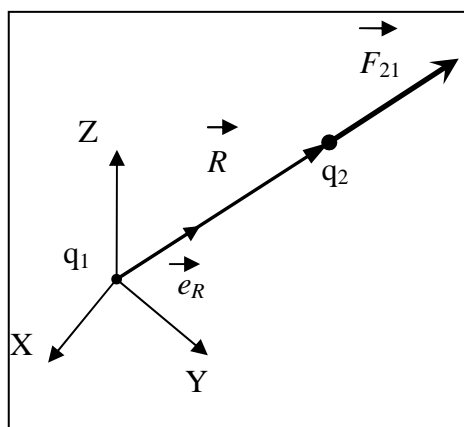
$$F_Q = k \frac{|q||Q|}{a^2/2} = k \frac{q^2}{2a^2} (2\sqrt{2} + 1). \text{ Отсюда } |Q| = |q| \frac{(2\sqrt{2} + 1)}{4}. \clubsuit$$

Сила Кулона является консервативной (для данных двух зарядов она зависит только от расстояния между ними), следовательно, для нее можно ввести потенциальную энергию  $W_{\text{пот}}$ .

*Утверждение.* Энергия взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов определяется соотношением

$$W = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R} + C.$$

(Обратите внимание на показатель степени в знаменателе и отсутствие модуля зарядов.).



*Доказательство.* Консервативная сила и соответствующая ей потенциальная энергия должны быть связаны соотношением

$$\vec{F} = -\text{grad}(W_{\text{пот}}).$$

Рассмотрим систему отсчёта, в которой один из зарядов ( $q_1$ ) покоится в начале координат, а второй ( $q_2$ ) находится в точке, задаваемой радиус-вектором  $\vec{R} = (x, y, z)$ . Пусть заряды будут одноименными. Тогда вектор силы Кулона, действующий на второй заряд со стороны первого

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{e}_R,$$

где  $\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)$  - единичный вектор направления для радиус-вектора.

Найдем выражение для градиента от потенциальной энергии

$$\text{grad}(W_{\text{ПОТ}}) = \left( \frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial x}, \frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial y}, \frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial z} \right).$$

Так как  $C = \text{const}$ , а  $R = |\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , то, например,

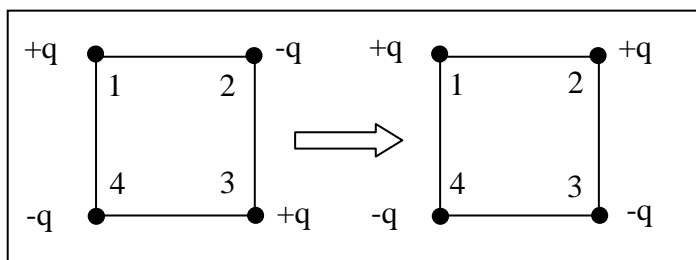
$$\frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{q_1 q_2}{R} + C \right) = k q_1 q_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -k q_1 q_2 \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{x}{R}.$$

Аналогично,  $\frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial y} = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{y}{R}$ ,  $\frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial z} = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{z}{R}$ .

Поэтому

$$\text{grad}(W_{\text{ПОТ}}) = \left( -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{x}{R}, -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{y}{R}, -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{z}{R} \right) = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{e}_R = -\vec{F}. \clubsuit$$

**Пример.** Какую работу необходимо совершить, чтобы перестроить систему четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $a$ ? Заряд  $q$  считать известным (см. рис.).



*Решение.* Работа сил поля равна изменению потенциальной энергии системы зарядов:

$$A_{\text{ПОЛЯ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}}.$$

Начальная энергия системы равна сумме энергий ПОПАРНЫХ взаимодействия между

ВСЕМИ зарядами: 1 и 2:  $W_{12} = k \frac{q \cdot (-q)}{a}$ , 1 и 3:  $W_{13} = k \frac{qq}{\sqrt{2}a}$ , 1 и 4:  $W_{14} = k \frac{q \cdot (-q)}{a}$ , 2 и 3:

$$W_{23} = k \frac{q \cdot (-q)}{a}, 2 \text{ и } 4: W_{24} = k \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a}, 3 \text{ и } 4: W_{34} = k \frac{q \cdot (-q)}{a}.$$

В итоге, начальная энергия системы зарядов равна:  $W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}$ ,

$$W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} = k \frac{q(-q)}{a} + k \frac{qq}{a\sqrt{2}} + k \frac{q(-q)}{a} + k \frac{q(-q)}{a} + k \frac{(-q)(-q)}{a\sqrt{2}} + k \frac{q(-q)}{a} = -4k \frac{q^2}{a} + 2k \frac{q^2}{a\sqrt{2}}.$$

Аналогично подсчитываем конечную энергию системы зарядов:

$$W_{\text{ПОТ\_КОН}} = k \frac{qq}{a} - k \frac{qq}{a\sqrt{2}} - k \frac{qq}{a} - k \frac{qq}{a} - k \frac{qq}{a\sqrt{2}} + k \frac{qq}{a} = -2k \frac{q^2}{a\sqrt{2}}.$$

Поэтому искомая работа равна:

$$A_{\text{ПОЛЯ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}} = 2k \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \left( -4k \frac{q^2}{a} + 2k \frac{q^2}{a\sqrt{2}} \right) = 4k \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - 4k \frac{q^2}{a} = -k \frac{q^2}{a} (4 - 2\sqrt{2}).$$

Работа сил поля равна  $A_{\text{ПОЛЯ}} = -A_{\text{ВНЕШ}}$ , поэтому  $A_{\text{ВНЕШ}} = k \frac{q^2}{a} (4 - 2\sqrt{2}). \clubsuit$

**Замечание.** Сравним по интенсивности электрическое и гравитационное взаимодействие двух точечных одинаковых заряженных элементарных частиц

$$\frac{F_K}{F_G} = \frac{\left( k \frac{q^2}{R^2} \right)}{\left( G \frac{m^2}{R^2} \right)} = \frac{k}{G} \frac{q^2}{m^2} \approx \frac{9 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left( \frac{q}{m} \right)^2 \approx 1,35 \cdot 10^{20} \left( \frac{q}{m} \right)^2$$

Например, для электрона  $\frac{q}{m} \approx 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, поэтому  $\frac{F_K}{F_G} \approx 4 \cdot 10^{42}$ ,

для протона  $\frac{q}{m} \approx 10^8$  Кл/кг, следовательно  $\frac{F_K}{F_G} \approx 1,35 \cdot 10^{36}$ .

Таким образом, можно сказать, что электрическое взаимодействие намного интенсивнее, чем гравитационное. Однако, при рассмотрении макроскопических систем оказывается, что электрические заряды компенсируют друг друга и роль электрических сил становится незначительной. Поэтому на больших (космических) масштабах решающую роль играют гравитационные силы.

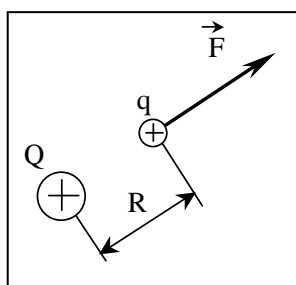
### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.

По современным представлениям электрические заряды взаимодействуют посредством некой материальной субстанции, которая называется *электрическое поле* и является одной из форм проявления *электромагнитного* поля.

Электрическое поле в данной точке пространства характеризуется потенциалом и напряженностью.

### НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

Электрическое поле характеризуется силовой характеристикой - вектором напряженности,



который определяется как отношение вектора силы, действующей на точечный заряд  $q$ , помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ . Величина напряженности измеряется Н/Кл или В/м (Вольт на метр). Зная напряженность поля в данной точке можно найти силу, действующую на заряд  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Отсюда видно, что на положительно заряженные частицы ( $q > 0$ ) сила действует по направлению вектора напряженности электрического поля ( $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{E}$ ), а на отрицательно заряженные ( $q < 0$ ) - против ( $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{E}$ ).

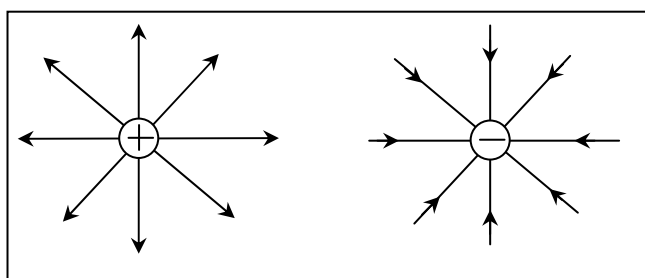
направлению вектора напряженности электрического поля ( $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{E}$ ), а на отрицательно заряженные ( $q < 0$ ) - против ( $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{E}$ ).

**Правило:** чтобы найти направление вектора напряженности электрического поля в данной точке, надо (мысленно) поместить в эту точку *положительный* заряд. Тогда вектор напряженности будет направлен так же как и вектор силы, действующей на заряд.

Найдем напряженность поля создаваемого точечным зарядом  $Q$  на расстоянии  $R$  от него. Для этого возьмем положительный заряд  $q$  и поместим его на расстоянии  $R$  от заряда  $Q$ . Тогда эти заряды будут взаимодействовать с силой, величина которой:  $F = k \frac{q|Q|}{R^2}$ . Поэтому величина напряженности:

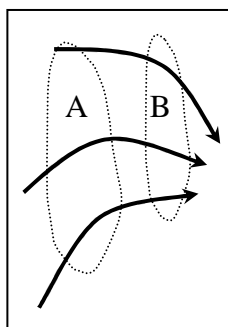
$$E = \frac{F}{q} = k \frac{|Q|}{R^2}.$$

Вектор напряженности направлен в данном случае, так же как и вектор силы (мы делим вектор силы  $F$  на положительное число  $q$ !). То есть вектор напряженности поля, создаваемого положительным зарядом, направлен от него, а у отрицательного – к нему.



заряда к отрицательному.

*Силовой линией* электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$ . Таким образом, силовые линии электрического поля направлены от положительного



*Замечание.* Из рисунка (для точечного заряда) видно, что силовые линии расположены гуще вблизи заряда, т.е. там, где величина напряженности поля выше. Это относительное возрастание густоты силовых линий используют для условного обозначения областей с большей напряженностью поля.

Например, на рисунке (слева) в области  $B$  напряженность поля больше, чем в области  $A$ .

### УРАВНЕНИЕ СИЛОВОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

По определению, касательный вектор к линии лежит на одной прямой с вектором напряженности в точке пространства, через которую проходит силовая линия, т.е. эти векторы пропорциональны друг другу.

Пусть  $\tau$  - параметр задающий линию в трехмерном пространстве, а кривая задаётся координатами  $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ , тогда касательный вектор к этой кривой определяется как

$\left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$ . Поэтому  $\left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = A \cdot \vec{E}$ , где  $A$  – некоторый коэффициент пропорционально-

сти. Исключая параметр  $\tau$  получаем «каноническую» форму записи уравнения силовой линии

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

### ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

Вектор напряженности поля, создаваемого системой зарядов, равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ .

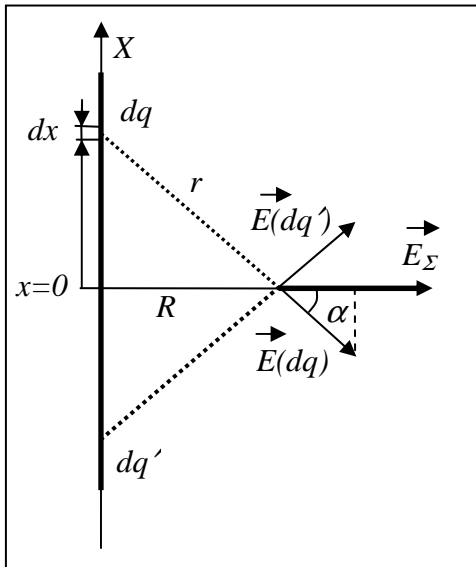
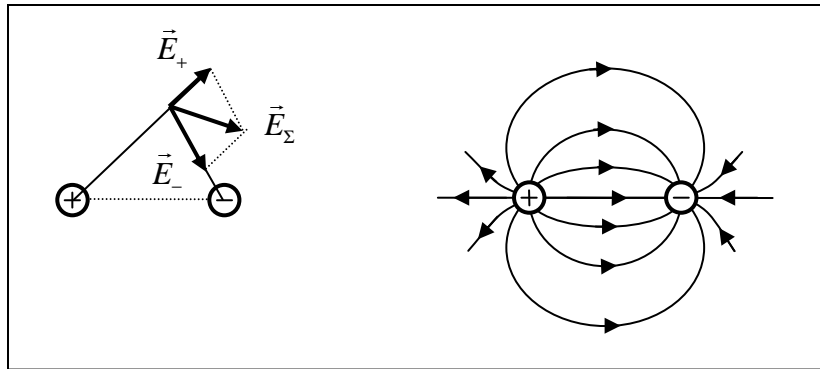
Это следует из того, что силы складываются как векторы:  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , поэтому

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_i \vec{E}_i.$$

Примеры на принцип суперпозиции.

1) Рассмотрим систему из двух одинаковых точечных зарядов.

Напряжённость поля, создаваемого зарядами, равна векторной сумме напряжённостей полей каждого из зарядов  $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ . Тогда получаем картину силовых линий.



2) Найдем напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной тонкой нитью. Пусть  $\lambda > 0$  - линейная плотность заряда нити (это означает, что кусок длиной  $L$  имеет заряд  $q = \lambda \cdot L$ ). Будем искать напряженность в точке, расположенной от нити на расстоянии  $R$ . Вдоль нити вводим ось  $X$ , начало которой является основанием перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на нить. На некотором расстоянии от начала выделяем малый участок нити длиной  $dx$ , тогда заряд этого куска  $dq = \lambda \cdot dx$ .

Рассматривая этот кусок как точечный заряд  $dq$ , находим создаваемый им вектор напряженности в рассматриваемой

точке  $\vec{E}_{dq}$ . Симметричный (относительно начала оси  $X$ ) точечный заряд  $dq'$  создает симметричный вектор напряженности  $\vec{E}_{dq'}$ . Их векторная сумма  $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_{dq} + \vec{E}_{dq'}$  лежит на перпендикуляре к нити. Таким образом, общий вектор напряженности тоже должен быть направлен перпендикулярно нити. Следовательно, при суммировании векторов напряжённостей от всех точечных зарядов

на нити можно учитывать только их перпендикулярную составляющую, т.е. найти сумму проекций на перпендикулярное направление:  $E = \sum_{dq} E_{dq} \cdot \cos \alpha$ . Так как  $E_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{R}{r}$ ,

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}, \text{ то переходим к интегралу } E = \int_{\text{нити}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{R}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(R^2 + x^2) dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Берём второй интеграл по частям  $\int u dv = uv - \int v du$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[ dv = \frac{xdx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, v = -\frac{1}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, u = x, du = dx \right] = -\frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = -2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

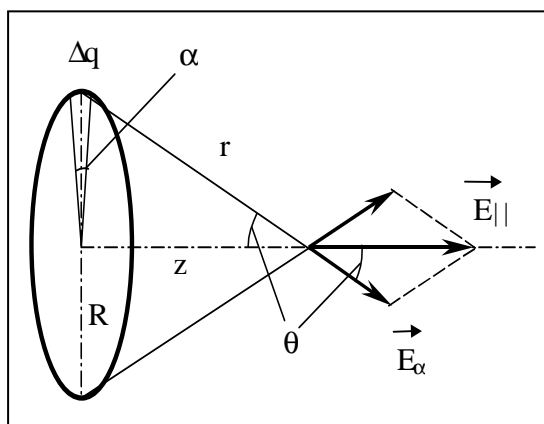
$$\text{Откуда } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{2}{R^2}.$$

$$\text{Окончательно: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

3) Найдем напряженность поля на оси равномерно заряженного кольца, радиус которого  $R$ , а заряд  $Q > 0$ . Разобьем кольцо на большое количество участков, опирающихся на центральный угол

$$\alpha = \frac{2\pi}{N}. \text{ (Длина одного участка } L = \frac{2\pi R}{N}.) \text{ Заряд одного участка } q = \frac{Q}{N}. \text{ Принимая малый участок}$$

кольца за точечный заряд можно найти напряженность поля на оси кольца, создаваемую одним



участком:  $E_\alpha = k \frac{q}{r^2}$ , где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  - расстояние от заряда до рассматриваемой точки. При этом участок, расположенный симметрично относительно центра кольца, создает вектор напряженности, симметричный уже найденному. Их сумма будет лежать на оси кольца (вектор  $\vec{E}_||$ ). Поэтому при суммировании всех векторов напряженностей от каждого из участков будем учитывать только

составляющую вектора, параллельную оси кольца, длина которой  $E_\alpha \cos \theta$ , где

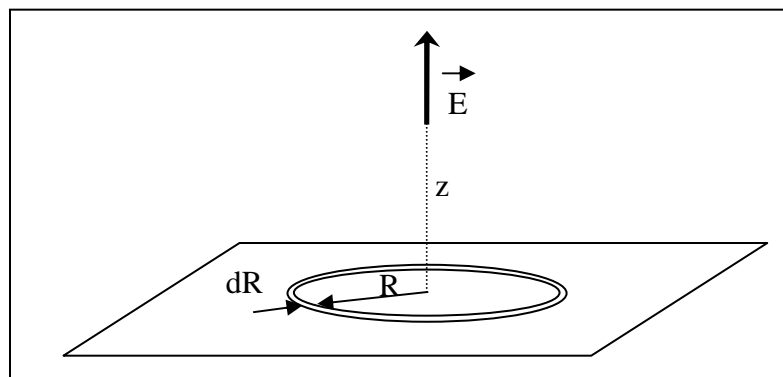
$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \text{ В итоге получаем,}$$



$$E = \sum E_a \cos \theta = Nk \frac{q}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = Nk \frac{Q/N}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отметим, что в центре кольца ( $z=0$ ) напряженность поля равна нулю. ♣

4) Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную плоскость. Пусть поверхностная плотность заряда равна  $\sigma > 0$ . В силу симметрии вектор напряженности направлен перпендикулярно плоско-



сти. Ищем напряжённость в точке, находящейся на расстоянии  $z$  от плоскости.

Если плоскость представить как набор тонких, вложенных друг в друга соосных колец, ось которых проходит через искомую точку, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера.

Заряд тонкого кольца, радиус которого  $R$  и толщина  $dR$  равен  $dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi R dR$ .

Тогда искомая напряжённость  $E = \sum_{dq} k \frac{z \cdot dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ . Переходя к интегрированию, получаем

$$E = \int_{\text{ПЛОСКОСТЬ}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \cdot \sigma \cdot dS}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \cdot \sigma \cdot 2\pi R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z \cdot \sigma}{4\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{d(R^2 + z^2)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z \cdot \sigma}{4\epsilon_0} \left( -\frac{2}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \Bigg|_0^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Величина напряженности поля заряженной пластины  $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,

где  $\sigma = \frac{q}{S}$  - поверхностная плотность заряда (Кл/м<sup>2</sup>). ♣

Электрическое поле называется однородным, если вектор напряженности в каждой точке поля одинаковый (по величине и по направлению). Следовательно, поле бесконечной заряженной пластины - однородное.

## ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Потенциал электрического поля в данной точке поля – это отношение энергии взаимодействия точечного заряда с полем  $W$  к величине этого заряда  $q$  (энергетическая характеристика электрического поля)  $\varphi = \frac{W}{q}$ . Единица измерения потенциала Вольт (В).  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$ .

Работа, совершаемая силами консервативного поля, при относительном изменении положения двух зарядов равна уменьшению потенциальной энергии системы зарядов:

$$A = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}} = q\varphi_{\text{НАЧ}} - q\varphi_{\text{КОН}}$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда  $q$  можно записать в виде  $A = q(\varphi_{\text{НАЧ}} - \varphi_{\text{КОН}})$ .

$$A = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{НАЧ}}} - k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{КОН}}}.$$

Т.о. *разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда*

$$\varphi_{\text{НАЧ}} - \varphi_{\text{КОН}} = \frac{A_{\text{КУЛ}}}{q}.$$

Следовательно, если определить на бесконечности  $\varphi_{\infty} = 0$ , потенциал данной точки поля можно определить как отношение работы сил поля по перемещению заряда  $q$  на очень большое расстояние из данной точки к величине этого заряда  $\varphi_{\text{НАЧ}} = \frac{A}{q} + \varphi_{\infty} = \frac{A}{q}$ .

Если поле создается точечным зарядом  $Q$ , то на расстоянии  $R$  от него потенциал определяется по формуле ( $C=0$ )  $\varphi = \frac{W}{q} = k \frac{Q}{R}$ .

Поверхности в пространстве, на которых потенциал остается постоянным, называются *эквипотенциальными поверхностями*.

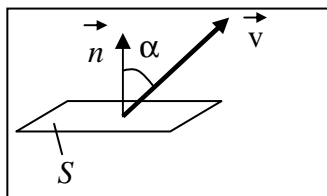
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Будем предполагать, что в некоторой области пространства задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле  $\vec{v}(x, y, z)$ .

1) Поток векторного поля через поверхность.

Потоком вектора  $\vec{v}$  через некоторую поверхность называется величина  $\Phi_v = \iint_S (\vec{v}, d\vec{S})$ .

В простейшем случае плоской поверхности  $S$  и однородного векторного поля поток определяется как



$$\Phi_v = v \cdot S \cos \alpha,$$

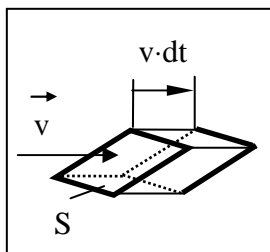
где  $\alpha$  - угол между вектором  $\vec{v}$  и нормалью  $\vec{n}$  к площадке  $S$ .

Если поверхность  $S$  не является плоской, то она разбивается на элементарные участки величиной  $dS$ , такие, что каждый из них можно рас-

считывать как малую часть плоскости, а поле вблизи площадки – однородным. Затем для каждого из участков ищется соответствующая величина  $\delta\Phi_v = v \cdot dS \cos \alpha$ , а потом производится суммирование по всей поверхности  $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v$ .

Если ввести вектор, перпендикулярный к каждой площадке:  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ , где  $\vec{n}$  - единичная нормаль к площадке  $dS$ , то величину потока записать можно в виде  $\delta\Phi_v = v \cdot dS \cos \alpha = (\vec{v}, d\vec{S})$ .

Тогда поток через всю поверхность  $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v = \iint_S (\vec{v}, d\vec{S})$ .



**Пример.** Найдём объём жидкости протекающей через некоторую малую наклонную площадку за единицу времени.

Пусть скорость жидкости равна  $v$  и в пределах площадки её можно считать постоянной, тогда объём жидкости, прошедшей через площадку за малый промежуток времени  $dt$  заполнит внутренность косоугольного параллелепипеда,

объём которого равен  $S \cos \alpha \cdot v dt$ . Здесь  $\alpha$  - угол отклонения вектора скорости жидкости  $\vec{v}$  от направления, перпендикулярного площадке - т.е. угол между вектором единичной нормали к площадке и вектором скорости жидкости. Если ввести вектор  $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ , то объёмный расход жидкости, т.е. объём жидкости, протекающей через площадку в единицу времени, определяется соотношением  $Q = vS \cos \alpha = (\vec{v}, \vec{S})$ . ♣

2) Интеграл от векторного поля вдоль кривой линии  $\Gamma$  («гамма»):  $\int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$ , где  $d\vec{l}$  - касательный

вектор к каждой точке кривой. Таким образом, кривая является ориентированной – она имеет начальную и конечную точки (так как задано направление вдоль кривой с помощью вектора  $d\vec{l}$ ).

В случае, когда векторное поле однородное, а кривая – отрезок прямой линии длиной  $L$ , интеграл равен

$$\int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = v \cdot L \cos \alpha$$

где  $\alpha$  - угол между векторами поля и касательным вектором.

В случае если кривая линия не является прямой и векторное поле не постоянное, нужно разбить линию на малые почти прямолинейные участки длиной  $dl$ , такие, что на каждом из уча-

стков поле можно рассматривать как однородное. Для каждого участка найти величину

$v \cdot dl \cos \alpha = (\vec{v}, d\vec{l})$ , а затем просуммировать полученные все выражения

$$\sum_{\text{Кривая}} v \cdot dl \cos \alpha = \int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}).$$

Пусть кривая линия является замкнутой (без самопересечений во внутренних точках). Такую линию будем в дальнейшем называть контуром. Интеграл от векторного поля  $\vec{v}$  по замкнутой кривой  $\Gamma$ :  $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$  называется *циркуляцией* этого векторного поля вдоль контура  $\Gamma$  (кружок в знаке интеграла условно обозначает, что кривая - замкнутая).

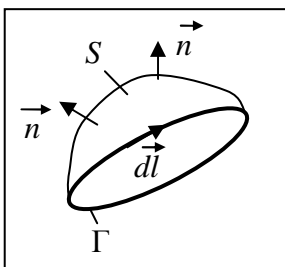
### 3) Теорема Стокса.

Если рассмотреть незамкнутую поверхность  $S$ , то край этой поверхности будет являться замкнутой кривой. Будем считать, что поверхность является ориентируемой (т.е. она – двусторонняя). (Односторонней поверхностью является, например, лента Мёбиуса – поэтому она не ориентируемая). Если  $\Gamma$  – кривая, являющаяся краем поверхности  $S$ , то можно рассмотреть циркуляцию векторного поля вдоль края  $\Gamma$ :  $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$ .

Векторному полю  $\vec{v}$  можно сопоставить ещё одно векторное поле  $rot(\vec{v})$ , которое называется *ротором* векторного поля  $\vec{v}$ . В декартовой системе координат оно определяется соотношением

$$rot(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  - орты декартовой системы координат.



Теорема Стокса гласит:  $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (rot(\vec{v}), d\vec{S})$ .

*Циркуляция векторного поля вдоль края ориентируемой поверхности равна потоку ротора этого поля через эту поверхность.* Направление касательного вектора  $d\vec{l}$  к краю  $\Gamma$  выбирается так чтобы поверхность оставалась слева при обходе, а нормаль направлена наружу (правый винт).

Смысл ротора можно прояснить следующим примером. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Скорость любой точки определяется расстоянием до оси вращения  $v = R \cdot \omega$ . Вектор скорости любой точки направлен по касательной к её траектории – окружности с центром на оси вращения. Можно сказать, что на диске задано векторное поле

– поле векторов скоростей всех точек  $\vec{v}$ . Найдем ротор этого поля  $\text{rot}(\vec{v})$ . Воспользуемся теоремой Стокса

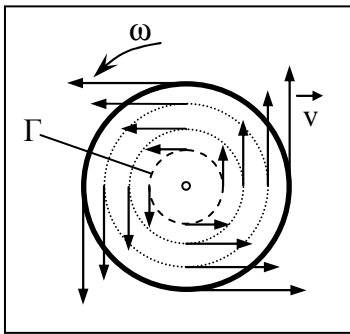
$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{v}), d\vec{S}).$$

Если взять малую площадку  $S$ , то по теореме о среднем для интеграла можно приближенно записать

$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{v}), d\vec{S}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{v}), \vec{n}) dS = \iint_S (\text{rot}(\vec{v}))_n dS \approx (\text{rot}(\vec{v}))_n \cdot S,$$

где  $(\text{rot}(\vec{v}))_n$  – проекция ротора на нормаль к площадке  $S$ .

В качестве контура  $\Gamma$  возьмём окружность малого радиуса  $R$  с центром на оси вращения.



Длина этой окружности  $2\pi R$ , она охватывает площадку  $S$ , площадь которой  $\pi R^2$ . В каждой точке этой окружности вектор скорости направлен по касательной к ней, поэтому угол между малым касательным вектором  $d\vec{l}$  и вектором скорости  $\vec{v}$  равен нулю. Следовательно  $(\vec{v}, d\vec{l}) = v \cdot dl$ .

На выбранной окружности  $\Gamma$  величина скорости не меняется

$v = R \cdot \omega = \text{const}$ . Тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} v \cdot dl = \omega R \oint_{\Gamma} dl.$$

Интеграл  $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi R$  равен длине окружности  $\Gamma$ , поэтому циркуляция  $\oint_{\Gamma} v \cdot dl = 2\pi\omega R^2$ .

Откуда  $2\pi\omega R^2 \approx (\text{rot}(\vec{v}))_n \pi R^2$ .

После сокращений устремим радиус окружности  $R$  к нулю, и получим проекцию ротора на ось вращения

$$(\text{rot}(\vec{v}))_n = 2\omega.$$

Т.е. ротор векторного равен удвоенной угловой скорости вращения точек области, где задано векторное поле. Поэтому иногда ротор также называют *вихрем* поля. Поля, для которых ротор отличен от нуля называют *вихревыми* или *соленоидальными*. Оказывается, для любого вихревого поля  $\vec{v}$  существует некоторое векторное поле  $\vec{a}$ , такое, что выполняется равенство

$$\vec{v} = \text{rot}(\vec{a}).$$

4) Потенциальное поле. Векторное поле  $\vec{v}$ , для которого существует непрерывно-дифференцируемая функция  $\Phi$ , такая, что в некоторой области выполняется равенство

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi$$

называется *потенциальным в этой области*.

Ротор потенциального поля равен нулевому вектору  $\text{rot}(\text{grad}\Phi) = \vec{0}$ .

Действительно, т.к.  $\text{grad}\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)$ , то

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} \right) = \vec{0}.$$

5) Теорема Остроградского-Гаусса.

Любому непрерывно-дифференцируемому векторному полю  $\vec{v}$  соответствует функция, называемая *дивергенцией* этого векторного поля

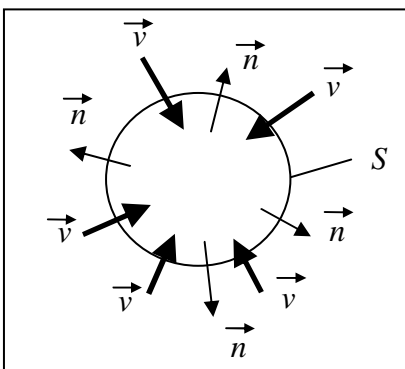
$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса: *поток векторного поля через замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, охваченному этой поверхностью*

$$\oiint_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) dV$$

Смысл дивергенции. Рассмотрим выпуклую поверхность, охватывающую достаточно малый объём. Тогда по теореме о среднем для интеграла

$$\oiint_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) dV \approx \text{div}(\vec{v}) \cdot V$$

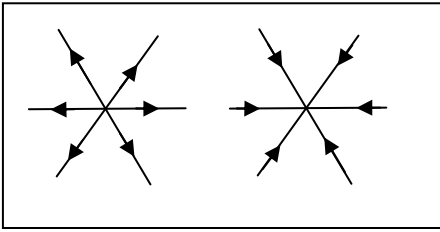


Предположим, что векторное поле «втекает» внутрь объёма  $V$ , т.е. в каждой точке поверхности  $S$  векторы  $\vec{v}$  направлены против векторов нормалей  $\vec{n}$ . Поэтому в каждой точке скалярное произведение  $(\vec{v}, d\vec{S}) = (\vec{v}, \vec{n}) dS < 0$  отрицательно.

Тогда интеграл  $\oiint_S (\vec{v}, d\vec{S}) < 0$ . Так как величина объёма  $V > 0$ , то

$$\text{div}(\vec{v}) \approx \frac{\oiint_S (\vec{v}, d\vec{S})}{V} < 0.$$

Говорят, что в этом случае поле имеет внутри поверхности  $S$  «сток» - «оно как бы стекает в некоторую дырку». Если же  $\text{div}(\vec{v}) > 0$ , то говорят, что у поля есть «источник».



Можно заметить, что в случае *стока* или *источника* поля, при стягивании поверхности  $S$  в точку, векторное поле становится похожим на картину силовых точечных зарядов.

В этом случае положительные заряды являются *источниками* электрического поля и для них  $\text{div} \vec{E} > 0$ .

Отрицательные заряды являются *стоками* электрического поля. Для них  $\text{div} \vec{E} < 0$ .

Электрические заряды принято называть просто *источниками* (положительными и отрицательными) электрического поля.

Таким образом, силовые линии электрического поля не являются непрерывными линиями – они имеют начало и конец.

*Вихревое* электрическое поле  $\vec{v}$  не имеет источников. Действительно, в случае вихревого поля  $\vec{v}$  существует некоторое поле  $\vec{a}$ , такое, что  $\vec{v} = \text{rot}(\vec{a})$ , поэтому

$$\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_x}{\partial x} + \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_y}{\partial y} + \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_z}{\partial z}$$

Но

$$\text{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Так как вихревое поле не имеет источников, то его силовые линии нигде не разрываются, т.е. они *непрерывные и замкнутые*.

### СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА.

Так как энергия взаимодействия точечного заряда с электрическим полем и сила, действующая на этот заряд со стороны поля, связаны соотношением  $\vec{F} = -\text{grad}(W_{\text{пот}})$ , то из определений

$$\text{получаем } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{1}{q} \text{grad}(W_{\text{пот}}) = -\text{grad} \left( \frac{W_{\text{пот}}}{q} \right) = -\text{grad}(\varphi).$$

Таким образом, связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля дается выражением (в дифференциальной форме)

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi).$$

Следовательно, электростатическое поле является потенциальным полем.

Силовые линии направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в каждой их точке. Действительно, рассмотрим малое перемещение на вектор  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  вдоль эквипотенциальной поверхности  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ . Для вектора напряженности в любой точке этой поверхности справедливо равенство  $(\vec{E}, d\vec{r}) = -(\text{grad}(\varphi), d\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -d\varphi = 0$ . Следовательно, в любой точке вектор напряженности направлен перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.

Из свойств градиента следует, что вектор напряжённости электрического поля направлен в сторону наибольшего убывания потенциала, перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.

Работа сил электрического поля

$$A_{КУЛ} = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{F}_{КУЛ}, d\vec{l}) = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (q \cdot \vec{E}, d\vec{l}) = q \cdot \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

В то же время  $A_{КУЛ} = q(\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН})$ .

Сравниваем эти выражения и получаем

$$\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН} = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Если обозначить изменение потенциала как  $\Delta\varphi = \varphi_{КОН} - \varphi_{НАЧ}$  (НЕ ПУТАЙТЕ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА!), то получим связь напряженности и потенциала в интегральной форме

$$\Delta\varphi = - \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l})$$

Из этого выражения следует теорема о циркуляции для электростатического поля:  
для любой замкнутой траектории  $\Gamma$  находящейся в области пространства, где создано электростатическое поле значение интеграла

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

вдоль этой замкнутой линии  $\Gamma$  всегда равно нулю.

Действительно, в случае, когда точечный заряд перемещается вдоль какой-то замкнутой траектории  $\Gamma$ , выполняется равенство  $\varphi_{КОН} = \varphi_{НАЧ}$ , поэтому

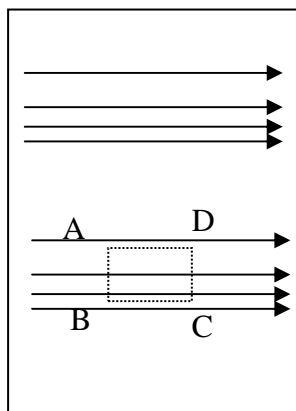
$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\Delta\varphi = \varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН} = 0.$$

Из теоремы Стокса следует дифференциальная форма теоремы о циркуляции:



т.к. электростатическое поле потенциальное, то его ротор равен нулевому вектору в каждой точке:

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}.$$



**Пример.** Можно ли создать неоднородное электростатическое поле, силовые линии которого параллельны друг другу?

В электростатическом поле для любого замкнутого контура  $\Gamma$  выполняется равенство  $\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$ . Если возьмём в качестве контура  $\Gamma$  прямоугольник

ABCD, то интеграл можно разбить на 4 интеграла вдоль сторон этого прямоугольника:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Но на сторонах AB и CD векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  перпендикулярны друг другу, т.е.  $(\vec{E}, d\vec{l}) = 0$ , поэтому

$$\int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \text{ и } \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

На стороне BC векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  направлены одинаково, на стороне DA направлены противоположно, откуда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} E \cdot (\cos 0^\circ) \cdot dl + \int_{DA} E \cdot (\cos 180^\circ) \cdot dl = \int_{BC} E dl - \int_{DA} E dl.$$

Вблизи стороны BC силовые линии расположены гуще, чем вблизи стороны DA, поэтому  $E_{BC} > E_{DA}$ , следовательно

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} E dl - \int_{DA} E dl = E_{BC} \cdot |BC| - E_{DA} \cdot |DA| \neq 0.$$

То есть для такого поля не выполняется теорема о циркуляции. ♣

### Принцип суперпозиции для потенциалов.

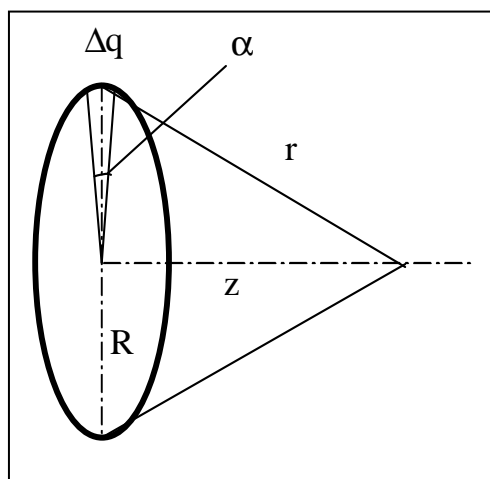
Из принципа суперпозиции следует

$$\vec{E}_{\Sigma} = \sum_i \vec{E}_i = -\sum_i \text{grad}(\varphi_i) = -\text{grad}\left(\sum_i \varphi_i\right) = -\text{grad}(\varphi_{\Sigma}),$$

$$\text{т.е. } \varphi_{\Sigma} = \sum_i \varphi_i.$$

Потенциал в данной точке поля, создаваемого системой зарядов равен алгебраической сумме потенциалов поля, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

**Пример.** Рассмотрим электрическое поле, создаваемое заряженным кольцом, радиус которого  $R$ . Найдём потенциал на оси кольца на расстоянии  $z$  от плоскости кольца.



*Решение.* Разобьем кольцо на большое количество участков,

опирающихся на центральный угол  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ . (Длина одного

участка  $L = \frac{2\pi R}{N}$ .) Заряд одного участка  $q = \frac{Q}{N}$ , где  $Q$  – заряд

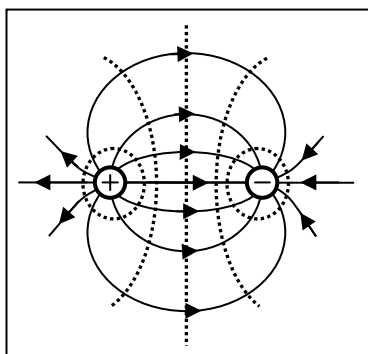
кольца. Будем считать, что  $Q > 0$ . Принимая малый участок

кольца за точечный заряд можно найти потенциал поля на оси

кольца, создаваемого одним участком:  $\phi_a = k \frac{q}{r}$ , где

ции, суммарный потенциал

$$\phi = \sum_a \phi_a = \sum_a k \frac{q}{r} = \sum_a k \frac{Q/N}{r} = Nk \frac{Q/N}{r} = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$



Из этой формулы видно, что потенциал в центре кольца ( $z=0$ ) равен

$$\phi = k \frac{Q}{R}.$$

Пример. Картина поля для системы двух одинаковых по величине, но разноименных зарядов.

Энергия системы зарядов равна сумме энергий попарных взаимодействий

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij}$$

Здесь множитель  $\frac{1}{2}$  учитывает, что одна и та же пара индексов встречается в этом выражении два раза - один раз как  $(ij)$ , а второй раз как  $(ji)$ . Запишем это выражение через потенциалы

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left( \sum_{j \neq i} \phi_j \right).$$

Последнее выражение включает в себя сумму потенциалов полей  $\sum_{j \neq i} \phi_j$ , создаваемых всеми зарядами, за исключением номера  $i$ , в том месте, где находится заряд с номером  $i$ .

**Пример.** Найдём энергию взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ .

В точке, где находится заряд  $q_1$ , второй заряд создаёт потенциал  $\varphi_2 = k \frac{q_2}{R}$ . В точке, где находится

заряд  $q_2$ , первый заряд создаёт потенциал  $\varphi_1 = k \frac{q_1}{R}$ . Тогда

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_2 + q_2 \varphi_1) = \frac{1}{2} \left( q_1 k \frac{q_2}{R} + q_2 k \frac{q_1}{R} \right) = k \frac{q_1 q_2}{R} . \clubsuit$$

Очень часто распределение зарядов в пространстве можно задать с помощью функции, называемой плотностью распределения (электрической плотностью).

- 1) Объёмная плотность распределения  $\rho(x, y, z)$  (единицы измерения Кл/м<sup>3</sup>). Тогда суммар-

ный заряд объема  $Q = \iiint_V \rho dV$ . Энергию взаимодействия некоторого точечного заряда  $q$  с

заряженным телом можно определить следующим образом  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iiint_V \frac{\rho}{r} dV$ , где  $r$  – рас-

стояние от точечного заряда  $q$  до точки, где задана плотность  $\rho(x, y, z)$ .

- 2) Поверхностная плотность распределения заряда  $\sigma(x, y, z)$  (единицы измерения Кл/м<sup>2</sup>). То-

гда суммарный заряд поверхности  $Q = \iint_S \sigma dS$ . Энергия взаимодействия некоторого

точечного заряда  $q$  с заряженной поверхностью  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iint_S \frac{\sigma}{r} dS$  где  $r$  – расстояние от

точечного заряда  $q$  до точки, где задана плотность  $\sigma(x, y, z)$ .

- 3) Линейная плотность распределения заряда  $\lambda(x, y, z)$  (Единицы измерения Кл/м). Тогда

суммарный заряд кривой линии  $Q = \int_{\Gamma} \lambda dl$ . Энергия взаимодействия некоторого точечного

заряда  $q$  с заряженной линией  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{r} dl$  где  $r$  – расстояние от точечного заряда  $q$  до

точки, где задана плотность  $\lambda(x, y, z)$ .

Потоком вектора напряжённости электрического поля через ориентированную поверхность

$S$  называется величина  $\Phi_{\vec{E}} = \iint_S (\vec{E}, d\vec{S})$ . Единица измерения В·м.

## Теорема Гаусса в интегральной форме.

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, ориентированную наружу, прямо пропорционален алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности  $\frac{1}{\epsilon_0}$ .

$$\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Если ввести функцию объёмного распределения электрического заряда  $\rho(x, y, z)$ , такую, что

$$\iiint_V \rho dV = \sum_i q_i$$

и воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса  $\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \iiint_V \text{div}(\vec{E}) dV$ , то из равенства

$$\iiint_V \text{div}(\vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

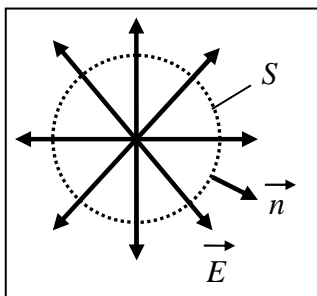
получим дифференциальную форму теоремы Гаусса:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Смысл этого равенства состоит в том, что *источником электрического поля являются электрические заряды*. Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных и оканчиваются на отрицательных зарядах - т.е. электрические заряды являются источниками и стоками электрического поля.

## Примеры применения теоремы Гаусса.

Теорему Гаусса удобно применять для определения напряжённости поля в случаях, когда картина силовых линий обладает какой-либо симметрией.

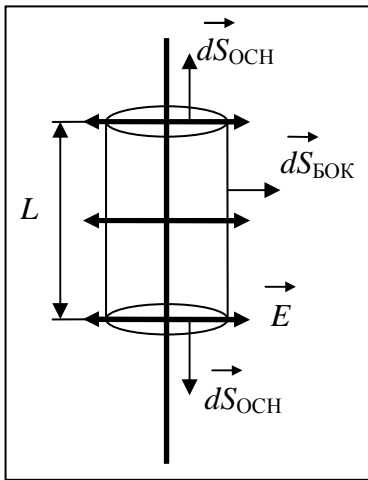
1) Поле точечного заряда  $q$ .

Пусть  $q > 0$ . Возьмём в качестве поверхности  $S$  сферу радиусом  $R$  с центром в месте нахождения заряда. На поверхности этой сферы вектор  $\vec{E}$  сонаправлен с вектором внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности сферы, поэтому  $(\vec{E}, d\vec{S}) = (\vec{E}, \vec{n}) dS = E |\vec{n}| \cos 0^\circ dS = E dS$ . В каждой точке поверхности сферы, поэтому

$$\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = ES$$

Так как площадь поверхности сферы  $S = 4\pi R^2$ , то поток вектора напряжённости

$$\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



2) *Поле бесконечной прямой заряженной нити.* Пусть нить заряжена с линейной плотностью заряда  $\lambda > 0$ .

Как мы уже знаем, силовые линии поля направлены перпендикулярно нити и картина поля в целом обладает осевой симметрией относительно нити.

Найдем поток напряженности через поверхность прямого цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $L$ , ось которого совпадает с осью цилиндра.

$$\oiint_{\text{ЦИЛИНДР}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} (\vec{E}, d\vec{S}) + \iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} (\vec{E}, d\vec{S})$$

На основаниях цилиндра векторы  $d\vec{S} \perp \vec{E}$ , поэтому  $\iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$ .

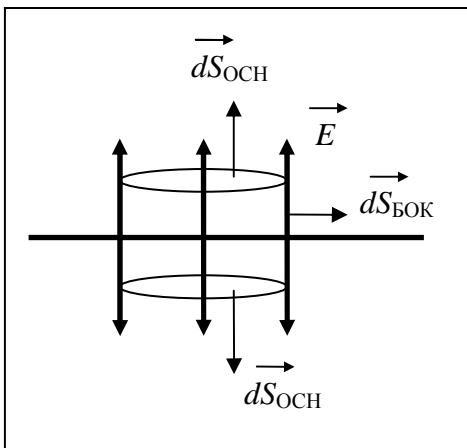
На боковой поверхности  $d\vec{S} \uparrow \vec{E}$ , поэтому  $\iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} E dS$ .

Т.к. картина поля осесимметрична, то величина  $E$  зависит только от расстояния до нити, поэтому на боковой поверхности этого цилиндра величина  $E = \text{const}$ .

$$\iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} E dS = E \iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} dS = E S_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} = E 2\pi R L.$$

По теореме Гаусса  $\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q_{\text{ВНУТР}}}{\epsilon_0}$ . Но внутри цилиндра находится часть нити длиной  $L$ , по-

этому  $q_{\text{ВНУТР}} = \lambda \cdot L$ . Поэтому  $E 2\pi R L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$ , откуда  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ .



3) *Поле бесконечной заряженной плоскости.* Пусть поверхностная плотность заряда  $\sigma > 0$ . Картина силовых линий симметрична относительно плоскости. Найдем поток через поверхность прямого цилиндра, основания которого параллельны плоскости, и расположенного так, что плоскость делит цилиндр *пополам*. В этом случае наблюдается симметрия относительно плоскости.

$$\oiint_{\text{ЦИЛИНДР}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} (\vec{E}, d\vec{S}) + \iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Тогда  $\iint_{\text{БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ}} (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$ .

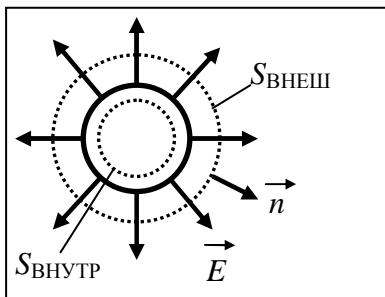
На основаниях цилиндра величина потока будет одинаковой (из-за симметрии):

$$\iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2ES_{\text{ОСНОВАНИЕ}}.$$

Величина заряда внутри цилиндра  $q = \sigma \cdot S_{\text{ОСНОВАНИЕ}}$ .

Поэтому, по теореме Гаусса  $2ES_{\text{ОСНОВАНИЕ}} = \frac{\sigma \cdot S_{\text{ОСНОВАНИЕ}}}{\epsilon_0}$ , откуда  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

#### 4) Поле тонкостенной (полый) заряженной сферы.



Картина силовых линий обладает центральной симметрией относительно центра сферы, поэтому величина напряженности поля зависит только от расстояния до центра сферы.

Сначала в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность, находящуюся внутри сферы.

$$\oiint_{S_{\text{ВНУТР}}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oiint_{S_{\text{ВНУТР}}} EdS = E \oiint_{S_{\text{ВНУТР}}} dS = ES_{\text{ВНУТР}}.$$

Но внутри сферы зарядов нет, поэтому  $ES_{\text{ВНУТР}} = 0$ . Таким образом, напряжённость поля внутри сферы равна нулю  $E = 0$ .

Теперь в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность радиуса  $R$ , охватывающую сферу. Тогда

$$\oiint_{S_{\text{ВНЕШ}}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oiint_{S_{\text{ВНЕШ}}} EdS = E \oiint_{S_{\text{ВНЕШ}}} dS = ES_{\text{ВНЕШ}}.$$

Эта поверхность охватывает сферу целиком, поэтому  $ES_{\text{ВНЕШ}} = \frac{q}{\epsilon_0}$ , откуда

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S_{\text{ВНЕШ}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

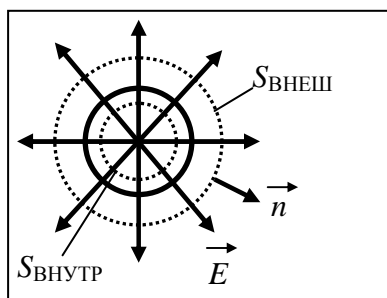
#### 5) Поле, создаваемое полым бесконечным заряженным цилиндром радиуса $R$ .

Картина силовых линий симметрична относительно оси цилиндра.

Внутри цилиндра  $E=0$ , а снаружи  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ , где  $\lambda$  - линейная плотность заряда цилиндра,  $r$  - рас-

стояние от оси цилиндра. Если для цилиндра задана поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , то, т.к. заряд куска цилиндра длиной  $L$   $q = \lambda L = \sigma 2\pi RL$ , откуда получаем  $\lambda = \sigma 2\pi R$ , поэтому

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R}{r}.$$



б) Поле, создаваемое шаром радиуса  $R$  и заряженным равномерно зарядом  $q$ . Картина силовых линий обладает центральной симметрией. Выделим внутри шара сферу радиуса  $r$  с центром, совпадающим с центром шара. Тогда

$$\oint_{S_{\text{ВНУТР}}} (\vec{E}, d\vec{S}) = ES_{\text{ВНУТР}} = \frac{q_{\text{ВНУТР}}}{\epsilon_0}.$$

Заряд внутри сферы  $q_{\text{ВНУТР}} = \frac{q}{V_{\text{ШАР}}} V_{\text{ВНУТР}}$ , где объём шара  $V_{\text{ШАР}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , объём внутри сферы

$V_{\text{ВНУТР}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ , площадь поверхности внутренней сферы  $S_{\text{ВНУТР}} = 4\pi r^2$ . Тогда

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ поэтому внутри шара } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r.$$

*Замечание.* Это равенство можно записать в векторном виде  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор из центра шара.

Снаружи шара картина поля аналогична уже разобранному полю заряженной сферы

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

### Уравнение Пуассона

Общая задача электростатики состоит в том, чтобы по распределению зарядов в пространстве определить потенциал  $\phi$  и, следовательно, напряжённость электростатического поля.

Из соотношений  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$  и  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  получаем уравнение

$$\text{div}(\text{grad}\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

описывающее распределение потенциала по заданному распределению заряда.

В декартовой системе координат

$$\text{div}(\text{grad}\phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta\phi$$

( $\Delta$  - оператор Лапласа), поэтому уравнение принимает вид  $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Это уравнение Пуассона.

При отсутствии зарядов ( $\rho=0$ ) получаем уравнение Лапласа  $\Delta\phi = 0$ .

При решении подобной задачи необходимо задать граничные условия – значения потенциала или напряжённости на границе рассматриваемой области.

### Лекция 3. Электростатическое поле в диэлектрике.

*Электрический диполь в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризованность. Свободные и связанные заряды. Связь поляризованности с плотностью связанных зарядов. Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса. Поле на границе раздела диэлектриков.*

Все вещества состоят из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц. Эти заряженные частицы находятся в постоянном движении, поэтому при классическом описании их движения будут рассматриваться *усреднённые по времени величины*. Если в веществе есть электрические заряды, способные относительно свободно перемещаться в пределах тела даже под действием слабого электрического поля, то такие вещества относятся к так называемому классу проводников. Соответственно, вещества, в которых нет «свободно» движущихся зарядов (при обычных условиях) относят к диэлектрикам.

*Замечание.* Это деление на классы проводников и диэлектриков весьма условно. Некоторые вещества, являющиеся проводниками в определённых условиях, становятся диэлектриками в других, и наоборот.

*Замечание.* В проводниках, находящихся в электростатическом поле, суммарное внутреннее электрическое поле характеризуется нулевой напряженностью. В диэлектриках напряженность суммарного поля отлична от нуля.

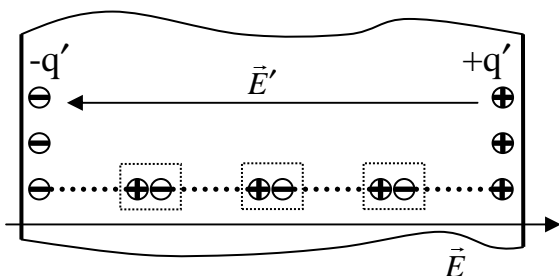
#### Рассмотрим поведение диэлектриков в электрическом поле.

Заряды, не входящие в состав вещества, будем называть сторонними (но они могут находиться внутри вещества). Эти заряды создают электрическое поле, которое будем называть внешним.

В диэлектрике при нормальных условиях нет свободно движущихся носителей зарядов. Все заряды, из которых состоит диэлектрик, связаны друг с другом. Их называют связанными. Электрические заряды образуют молекулы. Если в отсутствии внешнего электрического поля электрические заряды в молекуле пространственно разделены, то молекула называется *полярной*, в противном случае – *неполярной*.

Во внешнем электрическом поле неполярная молекула вытягивается вдоль силовой ли-

нии поля, а полярная разворачивается. Можно приближенно считать, что крайние связанные заряды двух соседних диполей в глубине диэлектрика взаимно компенсируются, но заряды, расположенные вблизи поверхности диэлектрика ничем не скомпенсированы. Эти некомпенсированные заряды

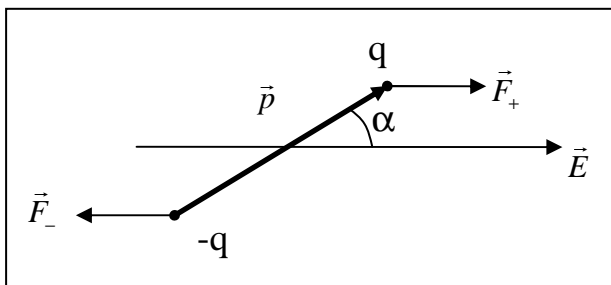




создают дополнительное электрическое поле внутри диэлектрика, которое изменяет внешнее. Это явление разделения связанных зарядов и появления дополнительного поля называется *поляризацией диэлектрика*.

Теперь опишем поляризацию количественно.

В простейшем случае молекулу можно представить как два одинаковых по величине, но



противоположных по знаку заряда. Такая система зарядов называется *диполь*. Электрическим дипольным моментом называется векторная величина  $\vec{p} = q\vec{L}$ , где  $q$  – величина заряда,  $L$  – расстояние между зарядами. (Единица измерения Кл·м).

Вектор момента  $\vec{p}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

На диполь, помещенный в электрическое поле, действует момент пары сил, величина которого

$$M = F_+ L \sin \alpha = qEL \sin \alpha = pE \sin \alpha .$$

В векторном виде

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} .$$

В состоянии равновесия диполя вектор дипольного момента  $\vec{p}$  параллелен вектору напряженности  $\vec{E}$ .

В отсутствии внешнего поля в диэлектрике с полярными молекулами, диполи ориентированы хаотически. В диэлектрике, находящемся в электростатическом поле, в состоянии равновесия диполи преимущественно расположены вдоль поля.

Рассмотрим в диэлектрике некоторый физически малый объем величиной  $V$ . Введем *вектор поляризованности вещества*

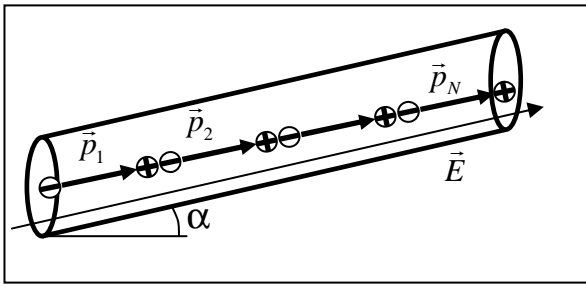
$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V} .$$

Единица измерения Кл/м<sup>2</sup>. В однородном изотропном диэлектрике этот вектор направлен параллельно вектору напряженности, поэтому можно записать

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} .$$

Безразмерный параметр  $\epsilon$  называется коэффициентом поляризуемости или диэлектрической восприимчивостью вещества.

Рассмотрим тонкий косой цилиндр, ось которого параллельна вектору напряженности внешнего поля.



$$|\vec{P}| = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V} = \frac{Nq'L}{SNL \cos \alpha} = \frac{q'}{S \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}$$

где  $q'$  - величина связанного заряда. Обратите внимание: величина вектора не зависит от количества суммируемых диполей – она определяется только поверхностной плотностью связанного заряда.

Отсюда получаем для нормальной составляющей вектора

$$P_n = |\vec{P}| \cos \alpha = \sigma'.$$

Нормальная составляющая вектора поляризованности равна поверхностной плотности связанного заряда.

Теперь найдём поток вектора поляризованности через некоторую малую поверхность  $S$ .

$$\Phi_P = \iint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \iint_S |\vec{P}| \cos \alpha dS \approx |\vec{P}| \cos \alpha S = \sigma' S = q'.$$

Таким образом, *поток вектора поляризованности через некоторую малую площадку равен величине связанного заряда, создающего этот вектор.*

Рассмотрим поток этого вектора через некоторую замкнутую ориентированную поверхность внутри диэлектрика

$$\oiint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \oiint_S |\vec{P}| \cos \alpha dS = \oiint_S \sigma' dS.$$

Предположим, что вектор поляризованности направлен наружу, т.е. внутри поверхности суммарный связанный заряд отрицательный. Тогда, учитывая, что поток вектора положительный, а заряд отрицательный:

$$\oiint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \oiint_S \sigma' dS = -q'.$$

*Это теорема Гаусса для вектора поляризованности в интегральном виде.* Соответственно, в дифференциальном виде:

$$\text{div}(\vec{P}) = -\rho'.$$

Запишем теорему Гаусса для электростатического поля внутри диэлектрика

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{св}} + \rho'}{\epsilon_0}.$$

(здесь указано, что электрическое поле создается сторонними зарядами с объемной плотностью  $\rho$  и связанными зарядами с объемной плотностью  $\rho'$ ).

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{\text{св}} + \rho' = \rho_{\text{св}} - \text{div}(\vec{P}) \quad \text{или} \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{св}}.$$

Вектор  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  называется вектором *электрического смещения* или *вектором электрической индукции*. Следовательно, из теоремы Гаусса для вектора электрической напряженности следует теорема Гаусса для вектора электрического смещения

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_{\text{св}}.$$

Это теорема Гаусса для электрического поля в веществе (в дифференциальной форме).

В интегральной форме теорема Гаусса для электрического поля в веществе: *поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.*

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

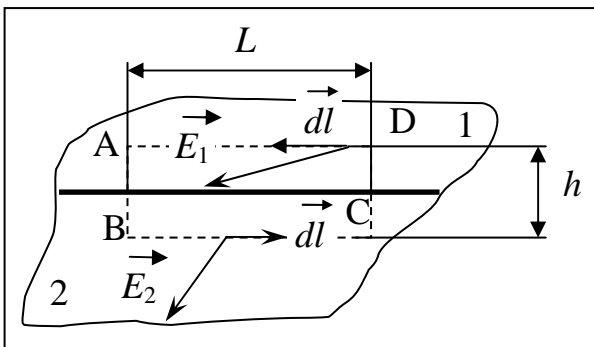
В однородном, изотропном диэлектрике  $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ , поэтому

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon + 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

Если обозначить  $\epsilon = \epsilon + 1$  – (относительную) *диэлектрическую проницаемость вещества*, то для вектора смещения внутри однородного изотропного диэлектрика  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ .

*Замечание.* Для вакуума  $\epsilon = 1$  (нет вещества, поэтому  $\epsilon = 0$ ). Для воздуха при условиях незначительно отличающихся от нормальных тоже  $\epsilon \approx 1$ .

### Поле на границе раздела диэлектриков.



Рассмотрим поле на плоской границе раздела (в случае неплоской границы достаточно рассмотреть очень малый участок). Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряженности в интегральном виде

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

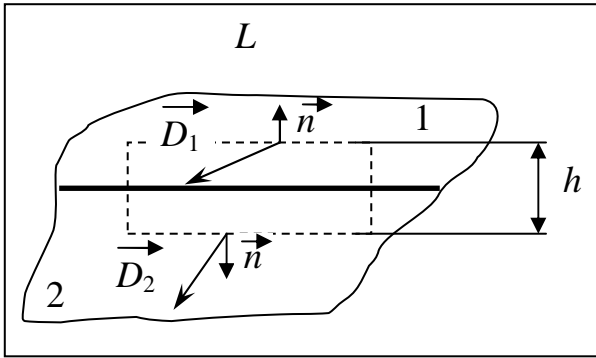
В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник ABCD размером  $L \times h$ , расположенный таким образом, что одна сторона DA находится в первом диэлектрике, вторая BC – во втором, а граница делит прямоугольник пополам.

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

При устремлении  $h \rightarrow 0$  значения второго и четвертого интегралов стремятся к нулю.

Но  $(\vec{E}, d\vec{l}) = E_t dl$ , где  $E_t$  – касательная составляющая вектора напряженности.

$$\text{Поэтому } \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) \approx \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) = E_{1t} L - E_{2t} L = 0.$$



Окончательно,  $E_{1t} = E_{2t}$  - на границе раздела диэлектриков величина касательной составляющей вектора напряженности электрического поля не меняется.

Теперь применим теорему Гаусса в веществе.

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем прямой цилиндр высотой  $h$ , основания которого (площадью  $S$  каждое) параллельны границе раздела. Пусть граница раздела делит пополам цилиндр. Тогда

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \iint_{S_{1\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{2\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

Учтем, что  $(\vec{D}, d\vec{S}) = (\vec{D}, \vec{n}) dS = D_n dS$ , где  $D_n$  – нормальная составляющая вектора смещения.

Если высота цилиндра стремится к нулю  $h \rightarrow 0$ , интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю, поэтому

$$\iint_{S_{1\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{2\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) \approx -D_{1n} S + D_{2n} S$$

В пределе, с учетом  $q = \iint_{S_{\text{осн}}} \sigma dS = \sigma S$ , получаем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора смещения на границе раздела диэлектриков равно плотности стороннего заряда на границе. Если на границе нет сторонних зарядов ( $\sigma=0$ ), то нормальная составляющая вектора смещения не меняется:  $D_{2n} = D_{1n}$

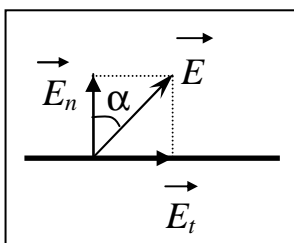
Если рассмотреть теорему Гаусса для вектора поляризованности в интегральной форме

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'$$

то можно, по аналогии, записать

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'.$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора поляризованности равно с обратным знаком поверхностной плотности связанного заряда.

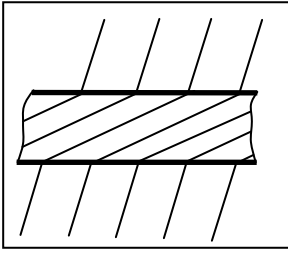


Соотношения на границе диэлектрика (при отсутствии сторонних зарядов) можно переписать в виде  $\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$ ,  $E_{1t} = E_{2t}$ . Если ввести угол

отклонения силовой линии от нормали к границе диэлектрика  $\tan \alpha = \frac{E_t}{E_n}$ ,

то для углов по разные стороны от границы

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \frac{E_{1n}}{E_{1t}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

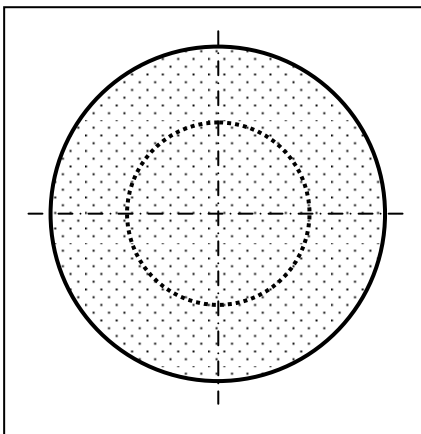


При  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  получаем  $\alpha_2 > \alpha_1$  – в диэлектрике с большей относительной проницаемостью силовые линии больше отклоняются от вертикального направления. Т.е. можно сказать, что в диэлектрике силовые линии электрического поля сгущаются. Говорят, что диэлектрик «накапливает силовые линии».

*Пример. Рассмотрим поле внутри и снаружи равномерно заряженного шара. Диэлектрическая проницаемость внутри постоянна и равна  $\epsilon > 1$ . Вне шара  $\epsilon = 1$ . Пусть заряд шара  $q > 0$ , а радиус  $R$ ,*

*тогда объемная плотность заряда  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ . Задача имеет сферическую симметрию.*

При  $r < R$  в качестве поверхности интегрирования возьмем концентрическую сферу меньшего



радиуса. Поверхность ориентирована наружу. Вектор смещения и нормаль в каждой точке параллельны друг другу. По

теореме Гаусса  $D 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Поэтому при  $r < R$  получаем величина смещения  $D = \frac{\rho}{3} r$ , отку-

да для напряжённости  $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon \epsilon_0}$

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon \epsilon_0} r = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 R^3} r.$$

Снаружи при  $r > R$  напряжённость поля  $E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$ . Видно, что на границе раздела величина

вектора напряженности терпит разрыв при  $r = R$  (т.к.  $\epsilon > 1$ ):

$$E_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 R^2} < E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2}.$$

Этот «разрыв» величины напряжённости вызван наличием на поверхности диэлектрика связанных зарядов.

На границе шара сохраняется нормальная составляющая вектора смещения  $D_{2n} = D_{1n}$ :

действительно, вектор  $\vec{D}$  направлен по радиусу, поэтому его нормальная составляющая равна

величине вектора  $D_n = D$ . Но на границе шара  $D_1 = D_2 = \frac{q}{4\pi R^2}$

Величина поляризованности внутри шара

$$P_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 R^3} r = \frac{(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1} \frac{q}{R^3} r.$$

Вне шара величина вектора поляризованности ( $\epsilon_2=1$ )

$$P_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 E_2 = (\epsilon_2 - 1) \epsilon_0 E_2 = 0.$$

Вектор внутри шара  $\vec{P}$  направлен по радиусу (т.к. он направлен также как  $\vec{E}$ ), поэтому его нормальная составляющая равна величине вектора  $P_n = P$ .

Поэтому на границе должно выполняться:  $-P_1 = -\sigma'$ , откуда плотность связанных зарядов на поверхности шара:

$$\sigma' = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 R^2} = \frac{q(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1 R^2}.$$

Поверхностный связанный заряд  $q'_{\text{пов}} = \sigma' S = \frac{q(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q(\epsilon_1 - 1)}{\epsilon_1}.$

Из теоремы Гаусса  $\text{div}(\vec{P}) = -\rho'$  для вектора поляризованности найдём объёмную плотность связанного заряда.

Для сферически симметричного случая  $\text{div}\vec{P} = 2\frac{P}{r} + \frac{dP}{dr}$ , поэтому

$$\rho' = -\left(2\frac{P_1}{r} + \frac{dP_1}{dr}\right) = -\left(2\frac{(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1} \frac{q}{R^3} + \frac{(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1} \frac{q}{R^3}\right) = -3\frac{(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1} \frac{q}{R^3}$$

Откуда связанный заряд внутри шара  $q'_{\text{внутр}} = \rho' V_{\text{внутр}} = -3\frac{(\epsilon_1 - 1)}{4\pi \epsilon_1} \frac{q}{R^3} \frac{4}{3}\pi R^3 = -\frac{(\epsilon_1 - 1)}{\epsilon_1} q.$

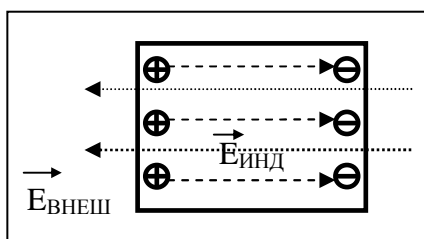
Общий связанный заряд всего шара  $q' = q'_{\text{внутр}} + q'_{\text{пов}} = 0. \clubsuit$

## Лекция 4.

**Электрическое поле заряженных проводников. Энергия электростатического поля.**

*Поле вблизи поверхности проводника. Электроёмкость проводников и конденсаторов. Ёмкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Энергия системы неподвижных зарядов. Энергия заряженного проводника, конденсатора. Плотность энергии электростатического поля.*

При внесении проводника во внешнее электрическое поле, свободные заряды внутри

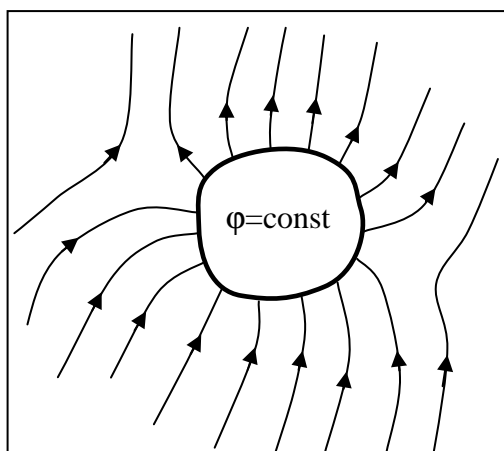


проводника начинают перемещаться под действием сил со стороны внешнего поля до тех пор, пока не наступит равновесие. Это приводит к перераспределению электрического заряда внутри проводника. Области проводника, до этого электрически нейтральные, приобретают uncompensated electric charge.

Следовательно, в проводнике появляется (или, как говорят, индуцируется) электрическое поле  $E_{\text{ИНД}}$ . Условие равновесия электрических зарядов

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = q(\vec{E}_{\text{ВНЕШ}} + \vec{E}_{\text{ИНД}}) = \vec{0}$$

т.е. напряженность поля внутри проводника



$$\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = \vec{E}_{\text{ВНЕШ}} + \vec{E}_{\text{ИНД}} = \vec{0}.$$

Следовательно, из равенства  $\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = -\text{grad}(\varphi_{\text{ВНУТР}}) = \vec{0}$  получаем  $\varphi_{\text{ВНУТР}} = \text{const}$  внутри проводника. Следовательно, это условие выполняется и на границе проводника. Поэтому поверхность проводника является *эквипотенциальной* поверхностью и силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхности проводника в каждой его точке.

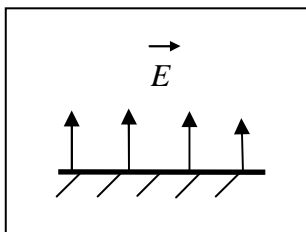
**Заряженный проводник.**

Если уединенному проводнику сообщить сторонний электрический заряд, то условие равновесия зарядов  $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = \vec{0}$  опять приводит к условию

$$\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = -\text{grad}(\varphi_{\text{ВНУТР}}) = \vec{0}, \quad \varphi_{\text{ВНУТР}} = \text{const} \text{ внутри проводника.}$$

Отсюда следует, что все сторонние заряды располагаются на поверхности проводника, т.к. напряженность поля внутри проводника равна нулю, а по теореме Гаусса для любой замкнутой поверхности внутри проводника (в том числе и для наружной поверхности проводника)

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}} = 0.$$

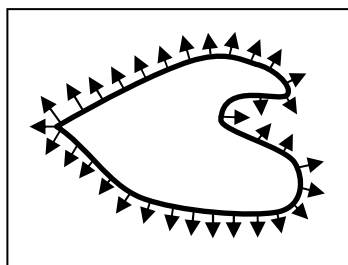


Так как поверхность проводника в этом случае тоже *эквипотенциальная*, то силовые линии электрического поля направлены перпендикулярно поверхности проводника в каждой его точке.

Из теоремы Гаусса следует, что вблизи поверхности проводника выполняется соотношение  $D = \sigma$  - величина вектора электрического

смещения равна поверхностной плотности сторонних зарядов.

Заряд по поверхности проводника распределяется таким образом, чтобы потенциал по-

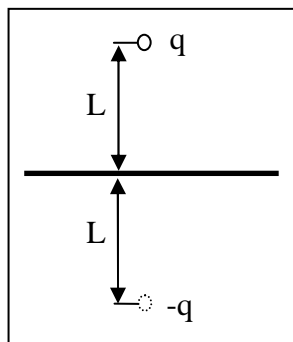


верхности оставался постоянным. Это приводит к тому, что на поверхности проводника плотность заряда не одинаковая. Например, на острых частях проводников плотность зарядов больше, чем в углублениях. В связи с этим возникают различные явления, например, «стекание заряда»: если проводник находится в воздухе, то вблизи острия происходит ионизация воздуха, уносящая часть электриче-

ского заряда – явление, которое называется «электрический ветер».

#### Метод электрических изображений.

*Если эквипотенциальную поверхность заменить проводящей, после чего отбросить часть поля, которую эта поверхность отделяет, то картина поля в оставшейся части не изменится. И наоборот, если картину поля дополнить фиктивными зарядами так, чтобы проводящую поверхность можно было заменить эквипотенциальной, то начальная картина поля не изменится.*



**Пример.** Найдем силу притяжения точечного заряда к бесконечной проводящей плоскости. Для этого дополним картину ещё одним таким же зарядом, но противоположного знака, расположенным симметрично относительно плоскости. Тогда плоскость будет совпадать с эквипотенциальной поверхностью, поэтому плоскость можно отбросить и найти силу взаимодействия между зарядами  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4L^2}$ .

#### Энергия заряженного проводника.

Энергия уединенного заряженного проводника определяется как энергия системы зарядов  $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i$ . На проводнике  $\phi = \text{const}$ , поэтому энергия уединенного проводника

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i = \frac{1}{2} \phi \sum_i q_i = \frac{1}{2} \phi q.$$



Для системы заряженных проводников  $W = \sum_k \frac{1}{2} \varphi_k q_k$ .

В частности для двух проводников, имеющих одинаковые по величине, но разные по знаку заряды  $q$ :  $W = \frac{1}{2} \varphi_1 q_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 q_2 = \frac{q}{2} |\varphi_1 - \varphi_2|$

*Замечание.* Величина разности потенциалов  $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$  называется *напряжением* между телами.

Опыт показывает, что между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует линейная зависимость  $q = C \cdot \varphi$  (при условии  $\varphi = 0$  на бесконечно большом расстоянии от проводника). Коэффициент пропорциональности  $C$  называется коэффициентом электрической ёмкости или *электроёмкостью*:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Единица измерения электроёмкости – Фарад.  $\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$ .

*Пример.* Найдём ёмкость уединённого проводника имеющего форму сферы радиуса  $R$ .

Т.к. потенциал поверхности заряженного сферического проводника равен  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ , то ём-

кость определяется соотношением  $C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R$ . Исходя из этой формулы можно оценить

размеры проводника, ёмкость которого равна 1 Ф:  $C = 1 \text{ Ф}$  при  $R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м}$ . Средний ра-

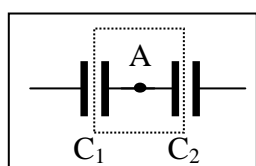
диус планеты Земля  $R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ , следовательно, радиус такой сферы больше радиуса Земли примерно в 1400 раз. ♣

*Конденсатором* называется система из двух проводников, заряженных одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами. Величина заряда одного из проводников называется зарядом конденсатора. Проводники называются *обкладками конденсатора*.

Электроёмкость конденсатора определяется по формуле  $C = \frac{q}{U}$ .

Конденсатор условно обозначается .

#### Соединение конденсаторов



Рассмотрим последовательное соединение двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ . Точка А между конденсаторами отделена от остальной цепи, поэтому её электрический заряд измениться не может. Так как до включения в цепь начальный заряд точки был равен нулю, то  $q_A = q_{A1} + q_{A2} = 0$ . Следовательно, заряды пластин кон-

денсаторов, примыкающих к точке А, равны между собой по величине, но противоположны по знаку. Но так как *величина* заряда пластин равна заряду конденсаторов, то заряды конденсаторов в этом случае равные:  $q_1 = q_2$ .

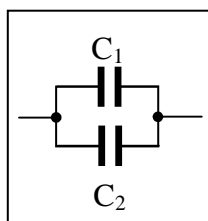
Суммарный заряд точки А равен нулю, поэтому если отбросить эту точку вместе с прилегающими обкладками, то в схеме ничего не изменится. Т.к. заряды крайних пластин тоже одинаковы по величине, но разные по знаку, то получившийся конденсатор будет иметь такой же по величине заряд.

ИТОГ. Заряды последовательно соединенных конденсаторов одинаковы по величине. Общий заряд последовательно соединенных конденсаторов равен заряду каждого из конденсаторов. Для этого случая общее напряжение равно сумме напряжений на конденсаторах

$U_{\text{общ}} = U_1 + U_2$ . Заряды конденсаторов одинаковые  $q_1 = q_2 = q$ . Тогда  $\frac{q}{C_{\text{общ}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$ . Поэтому

$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ . При последовательном соединении емкости складываются по закону обрат-

ных величин. ♣



Расчет емкости при параллельном соединении конденсаторов.

Для этого случая напряжения на конденсаторах одинаковые  $U_1 = U_2 = U$ .

Суммарный заряд равен сумме зарядов  $q_{\text{общ}} = q_1 + q_2$  или  $C_{\text{общ}} \cdot U = C_1 U + C_2 U$

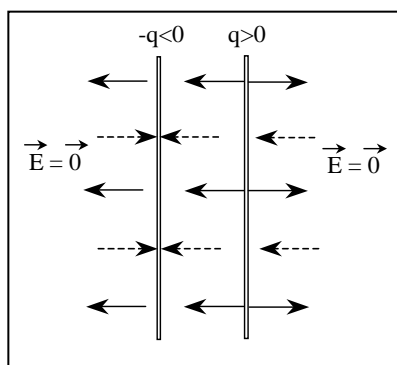
Тогда  $C_{\text{общ}} = C_1 + C_2$ . При параллельном соединении конденсаторов емкости суммируются. ♣

Энергия заряженного конденсатора  $W = \sum_k \frac{1}{2} \phi_k q_k = \frac{q}{2} U = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ .

*Замечание.* Суммарный заряд обкладок конденсатора равен нулю. Конденсатор накапливает электрическую энергию путём разделения электрических зарядов.

### Примеры по расчёту ёмкости конденсаторов.

Плоский (воздушный) конденсатор представляет собой две параллельные пластины, расстояние



между которыми много меньше размеров пластин, так что поле между пластинами можно считать однородным. Пусть между пластинами находится вакуум (воздух), поэтому  $\epsilon = 1$ .

В этом случае при расчете картины поля можно пользоваться результатами, полученными для поля бесконечной заряженной пластины. Так как заряды и площади пластин равны по величине, то и величина напряженности поля, создаваемого каж-

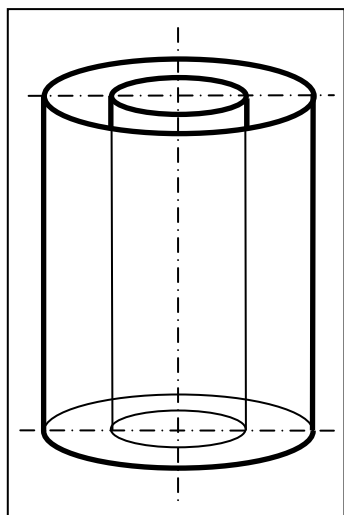
дой из пластин одинакова  $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ , но направления векторов напряженности разные (вектор напряженности от отрицательно заряженной пластины показан пунктиром). Между пластинами векторы напряженности направлены одинаково, поэтому величина суммарной напряженности равна сумме величин напряженностей

$$E_{\text{ВНУТРИ}} = E_+ + E_- = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

Снаружи пластин векторы напряженности поля направлены противоположно, поэтому напряженность поля снаружи равна нулю. Таким образом, у конденсатора напряженность поля отлична от нуля только между пластинами.

Так как электростатическое поле является полем консервативной силы, то интеграл  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l})$  не зависит от траектории, поэтому разность потенциалов между пластинами можно найти, например, вдоль перпендикуляра, соединяющего пластины, длина которого равна  $d$ :  $U = |\varphi_1 - \varphi_2| = E_{\text{ВНУТРИ}} \cdot d = \frac{q \cdot d}{\epsilon_0 S}$ , где  $d$  – расстояние между пластинами. Тогда электроёмкость плоского (воздушного) конденсатора  $C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

Цилиндрический (воздушный) конденсатор представляет собой два коаксиальных цилиндра одинаковой длины, вложенных друг в друга так, что расстояние между обкладками много меньше размеров обкладок.

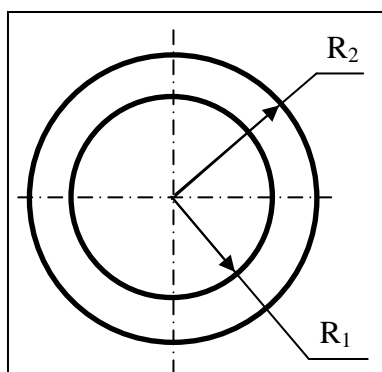


Пусть длина конденсатора  $L$ , заряд внутренней обкладки положительный  $q > 0$ . Радиусы обкладок  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии  $r$  от внутренней обкладки  $R_1 < r < R_2$ :  $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Lr}$ . Напряжение между обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{2\pi\epsilon_0 Lr} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Поэтому электроёмкость цилиндрического (воздушного) конденсатора  $C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$ .

Сферический (воздушный) конденсатор представляет собой две вложенные концентрические сферы с радиусами обкладок  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Пусть заряд внутренней обкладки положительный



$q > 0$ . Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии  $r$  от внутренней обкладки  $R_1 < r < R_2$ :  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Напряжение между обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Поэтому электроёмкость сферического (воздушного) конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

### Объёмная плотность энергии электростатического поля.

Рассмотрим плоский воздушный конденсатор. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (E \cdot d)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S \cdot d.$$

Объём пространства между пластинами конденсатора  $V = S \cdot d$ . Так поле между пластинами

рассматриваем как однородное, то единица объема этого поля обладает энергией  $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ .

Эта величина  $w = \frac{W}{V}$  называется *объёмной плотностью энергии*.

В случае, когда поле не является однородным объёмная плотность энергии определяется соотношением  $w = \frac{dW}{dV}$ .

В веществе объёмная плотность энергии электрического поля определяется  $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ .

В случае однородного изотропного диэлектрика  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ , поэтому  $w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}$ .

Т.к.  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то  $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2} + \frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$ , где  $\frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2}$  - энергия электрического поля в вакууме;  $\frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$  - энергия поляризации вещества.

**Пример.** Рассмотрим заряженную тонкостенную сферу радиуса  $R$ . Одноименные заряды на сфере отталкиваются друг от друга. Эти силы отталкивания стремятся растянуть поверхность сферы. Можно считать, что изнутри сферы на стенки действует дополнительное давление, распирающее сферу и вызванное наличием электрического заряда на поверхности.

Напряженность поля внутри сферы равна нулю, поэтому объемная плотность энергии электрического поля  $w$  отлична от нуля только снаружи сферы.

При небольшом увеличении радиуса на  $dR$  сферы её объём увеличится, при этом в той части окружающего пространства, которая попала внутрь сферы, объемная плотность энергии станет равной нулю. Следовательно, изменение энергии поля снаружи будет равно  $dW = w dV = w S dR$  ( $S$  – площадь поверхности). Но, при расширении сферы, силы давления внутри сферы совершат работу  $\delta A = p S dR$ . Так как  $\delta A = dW$ , то  $p S dR = w S dR$ , откуда

$$p = w . \clubsuit$$

**Пример.** Найдем силы, действующие на пластины в заряженном плоском конденсаторе, отключённом от источника. Пластины заряжены разноименно, поэтому они притягиваются. Предположим, что пластины сблизилась на малую величину  $x$ . Тогда объём конденсатора уменьшился на величину  $dV = xS$ , поэтому энергия конденсатора уменьшилась на  $dW = w dV$ . Силы притяжения совершат работу  $\delta A = Fx$ . Так как  $\delta A = dW$ , то  $Fx = wxS$ . Поэтому величина силы равна  $F = wS$ .

Дополнительное давление, которое создают эти силы, равно  $p = \frac{F}{S} = w . \clubsuit$

Приведённые примеры показывают, что на тела, находящиеся в электрическом поле, действуют силы, вызывающие дополнительное давление, равное объёмной плотности энергии. *Давление, вызванное наличием электрического поля равно объёмной плотности энергии.*

**Замечание.** Силы, действующие на тела со стороны какого-то поля, называются *пондемоторными*.

### Лекции 5-6. Магнитные явления.

*Вектор индукции магнитного поля. Закон Био-Савара. Принцип суперпозиции магнитных полей. Поле прямого и кругового токов. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной и дифференциальной форме. (Расчёт магнитного поля тороида и соленоида).*

*Намагниченность вещества. Вектор напряжённости магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.*

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Сила взаимодействия (на единицу длины) двух прямолинейных тонких параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расстояние между которыми равно  $b$ , дается законом Ампера

$$F_l = \frac{F}{l} = k \frac{I_1 I_2}{b}.$$

Одинаково направленные токи притягиваются, противоположно направленные – отталкиваются. Константа в вакууме имеет вид  $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (Генри/метр) – магнитная постоянная.

*Замечание.* Магнитная постоянная и диэлектрическое постоянная «входят» в полезное соотношение  $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$ , где  $c \approx 3 \cdot 10^8$  - скорость света в вакууме.

*Замечание.* Закон Ампера связывает механическое понятие силы с единицами измерения силы тока и электрического заряда.

По современным представлениям токи взаимодействуют между собой посредством промежуточной среды, которая называется *магнитное поле*.

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Величина индукции измеряется в Теслах (Тл). *Силовой линией* магнитного поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как вектор  $\vec{B}$ .

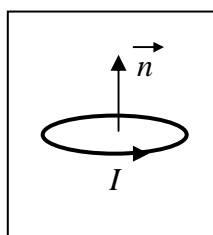
*Магнитное поле проявляется в действии на движущиеся заряды (токи). На покоящиеся заряды магнитное поле не действует.*

Магнитное поле не имеет источников - оно создается только движущимися зарядами (электрическим током), поэтому силовые линии магнитного поля являются **замкнутыми линиями**.

*Принцип суперпозиции для магнитного поля:* вектор индукции магнитного поля, создаваемого системой движущихся электрических зарядов (электрических токов), равен векторной

сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из движущихся электрических зарядов (токов) в отдельности:

$$\vec{B}_{\Sigma} = \sum_i \vec{B}_i.$$



Аналогом пробного заряда для магнитного поля является *пробный контур* с током очень маленьких размеров. Этот контур является ориентированным – направление нормали  $\vec{n}$  к площадке контура согласовано с направлением тока в нём правилом буравчика (правого винта). Опыт показывает, что на пробный контур действует вращающий момент сил, зависящий от угла между вектором индукции магнитного поля и вектором нормали к площадке контура, а также от силы тока и величины площади. Максимальное значение момента даётся выражением  $M_{MAX} = ISB$ . Поэтому величину индукции магнитного поля в данной точке определяют как

$$B = \frac{M_{MAX}}{IS}.$$

*Определение.* Магнитным моментом контура (с постоянным) током называется векторная величина

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}.$$

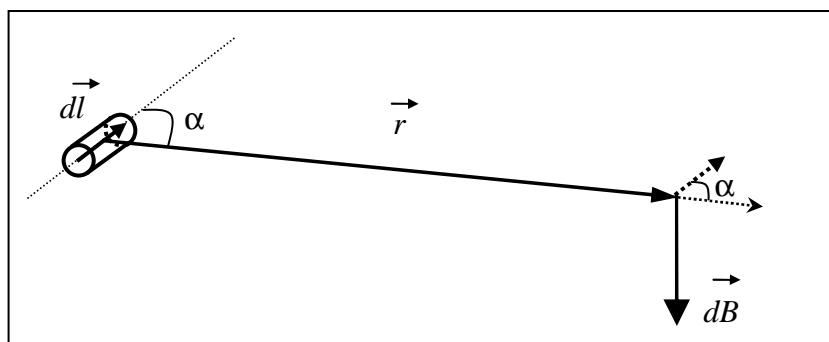
$S$  – величина площадки, ограниченной контуром,  $I$  – сила тока. Контур является ориентированным – направление нормали к площадке контура согласовано с направлением тока в нём правилом буравчика (правого винта). Единица измерения магнитного момента  $A \cdot m^2$  (Ампер·м<sup>2</sup>).

### Закон Био-Савара-Лапласа.

Опыт показывает, что магнитная индукция, создаваемая малым участком проводника с током  $I$ , определяется законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}.$$

Величина вектора  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$ . Здесь  $d\vec{l}$  – касательный вектор к линии тока, направленный



в положительном направлении для тока, ( $dl$  – длина малого проводника),  $I$  – сила тока в про-

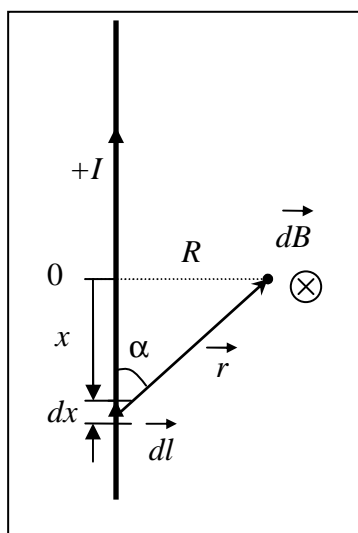
воднике,  $\vec{r}$  - вектор, проведенный от малого проводника в точку, где ищется вектор индукции магнитного поля,  $\alpha$  - угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ . Векторы  $(d\vec{l}, \vec{r}, d\vec{B})$  образуют правую тройку векторов.

1) Рассмотрим магнитное поле, создаваемое длинным тонким прямым проводом, по которому течет постоянный ток силой  $I$ .

Найдем величину и направление вектора магнитной индукции в точке, находящейся на расстоянии  $R$  от провода. Применим принцип суперпозиции

$$\vec{B} = \sum_{d\vec{l}} d\vec{B}_{d\vec{l}},$$

где  $d\vec{B}_{d\vec{l}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$  - вектор магнитной индукции, создаваемый элементом  $d\vec{l}$ .



Векторы  $d\vec{B}$  от всех  $d\vec{l}$  в выбранной точке направлены одинаково (перпендикулярно плоскости, образованной векторами  $(d\vec{l}, \vec{r})$ ), поэтому можно перейти от векторной суммы к сумме величин

$$B = \sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}}, \text{ где } dB_{d\vec{l}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

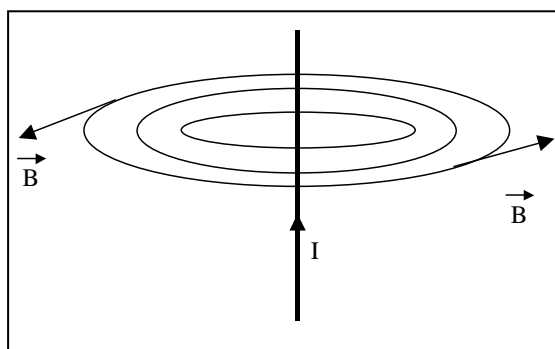
Ведём координату  $x$ , отсчитываемую от точки пересечения провода и перпендикулярного отрезка к проводу, восстановленного из точки наблюдения. Тогда  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ ,  $r \sin \alpha = R$ ,  $dx = dl$ , поэтому

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdx}{r^3} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Но  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{R^2}$  (см. лекцию № 1).

Окончательно, величина индукции магнитного поля на расстоянии  $R$  от тонкого, длинного прямого провода с постоянным током, определяется соотношением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



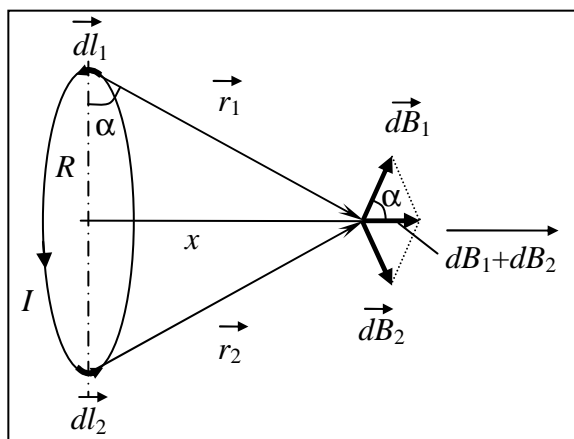
Силовые линии магнитного поля, создаваемого током в бесконечно длинном прямом проводнике, представляют собой окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводу, и с центром на оси про-

вода. Направление вектора  $\vec{B}$  определяется по правилу правого винта. (Или *правой руки*: если



обхватить правой рукой провод так, чтобы большой палец был направлен по току, то остальные пальцы покажут направление «закрученности»  $\vec{B}$ .)

2) Рассмотрим магнитное поле, создаваемое круговым контуром с постоянным током на оси контура.



По контуру течёт ток силой  $I$ , радиус контура  $R$ . Найдём величину индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от плоскости контура вдоль оси.

Любые два элемента  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$ , расположенные симметрично относительно центра контура, создают в точке наблюдения два симметричных относительно оси вектора  $d\vec{B}_1$  и  $d\vec{B}_2$ . Сумма этих векторов лежит на оси контура. Поэтому при нахождении суперпозиции

надо учитывать только проекцию векторов на ось

$$B = \sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}} \cos \alpha.$$

Т.к. образующая конуса перпендикулярна касательной к основанию, то угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  - прямой, поэтому

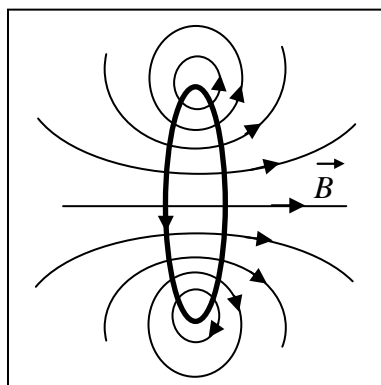
$$dB_{d\vec{l}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}.$$

Для всех элементов  $d\vec{l}$  величины  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$  и  $\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$  одинаковые. Следовательно,

$$B = \sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}} \cos \alpha = \sum_{d\vec{l}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \alpha \sum_{d\vec{l}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \alpha 2\pi R$$

или

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$



С учётом определения магнитного момента контура  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$  и величины площади круга  $S = \pi R^2$ , можно записать эту формулу в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2 \vec{n}}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

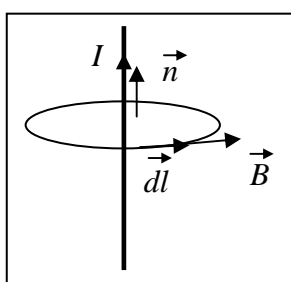
*Замечание.* Картина силовых линий магнитного поля кольца обладает осевой симметрией, поэтому вектор индукции в каждой точке *плоскости кольца* направлен перпендикулярно этой плоскости. Кроме того, в каждой точке поля вектор  $\vec{B}$  лежит в плоскости, проходящей через ось кольца (продольной плоскости).

### Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.

Так как силовые линии магнитного поля замкнутые, то это поле является *вихревым*, т.е.  $\text{rot}(\vec{B}) \neq \vec{0}$ , поэтому циркуляция этого векторного поля вдоль любого контура  $\Gamma$  не равна нулю

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{B}), d\vec{S}) \neq 0.$$

*Пример.* Найдем циркуляцию вектора магнитной индукции поля, создаваемого прямым проводом с током. В качестве контура  $\Gamma$  возьмём какую-нибудь силовую ли-



нию (представляющую собой, как нам уже известно, окружность с центром на оси провода и лежащую в плоскости, перпендикулярной к проводу). Пусть радиус этой линии равен  $R$ , тогда величина магнитной индукции на этой линии постоянна и равна  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ . Выберем ориента-

цию на контуре  $\Gamma$  так, чтобы векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  были направлены одинаково. (В этом случае нормаль  $\vec{n}$  к кругу, ограниченному контуром, и направление тока совпадают.) Тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} B \cos(0^\circ) dl = \oint_{\Gamma} B dl = B \oint_{\Gamma} dl = B 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

Выберем ориентацию на силовой линии так, чтобы векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  были направлены противоположно, (при этом нормаль  $\vec{n}$  к кругу, ограниченному контуром, и направление тока тоже будут направлены противоположно). В этом случае

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} B \cos(180^\circ) dl = -\oint_{\Gamma} B dl = -B \oint_{\Gamma} dl = -B 2\pi R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = -\mu_0 I. \clubsuit$$

Этот результат не является случайным, его можно обобщить в виде теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

*Циркуляция вектора индукции магнитного поля по любому ориентированному замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих ориентированную площадку, ограниченную контуром. Ориентация контура и площадки согласованы правилом правого винта. Коэффициент пропорциональности – магнитная постоянная.*

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_k I_k$$

Сила тока берётся со знаком плюс, если угол между направлением тока и направлением нормали к площадке меньше  $90^\circ$  градусов, и минус если больше.

Если ввести векторное поле плотности тока  $\vec{j}$  так, чтобы  $\sum_k I_k = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S})$ , то используя

теорему Стокса

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{B}), d\vec{S}) = \mu_0 \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}),$$

получаем *дифференциальную форму* записи теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}.$$

*Замечание.* Хотя магнитное поле и является вихревым, но отсюда не следует, что циркуляция вектора индукции всегда отлична от нуля. Например, если контур  $\Gamma$  охватывает два одинаковых по силе тока, но пронизывающих площадку в разных направлениях, то для них

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 (I_1 - I_2) = 0, \text{ но } \text{rot} \vec{B} \neq \vec{0}.$$

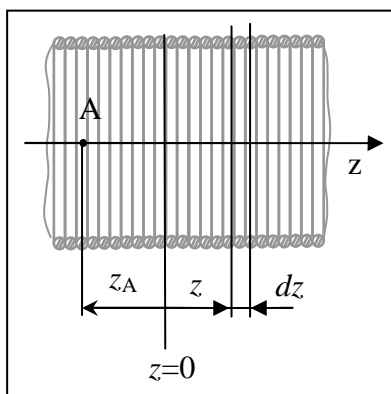
*Идеальным соленоидом* называется бесконечный тонкий проводник, намотанный на поверхность бесконечного кругового цилиндра так, что при этом круговые витки проводника перпендикулярны оси цилиндра.

*Замечание.* В таком соленоиде нет составляющей электрического тока, направленной вдоль оси цилиндра, а только круговые токи в каждом из поперечных сечений. Поэтому можно считать, что соленоид составлен из бесконечного числа одинаковых витков, по которым течет одинаковый по направлению и силе ток.

*Плотностью намотки* соленоида  $n$  называется величина, равная отношению количества витков  $N$  на некотором участке соленоида к длине этого участка  $l$ :  $n = \frac{N}{l}$ .

Найдем величину индукции магнитного поля в какой-нибудь точке  $A$  на оси соленоида. Пусть сила тока в соленоиде равна  $I$ . Радиус витков  $R$ . Плотность намотки  $n$ .

Для нахождения индукции магнитного поля в этой точке, применим принцип суперпозиции для магнитного поля – вектор индукции равен векторной сумме магнитных индукций, создаваемых каждым из колец в отдельности:  $\vec{B}_A = \sum_k \vec{B}_k$ . Отметим, что все векторы  $\vec{B}_k$  в точке  $A$



направлены одинаково – в одну сторону вдоль оси соленоида.

Поэтому от векторной суммы можно перейти к сумме длин векторов  $B_A = \sum_k B_k$ .

Введём вдоль оси соленоида ось  $z$ . Выделим в соленоиде какое-то сечение, координату которого примем за ноль ( $z=0$ ).

Пусть точка  $A$  имеет координату  $z_A$ . Небольшая часть соленоида,

длина которой равна  $dz$ , и которая находится в сечении с координатой  $z$ , содержит количество витков  $dN = ndz$ . Эта часть создаёт в точке А индукцию магнитного поля, величина которой

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 dN}{(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

где расстояние от точки А до этого сечения равно  $x = |z - z_A|$ .

Тогда  $B_A = \sum_k B_k = \int_{\text{СОЛЕНОИД}} dB = \int_{\text{ВИТКИ СОЛЕНОИДА}} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 dN}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$  или

$$B_A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 ndz}{(R^2 + (z - z_A)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2 n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + (z - z_A)^2)^{3/2}}$$

Делаем замену  $y = z - z_A$  и получаем  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + (z - z_A)^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2}{R^2}$ .

Поэтому величина магнитной индукции на оси идеального соленоида равна

$$B_A = \frac{\mu_0 IR^2 n}{2} \frac{2}{R^2} = \mu_0 In.$$

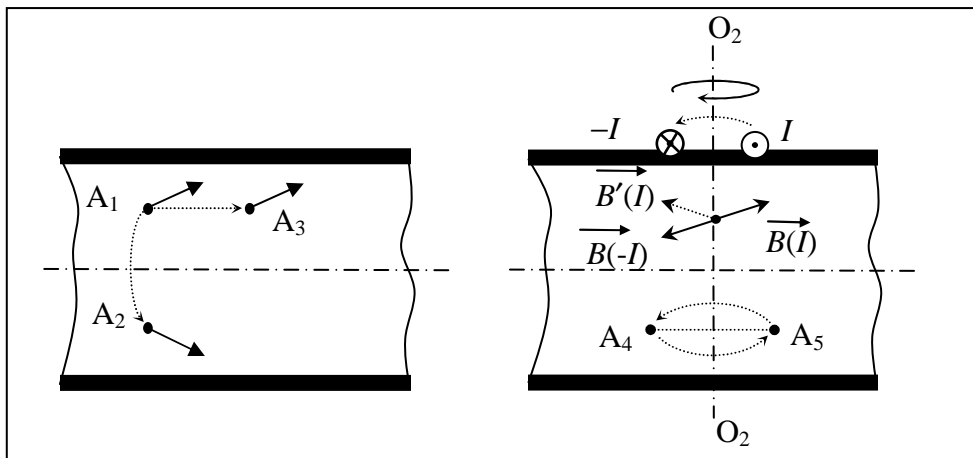
Как видно, она не зависит от радиуса соленоида  $R$ .

Обсудим *расположение силовых линий* магнитного поля идеального соленоида (и внутри, и снаружи). Так как магнитное поле идеального соленоида создаётся кольцевыми токами, то вектор индукции в каждой точке поля лежит в продольной плоскости соленоида (любой плоскости, проходящей через ось соленоида).

Докажем, что в произвольных точках  $A_1, A_2, A_3$ , находящихся на равном расстоянии от оси соленоида, вектор индукции  $\vec{B}$  одинаковый по величине и направлен под одинаковым углом к оси.

1) Пусть точки  $A_1$  и  $A_2$  находятся в одном поперечном сечении. Так как магнитное поле соленоида обладает осевой симметрией, то поворотом вокруг оси можно перенести точку  $A_1$  в  $A_2$  (и наоборот). Векторы, находящиеся в этих точках должны перейти друг в друга (т.к. они принадлежат одному векторному полю).

2) Пусть точки  $A_1$  и  $A_3$  находятся в одном продольном сечении. Так как магнитное поле соленоида обладает симметрией сдвига вдоль оси соленоида, то сдвигом можно перенести точку  $A_1$  в  $A_3$  (и наоборот). Векторы, находящиеся в этих точках должны перейти друг в друга (т.к. они



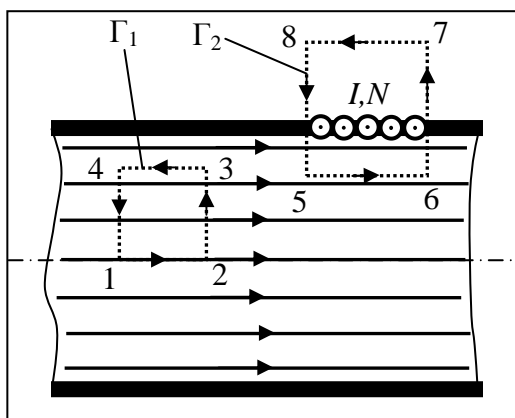
принадлежат одному векторному полю).

Докажем теперь, что вектор индукции магнитного поля соленоида в каждой точке направлен параллельно оси соленоида. Для этого рассмотрим вектор  $\vec{B}$  в произвольной точке поля, считая, что он не направлен параллельно оси соленоида. Предположим, что при заданном направлении тока  $I$  он направлен как  $\vec{B}(I)$ . Через рассматриваемую точку можно провести ось симметрии  $O_1O_2$  поля соленоида и подвергнуть поле повороту на  $180^\circ$  вокруг этой оси. При этом какие-то точки  $A_4$  и  $A_5$ , расположенные симметрично относительно этой оси перейдут друг в друга, а вектор  $\vec{B}(I)$  перейдет в симметричный вектор  $\vec{B}'(I)$ , а направление тока  $I$  в соленоиде поменяется на противоположное  $-I$ . Но противоположно направленный ток в соленоиде должен создать в рассматриваемой точке противоположно направленный вектор  $\vec{B}(-I)$ . Поэтому вектору  $\vec{B}(I)$  должен соответствовать вектор  $\vec{B}(-I)$ , не являющийся ему симметричным. Это противоречия можно избежать только в том случае, когда вектор  $\vec{B}(I)$  параллелен оси в любой точке магнитного поля идеального соленоида.

Следовательно, силовые линии магнитного поля внутри и снаружи *параллельны оси соленоида*, а величина индукции зависит только от расстояния до оси соленоида.

Теперь рассмотрим циркуляцию индукции векторного поля по некоторому квадратному контуру  $\Gamma_1$ , который расположен целиком внутри соленоида так, что одна его сторона лежит на оси. Пусть длина каждой из сторон контура равна  $L$ . Тогда

$$\oint_{\Gamma_1} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{12} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{23} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{34} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{41} (\vec{B}, d\vec{l}) = B_{12}L - B_{34}L = (B_{12} - B_{34})L$$



(вычеркнуты нулевые слагаемые). Но контур не охватывает никакие токи, поэтому  $\oint_{\Gamma_1} (\vec{B}, d\vec{l}) = 0$ , откуда

$B_{34} = B_{12} = \mu_0 I n$ . Т.к. величина  $L$  является произвольной (но  $L < R$ ), то величина магнитной индукции на любом расстоянии от оси (внутри соленоида) равна величине магнитной индукции на его оси. Таким образом, величина магнитной индукции *внутри* идеального соленоида

постоянная и равна

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot n,$$

где  $I$  – сила тока,  $n$  – плотность намотки витков. Следовательно, *магнитное поле внутри идеального соленоида является однородным.*

Теперь рассмотрим циркуляцию по квадратному контуру  $\Gamma_2$ , который расположен так, что одна его сторона лежит внутри соленоида параллельно оси, а противоположная – снаружи. Пусть длина каждой из сторон контура равна  $L$ . Этот контур охватывает витки, число которых равно  $N$ . По виткам текут одинаковые токи в одинаковом направлении, поэтому исходя из ориентации контура и направления токов, получаем

$$\oint_{\Gamma_2} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 N I.$$

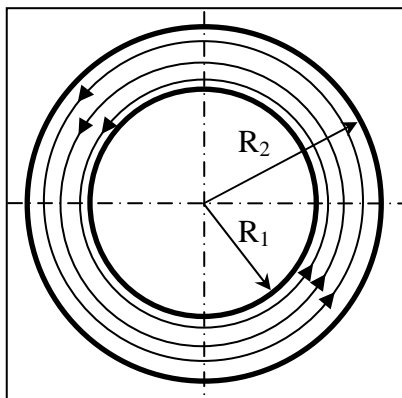
$$\text{Но } \oint_{\Gamma_2} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{56} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{67} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{78} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{81} (\vec{B}, d\vec{l}) = B_{56} L - B_{78} L = (B_{56} - B_{78}) L$$

При этом внутри соленоида  $B_{56} = \mu_0 I n$ . Получаем равенство  $(\mu_0 I n - B_{78}) L = \mu_0 N I$ , откуда для

величины магнитной индукции снаружи соленоида  $B_{78} = \mu_0 I n - \mu_0 \frac{N}{L} I$ . Плотность намотки вит-

ков, по определению, равна  $n = \frac{N}{L}$ , поэтому  $B_{78} = 0$ . *Снаружи идеального соленоида магнитное поле отсутствует.*

**У идеального соленоида магнитное поле сосредоточено только внутри соленоида!**



*Тороид* – это тонкий проводник, плотно намотанный на поверхность тора (бублика).

Магнитное поле тороида обладает осевой симметрией, поэтому силовые линии являются концентрическими окружностями, с центрами на оси тороида. Пусть число витков в тороиде равно  $N$ , сила тока  $I$ . Рассмотрим циркуляцию вектора индукции

вдоль контура  $\Gamma$  радиуса  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), совпадающего с одной из силовых линий:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 NI. \text{ Вдоль } \Gamma \text{ величина } B \text{ постоянная, поэтому}$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} B dl = B \oint_{\Gamma} dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI, \text{ откуда внутри тороида } B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \text{ Предположим, что}$$

диаметр сечения тороидальной части много меньше внутреннего радиуса  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ . Если

ввести плотность намотки на внутреннем радиусе  $n = \frac{N}{2\pi R_1}$ , то можно записать

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R_1} \frac{R_1}{r} = \mu_0 n I \left( \frac{r-x}{r} \right) = \mu_0 n I \left( 1 - \frac{x}{r} \right), \text{ где } 0 < x < d. \text{ Так как } x < d \ll R_1 < r, \text{ то мож-}$$

но приближенно считать индукцию постоянной внутри тороида  $B \approx \mu_0 n I$ .

Опыт показывает, что в веществе магнитное поле изменяется по сравнению с магнитным полем в вакууме  $\vec{B}_0$ . Всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитные свойства (намагничиваться). При этом вещество создаёт собственное магнитное поле  $\vec{B}'$ , поэтому по принципу суперпозиции в веществе

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

На микроскопическом масштабе внутри вещества магнитное поле сильно изменяется и в пространстве и во времени, поэтому при описании рассматриваются *усреднённые величины*. По классическому представлению, предложенному Ампером, в веществе циркулируют микроскопические круговые токи (атомарные и молекулярные токи), каждый из которых создаёт в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты этих токов ориентированы хаотически и их векторная сумма в физически малом объёме равна нулю. При внесении магнетика в магнитное поле магнитные моменты микроскопических токов ориентируются в определённом направлении, поэтому в целом суммарный дипольный момент такого объёма уже не равен нулю.

Для характеристики магнитных свойств вещества вводят *вектор намагниченности вещества* – усреднённый суммарный магнитный момент единицы (физически малого) объёма

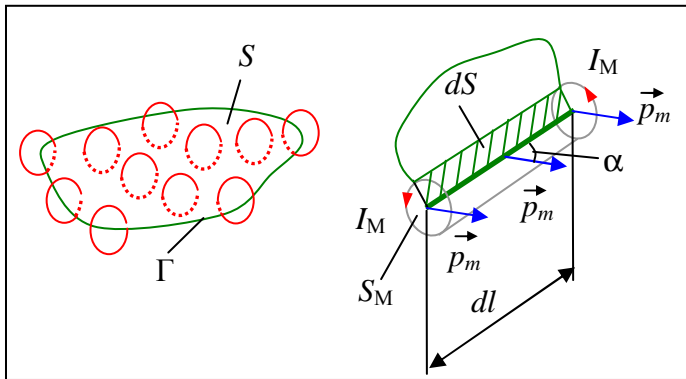
$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V},$$

единицы измерения величины намагниченности – А/м (Ампер/метр).

Рассмотрим в веществе теорему о циркуляции  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}_{\Sigma}$ . Суммарное магнитное поле

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  создаётся суммарной плотностью тока – векторной суммой микроскопических (ато-

марных и молекулярных) токов и макроскопических токов (вызванных переносом сторонних



зарядов – их называют *токами проводимости* или сторонними токами)

$$\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_M + \vec{j}_{CT}.$$

Так как  $\text{rot}(\vec{B}_0) = \mu_0 \vec{j}_{CT}$  и

$\text{rot}(\vec{B}') = \mu_0 \vec{j}_M$ , то из выражения

$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_M + \vec{j}_{CT})$  следует, что для оп-

ределения магнитной индукции в веществе, надо знать плотность молекулярных токов.

Оказывается, для вектора намагниченности вещества справедливо соотношение  $\text{rot}(\vec{J}) = \vec{j}_M$ .

**Вывод соотношения  $\text{rot}(\vec{J}) = \vec{j}_M$ .**

Выделим внутри вещества (магнетика) какую-то ориентированную (незамкнутую) поверхность  $S$  и найдем поток плотности молекулярного тока через эту поверхность

$\Phi_{j_M} = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S})$ . Те молекулярные токи, которые не охватывают край этой поверхности, бу-

дут пронизывать эту поверхность дважды – в прямом и обратном направлении, поэтому их

вклад в поток равен нулю  $\iint_{S_{\text{внутр}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = 0$ .

Для рассмотрения потока от токов, охватывающих край, выделим настолько малую часть поверхности с примыкающим краем, чтобы все молекулярные токи, которые охватывают край можно было считать одинаково ориентированными. Пусть длина граничной линии этой части равна  $dl$ . Предположим, что векторы магнитных моментов молекулярных токов направлены под углом  $\alpha$  к этой части граничной линии. Выделим косой цилиндр, осью которого является часть граничной линии, а основанием – молекулярный круговой ток, площадь контура которого  $S_M$ . Этот цилиндр отсекает от поверхности  $S$  кусок, площадь которого  $dS$ . Тогда поток плотности молекулярного тока через этот кусок  $dS$  равен суммарному молекулярному току всех круговых токов, попавших в цилиндр

$$\Phi_{j_M} = \iint_{dS} (\vec{j}_M, d\vec{S}) \approx (\vec{j}_M, d\vec{S}) = \sum_{\text{цилиндр}} I_M.$$

Объём цилиндра  $V = S_M dl \cos \alpha$ , сумма проекций векторов магнитных моментов на ось цилинд-

ра  $\sum_{\text{цилиндр}} p_m \cos \alpha = \sum_{\text{цилиндр}} I_M S_M \cos \alpha = S_M \cos \alpha \sum_{\text{цилиндр}} I_M$ . Так как  $\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}$ , то



$$J \cos \alpha = \frac{\sum_V p_m \cos \alpha}{V} = \frac{S_M \cos \alpha \sum_{\text{ЦИЛИНДР}} I_M}{S_M dl \cos \alpha} = \frac{1}{dl} \sum_{\text{ЦИЛИНДР}} I_M.$$

Поэтому вблизи края поверхности можно записать равенство

$$J dl \cos \alpha = \sum_{\text{ЦИЛИНДР}} I_M = (\vec{j}_M, d\vec{S}) \text{ или } (\vec{J}, d\vec{l}) = (\vec{j}_M, d\vec{S}),$$

где  $dS$  – часть поверхности вблизи края. Соответственно, вдоль всего её края  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = \iint_{S_{\text{КРАЙ}}} (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

Но всю поверхность  $S$  можно разбить на две части  $S = S_{\text{КРАЙ}} + S_{\text{ВНУТР}}$ . Так как  $\iint_{S_{\text{ВНУТР}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = 0$ ,

то можно записать равенство

$$\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = \iint_{S_{\text{КРАЙ}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{ВНУТР}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

*т.е. циркуляция вектора намагниченности вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна потоку плотности молекулярного тока через эту поверхность.*

Используя теорему Стокса  $\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{J}), d\vec{S})$  можно переписать это равенство в виде

$$\iint_S (\text{rot}(\vec{J}), d\vec{S}) = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

откуда следует *дифференциальная форма* теоремы о циркуляции  $\text{rot}(\vec{J}) = \vec{j}_M$ . ♣

Подставив это соотношение в равенство  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_M + \vec{j}_{CT})$ , получим

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \text{rot}(\vec{J}) + \vec{j}_{CT} \text{ или } \text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) = \vec{j}_{CT}.$$

Ведём вектор напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

(единицы измерения А/м (Ампер/метр)), тогда для вектора напряжённости магнитного поля получаем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{CT}$$

откуда можно получить теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в ин-

тегральной форме. Пусть  $\sum_k I_{CT\_k} = \iint_S (\vec{j}_{CT}, d\vec{S})$  - алгебраическая сумма сторонних токов (токов

проводимости), пронизывающих некоторую незамкнутую ориентированную поверхность внутри магнетика, тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_{CT\_k},$$

т.е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна алгебраической сумме токов проводимости через эту поверхность.

Правило знаков для тока остаётся прежним: если направление тока через площадку составляет с вектором нормали к площадке угол, меньший  $90^\circ$ , то знак положительный, если больше – то отрицательный.

В однородном изотропном магнетике (для слабых полей) векторы намагниченности и напряжённости совпадают по направлению

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где безразмерный коэффициент  $\chi$  носит название *магнитная восприимчивость вещества*.

Поэтому выражение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$  в однородном изотропном магнетике можно записать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

Величину  $\mu = 1 + \chi$  имеет название *относительная магнитная проницаемость вещества*.

Поэтому в однородном изотропном магнетике для индукции поля и напряжённости

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

### Магнитные свойства магнетиков.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что все магнетики можно (условно) разделить на три группы.

1) *Диамагнетики* – это магнетики, у которых магнитная восприимчивость принимает отрицательные значения, но при этом выполняется  $0 < \mu = 1 + \chi < 1$ .

Так как  $\vec{J} = \chi \vec{H} = \chi \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right)$ , откуда  $\vec{J} = \frac{\chi}{1 + \chi} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , то у диамагнетиков вектор намагниченности

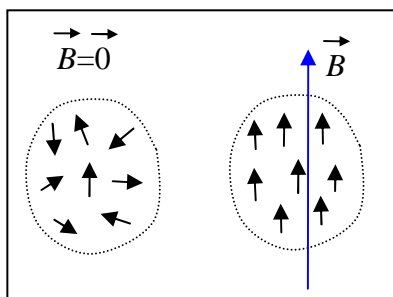
направлен против вектора индукции магнитного поля.

*Диамагнетики выталкиваются из области сильного магнитного поля.*

2) *Парамагнетики* – магнетики, у которых магнитная восприимчивость положительна, но не принимает больших значений. Вектор намагниченности сонаправлен с вектором индукции.

3) *Ферромагнетики* – вещества, магнитная проницаемость которых достигает больших значений (тысячи и более). Намагниченность ферромагнетиков зависит от их предыдущего состояния (гистерезис).

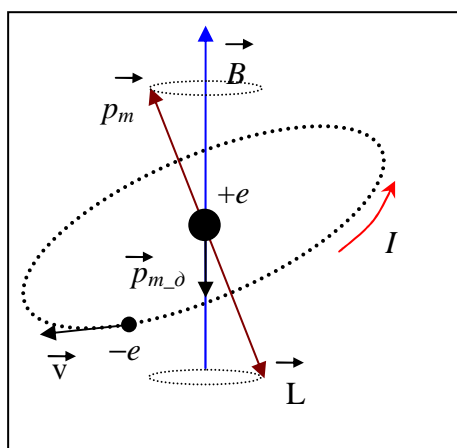
### Физическая природа диа- и парамагнетизма.



Согласно гипотезе Ампера магнитные свойства вещества обусловлены микроскопическими токами, циркулирующими внутри вещества. По классическим представлениям эти токи создаются движущимися зарядами в атомах. Классическое рассмотрение позволяет качественно объяснить магнитные свойства вещества без значительного усложнения модели, поэтому будем считать, что точечный отрицательно заряженный электрон движется по круговой орбите вокруг ядра. Это приводит к появлению кругового тока, положительное направление которого противоположно направлению движения электрона. В магнитном поле магнитные моменты микроскопических токов ориентируются преимущественно вдоль силовой линии магнитного поля. На магнитный момент микроскопических токов в магнитном поле действует момент сил, поэтому орбита электрона начнет прецессировать, и появится дополнительный вектор магнитного момента  $\vec{p}_{m\partial}$ , направленный против вектора индукции  $\vec{B}$ .

Таким образом, при внесении атома в магнитного поле, у него появится дополнительный магнитный момент.

Если в отсутствии магнитного поля суммарный магнитный момент атома (сумма момента электронов и ядра) был нулевым, то после внесения в магнитное поле появившийся магнитный момент будет направлен против вектора индукции внешнего поля. Следовательно, и вектор намагниченности малого объема – тоже. Такие вещества относятся к классу диамагнетиков.



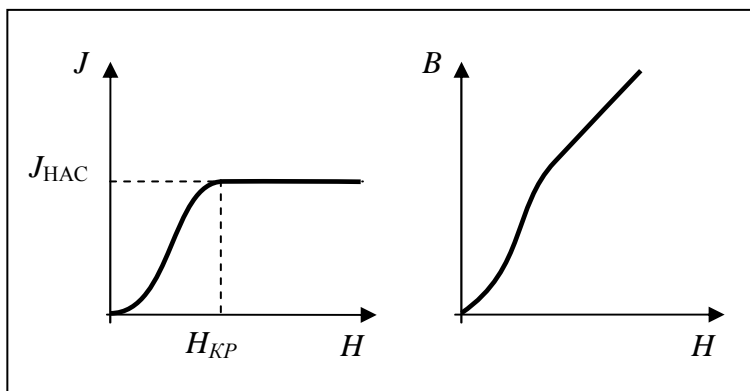
Пусть в отсутствии магнитного поля суммарный магнитный момент атома был ненулевым. Опыт показывает, что величина дополнительного момента меньше собственного момента атома, поэтому после внесения суммарный момент ориентируется вдоль силовой линии внешнего поля, и вектор намагниченности будет направлен по вектору индукции. Такие вещества относятся к классу парамагнетиков. Для парамагнетиков магнитная восприимчивость зависит от температуры по закону Кюри

$$\chi = \frac{C}{T},$$

$C$  – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества,  $T$  – температура.

*Ферромагнетики* – вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Типичный представитель – железо (а также никель, кобальт и сплавы на их основе). Величина намагниченности ферромагнетиков значительно превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков.

У ферромагнетиков состояние намагниченности зависит от предыдущего состояния. Это явление называется магнитный *гистерезис* (от греческого слова, означающего «отстающий»).



При магнитном гистерезисе вектор намагничивания и вектор напряженности магнитного поля в веществе зависят не только от приложенного внешнего поля, но и от предыстории данного образца. Именно магнитным гистерезисом объясняется существование *постоянных магнитов*.

Пусть начальное намагничивание в ферромагнетике отсутствовало. Опыт показывает, что при увеличении напряженности магнитного поля намагниченность начинает нелинейно возрастать до некоторой величины – значения насыщения намагниченности.

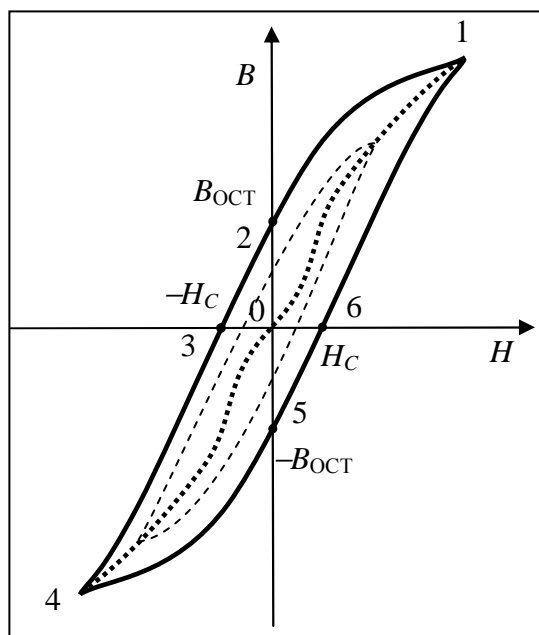
Следовательно, магнитная восприимчивость для ферромагнетиков зависит от величины напряжённости  $\chi = \frac{J}{H}$ . При увеличении  $H$  величина  $\chi$  стремится к нулю.

Суммарная индукция в веществе

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$$

тоже будет нелинейно зависеть от напряженности пока у намагниченности не наступит насыщения.

Рассмотрим процесс, в котором напряженность магнитного поля циклически изменяется. Если сначала намагничивания не было, то величина индукции поля увеличивается, например, до точки 1 по основной кривой намагничивания 0-1. Далее, при уменьшении напряжённости зависимость  $B(H)$  изображается кривой 1-2-3-4. Точке 2 соответствует нулевая напряжённость внешнего магнитного поля, но при этом у вещества наблюдается остаточное магнитное поле величина индукции которого  $B_{\text{ост}}$ . Образец магнетика становится постоянным магнитом.



Для размагничивания образца потребуется создать магнитное поле (точка 3), вектор напряженности которого направлен в противоположном направлении вектору в состоянии 1. Величина такой напряженности называется *коэрцитивной силой*  $H_c$ . При дальнейшем увеличении напряженности индукция нелинейно возрастает до выхода на кривую насыщения (точка 4). Уменьшение напряженности приводит к зависимости  $B(H)$ , соответствующему участку кривой 4-5-6-1.

Таким образом, намагничивание ферромагнетика зависит от его предыдущего состояния (предыстории), поэтому зависимость  $B(H)$  неоднозначная. Сле-

довательно, у ферромагнетиков понятие магнитной проницаемости относится только к основной кривой намагничивания 0-1.

Замкнутая кривая  $B(H)$  называется петлей гистерезиса. Если крайние точки находятся на кривой насыщения, то петля называется предельной (максимальной).

Интеграл  $A = \oint_{\text{ПЕТЛЯ}} B dH$  равен работе, затрачиваемой на перемагничивание ферромаг-

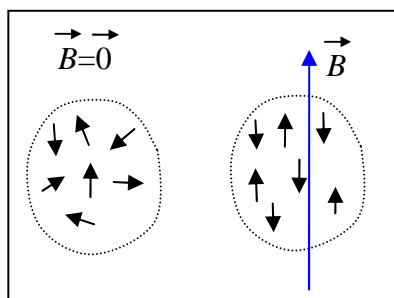
нетика за полный цикл изменения напряженности магнитного поля.

Явление гистерезиса объясняется наличием у ферромагнетиков особых областей - *доменов*. В каждом домене, даже в отсутствие внешнего поля, магнитные моменты атомы ориентированы одинаково благодаря *обменному* взаимодействию между атомами и наблюдается спонтанное намагничивание вещества до состояния насыщения. Размеры доменов порядка микрометра ( $\sim 10^{-6}$  м). При отсутствии намагниченности результирующие магнитные моменты каждого домена ориентированы хаотически, поэтому в целом суммарная намагниченность равна нулю. При наличии внешнего поля происходит ориентация доменов вдоль направления поля, в результате чего размеры областей спонтанного намагничивания начинают меняться – одни, направление моментов в которых совпадает с направлением поля, увеличиваются, другие уменьшаются. Этот процесс протекает *необратимым* образом, что является причиной гистерезиса.

Для ферромагнетиков существует температура, которая называется *точкой Кюри*, при которой они теряют ферромагнитные свойства и становятся парамагнетиками. Для железа  $T_C = 1043$  К, для Никеля  $T_C = 627$  К. При  $T > T_C$  магнитная восприимчивость зависит от температу-

ры по закону Кюри-Вейса  $\chi = \frac{C}{T - T_C}$ .

Замечание. 1) *Антиферромагнетизм* - это одно из магнитных состояний вещества, при котором



магнитные моменты микроскопических токов вещества ориентированы навстречу друг другу (антипараллельно), и поэтому намагниченность тела в целом очень мала. Этим антиферромагнетизм отличается от ферромагнетизма. *Точка Неля* – температура  $T_N$ , выше которой антиферромагнетик теряет свои свойства.

Например, для химических соединений

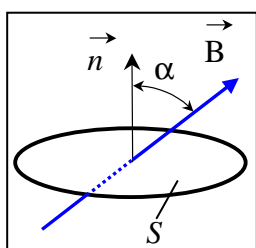
$\text{FeO } T_N=190 \text{ K}$ , а у  $\text{NiO } T_N=650 \text{ K}$ .

2) *Ферриты* - химические соединения оксида железа  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  с оксидами других металлов, обладающие уникальными магнитными свойствами, сочетающие высокую намагниченность и полупроводниковые или диэлектрические свойства, благодаря чему они получили широкое применение как магнитные материалы в радиотехнике, радиоэлектронике. Из-за уникального сочетания высоких магнитных свойств и низкой электропроводности ферриты не имеют конкурентов среди других магнитных материалов в технике высоких частот (более 100 кГц).

**Лекции 7-8.** Теорема Гаусса для магнитного поля. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Проводники с током в магнитном поле.

*Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Поле на границе раздела магнетиков. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в электрических и магнитных полях. Ускорение заряженных частиц. Эффект Холла. Закон Ампера. Магнитный момент контура с током. Контур с током в магнитном поле. Поток вектора магнитной индукции. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.*

Магнитный поток. Поток вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ориенти-



рованную поверхность  $S$  называется величина  $\Phi_{\vec{B}} = \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$ . Единицы измерения магнитного потока Вебер (Вб). В случае, когда площадка – плоская, а магнитное поле – однородное магнитный поток равен:

$\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ , где  $S$  – величина площади,  $B$  – величина индукции,  $\alpha$  – угол

между нормалью  $\vec{n}$  к площадке контура и вектором  $\vec{B}$ .

Так как силовые линии магнитного поля замкнуты (магнитное поле является вихревым), то они нигде не начинаются и не оканчиваются – поэтому магнитный поток через *любую* замкнутую поверхность равен нулю (сколько линий «вошло» внутрь замкнутой поверхности – столько же и «вышло»):

$$\oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0.$$

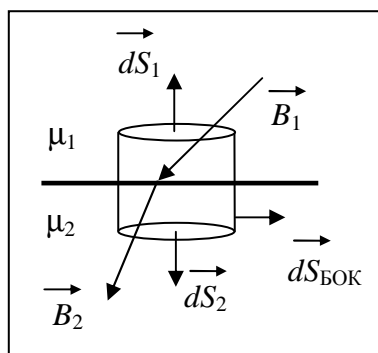
Это выражение *теоремы Гаусса для магнитного поля* в интегральной форме.

Следовательно, в дифференциальной форме теорема Гаусса имеет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

это означает, что в природе нет точечных источников магнитного поля, т.е. отдельных положительных и отрицательных магнитных зарядов.

**Соотношения для векторов магнитного поля на границе раздела магнетиков.**



Рассмотрим плоскую границу раздела двух магнетиков, с обеих сторон от которой магнитное поле можно считать однородным.

По теореме Гаусса для магнитного поля

$$\oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

В качестве поверхности  $S$  возьмём прямой цилиндр, основания которого параллельны границе, и граница делит этот цилиндр попо-

лам. Тогда

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \iint_{S_1} (\vec{B}, d\vec{S}) + \iint_{S_2} (\vec{B}, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{БОК}}} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0.$$

При стягивании цилиндра к границе  $\iint_{S_{\text{БОК}}} (\vec{B}, d\vec{S}) \rightarrow 0$ , поэтому

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) \rightarrow (B_{2n} - B_{1n}) S_{\text{ОСН}} = 0$$

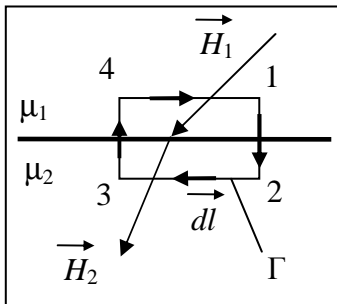
Таким образом, на границе должно выполняться соотношение

$$B_{2n} = B_{1n}$$

при переходе через границу раздела магнетиков нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля не изменяется.

Теперь воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_{\text{СТ}_k}.$$



В качестве замкнутой траектории рассмотрим прямоугольник, две стороны которого параллельны границе раздела магнетиков, и граница делит прямоугольник пополам. Выбираем направление в контуре обхода по часовой стрелке. Тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_1^2 (\vec{H}, d\vec{l}) + \int_2^3 (\vec{H}, d\vec{l}) + \int_3^4 (\vec{H}, d\vec{l}) + \int_4^1 (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_{\text{СТ}_k}$$

При стягивании контура к границе  $\int_1^2 (\vec{H}, d\vec{l}) \rightarrow 0$  и  $\int_3^4 (\vec{H}, d\vec{l}) \rightarrow 0$ , поэтому

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) \rightarrow (H_{2t} - H_{1t}) l = \sum_k I_{\text{СТ}_k}$$

где  $l$  – длина контура вдоль границы раздела магнетиков.

Поэтому  $H_{1t} - H_{2t} = \frac{\sum_k I_{\text{СТ}_k}}{l}$ . Если ввести суммарную линейную плотность тока на границе

раздела магнетиков  $i_{\text{ПОВ}} = \frac{\sum_k I_{\text{СТ}_k}}{l}$ , то

$$H_{2t} - H_{1t} = i_{\text{ПОВ}}.$$

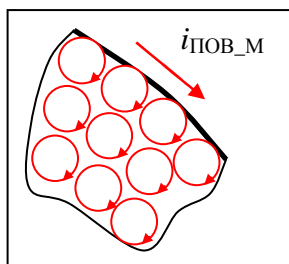
Изменение величины касательной проекции вектора напряжённости магнитного поля при переходе через границу равно линейной плотности токов проводимости на границе.

Если ток проводимости на границе раздела магнетиков отсутствует  $i_{\text{ПОВ}} = 0$ , то

$$H_{1t} = H_{2t}$$



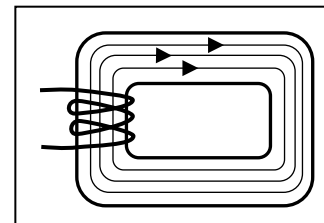
т.е. при переходе через границу раздела магнетиков (при отсутствии тока) касательная составляющая вектора напряжённости магнитного поля остаётся неизменной.



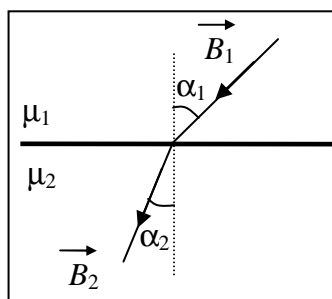
По аналогии можно написать для вектора намагниченности

$$J_{2t} - J_{1t} = i_{\text{ПОВ}_M}$$

при переходе через границу раздела магнетиков изменение величины касательной составляющей вектора намагниченности магнитного поля остаётся равно поверхностной плотности молекулярных токов. Это утверждение можно пояснить следующим образом: внутри магнетика



суммарный молекулярный ток через любую поверхность равен нулю. Но на границе магнетика токи не «компенсируют» друг друга, поэтому появляется поверхностный ток.



Рассмотрим преломление силовых линий на границе раздела

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} \frac{B_{1n}}{B_{1t}} = \frac{B_{2t}}{B_{1t}} \frac{B_{1n}}{B_{2n}} = \frac{\mu_0 \mu_2 H_{2t}}{\mu_0 \mu_1 H_{1t}} \frac{B_{1n}}{B_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

т.е. силовые линии больше отклоняются от нормали со стороны магнетика с большей магнитной проницаемостью. В этом смысле говорят, что магнетики с большей магнитной проницаемостью кон-

денсируют магнитное поле. На этом явлении основан принцип применения *магнитопроводов*.

Если в замкнутом контуре, выполненном из магнетика с большим значением  $\mu$ , создать магнитное поле (например, с помощью катушки с током), то силовые линии магнитного поля практически не выйдут из контура.

*Замечание.* Между электростатическим и магнитостатическим полями можно установить аналогию. Рассмотрим уравнения

$$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q, \quad \oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \quad \oint_\Gamma (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad \oint_\Gamma (\vec{H}, d\vec{l}) = I,$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

Из них следует аналогия между векторами

$\vec{D}$  - электрического смещения (или электрической индукции) и  $\vec{B}$  - магнитной индукции, напряженностями полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Но силовыми характеристиками полей являются только  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Остальные два вектора имеют «вспомогательный» смысл, но их введение позволяет записывать уравнения в симметричном виде.

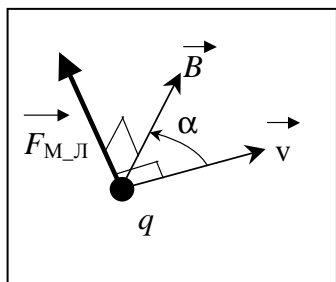
## СИЛА ЛОРЕНЦА

Опыт показывает, что на заряженную частицу, которая *движется* в магнитном поле,

действует сила, которая называется *магнитной силой* Лоренца. Если скорость частицы  $\vec{v}$ , заряд частицы  $q$ , индукция магнитного поля  $\vec{B}$ , то вектор магнитной силы Лоренца определяется соотношением

$$\vec{F}_{M\_Л} = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Векторы  $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}_{M\_Л})$  образуют правую тройку векторов.



Величина силы

$$F_{M\_Л} = qvB \sin \alpha,$$

здесь  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

*Замечание.* Напомним *практическое* правило: направление вектора силы  $\vec{F}_{M\_Л}$ , действующей на *положительный* заряд  $q > 0$ , определяется *правилом левой руки*: вектор силы  $\vec{F}_{M\_Л}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . При этом, если вектор индукции  $\vec{B}$  входит в ладонь левой руки, пальцы (собранные вместе) направлены вдоль вектора скорости  $\vec{v}$ , то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на положительный заряд (для отрицательного заряда – правая рука).

Так как вектор магнитной силы Лоренца перпендикулярен скорости, то её мощность и работа равна нулю. *Поэтому кинетическая энергия (и величина скорости) заряженной частицы, движущейся только в магнитном поле остается постоянной.*

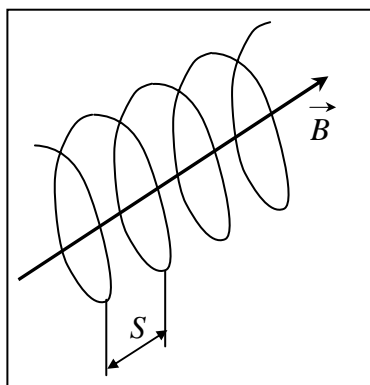
*Пример.* В однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  влетает со скоростью  $\vec{v}$  частица массой  $m$  и зарядом  $q$ . Угол между вектором скорости и магнитной индукцией равен  $\alpha$ . Как будет двигаться частица в магнитном поле?

*Решение.* Разложим вектор скорости частицы на две составляющих  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , где  $\vec{v}_\perp$  - вектор, перпендикулярный  $\vec{B}$ , а  $\vec{v}_\parallel$  - вектор, параллельный  $\vec{B}$ . Тогда  $v_\perp = v \cdot \sin \alpha$ ,  $v_\parallel = v \cdot \cos \alpha$ . Перейдем в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью  $\vec{v}_\parallel$ . Тогда в этой системе отсчета частица движется только со скоростью  $\vec{v}_\perp$ , перпендикулярной  $\vec{B}$ .

Вектор магнитной силы Лоренца направлен перпендикулярно скорости частицы, поэтому она создает нормальное ускорение

$$ma_n = q \cdot v_\perp \cdot B = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

следовательно, траекторией является окружность, вектор ускорения  $\vec{a}_n$  направлен к центру этой окружности. Найдем радиус окружности:  $m \frac{v_{\perp}^2}{R} = q v_{\perp} B$ , откуда  $R = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{(q/m) B}$ , где  $q/m$  –



удельный заряд частицы. Период оборота частицы:

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v_{\perp}}{v_{\perp} q B} = 2\pi \frac{m}{Bq}.$$

Оказывается период оборота не зависит от скорости частицы.

Теперь вернемся в начальную систему отсчета, где частица также движется вдоль линии поля со скоростью  $v_{\parallel}$ . В этой системе отсчета траектория частицы является винтовой линией радиу-

са  $R = \frac{v \cdot \sin \alpha}{(q/m) B}$  и шагом

$$S = v_{\parallel} \cdot T = v \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi \frac{m}{Bq} = 2\pi \frac{mv \cdot \cos \alpha}{Bq}. \clubsuit$$

Магнитная сила Лоренца *зависит от системы отсчёта*. Например, в сопутствующей системе отсчёта, где частица покоится, магнитная сила Лоренца равна нулю. Но в классической механике вектор силы не зависит от системы отсчёта. Опыт показывает, что таким вектором силы, не зависящим от системы отсчёта, является  $\vec{F}_L = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$ . Эта называется *силой Лоренца*. Здесь  $\vec{E}$  – вектор напряжённости электрического поля.

В частном случае, когда частица движется только в магнитном поле (т.е.  $\vec{E} = \vec{0}$ ), сила Лоренца совпадает с магнитной силой Лоренца  $\vec{F}_L = \vec{F}_{L\_M}$ . Однако, если перейти в систему отсчёта, где частица в данный момент времени покоится ( $\vec{v} = \vec{0}$ ), то в этой системе будет  $\vec{F}_{L\_M} = \vec{0}$ . Но вектор силы Лоренца не должен измениться, поэтому

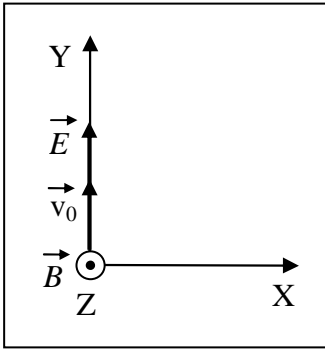
$$q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E}' + q(\vec{0} \times \vec{B}') = q\vec{E}'.$$

Не смотря на то что в старой системе отсчёта электрического поля не было  $\vec{E} = \vec{0}$ , в новой системе отсчёта появится электрическое поле, напряжённость которого  $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$ .

*Пример.* Рассмотрим движение положительно заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях, для случая, когда  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Масса частицы  $m$ .

*Решение.* Введём декартову систему координат так, чтобы вектор  $\vec{E}$  был направлен вдоль оси Y, а вектор  $\vec{B}$  вдоль оси Z, будем считать, что начальная скорость частицы направлена вдоль

оси Y, т.е. в координатной форме  $\vec{E} = (0, E, 0)$ ,  $\vec{B} = (0, 0, B)$ ,  $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$ . Предположим, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) частица находилась в начале координат.



Уравнение динамики (второй закон Ньютона) для частицы

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{т.к. } \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x (v_y B_z - v_z B_y) + \vec{e}_y (v_z B_x - v_x B_z) + \vec{e}_z (v_x B_y - v_y B_x),$$

( $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  - орты декартовой системы координат), то, учитывая заданные значения, в координатах уравнение динамики примут вид:

$$\begin{cases} ma_x = qv_y B \\ ma_y = qE - qv_x B \\ ma_z = 0 \end{cases}$$

Решение третьего уравнения имеет вид  $z = z_0 + v_{0z} \cdot (t - t_0)$ . Из первых двух уравнений выража-

ем скорости  $v_y = \frac{m}{qB} a_x$ ,  $v_x = \frac{E}{B} - \frac{m}{qB} a_y$  и подставляем в ускорения  $a_x = \dot{v}_x$  и  $a_y = \dot{v}_y$ .

Первое уравнение имеет вид  $\ddot{v}_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = \left(\frac{q}{m}\right)^2 BE$  и его решение  $v_x = \frac{E}{B} + C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t + \phi_1\right)$ .

Второе уравнение  $\ddot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0$ , его решение  $v_y = C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t + \phi_2\right)$ .

Подставляем начальные условия при  $t=0$  для скоростей и ускорений.

Для скорости получаем

$$v_x = \frac{E}{B} + \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t - \arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right), \quad v_y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

$$v_z = 0.$$

Для координат

$$x = \frac{E}{B}t + \frac{mv_0}{qB} - \frac{m}{qB} \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t - \arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

$$y = \frac{mE}{qB^2} - \frac{m}{qB} \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t + \arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right), \quad z=0.$$

Траектория частицы представляет собой эллипс, центр которого движется со скоростью

$v_c = \frac{E}{B}$ . При этом направление движения центра окружности не зависит от знака заряда

частицы.♣

### Ускорение заряженных частиц

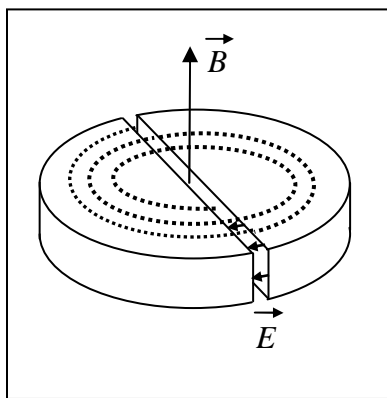
Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий (выше 1МэВ, т.е. выше  $1,6 \cdot 10^{-13}$  Дж).

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно разделить на линейные и циклические.

В *линейных* ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоняясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В *циклических* ускорителях частицы движутся по практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются электрическим полем на определённых участках.



Принцип действия *циклотрона* основан на независимости периода оборота заряженной частицы в магнитном поле от её скорости  $T = 2\pi \frac{m}{Bq}$ .

Два полых электрода (дуанты), выполненных в виде половинок невысокого цилиндра, находятся в вертикальном однородном магнитном поле. Система помещена в ёмкость, внутри которой откачан воздух. Когда частицы попадают в зазор между дуантами, в зазоре включается электрическое поле, разгоняющее частицы. Через половину оборота частицы подходят к щели с другой стороны, и опять включается разгоняющее электрическое поле. Скорость частиц в зазоре увеличивается, поэтому радиус траектории увеличивается. Частота колебаний напряжения между дуантами совпадает с частотой вращения частиц.

В *фазотроне* индукция магнитного поля уменьшается к краям, следовательно, при увеличении радиуса траектории начинает увеличиваться период оборота частиц. Поэтому, по мере разгона частиц, уменьшают частоту колебаний напряжения между дуантами.

В *синхротроне* траектория частиц не меняется – это обеспечивается изменяющимся во времени магнитным полем.

Примером ускорителя является **Большой адронный коллайдер** (англ. *Large Hadron Collider, LHC*; сокр. БАК) — ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжёлых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Коллайдер построен в научно-исследовательском центре Европейского совета ядерных исследований (фр. *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN*), на границе Швейцарии и Франции, недалеко от Женевы. БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире. Большим он назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26659 м; адронным - из-за того, что он ускоряет адроны (частицы, участвующие в сильном взаимодействии); коллайдером (англ. *collide* — сталкиваться) — из-за того, что пучки частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках столкновения.

### Эффект Холла

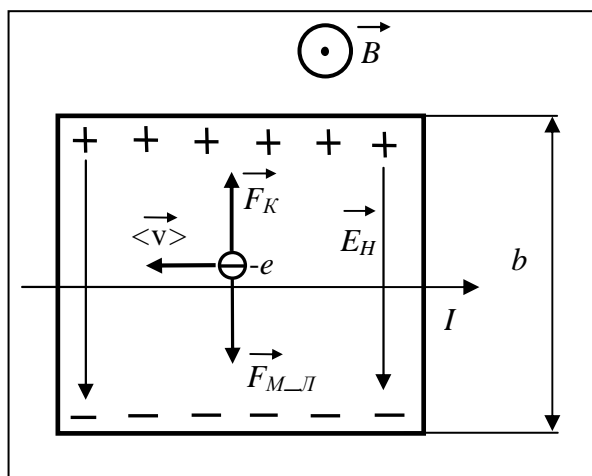
Помещаем в однородное магнитное поле (металлический) проводник выполненный в виде прямоугольного параллелепипеда так, чтобы силовые линии магнитного поля были направлены перпендикулярно одной из пар граней. Затем через вторую пару граней пропускаем электрический ток. Тогда между третьей парой граней появится напряжение. Это явление называется *эффектом Холла* или *гальваномагнитным явлением*.

*Напряжение Холла* между гранями

$$U_H = R_H b j B$$

$R_H$  – постоянная Холла,  $b$  – расстоянию между гранями, между которыми возникает напряжение,  $j$  – величина плотности тока,  $B$  – величина магнитной индукции.

Ток в металлах создаётся валентными (свободными) электронами. Так как знак заряда электронов отрицательный, то они движутся против положительного направления для тока. На



движущиеся электроны в магнитном поле действует магнитная сила Лоренца, под действием которой электроны начинают перемещаться к одной из граней, где образуется избыточный отрицательный заряд. Тогда у противоположной грани будет наблюдаться недостаток электронов, т.е. избыток положительного (не скомпенсированного) заряда. Т.е. произойдёт разделение электрических зарядов у пары противоположных

граней, что приведёт к появлению «наведённого» (индуцированного) электрического поля, напряженность которого  $E_H$ . Со стороны этого поля на электроны будет действовать сила Кулона, вектор которой будет направлен против вектора магнитной силы Лоренца. Когда перераспреде-

ление зарядов «закончится» (наступит равновесие для движения в поперечном направлении), то эти силы уравновесят друг друга  $\vec{F}_K + \vec{F}_{M\_л} = \vec{0}$ , откуда  $qE_H = q\langle v \rangle B$ . Величина напряжённости электрического поля (Холла)  $E_H = \langle v \rangle B$ . Среднюю скорость упорядоченного движения носителей

можно найти из выражения для плотности тока  $\vec{j} = qn\langle \vec{v} \rangle$ , откуда  $\langle v \rangle = \frac{j}{qn}$ . Для напряжения

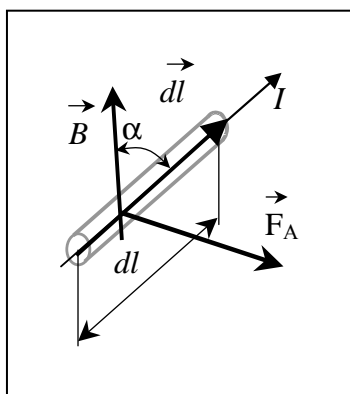
Холла  $U_H = E_H b$ , поэтому  $U_H = \frac{j}{qn} Bb$ . Следовательно, постоянная Холла  $R_H = \frac{1}{qn}$ .

Эффект наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках. По знаку постоянной Холла судят о знаке заряда носителей.

Эффект Холла используется, например, в приборах, регистрирующих магнитные поля.

*Замечание. Магнетосопротивление* (магниторезистивный эффект) — изменение электрического сопротивления вещества в магнитном поле. Все проводники в той или иной мере обладают магнетосопротивлением. Явление качественно можно объяснить действием магнитной силы Лоренца на движущиеся носители тока.

### СИЛА АМПЕРА



Опыт показывает, что на прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле действует сила, зависящая от силы тока, индукции магнитного поля, длины проводника и положения проводника относительно силовых линий магнитного поля. Вектор этой силы направлен перпендикулярно проводнику. Эта сила называется *силой Ампера*.

Если рассмотреть малый участок тонкого проводника длиной  $dl$ , по которому течёт ток силой  $I$ , то в магнитном поле с индукцией  $B$  на него будет действовать сила, вектор которой определяется соотношением:

$$\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Здесь, как и ранее,  $d\vec{l}$  — это вектор, направленный по касательной к линии тока в положительном направлении для тока. Векторы  $(d\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}_A)$  образуют правую тройку векторов. Величина силы  $F_A = IB \sin \alpha dl$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц, а в магнитном поле на движущиеся заряженные частицы действует магнитная сила Лоренца. Найдем векторную сумму этих сил для малого тонкого проводника длиной  $dl$ .

Рассмотрим проводник, который покоится в некоторой системе отсчёта. Пусть площадь поперечного сечения проводника равна  $S_{\perp}$ . Предположим, что проводник тонкий, поэтому плотность тока вдоль поперечного сечения можно считать постоянным вектором  $\vec{j} = qn \langle \vec{v} \rangle$ . Сила тока в проводнике  $I = jS_{\perp} = qn \langle v \rangle S_{\perp}$ . На каждый носитель тока действует одинаковая магнитная сила Лоренца  $\vec{F}_q = q(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B})$ . Количество носителей в объёме проводника длиной  $dl$  и площадью поперечного сечения  $S_{\perp}$  равно  $N = nS_{\perp}dl$ . Поэтому вектор суммарной силы

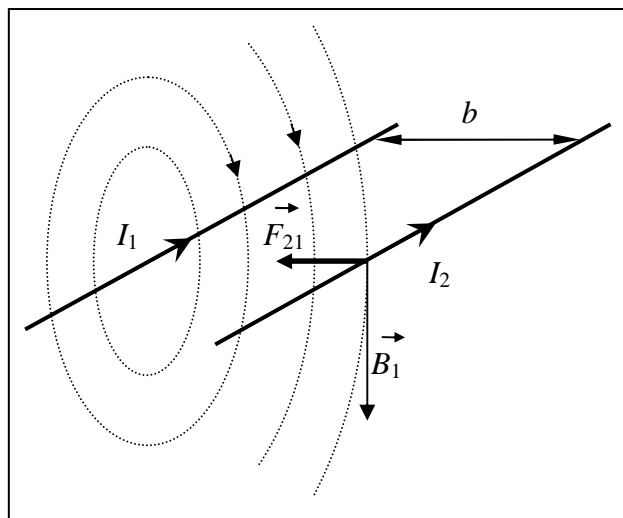
$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = N\vec{F}_q = nS_{\perp}dlq(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}) = qnS_{\perp} \langle v \rangle (d\vec{l} \times \vec{B}) = I(d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Здесь был введён вектор  $d\vec{l}$  такой, что выполняется равенство  $\langle v \rangle d\vec{l} = \langle \vec{v} \rangle dl$ .

*Замечание.* В металлическом проводнике носителями тока являются отрицательно заряженные электроны. Хотя электроны и движутся против положительного направления для тока, но вектор магнитной силы Лоренца, действующей на них, направлен так же, как если бы носители тока были положительно заряженными частицами.

Полученное выражение для суммарной силы совпадает с выражением для силы Ампера. Таким образом, можно сказать, что сила Ампера – это суммарная магнитная сила Лоренца, действующая на носители тока в *покоящемся* проводнике.

*Пример.* Найдём величину силы взаимодействия двух бесконечных параллельных прямых проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$  (на единицу длины), расстояние между которыми равно  $b$ .



*Решение.* Каждый из проводников создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, силовые линии которого – окружности (в перпендикулярной плоскости) с центром на оси проводника. Рассмотрим проводник с током  $I_2$ . Он находится в магнитном поле проводника с током  $I_1$ , индукция которого на расстоянии  $b$  равна  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$ . Вектор индукции  $\vec{B}_1$  направлен пер-

пендикулярно проводнику. Тогда на часть этого проводника длиной  $l$  действует сила Ампера,

величина которой  $F_{21} = I_2 l B_1 = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b} l$ . Следовательно, величина силы взаимодей-

ствия (на единицу длины)  $F_l = \frac{F_{21}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}$ . Полученное выражение совпадает с *законом Ампера*,

что говорит о верности проведённых рассуждений.

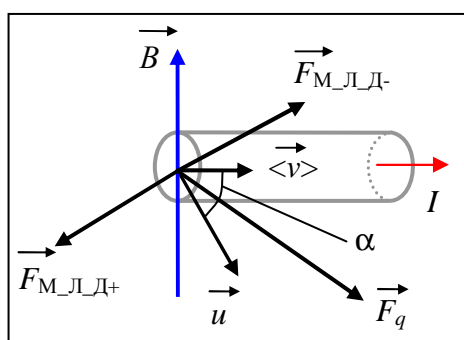


*Замечание.* Если токи направлены одинаково, то проводники притягиваются, а если противоположно, то отталкиваются.

*Замечание.* Так как электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц, то можно утверждать, что в пучке частиц движущихся в одинаковом направлении будут действовать силы, стремящиеся сжать пучок.

### Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Рассмотрим (металлический) проводник, который *поступательно* движется с некоторой скоростью  $\vec{u}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (предполагаем, что  $u \ll c$ ). У каждого носителя тока есть дополнительная скорость упорядоченного движения вместе с проводником  $\vec{u}$ . Т.к. проводник в целом электрически нейтрален, то в нём присутствуют и положительные заряды,



покоящиеся относительно проводника, и которые тоже будут перемещаться со скоростью  $\vec{u}$  вместе с проводником. Суммарный заряд этих положительных зарядов в объёме проводника равен по величине суммарному заряду электронов. Суммарная дополнительная плотность тока равна в этом случае нулю

$$\vec{j}_{доп} = q_+ n_+ \vec{u} + q_- n_- \vec{u} = Q_+ \vec{u} + Q_- \vec{u} = \vec{0}.$$

На свободные электроны, помимо силы  $\vec{F}_q = q(\vec{v} \times \vec{B})$ , вызванной вектором средней скорости упорядоченного движения, будет действовать дополнительная магнитная сила Лоренца, вызванная вектором скорости  $\vec{u}$   $\vec{F}_{M\_Л\_Д-} = -q(\vec{u} \times \vec{B})$ .

Так как положительные заряды тоже перемещаются в магнитном поле (вместе с проводником), то появится дополнительная магнитная сила Лоренца  $\vec{F}_{M\_Л\_Д+} = q(\vec{u} \times \vec{B})$ .

Магнитные силы Лоренца, действующие на положительные и отрицательные заряды и вызванные дополнительной скоростью  $\vec{u}$ , компенсируют друг друга

$$\vec{F}_{M\_Л\_Д+} + \vec{F}_{M\_Л\_Д-} = \vec{0}.$$

Поэтому выражение для суммарной магнитной силы Лоренца, действующей на проводник с током, движущийся в магнитном поле, не изменится

$$\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Найдём работу этой силы на малом перемещении проводника  $d\vec{r}$ , считая силу тока постоянной

$$\delta A_A = (\vec{F}_A, d\vec{r}) = I((d\vec{l} \times \vec{B}), d\vec{r}).$$

Пусть в декартовой системе координат  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$  и  $d\vec{r} = (dr_x, dr_y, dr_z)$ , а  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  - орты, тогда, т.к

$$(d\vec{l} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

то

$$((d\vec{l} \times \vec{B}), d\vec{r}) = \begin{vmatrix} dr_x & dr_y & dr_z \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ dx & dy & dz \\ dr_x & dr_y & dr_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ dr_x & dr_y & dr_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = ((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B}).$$

(Сначала переставили первую и третью строки, а затем вторую и третью).

Т.е. работу силы Ампера можно записать в виде  $\delta A_A = I ((d\vec{l} \times \vec{B}), d\vec{r}) = I ((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B})$ .

По определению векторного произведения векторов  $(d\vec{r} \times d\vec{l}) = d\vec{S}$  - это вектор, перпендикулярный к векторам  $d\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ , а длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $d\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ . Поэтому  $((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B}) = (\vec{B}, d\vec{S}) = d\Phi_B$  - поток вектора магнитной индукции через эту малую площадку. Следовательно, работа  $\delta A_A = I \cdot d\Phi_B$ .

В общем случае, при *постоянной силе тока*  $I$ , можно записать выражение для работы силы Ампера

$$A_A = I \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = I \cdot \Delta\Phi_B$$

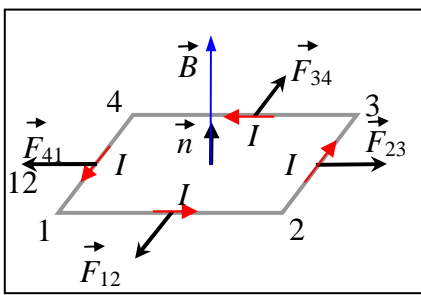
где  $\Delta\Phi_B = \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$  - магнитный поток через поверхность «заметаемую» проводником при его

движении, при этом в каждый момент времени векторы  $(d\vec{r}, d\vec{l}, d\vec{S})$  образуют правую тройку.

### Контур с током в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольный (ориентированный) контур 12341 с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле. Направление нормали к контуру и направление тока в контуре согласованы правилом правого винта (буравчика). Пусть сила тока в контуре  $I$ ,  $B$  - величина индукции магнитного поля,  $\alpha$  - угол между нормалью к контуру и вектором  $\vec{B}$ . Пусть длина стороны 12 равна  $a$ , а стороны 23 -  $b$ .

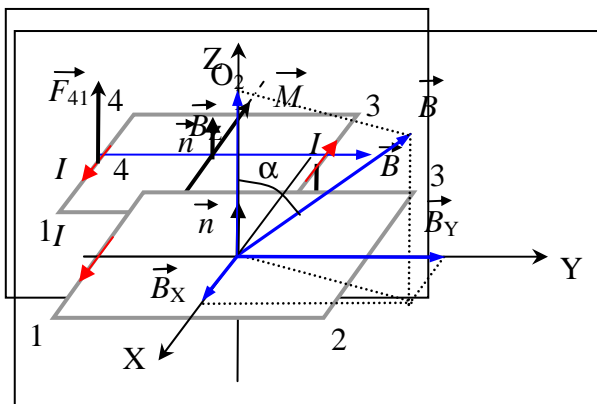
Рассмотрим несколько различных случаев.



1) Пусть угол  $\alpha=0$ , т.е. векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$  сонаправлены.

На стороны прямоугольника действуют силы

$F_{12} = F_{34} = IBa$ ,  $F_{23} = F_{41} = IBb$ . Векторы всех сил лежат в одной плоскости и растягивают контур. Сумма сил равна нулевому вектору, и суммарный момент сил – тоже нулевой вектор. Если угол  $\alpha = \pi$ , то силы сжимают контур.



2) Пусть  $\alpha = \pi/2$  и вектор  $\vec{B}$  параллелен стороне 12.

В этом случае  $F_{12} = F_{34} = 0$ ,  $F_{23} = F_{41} = IBb$ . Сумма сил равна нулевому вектору, но суммарный момент сил равен моменту пары сил (например, относительно оси  $O_1O_2$ )

$$M_{O_1O_2} = F_{23} \cdot \frac{a}{2} + F_{41} \cdot \frac{a}{2} = IBba.$$

А вектор момента сил  $\vec{M}$  лежит на оси  $O_1O_2$  (т.к. векторы сил стремятся развернуть контур вокруг этой оси).

мат. развёрнуть контур вокруг этой оси).

**Напоминание** – направление вектора момента силы вдоль оси согласовано с возможным направлением поворота под действием силы вокруг этой оси «правым винтом».

3) Рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{B}$  направлен произвольным образом. Введём декартову систему координат, начало которой поместим в центре прямоугольника, ось Z направлена вдоль нормали, а стороны параллельны осям X и Y.

Тогда в координатной записи  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ .

Расписываем проекции моментов сил на оси

$M_x = IB_y ab$ ,  $M_y = -IB_x ab$ ,  $M_z = 0$ . Для этого контура вектор магнитного момента равен

$\vec{p}_m = \vec{n} IS = \vec{n} Iab$ , его координаты  $\vec{p}_m = (0, 0, Iab)$ .

**Утверждение.** Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле равен

$$\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B}).$$

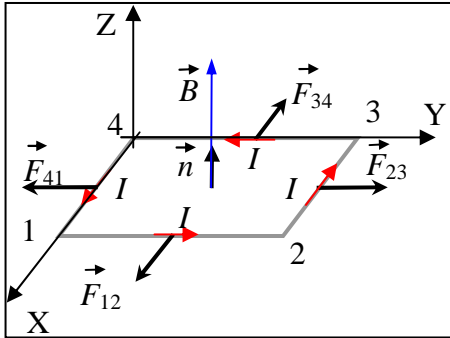
**Доказательство.** Это утверждение легко проверить во введённой декартовой системе координат. Действительно  $\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B}) =$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p_{mx} & p_{my} & p_{mz} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & Iab \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x IB_y ab - \vec{e}_y Iab B_x. \clubsuit$$

**Следствие.** Величина момента сил, действующих на контур с током в магнитном поле равна

$$M = p_m B \sin \alpha = ISB \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что вектор момента силы равен нулю в двух случаях: при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ . Но положение равновесия при  $\alpha = \pi$  является неустойчивым. Следовательно, момент сил стремится развернуть контур так, чтобы вектор магнитного момента был сонаправлен вектору индукции магнитного поля.



При повороте контура на малый угол (при постоянной силе тока) будет совершена работа

$\delta A = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha = -d(p_m B \cos \alpha) = -d(\vec{p}_m, \vec{B})$ . Это выражение позволяет ввести энергию взаимодействия контура с магнитным полем

$$W_m = (\vec{p}_m, \vec{B}).$$

Рассмотрим теперь малый контур в неоднородном магнитном поле. В этом случае суммарная сила, действующая на контур уже не равна нулю. Рассмотрим частный случай, когда контур находится в неоднородном поле в положении, при котором момент сил равен нулю.

Пусть это - прямоугольный контур, находящийся в плоскости XY. Предположим, что размеры контура  $dx$  и  $dy$ . В этом случае вектор магнитного момента контура направлен вдоль оси Z:

$\vec{p}_m = (0, 0, p_{mz})$ ,  $p_{mz} = Idxdy$ . Векторное поле магнитной индукции направлено параллельно оси Z  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Проекция силы на ось Y:  $F_y = F_{23} - F_{41}$ , где  $F_{41} = Idx \langle B_z \rangle_{41}$ ,  $F_{23} = Idx \langle B_z \rangle_{23}$ . Т.к.

для усреднённых значений индукции  $\langle B_z \rangle_{23} \approx \langle B_z \rangle_{41} + \frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial y} dy$ , то

$$F_y \approx Idx \left( \langle B_z \rangle_{41} + \frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial y} dy \right) - Idx \langle B_z \rangle_{41} \approx Idxdy \frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial y}.$$

При стягивании контура в точку ( $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$ ), получаем  $F_y = p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial y}$ .

Аналогично  $F_x = p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial x}$ .

**Лекция 9. Электромагнитная индукция.**

*Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Взаимная индукция. Вихревые токи. Плотность энергии магнитного поля. Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление.*

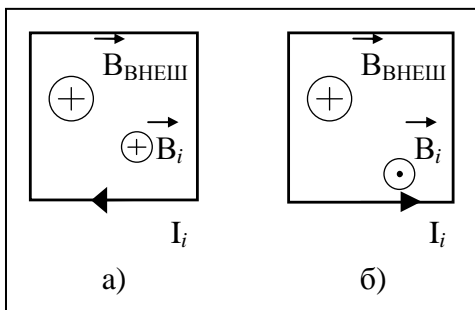
**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ**

Опыт показывает, что если взять замкнутый проводник, то при *изменении* магнитного потока через площадку ограниченную проводником, в проводнике появляется индукционный ток – это явление называется *электромагнитной индукцией*. Индукционный ток появляется под действием сторонних сил со стороны *вихревого электрического* поля, возникающего при изменении магнитного потока. Величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}).$$

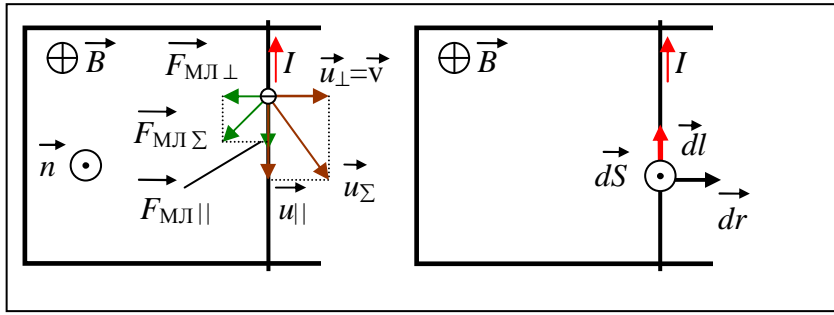
Знак минус принято писать для согласования с **правилом Ленца**: *индукционный ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение магнитного потока.*

Закон электромагнитной индукции носит имя Фарадея (*Фарадей* (Faraday) *Майкл* (1791-1867), английский физик, один из основоположников учения об электромагнитном поле. Ленц, Эмилий Христианович (1804–1865), русский физик и электротехник.)



Пример на правило Ленца. Рассмотрим замкнутый проводящий контур, находящийся в магнитном поле с индукцией  $B_{\text{ВНЕШ}}$ , силовые линии которого перпендикулярны плоскости контура. Если величина магнитной индукции  $B_{\text{ВНЕШ}}$  убывает с течением времени, то будет уменьшаться магнитный поток через площадку контура. Тогда в контуре

должен появиться индукционный ток  $I_i$ , направленный так, чтобы создаваемое им магнитное поле с индукцией  $B_i$  препятствовало изменению магнитного потока, создаваемого внешним полем. В данном случае вектор  $\vec{B}_i$  внутри контура должен быть направлен так же, как и вектор  $\vec{B}_{\text{ВНЕШ}}$  (чтобы скомпенсировать уменьшение магнитного потока), поэтому индукционный ток направлен по часовой стрелке (рис. а). Если наоборот, индукция внешнего поля увеличивается, то индукционный ток должен стремиться уменьшить увеличение магнитного потока, поэтому вектор индукции  $\vec{B}_i$  создаваемого им магнитного поля внутри контура направлен против  $\vec{B}_{\text{ВНЕШ}}$ , а сам ток направлен против часовой стрелки (рис. б).♣



*Пример.* Рассмотрим плоский прямоугольный проводящий контур, одна сторона которого может свободно перемещаться (перемычка скользит по двум направляющим проводникам).

Контур находится в однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого направлен перпендикулярно плоскости контура. Пусть перемычка поступательно движется со скоростью  $v$ . Электроны внутри перемычки перемещаются вместе с перемычкой, их вектор скорости, перпендикулярный перемычке, равен скорости самой перемычки  $\vec{u}_\perp = \vec{v}$ . Вектор магнитной силы Лоренца, вызванный этой скоростью  $\vec{u}_\perp$ , будет направлен параллельно перемычке

$\vec{F}_{ML\parallel} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ . Под действием этой силы электроны приобретут скорость упорядоченного движения вдоль перемычки  $\vec{u}_\parallel$ . Поэтому положительное направление электрического тока будет направлено в обратную сторону. Направление нормали  $\vec{n}$  к площадке контура выберем согласованным с положительным направлением тока.

(Вектору скорости  $\vec{u}_\parallel$  будет соответствовать сила  $\vec{F}_{ML\perp} = -e(\vec{u}_\parallel \times \vec{B})$ . Вектор суммарной скорости электронов будет направлен под некоторым углом к перемычке  $\vec{u}_\Sigma = \vec{u}_\parallel + \vec{u}_\perp$ . Этой скорости будет соответствовать сила

$$\vec{F}_{LM} = -e(\vec{u}_\Sigma \times \vec{B}) = -e((\vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel) \times \vec{B}) = -e(\vec{u}_\perp \times \vec{B}) - e(\vec{u}_\parallel \times \vec{B}) = \vec{F}_{LM\parallel} + \vec{F}_{LM\perp}.$$

Сила  $\vec{F}_{ML\parallel}$  будет создавать в проводнике напряжённость поля сторонних сил

$$\vec{E}_{CT} = \frac{\vec{F}_{ML\parallel}}{q} = (\vec{v} \times \vec{B}). \text{ Вектор } \vec{E}_{CT} \text{ направлен против движения электронов, т.е. по } \textit{положительному} \text{ направлению тока.}$$

Выберем направление касательного вектора к проводнику  $d\vec{l}$  сонаправленным с вектором  $\vec{E}_{CT}$ . Тогда ЭДС на малом участке проводника

$$\mathcal{E}_i = (\vec{E}_{CT}, d\vec{l}) = ((\vec{v} \times \vec{B}), d\vec{l}) = -((\vec{v} \times d\vec{l}), \vec{B})$$

За малое время  $dt$  перемещение поступательно движущегося проводника будет равно  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ . Поэтому можно записать

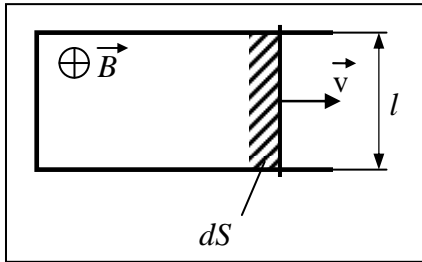
$$\mathcal{E}_i = -\left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times d\vec{l}\right), \vec{B}\right) = -\frac{((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B})}{dt} = -\frac{(d\vec{S}, \vec{B})}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

В этом выражении знак минус указывает на то, что вектор  $d\vec{S} = (d\vec{r} \times d\vec{l})$  и вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  всегда будут направлены противоположно. Тогда для всего замкнутого контура

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}_{CT}, d\vec{l}) = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Таким образом, знак минус в законе Фарадея указывает на положительное направление тока

(т.е. вектора напряженности сторонней силы  $\vec{E}_{CT}$ ). Если в кон-



туре нет других элементов ЭДС, то знак минус можно опустить.

Тогда, можно считать, что за малый промежуток времени  $dt$  площадь контура изменится на  $dS = lvdt$ , поэтому магнитный поток изменится на  $d\Phi = BdS = Blvdt$ , откуда величина

ЭДС индукции в контуре

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = Bvl \clubsuit$$

*Пример.* Плоский контур, площадь которого  $S$ , вращается в постоянном магнитном поле индукции  $B$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Ось вращения лежит в плоскости контура и перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Найти амплитудное значение ЭДС индукции, возникающей в контуре.

*Решение.* При вращении контура угол между нормалью к площади контура и вектором  $\vec{B}$  меняется по закону:  $\alpha = \omega \cdot t + \alpha_0$ , ( $\alpha_0$  – начальный угол,  $t$  – время). Тогда магнитный поток через площадь контура  $\Phi = BS \cos(\omega \cdot t + \alpha_0)$ , следовательно, величина ЭДС

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) = \omega BS \sin(\omega \cdot t + \alpha_0).$$

Поэтому максимальное (амплитудное) значение ЭДС  $\mathcal{E}_{i_{max}} = \omega BS$ . Таким образом, величина ЭДС индукции прямо пропорциональна угловой скорости вращения контура. ♣

*Замечание.* Это пример показывает принцип генерации переменного тока.

Если площадь контура ограничена несколькими витками, то суммарная ЭДС равна сумме

ЭДС в каждом витке контура  $\mathcal{E}_{i_{\Sigma}} = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{i_k}$ , или

$$\frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{d\Phi_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \Phi_k.$$

Следовательно, суммарный поток равен сумме потоков  $\Phi_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N \Phi_k$ . Этот суммарный поток называется *потокосцеплением*.

### Дифференциальная форма закона Фарадея.

Из интегральной формы закона электромагнитной индукции (закона Фарадея)

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}_{CT}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

с помощью теоремы Стокса  $\oint_{\Gamma} (\vec{E}_{CT}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{E}_{CT}), d\vec{S})$  можно получить дифференциальную форму

$$\text{rot}(\vec{E}_{CT}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

При изменении во времени индукции магнитного поля в данной точке пространства, в окрестности этой точки появится поле сторонних сил, ротор векторов которого пропорционален скорости изменения вектора магнитной индукции.

Из этой формулы следует, что появляющееся поле является вихревым, т.е. силовые линии этого поля - замкнутые линии.

Если в области, где индукция магнитного поля зависит от времени, находится проводящая среда, то, по закону Ома, возникающее поле сторонних сил должно привести к возникновению электрического тока. Запишем закон Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{CT}$ . Отсюда следует, что силовые линии поля сторонних сил и линии тока совпадают. Но т.к. поле вихревое

$$\text{rot}(\vec{E}_{CT}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

то его силовые линии – замкнутые, поэтому и линии тока

$$\text{rot}(\vec{j}) = \text{rot}(\gamma \vec{E}_{CT}) = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

будут замкнутыми. Т.е. векторное поле плотности тока, возникающее в проводнике при изменении внешнего магнитного поля, тоже вихревое. Такие токи получили название *вихревые токи* или *токи Фуко*. Знак минус в этом выражении указывает на правило Ленца – вектор плотности вихревого тока в окрестности данной точки направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение индукции внешнего магнитного поля.

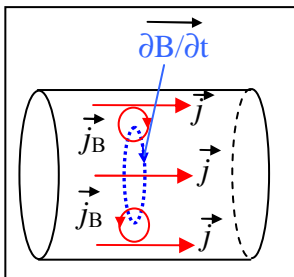
Токи Фуко возникают, например, при движении проводников в неоднородном магнитном поле. При этом проводник начинает разогреваться (закон Джоуля-Ленца), на участки проводника с вихревыми токами действуют силы Ампера, тормозящие проводник. (Явление разо-



грева используют в индукционных печах, явление торможения – в демпферных устройствах, служащих для успокоения колебаний).

В тех устройствах, где появление токов Фуко следует предотвращать, применяют специальные приёмы – например в проводнике делают прорезы, направление которых перпендикулярно возможному направлению вихревых токов. Или, вообще, электропроводящие части выполняют из набора тонких пластин (например, сердечники – магнитопроводы в трансформаторах).

Если по массивному проводнику протекает переменный электрический ток с плотностью  $\vec{j}$ , то внутри проводника он создаёт переменное магнитное поле, вектор изменения которого



$\overrightarrow{\partial B / \partial t}$ , в свою очередь, приводит к появлению вихревых токов с плотностью  $\vec{j}_B$ , препятствующих изменению магнитного поля. Эти токи направлены так, что внутри проводника они ослабляют основной ток, а у поверхности, наоборот, усиливают. Таким образом, суммарная плотность тока у поверхности проводника усиливается, а внутри уменьшается.

Такое явление называют *скин-эффект*. Следовательно, при скин-эффекте, если «выкинуть» внутренность проводника, то это не повлияет на его сопротивление переменному току. Поэтому, в устройствах, где протекает ток высокой частоты, проводники выполняют в форме полых трубок, при этом их внешнюю поверхность даже покрывают веществом с большой проводимостью (например, серебром).

### Самоиндукция

Ток, протекающий по замкнутому проводнику, создаёт магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через площадку, ограниченную проводником. Если форма проводника постоянная, то между силой тока в проводнике и магнитным потоком через площадку, ограниченную проводником, существует прямая зависимость  $\Phi_B = L \cdot I$ . Коэффициент пропорциональности  $L$  при отсутствии ферромагнетиков является постоянной величиной и называется *индуктивностью* контура или *коэффициентом самоиндукции* контура. Единица измерения индуктивности – Генри (Гн).

*Пример.* Найдём индуктивность длинного соленоида, внутри которого нет ферромагнетика (но, возможно, есть диамагнетик или парамагнетик). Будем предполагать, что длина соленоида значительно превосходит его диаметр, поэтому можно считать, что магнитное поле внутри соленоида является однородным. Пусть  $N$  – число витков,  $l$  – длина соленоида,  $R$  – радиус. Если сила тока, протекающего в соленоиде равна  $I$ , то величина индукции внутри равна

$$B = \mu \mu_0 I \frac{N}{l}.$$

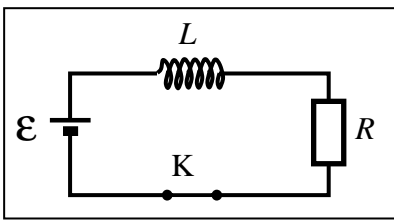
Магнитный поток через поверхность, ограниченную одним витком  $\Phi = BS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} \pi R^2$ , пото-

косцепление во всем соленоиде  $\Phi_\Sigma = N\Phi = \mu\mu_0 I \frac{N^2}{l} \pi R^2$ . Индуктивность соленоида

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2. \clubsuit$$

При изменении силы тока  $I$  в контуре будет изменяться и магнитный поток через площадку контура  $\Phi$ , поэтому в контуре появится индукционный ток  $I_i$ , направление которого определяется правилом Ленца. Этот ток будет направлен так, чтобы скомпенсировать изменение магнитного потока, т.е. основного тока  $I$ . Это явление называется *самоиндукцией*. Согласно закону Фарадея  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ , поэтому ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

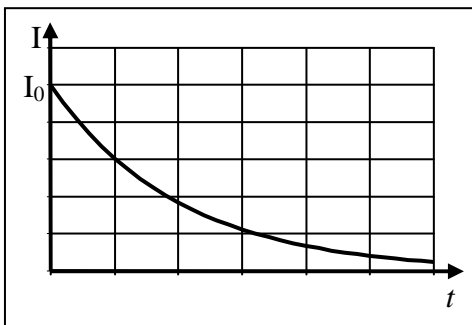


*Пример.* В замкнутой цепи, содержащей катушку индуктивности (соленоид) с коэффициентом самоиндукции  $L$ , резистор сопротивлением  $R$  и источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  (внутреннее сопротивление источника  $r=0$ ), протекает постоянный ток силой  $I_0$ . Найдём, как

изменяется сила тока в цепи с течением времени после размыкания ключа К. Когда ключ замкнут, сила тока в цепи постоянная и равна  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . ЭДС самоиндукции в катушке равна нулю.

После размыкания ключа сила тока начнёт меняться, в катушке появится ЭДС самоиндукции, поэтому по закону Ома  $I = \frac{\mathcal{E}_{si}}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$ . Откуда,  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$  и  $I = Ce^{-\frac{R}{L}t}$  ( $C=\text{const}$ ). С учётом

начального условия - в момент размыкания ключа (т.е. при  $t=0$ ) было  $I = I_0$  - получаем



$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ . Т.е. ток в цепи не прекращается сразу, а убывает по экспоненциальному закону:  $I \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Так как цепь разорвана ключом К, то в месте разрыва начнут накапливаться разноимённые электрические заряды. Это приводит к тому, что напряженность электрического поля в этом месте нарастает и, например, в воздушной среде (практически сразу после разрыва цепи) между контактами ключа проскакивает электрическая искра (*электрический пробой воздуха*).

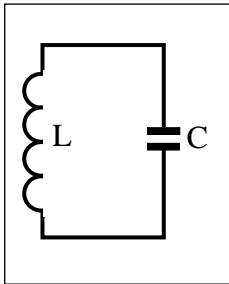
Предположим, что пробоя воздуха нет, поэтому вся запасенная в контуре энергия переходит в тепло. По закону Джоуля-Ленца мощность тепловыделения на сопротивлении  $R$   $P = I^2 R$ . Тогда полное количество теплоты равно

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-\frac{2R}{L}t} R dt = \frac{LI_0^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} d\left(\frac{2R}{L}t\right) = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Т.о. энергия магнитного поля, создаваемая в катушке индуктивности  $L$  электрическим током силой  $I$ , определяется формулой

$$W_M = \frac{LI^2}{2} \clubsuit$$

*Пример.* Найдем период электрических колебаний в идеальном колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности  $L$  и конденсатора емкости  $C$ .



Сила тока в контуре равна скорости изменения заряда конденсатора

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}.$$

Напряжение на конденсаторе равно ЭДС самоиндукции на катушке

$$U = -L \frac{dI}{dt}. \text{ В итоге из выражения } I = -CL \frac{d^2 I}{dt^2}, \text{ получаем уравнение для си-}$$

лы тока в контуре

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{CL} I = 0.$$

Это уравнение описывает свободные незатухающие колебания с циклической частотой

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Период колебаний  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  (формула Томсона). В случае свободных незатухаю-

щих колебаний полная энергия в контуре сохраняется:  $W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = const.$

(Сопротивление  $R$  в контуре отсутствует, поэтому нет тепловых потерь.) ♣

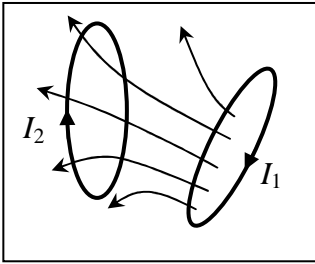
### Объёмная плотность энергии магнитного поля.

Пусть длина катушки равна  $l$ , радиус  $R$ , число витков  $N$ . Если по обмотке катушки протекает ток силой  $I$ , то энергия магнитного поля равна  $W_M = \frac{LI^2}{2}$ . Индуктивность катушки

$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2$ . Индукция магнитного поля в катушке  $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$ , напряжённость магнитного

поля  $H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{N}{l} I$ , объём пространства внутри соленоида  $V = \pi R^2 l$ . Поэтому

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2 I^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 l \cdot \mu\mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \frac{N}{l} I = \frac{1}{2} \cdot V \cdot B \cdot H.$$



Т.к. поле внутри соленоида можно рассматривать как однородное, то

объёмная плотность энергии  $w = \frac{W}{V}$  магнитного поля определяется

соотношением

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}.$$

### Взаимная индуктивность

Рассмотрим два контура (расположенных на не очень большом расстоянии друг от друга), по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$ . Каждый из контуров создаёт в окружающем пространстве магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через другой контур. По аналогии с коэффициентом самоиндукции можно записать:

магнитный поток, создаваемый во втором контуре током  $I_1$ , протекающим в первом контуре  $\Phi_2 = L_{21}I_1$ ;

магнитный поток, создаваемый в первом контуре током  $I_2$ , протекающим во втором контуре  $\Phi_1 = L_{12}I_2$ .

Коэффициенты  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  называются *коэффициентами взаимной индукции* (или *взаимной индуктивностью*) контуров. Контуров при этом принято называть (магнитно) *связанными*.

В отсутствие ферромагнетиков выполняется равенство  $L_{12}=L_{21}$ . Очевидно, эти коэффициенты зависят от формы и относительно расположения контуров.

Энергия магнитного поля, создаваемого парой таких контуров с токами, определяется

формулой  $W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} dV$ . Т.к. по принципу суперпозиции  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  и

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ , то

$$W = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{2} dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV$$

Энергия магнитного поля, создаваемая каждым контуром в отдельности

$$W_1 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV = \frac{L_1 I_1^2}{2}, \quad W_2 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

Если в среде нет ферромагнетиков, то  $\frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{\mu_0 \mu (\vec{H}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{(\vec{H}_1, \vec{B}_2)}{2}$ , поэтому

$$\iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} = \frac{L_{21} I_1 I_2}{2} = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV.$$

Тогда энергия взаимодействия двух контуров может быть записана в виде  $W_{12} = L_{12} I_1 I_2$ .

**Силы в магнитном поле.**

Найдём силу взаимодействия  $F$  между витками (почти идеального) соленоида. Т.к. в каждом из витков токи текут в одинаковых направлениях, то витки взаимно притягиваются, поэтому силы взаимодействия стремятся сжать соленоид. Векторы этих сил направлены параллельно силовым линиям магнитного поля в соленоиде, поэтому их принято называть *натяжениями в магнитном поле*. Предположим, что при постоянной силе тока длина соленоида очень медленно *увеличится* на малую величину  $dl$ . Тогда работа внешних сил равна изменению энергии соленоида  $\delta A_{\text{ВНЕШ}} = dW_M$ . Но

$$\delta A_{\text{ВНЕШ}} = \sum_{i=1}^N F_{\text{ВНЕШ}} \delta x_i,$$

где  $\delta x_i$  - перемещение каждого из витков. Очевидно, что  $\sum_{i=1}^N \delta x_i = dl$ . Очевидно, что внешняя сила, растягивающая соленоид, равна по величине силе взаимодействия между витками

$F_{\text{ВНЕШ}} = F$ , поэтому

$$\delta A_{\text{ВНЕШ}} = \sum_{i=1}^N F_{\text{ВНЕШ}} \delta x_i = F \sum_{i=1}^N \delta x_i$$

Изменение длины соленоида приведёт к изменению объёма магнитного поля внутри, следовательно, к изменению энергии  $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S \cdot dl$ . Здесь  $w$  – объёмная плотность энергии магнитного поля,  $S$  – площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда следует, что сила взаимодействия между витками (натяжения в магнитном поле)  $F = wS$ , а величина напряжения натяжения (вдоль силовых линий) равна  $p_{\parallel} = \frac{F}{S} = w$  – объёмной плотности энергии магнитного поля.

Теперь найдём силу  $F_{\perp}$  в направлении перпендикулярном силовым линиям магнитного поля внутри соленоида – эти силы «распирают» витки в радиальном направлении. Такие силы принято называть давлениями в магнитном поле. Предположим, что при постоянной силе тока радиус соленоида увеличился на малую величину  $dR$ . Объём соленоида увеличится – поэтому увеличится и энергия магнитного поля  $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S_{\text{ВНУТР}} \cdot dR$ . Здесь  $w$  – объёмная плотность энергии магнитного поля,  $S_{\text{ВНУТР}}$  – площадь внутренней поверхности соленоида. Так как работа силы  $F_{\perp}$  равна  $\delta A = F_{\perp} dR$ , то  $F_{\perp} = w \cdot S_{\text{ВНУТР}}$ , соответственно, напряжение давления равно  $p_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{S_{\text{ВНУТР}}} = w$  – объёмной плотности энергии магнитного поля.

*Определение.* Силы, действующие на тела со стороны магнитного (или электрического) поля, называют *пондемоторными*.

**Лекция 10.** Уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

*Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Закон полного тока. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.*

Закон электромагнитной индукции Фарадея  $\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$  или  $\text{rot}(\vec{E}_{ct}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  свиде-

тельствует о том, что изменение магнитного поля приводит к появлению сторонних сил в проводнике, действующие на носители тока. Как показывает пример с проводником, поступательно движущимся в магнитном поле, эти сторонние силы аналогичны силам, действующим на электрические заряды со стороны электрического поля. Поле этих сил является вихревым, поэтому его называют *вихревым электрическим* полем.

Первая гипотеза Максвелла состоит в том, что появление вихревого электрического поля из-за изменяющегося во времени магнитного поля в некоторой области пространства, не зависит от наличия в этой области проводника или носителей тока. При этом электрическое поле в любой области пространства является *суперпозицией* электростатического (кулоновского) поля (с напряжённостью  $\vec{E}_q$ ), создаваемого электрическими зарядами, и вихревого электрического поля (с напряжённостью  $\vec{E}_B$ ), создаваемого переменным магнитным полем. Напряжённость суммарного электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ . Найдём дивергенцию суммарного электрического поля. Т.к.

$$\text{div}(\vec{E}_q) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ и } \text{div}(\vec{E}_B) = 0, \text{ то } \text{div}(\vec{E}) = \text{div}(\vec{E}_q) + \text{div}(\vec{E}_B) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Из  $\vec{E}_q = -\text{grad}(\varphi)$  и  $\text{rot}(\vec{E}_q) = \text{rot}(-\text{grad}(\varphi)) = \vec{0}$  следует равенство

$$\text{rot}(\vec{E}) = \text{rot}(\vec{E}_q) + \text{rot}(\vec{E}_B) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

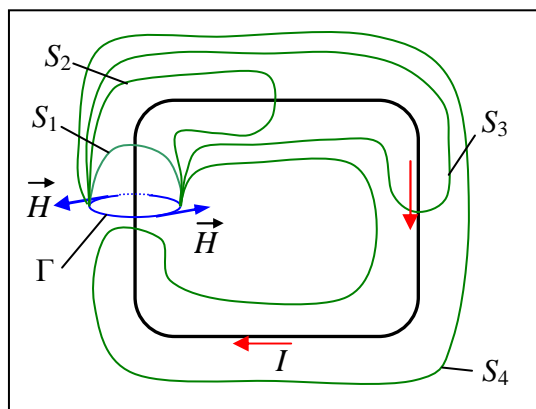
**Ток смещения.**

Теорема о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля имеет вид  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$ .

Применим к обеим частям дивергенцию  $\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{div}(\vec{j})$ . Левая часть равна нулю

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = 0, \text{ но правая } \text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ (уравнение непрерывности электрического заряда).}$$

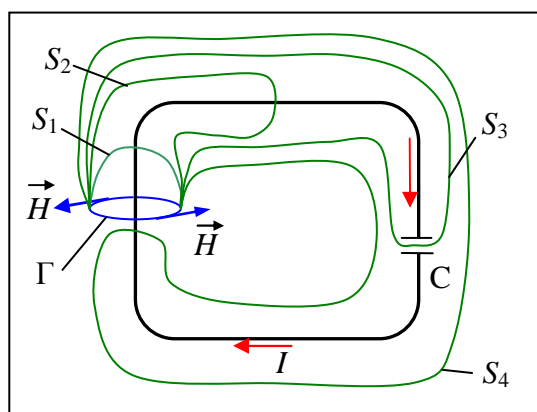
Откуда следует  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , т.е. объемная плотность заряда не зависит от времени. Следовательно, равенство  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$  применимо для случая, когда  $\text{div}(\vec{j}) = 0$ . В этом случае векторное поле плотности тока  $\vec{j}$  является вихревым, поэтому линии тока



замкнутые. Рассмотрим теорему о циркуляции вектора напряженности вдоль замкнутого проводника, в котором течёт постоянный ток:  $\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I$ . Линии тока в этом случае замкнутые, поэтому если взять несколько поверхностей  $S_1, S_2, S_3, S_4$  имеющих вид мешков, общим горлом которых является контур  $\Gamma$ , то должно выполняться равенство

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I$$

т.к. сила тока в любом сечении проводника одинаковая.



Теперь поместим в цепь конденсатор  $C$ . Пусть по цепи протекает постоянный ток. Поверхность  $S_3$  проведём таким образом, чтобы она охватывала одну из обкладок конденсатора. Так как в конденсаторе нет тока проводимости, то  $\iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = 0$ ,

но по-прежнему

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I.$$

Но расположение конденсатора можно поменять, так, чтобы одна его обкладка находилась внутри поверхности не  $S_3$ , а например,  $S_2$ . Тогда получим равенства  $\iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = 0$  и

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I.$$

Получаем *противоречие* – циркуляция векторного поля по контуру  $\Gamma$ , не охватывающему участок цепи с конденсатором, зависит от произвольного выбора места расположения конденсатора. Чтобы снять это противоречие Максвелл выдвинул (вторую) гипотезу о том, что наряду с током проводимости существует *ток смещения*, который также создаёт магнитное поле. *Плотность тока смещения* задаётся скоростью изменения вектора электрического смещения

$$\vec{j}_{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

*Плотность полного тока* – векторная сумма плотности тока проводимости и плотности тока смещения

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{см}}.$$

Найдём дивергенцию вектора плотности полного тока. Учтём закон сохранения электрического заряда  $\text{div}(\vec{j}_{\text{пров}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  и теорему Гаусса для вектора смещения  $\text{div}(\vec{D}) = \rho$ :

$$\text{div}(\vec{j}_{\text{полн}}) = \text{div}(\vec{j}_{\text{пров}}) + \text{div}(\vec{j}_{\text{см}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}(\vec{D})) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, векторное поле плотности *полного* тока не имеет источников, т.е. является вихревым, следовательно, силовые линии полного тока являются замкнутыми.

В частном случае, когда по замкнутой цепи течёт постоянный ток,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}(\vec{D})) = \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \text{div}(\vec{j}_{\text{см}}) = 0.$$

Т.к. цепь замкнутая, то не происходит накопления электрического заряда ни в одной точке цепи с течением времени и поэтому можно считать, что вдоль цепи  $\vec{D} = \text{const}$ . Поэтому нет тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$  и  $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}}$ .

Если цепь содержит конденсатор, то между обкладками отсутствует ток проводимости. Поэтому силовая линия тока проводимости имеет разрыв на обкладках конденсатора – т.е. на обкладках имеются стоки и источники поля векторов плотности тока проводимости  $\text{div}(\vec{j}_{\text{пров}}) \neq 0$ .

Из уравнения непрерывности для тока  $\text{div}(\vec{j}_{\text{пров}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  следует, что источниками (и стоками) электрического тока в цепи является изменяющаяся во времени плотность электрических зарядов на обкладках. Но в то же самое время, изменение электрического заряда на обкладках служит стоком и источником плотности тока смещения в пространстве между обкладками

$$\text{div}(\vec{j}_{\text{см}}) = \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}(\vec{D})) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Т.е. из-за изменения электрического заряда конденсатора (во времени) векторное поле смещения в пространстве между обкладками будет меняться во времени, что приведёт к появлению тока смещения в пространстве между обкладками конденсатора. Поэтому между обкладками конденсатора  $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{см}}$ .



Так как сила тока проводимости (с учётом знака) равна потоку вектора плотности тока проводимости через ориентированную поверхность  $I = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S})$ , то, аналогично, можно определить силу тока смещения (с учётом знака) через ориентированную поверхность

$$I_{CM} = \iint_S (\vec{j}_{CM}, d\vec{S}) = \iint_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right).$$

Если поверхность  $S$  неподвижная, то  $I_{CM} = \iint_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right) = \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$ .

*Закон полного тока:* сила полного тока равна сумме тока проводимости и тока смещения.

*Вывод.* Если в теореме о циркуляции для напряжённости магнитного поля ток проводимости заменить на полный ток, то противоречие будет снято:

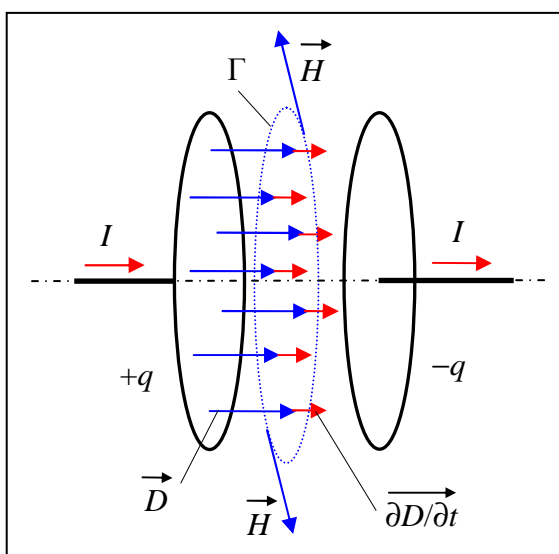
$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{смещ}}, \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Или, в интегральной форме:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I + \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$$

- циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по любому замкнутому (ориентированному) контуру равна сумме токов проводимости и смещения через ориентированную поверхность, ограниченную этим контуром. Ориентации контура и поверхности согласованы правилом правого винта (буравчика).

Это соотношение свидетельствует о том, что магнитное поле может порождаться переменным во времени электрическим полем.



*Пример.* Найдём циркуляцию вектора напряжённости магнитного поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора включённого в цепь с постоянным током.

Пусть сила тока в цепи равна  $I$ . Конденсатор плоский, обкладки – круги радиусом  $R$ . Расстояние между обкладками  $d$  много меньше  $R$  (в этом случае электрическое поле между пластинами в каждый момент времени приближённо можно считать однородным). Ток в цепи постоянный, поэтому заряды «положительной» и «отрицательной» обкладок линейно зависят от времени

$$q = I \cdot t + q_0.$$

Пусть  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали к пластине с положительным зарядом. Между обкладками вектор смещения направлен перпендикулярно пластинам  $\vec{D} = D \cdot \vec{n}$  от положительно заряженной пластины к отрицательно заряженной. Нормальная составляющая вектора смещения равна длине вектора  $D_n = D$ . С другой стороны, внутри плоского конденсатора  $D_n = \sigma = \frac{q}{S}$

( $\sigma = \frac{q}{S}$  - поверхностная плотность стороннего заряда,  $S = \pi R^2$  - площадь обкладки конденсатора),

поэтому  $D = \frac{I \cdot t + q_0}{S}$ . Найдём производную вектора смещения

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \vec{n}) = \vec{n} \frac{\partial D}{\partial t} + D \frac{\partial \vec{n}}{\partial t}.$$

Но  $\vec{n} = const$ , поэтому  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \vec{0}$  и вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{n} \frac{\partial D}{\partial t}$  тоже направлен перпендикулярно пластинам.

Пусть в рассматриваемом случае заряд положительной пластины увеличивается, тогда  $\frac{\partial D}{\partial t} > 0$  и

векторы  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $\vec{D}$  направлены одинаково. Поле между пластинами обладает осевой симметрией,

поэтому найдём циркуляцию по контуру  $\Gamma$ , который является окружностью в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, с центром на оси симметрии. Пусть радиус окружности равен  $r$ .

Контур ограничивает плоский круг  $S$ , на котором можно ввести ориентацию, совпадающую по направлению с направлением вектора смещения  $\vec{D}$ . Поток этого векторного поля через поверхность круга равен  $\Phi_D = \iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = D\pi r^2$ . Поэтому сила тока смещения

$$I_{CM} = \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \frac{d}{dt} (D\pi r^2) = \pi r^2 \frac{dD}{dt} = \pi r^2 \frac{I}{S} = I \frac{r^2}{R^2}.$$

Силовые линии магнитного поля являются окружностями, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, центры окружностей находятся на этой оси. Поэтому выбранный контур  $\Gamma$  совпадает с какой-то силовой линией и вектор напряжённости магнитного поля направлен по касательной к  $\Gamma$ , его величина зависит только от радиуса окружности  $r$ . Ориентацию на  $\Gamma$  согласуем с направлением векторного поля  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Так как в рассматриваемом случае векторы  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и

$\vec{D}$  направлены одинаково, то направления касательных векторов  $\vec{H}$  и  $d\vec{l}$  совпадают, поэтому

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} H dl = H 2\pi r.$$

Ток проводимости между обкладками конденсатора отсутствует ( $I=0$ ), поэтому

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S}).$$

Тогда  $H 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2}$ , откуда  $H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$ . В частности, при  $r=R$  получаем  $H = \frac{I}{2\pi R}$  - такое же значение, как если бы между обкладками конденсатора протекал ток проводимости силой  $I$ . ♣

### Уравнения Максвелла

Гипотезы Максвелла позволяют записать систему уравнений электромагнитного поля.

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Теорема Гаусса для электрического поля	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\Sigma}$
Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея) (теорема о циркуляции вектора напряжённости электрического поля)	$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$
Теорема Гаусса для магнитного поля	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$
Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля	$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I_{\Sigma} + \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$

В материальной среде эти системы дополняются уравнениями (*материальные уравнения*)

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Закон Ома	$\vec{j} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{CT})$	$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$
Закон сохранения электрического заряда	$\operatorname{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\oiint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \text{ в однородном изотропном диэлектрике } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}), \text{ в однородном, изотропном магнетике } \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

$$\text{Условия на границе раздела сред } D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} - H_{1t} = i.$$

Данная система уравнений в дифференциальной форме содержит 15 координат векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  и функцию  $\rho$  - объёмной плотности электрического заряда - итого 16 переменных. Количество уравнений Максвелла в координатной форме равно 8, материальных уравнений - 10, итого 18 уравнений. При этом некоторые уравнения могут быть следствием других в данной системе.

Кроме того, необходимо добавить начальное распределение зарядов (токов) и значения неизвестных параметров на границе рассматриваемой области.

В общем случае, нахождение характеристик электромагнитного поля является достаточно трудоёмкой задачей.

### Оператор «набла».

Введем оператор, обозначаемый  $\vec{\nabla}$ , который сопоставляет функции её градиент

$$\vec{\nabla}f \mapsto \text{grad}(f) \text{ или в декартовых координатах } \vec{\nabla}f \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Если ввести векторы-орты декартовой системы координат  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , то это соответствие можно записать в виде равенства  $\vec{\nabla}f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Поэтому для оператора «набла» используют обозначение в виде вектора

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

с условием, что он действует на функцию *только слева*.

Если в некоторой области задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле  $\vec{a}$ , то с помощью этого обозначения оператора «набла» дивергенция векторного поля записывается как скалярное произведение  $(\vec{\nabla}, \vec{a}) = \text{div}(\vec{a})$ , а ротор векторного поля – как векторное произведение  $(\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \text{rot}(\vec{a})$ . Эти обозначения удобны тем, что соотношения векторного анализа  $\text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = 0$  и  $\text{rot}(\text{grad}(f)) = \vec{0}$  становятся более наглядными. Действительно,

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = (\vec{\nabla}, (\vec{\nabla} \times \vec{a})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$$

т.к. в этом определителе две одинаковые строки.

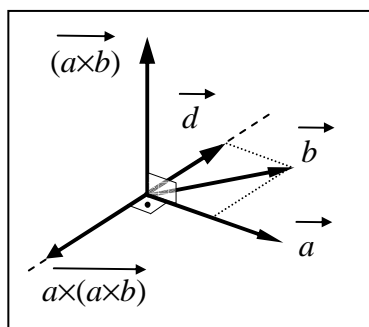
$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f)) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})f = \vec{0}$$

т.к. векторное произведение вектора на себя равно нулю.

Квадрат оператора набла равен оператору Лапласа  $\vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \Delta$ .

Действительно  $(\vec{\nabla}, (\vec{\nabla}f)) = \text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$ .

*Пример.* Рассмотрим двойное векторное произведение  $(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = (\vec{a}, \vec{b})\vec{a} - (\vec{a}, \vec{a})\vec{b}$ .



Чтобы его обосновать, введем вектор  $\vec{d} = \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} \vec{a}$ , который обладает следующими свойствами:

- 1) вектор  $\vec{d}$  ортогонален вектору  $\vec{a}$ :  $(\vec{d}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} (\vec{a}, \vec{a}) = 0$ ;
- 2) при замене вектора  $\vec{b}$  на  $\vec{d}$  векторное произведение не меняется

$$(\vec{a} \times \vec{d}) = \left( \vec{a} \times \left( \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} \vec{a} \right) \right) = (\vec{a} \times \vec{b}) - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} (\vec{a} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}),$$

поэтому вектор  $\vec{d}$  перпендикулярен также и вектору  $(\vec{a} \times \vec{b})$ . Т.к. вектор  $(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$  тоже перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $(\vec{a} \times \vec{b})$ , то он должен быть пропорциональным вектору  $\vec{d}$ , т.е.

$(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \lambda \cdot \vec{d}$  (где  $\lambda$  - число). Но так как он направлен противоположно вектору  $\vec{d}$ , то  $\lambda < 0$ .

Теперь воспользуемся векторным равенством  $(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{d}))$  (вытекающим из второго свойства вектора  $\vec{d}$ ):

$$|(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))| = |(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{d}))| = |\vec{a}| \cdot |(\vec{a} \times \vec{d})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| = (\vec{a}, \vec{a}) \cdot |\vec{d}|.$$

С другой стороны,  $|(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))| = |\lambda| \cdot |\vec{d}|$ , откуда  $(\vec{a}, \vec{a}) \cdot |\vec{d}| = |\lambda| \cdot |\vec{d}|$  или  $|\lambda| = (\vec{a}, \vec{a})$ .

С учётом знака  $\lambda = -(\vec{a}, \vec{a})$ . Окончательно,

$$(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \lambda \cdot \vec{d} = -(\vec{a}, \vec{a}) \left( \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} \vec{a} \right) = (\vec{a}, \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a}, \vec{a}) \vec{b}.$$

Следовательно, для непрерывно-дифференцируемого векторного поля  $\vec{v}$  (с учётом правил применения оператора «набла»)

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{v}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{v} = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}. \clubsuit$$

Уравнения Максвелла, записанные с помощью оператора «набла» примут вид (в дифференциальной форме)

$$(\vec{\nabla}, \vec{D}) = \rho, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

**Лекция 11. Электромагнитные волны.**

*Волновое уравнение для электромагнитного поля, его общее решение. Распространения электромагнитных волн. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга.*

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, в условиях отсутствия зарядов и токов.

При  $\rho=0$ ,  $\vec{j}=\vec{0}$ ,  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$  уравнения в дифференциальной форме примут вид

$$\operatorname{div} \vec{D}=0, \operatorname{rot} \vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B}=0, \operatorname{rot} \vec{H}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Учитываем материальные уравнения  $\vec{D}=\epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B}=\mu_0 \vec{H}$  и получаем систему уравнений

$$\operatorname{div}(\vec{E})=0 \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}=-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{H})=0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}=\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Начинаем преобразования уравнений (2) и (4):  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{E})=-\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ , откуда

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Т.к. из (4) следует, что  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{rot} \vec{H}$ , то равенство (5) примет вид  $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{rot} \vec{H}\right)=-\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$  или

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H})=-\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Но, как известно из предыдущей лекции  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H}))=\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{H}))-\Delta \vec{H}$ , поэтому с учётом (3), уравнение (6) равносильно уравнению

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}=\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Аналогичные преобразования можно провести для вектора  $\vec{E}$ : из (2) следует  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{E}$ ,

из (4) следует  $\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(\vec{H}))=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)=\operatorname{rot}\left(-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{E}\right)=-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})$ ,

Учитывая (1), получаем  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$ , поэтому

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

Полученные уравнения (7) и (8) имеют вид волнового уравнения – они описывают распространение плоских электромагнитных волн. Сразу можно сказать, что *фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме* равна  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с и совпадает со значением скорости света в вакууме. При распространении электромагнитных волн в среде с постоянными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ , выражение для фазовой скорости примет вид  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$ , где ве-

личина  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  называется *показателем преломления* среды.

*Замечание.* Предположение о постоянстве значений  $\epsilon$  и  $\mu$  приводит к расхождению с опытными значениями показателя преломления. Например, для воды  $\epsilon \approx 81$  и  $\mu \approx 1$ , что даёт расчётное значение  $n \approx 9$ . Однако, экспериментально определено значение  $n \approx 1,5$ . Расхождение объясняется возможной зависимостью  $\epsilon$  и  $\mu$  от частоты и других параметров волны.

Волновое уравнение является линейным, в том смысле, что любая линейная комбинация решений тоже является решением. Отсюда, как известно из предыдущего семестра, следует принцип *суперпозиции для волновых полей* – наложение волновых полей является волновым полем. Поэтому выделяют «простейшие» волновые поля – поля (или волны), соответствующие определённым частотам. Такие «простейшие» волны, определённая частота которых постоянная, называются *монохроматическими*.

*Пример.* Электромагнитная волна, частоты колебаний векторов в которой равны 1000 Гц и 2000 Гц является суперпозицией двух *монохроматических волн* с частотами 1000 Гц и 2000 Гц. ♣

В декартовых координатах волновые уравнения (7) и (8) имеют вид

$$\begin{cases} v^2 \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ v^2 \left( \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \\ v^2 \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases}, \begin{cases} v^2 \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ v^2 \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ v^2 \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Эти уравнения описывают распространение плоских волн. Пример записи решения для первых уравнений каждой из систем

$$H_x = H_{0x} \sin\left(\omega_H t \mp (\vec{k}_H, \vec{r}) + \alpha_H\right), \quad E_x = E_{0x} \sin\left(\omega_E t \mp (\vec{k}_E, \vec{r}) + \beta_H\right)$$

(индекс « $E$ » соответствует параметрам напряженности электрического поля, а « $H$ » - магнитного). В соответствующей волне:

$$(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z,$$

$\vec{r} = (x, y, z)$  - радиус-вектор точки, а для координат волнового вектора  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  справедливо соотношение

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{v}.$$

Знак « $-$ » соответствует «убегающей» волне, а знак « $+$ » - «набегающей».

Обратим внимание на тот факт, что волновые уравнения для каждой из координат векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  независимы друг от друга, поэтому общее решение можно рассматривать как *суперпозицию* решений для координат векторов. При этом решения волновых уравнений согласованы. Т.е. определённому решению одного из волновых уравнений для какой-то координаты вектора напряжённости электрического поля соответствует определённое решение одного из волновых уравнений для координат вектора напряжённости магнитного поля, и наоборот.

Например, нужно найти решения, соответствующие, вектору  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ . Но согласно принципу суперпозиции волновых полей, решение, соответствующее вектору  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  можно найти как суперпозицию решений, соответствующих векторам  $\vec{E}_1 = (E_x, 0, 0)$ ,  $\vec{E}_2 = (0, E_y, 0)$ ,  $\vec{E}_3 = (0, 0, E_z)$ . Аналогично, можно искать решения по вектору напряжённости магнитного поля  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ .

*Пример.* Найдем решения для случая, когда волна движется вдоль оси  $z$ , а вектор напряжённости электрического поля имеет координаты  $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$ , зависящие только от  $z$ . Волна в этом случае является суперпозицией волновых полей векторов  $\vec{E}_1 = (E_x, 0, 0)$  и  $\vec{E}_3 = (0, 0, E_z)$ . Система волновых уравнений в декартовых координатах примет вид

$$\begin{cases} v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Так как ищем решения в виде волны, то предполагаем, что в рассматриваемой области нет постоянных во времени электрического и магнитного полей. Т.е. если при решении получается постоянное значение какой-то координаты векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ , то это значение можно считать равным нулю.



Уравнение (1)  $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$  примет вид  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ , откуда  $E_z$  не зависит от координат, но,

возможно, зависит от времени. Но эта координата должна также удовлетворять волновому

уравнению  $v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$ . Откуда  $E_z = A_1 t + A_2$  - линейная функция времени, но так как

ищем решения в виде волны, то  $A_1 = 0$ , поэтому  $E_z = \text{const}$  - т.е. поле постоянное, откуда

$$E_z = 0.$$

Из уравнения (2)  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , с учётом  $E_z = 0$  следует

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \left( \frac{\partial H_x}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial H_z}{\partial t} \vec{e}_z \right).$$

Остаются равенства  $\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$ .

Координата  $H_x$  не зависит от времени, но, так как она должна являться решением волнового

уравнения  $v^2 \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}$ , то  $H_x = \text{const}$ , поэтому  $H_x = 0$ .

Искомые координаты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  зависят только от  $z$ , следовательно, должно быть

$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ , поэтому из третьего равенства следует  $\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$  и, по аналогии,  $H_z = 0$

Уравнение (3)  $\operatorname{div}(\vec{H}) = 0$  примет вид  $\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$ . Уравнение (4)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{e}_x$$

даёт соотношение  $-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$ . Получаем систему 
$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases},$$

откуда можно опять получить волновые уравнения  $v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$  и  $v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ .

Следовательно, вектору напряжённости электрического поля  $\vec{E}_1 = (E_x, 0, 0)$  соответству-

ет вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}_2 = (0, H_y, 0)$ . Поэтому вектору  $\vec{E}_2 = (0, E_y, 0)$  будет

соответствовать вектор  $\vec{H}_1 = (H_x, 0, 0)$ . Но векторам  $\vec{E}_3 = (0, 0, E_z)$  и  $\vec{H}_3 = (0, 0, H_z)$  не соответствует *никакая плоская* электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси Z.

### Заключение по результатам примера.

1) *Плоская электромагнитная волна является поперечной.*

Действительно, из примера следует, что продольные составляющие (вдоль направления движения волны - оси Z) векторов напряжённостей электрического и магнитного полей равны нулю  $E_z = 0$  и  $H_z = 0$ .

Векторы  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  и  $\vec{H} = (0, H_y, 0)$  направлены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно направлению движения волны. Если направление движения волны вдоль оси Z задать волновым вектором  $\vec{k} = (0, 0, k)$ , то можно сказать что тройка векторов  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$  является *правой*.

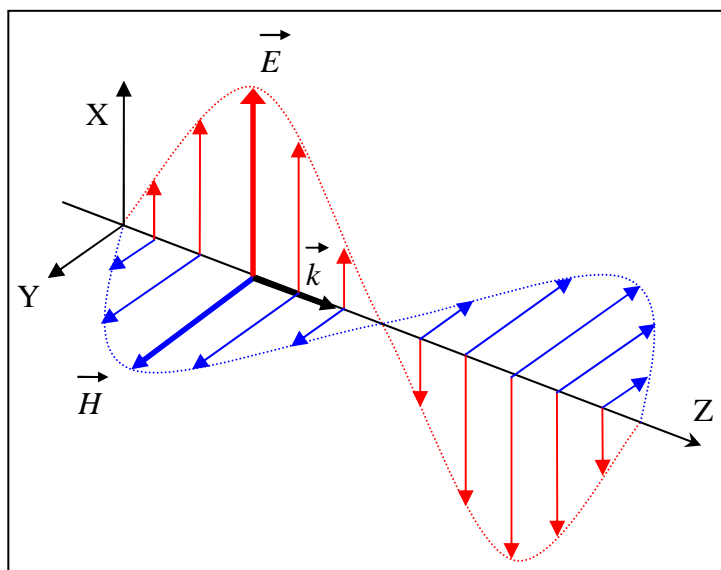
2) *Колебания напряжённостей электрического и магнитного полей в любой точке плоской волны происходят с одинаковой фазой.*

Действительно, пусть решения волновых уравнений имеют вид

$$E_x = E_0 \sin(\omega_E t \mp k_E z + \beta_E), \quad H_y = H_0 \sin(\omega_H t \mp k_H z + \alpha_H).$$

Тогда, например, из равенства  $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$  следует, что

$$\mp k_E E_0 \cos(\omega_E t \mp k_E z + \beta_E) = -\mu_0 \omega_H H_0 \cos(\omega_H t \mp k_H z + \alpha_H).$$



Это равенство возможно, только если фазы волн равны с точностью до  $\pi$ . Откуда  $\omega_E = \omega_H$ , т.е. колебания происходят с одинаковой частотой, и, так как фазовые скорости одинаковые, то равны и волновые числа  $k_E = k_H$ .

Из равенства амплитуд  $k_E E_0 = \mu_0 \omega_H H_0$  следует соотношение  $H_0 = \frac{k_E}{\mu_0} E_0 = \frac{\omega_E}{\omega_H} \frac{1}{\mu_0 v} E_0$ . Но

фазовая скорость волны (в вакууме)  $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , поэтому  $H_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ .

При распространении плоской электромагнитной волны в среде с постоянными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ , величины напряженностей магнитного и электрического полей связаны соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E.$$

Отношение амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей называется волновым сопротивлением среды  $Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$ . Единица измерения Ом.

Для вакуума ( $\epsilon=1, \mu=1$ )  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi \cdot 10^9} = 120\pi \approx 377$  Ом.

Объемная плотность энергии в плоской волне равна сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей

$$w = w_E + w_M.$$

Из соотношения амплитуд следует, что объемные плотности энергии электрического и магнитного полей в плоской волне равны друг другу. Действительно,

$$w_M = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu \mu_0}{2} \left( \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E \right)^2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = w_E.$$

Таким образом, энергия плоской волны равномерно распределена на электрическую и магнитную части. По аналогии с МКТ, иногда говорят, что плоская электромагнитная волна обладает двумя степенями свободы. Поэтому  $w = w_E + w_M = \mu \mu_0 H^2 = \epsilon \epsilon_0 E^2$ . Или

$$w = \epsilon \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t \mp kz + \alpha) = \frac{\epsilon \epsilon_0 E_0^2}{2} (1 - \cos(2(\omega t \mp kz + \alpha))),$$

объемная плотность энергии в плоской электромагнитной волне тоже является плоской волной, но с удвоенной частотой. Фазовая скорость волны энергии равна  $v_E = \frac{\omega_E}{k_E} = \frac{2\omega}{2k} = v$  фазовой скорости электромагнитной волны. Средняя плотность энергии, переносимая плоской электромагнитной волной  $\langle w \rangle = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2$ .

### Вектор Пойнтинга

Изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля в данной точке равно

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \left( \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \mu \mu_0 \left( \vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right).$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Откуда

$$\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\vec{E}), \quad \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{H}) - \vec{j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \left( \vec{E}, \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \left( \vec{H}, \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \left( \vec{E}, (\text{rot}(\vec{H}) - \vec{j}) \right) - \left( \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \left( \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \right) - \left( \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \right) - \left( \vec{E}, \vec{j} \right). \end{aligned}$$

Используем оператор «набла»:

$$\left( \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \right) - \left( \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \right) = \left( \vec{E}, (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) - \left( \vec{H}, (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right).$$

Т.к. оператор «набла» - это оператор дифференцирования и для любого произведения

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = g \cdot \vec{\nabla}(f) + f \cdot \vec{\nabla}(g),$$

$$\text{то } \left( \vec{\nabla}, (\vec{E} \times \vec{H}) \right) = -\left( \vec{E}, (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) + \left( \vec{H}, (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right),$$

т.е.

$$\left( \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \right) - \left( \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \right) = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \left( \vec{E}, \vec{j} \right).$$

Проинтегрируем это выражение по объёму некоторой области  $V$ , в которой есть электромагнитное поле:

$$-\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV + \iiint_V (\vec{E}, \vec{j}) dV.$$

Если область не движется, то  $\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V w dV = \frac{dW}{dt}$ , где  $W = \iiint_V w dV$  - энергия

электромагнитного поля в области  $V$ . По закону Ома  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  или  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ , где  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  - удельное

сопротивление среды. Поэтому выражение  $(\vec{E}, \vec{j}) = (\rho \vec{j}, \vec{j}) = \rho j^2$  - это дифференциальная форма

закона Джоуля-Ленца. Тогда

$$\iiint_V (\vec{E}, \vec{j}) dV = \iiint_V \rho j^2 dV = \frac{d\tilde{Q}}{dt}$$

- мощность выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) в области  $V$ .

По теореме Остроградского-Гаусса 
$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV = \oint_S ((\vec{E} \times \vec{H}), d\vec{S}),$$

где  $S$  – ориентированная наружу поверхность, являющаяся границей области  $V$ .

Вектор  $\vec{\Pi} = (\vec{E} \times \vec{H})$  ( $\Pi$  - буква «пи») называется *вектором Пойнтинга* (Джон Генри

Пойнтинг - британский физик (1852 - 1914)). Окончательно получим равенство, называемое теоремой Пойнтинга

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) + \frac{d\tilde{Q}}{dt}.$$

*Скорость изменения энергии электромагнитного поля в некоторой области равна, с обратным знаком, сумме мощности выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) и потока вектора Пойнтинга через границу области, ориентированную наружу.*

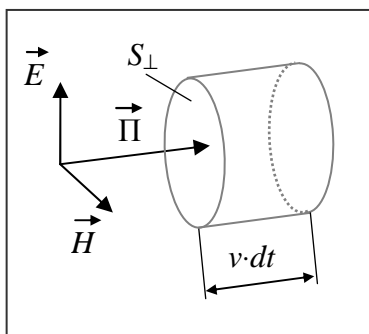
Если в области нет тепловыделения  $\frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0$ , то в случае, когда векторное поле  $\vec{\Pi}$  на гра-

нице  $S$  направлено внутрь области, поток отрицателен  $\oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) < 0$ , а  $\frac{dW}{dt} > 0$  - энергия облас-

ти увеличивается. И наоборот, если поток вектора Пойнтинга направлен наружу из области  $V$ ,

т.е.  $\oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) > 0$ , то  $\frac{dW}{dt} < 0$  - энергия в области убывает.

Рассмотрим область, в которой распространяется плоская электромагнитная волна.



Предположим, что в области нет выделения теплоты по закону Джоуля-Ленца. Выделим в области *малую* площадку  $S_{\perp}$ , перпендикулярную вектору Пойнтинга и найдём поток вектор Пойнтинга через эту площадку за малое время  $dt$ . Так как скорость распространения волны объёмной плотности энергии равна фазовой скорости электромагнитной волны  $v$ , то количество энергии, прошедшей через площадку равно энергии в объёме прямого цилиндра с

площадью основания  $S_{\perp}$  и высотой  $vdt$ :

$$\oint_{S_{\text{цил}}} (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = -\frac{dW}{dt} = -\frac{w dV}{dt} = -\frac{w S_{\perp} v dt}{dt} = -w v S_{\perp}$$

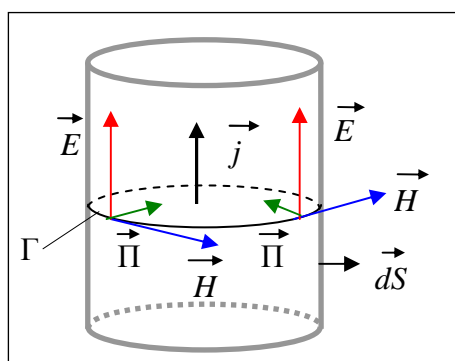
Поверхность цилиндра ориентирована наружу, а вектор Пойнтинга направлен внутрь цилиндра, поэтому  $\oiint_{S_{\text{цил}}} (\vec{P}, d\vec{S}) = -PS_{\perp}$ . Тогда из равенства  $-PS_{\perp} = -wvS_{\perp}$  следует  $P = wv$ . В векторном виде можно записать равенство

$$\vec{P} = w\vec{v}.$$

(Из этой формулы следует, что вектор Пойнтинга направлен по движению волны.)

Следовательно, вектор Пойнтинга – это вектор Умова-Пойнтинга, соответствующий электромагнитной волне. Поэтому физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что он указывает направление потока энергии, а его величина равна плотности мощности потока энергии.

*Пример.* Рассмотрим часть цилиндрического проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S_{\perp}$ , по которой протекает постоянный электрический ток. Предположим, что величина плотности тока  $\vec{j}$  постоянна в сечении проводника, поэтому сила тока равна  $I = jS_{\perp}$ . По закону Ома  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление проводника. На поверхности провод-



ника вектор  $\vec{H}$  направлен по касательной к силовой линии  $\Gamma$ , а его величина  $H = \frac{I}{2\pi r}$ , где  $r$  – радиус проводника.

Направления  $\vec{H}$  и  $\vec{j}$  согласованы правилом буравчика, и направлены перпендикулярно друг другу, но  $\vec{j} \parallel \vec{E}$ , поэтому  $\vec{H} \perp \vec{E}$ . Тогда на поверхности проводника вектор

Пойнтинга  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$  направлен вглубь проводника, т.е. против вектора  $d\vec{S}$ . Найдём поток вектора Пойнтинга через (боковую) поверхность проводника.

$$\oiint_{S_{\text{БОКОВ}}} (\vec{P}, d\vec{S}) = - \oiint_{S_{\text{БОКОВ}}} |\vec{P}| dS = - \oiint_{S_{\text{БОКОВ}}} EH dS.$$

Здесь учтено, что  $|\vec{P}| = EH \sin 90^\circ = EH$  и что векторы  $d\vec{S}$  и  $\vec{P}$  направлены противоположно.

Т.к.  $E = j\rho = \frac{I}{S_{\perp}}\rho$ ,  $S_{\text{БОКОВ}} = 2\pi r l$ , то

$$\oiint_{S_{\text{БОКОВ}}} (\vec{P}, d\vec{S}) = -EH \oiint_{S_{\text{БОКОВ}}} dS = -\frac{I}{S_{\perp}}\rho \frac{I}{2\pi r} 2\pi r l = -I^2 \rho \frac{l}{S_{\perp}} = -I^2 R,$$

где  $R = \rho \frac{l}{S_{\perp}}$  электрическое сопротивление проводника. Итак, поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника равен по величине мощности тепловыделения в проводнике (по закону Джоуля-Ленца):

$$\oint_{S_{\text{БОКОВ}}} (\vec{P}, d\vec{S}) = -\frac{d\tilde{Q}}{dt}.$$

Следовательно,  $-\frac{dW}{dt} = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) + \frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0$  - энергия электромагнитного поля в проводнике не меняется. ♣

Рассмотрим в некоторой инерциальной системе отсчёта плоскую электромагнитную волну, движущуюся вдоль оси Z. Следовательно, вектор Пойнтинга  $\vec{P}$  тоже направлен вдоль оси Z. Пусть  $S_Z$  - малая площадка, перпендикулярная оси Z (и вектору Пойнтинга). Предположим, что волна полностью поглощается веществом этой площадки. Как известно, в электромагнитном поле на тела действуют силы, создающие давление, равное по величине объёмной плотности энергии  $p=w$ . Поэтому величина силы, действующей на площадку равна  $F=pS_Z$ . Вектор этой силы направлен перпендикулярно площадке в направлении движения волны, т.е. вдоль оси Z, поэтому можно написать, что  $F_Z=pS_Z$ . За малый промежуток времени  $dt$  импульс этой силы будет равен  $F_Z dt = pS_Z dt = \frac{wS_Z v dt}{v} = \frac{dW}{v}$ , где  $dW = wS_Z v dt$  - величина энергии волны, поглощенной площадкой за время  $dt$ , а  $v$  - фазовая скорость волны. Импульс силы, действующей на площадку, равен изменению импульса этой площадки вдоль оси Z:  $dP_Z = \frac{dW}{v}$ .

Если предположить, что импульс площадки до падения на неё электромагнитной волны был равен нулю, то, спустя некоторый промежуток времени, у площадки появится импульс, величина которого прямо пропорциональна величине энергии, поглощенной за этот промежуток времени:

$$P = \frac{W}{v}.$$

Если рассматривать систему волна-площадка как замкнутую, то в этой системе импульс сохраняется, следовательно, изменение импульса площадки равно изменению импульса волны. Таким образом, электромагнитной волне следует приписать величину импульса  $P$ , величина которого связана с энергией  $W$ , переносимой волной с фазовой скоростью, соотношением

$$P = \frac{W}{v}.$$

Тогда единице объёма волны можно приписать величину удельного импульса

$$P_{\text{уд}} = \frac{P}{V} = \frac{W}{vV} = \frac{w}{v}$$

Но из выражения  $\vec{\Pi} = w\vec{v}$  следует, что  $w = \frac{|\vec{\Pi}|}{v}$ . Поэтому единичный объём электромагнитной

волны обладает импульсом, величина которого  $P_{уд} = \frac{|\vec{\Pi}|}{v^2}$ . Поэтому в векторном виде

$$\vec{P}_{уд} = \frac{\vec{\Pi}}{v^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{v^2}.$$

*Замечание.* Из результатов, полученных в СТО, следует соотношение между энергией  $W$ , импульсом  $P$  и массой покоя  $m_0$  материальных тел

$$W^2 - P^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

В вакууме скорость электромагнитной волны равна  $c$ , поэтому для импульса и энергии некоторого объёма волны

$$P = \frac{W}{c}.$$

Следовательно, масса покоя электромагнитного поля в этом объёме волны равна нулю  $m_0 = 0$ .

За малый промежуток времени  $dt$  изменение импульса ориентированной площадки  $S_z$ , полностью поглощающей электромагнитную волну, равно  $dP_z = \frac{dW}{v}$ . Но при отсутствии тепловыделения (по закону Джоуля-Ленца) из теоремы Пойнтинга следует равенство

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}).$$

Здесь  $S$  – это замкнутая поверхность, внутри которой находится рассматриваемая площадка  $S_z$ . В случае полного поглощения электромагнитной волны вектор Пойнтинга отличен от нуля только на площадке  $S_z$ , поэтому

$$\oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \iint_{S_z} (\vec{\Pi}, d\vec{S}).$$

При этом вектор Пойнтинга перпендикулярен к площадке  $S_z$ , т.к. по условию он направлен вдоль оси  $Z$ :  $\vec{\Pi} = (0, 0, \Pi_z)$ . Следовательно,

$$\oint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \iint_{S_z} (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \iint_{S_z} \Pi_z \cos(\widehat{\vec{\Pi}, d\vec{S}}) dS.$$

Если вектор Пойнтинга представить в виде суммы координатных векторов

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_x + \vec{\Pi}_y + \vec{\Pi}_z, \text{ где } \vec{\Pi}_x = (\Pi_x, 0, 0), \vec{\Pi}_y = (0, \Pi_y, 0), \vec{\Pi}_z = (0, 0, \Pi_z),$$

то будет справедливым соотношение

$$\oint_S (\vec{\Pi}_z, d\vec{S}) = \iint_{S_z} (\vec{\Pi}_z, d\vec{S}) = \iint_{S_z} \Pi_z \cos(\widehat{\vec{\Pi}_z, d\vec{S}}) dS.$$



поэтому в данном случае

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \oint_S (\vec{P}_z, d\vec{S}).$$

Поэтому изменение импульса площадки вдоль оси Z равно

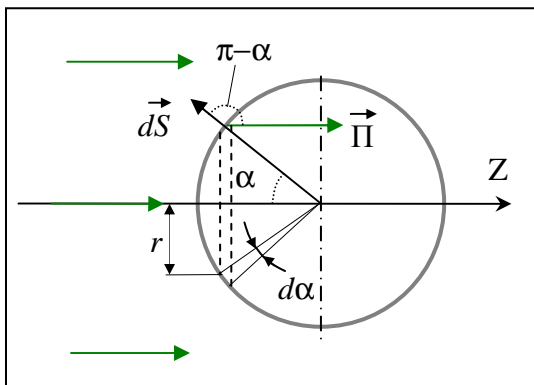
$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{1}{v} \oint_S (\vec{P}_z, d\vec{S}).$$

Слева стоит мгновенное изменение импульса площадки вдоль оси Z. Так как система отсчёта инерциальная, то справа, по второму закону Ньютона, должна стоять проекция суммы сил, действующих на площадку со стороны электромагнитной волны, на это же направление Z:

$$F_z = -\frac{1}{v} \oint_S (\vec{P}_z, d\vec{S}),$$

где  $v$  – фазовая скорость волны (в вакууме  $v=c$ ),  $S$  – ориентированная (наружу) замкнутая поверхность, внутри которой находится площадка.

*Пример.* На поверхность шара радиуса  $R$ , находящегося в вакууме, падает плоская электромагнитная волна. Длина волны много больше радиуса шара  $\lambda \gg R$ . Найти силу, действующую на



шар в случае полного поглощения им волны. Максимальная напряженность электрического поля в волне равна  $E_0$ .

*Решение.* Введём ось Z вдоль направления падения волны. Тогда вектор Пойнтинга  $\vec{P} = \vec{P}_z = (0, 0, P)$ .

Величина  $|\vec{P}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = EH$ .

В вакууме у плоской электромагнитной волны

$H = \frac{E}{Z_0}$ , где  $Z_0 \approx 377$  Ом – волновое сопротивление.

$$|\vec{P}| = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz + \phi).$$

Скорость света в вакууме  $v=c$ , поэтому проекция силы на ось Z равна  $F_z = -\frac{1}{c} \oint_S (\vec{P}_z, d\vec{S})$ .

Вводим угловую координату  $\alpha$ . Тогда

$$\oint_S (\vec{P}_z, d\vec{S}) = \oint_S P_z \cos(\pi - \alpha) dS.$$

Угол  $\alpha$  и величина  $P_z$  одинаковые на участках поверхности  $dS$ , образующих кольцо радиусом  $r = R \sin \alpha$  и шириной  $dl = R d\alpha$ . Площадь этого кольца  $dS_k = 2\pi r \cdot dl = 2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha$ , поэтому

$$\oiint_S (\vec{\Pi}_z, d\vec{S}) = \oiint_S \Pi_z \cos(\pi - \alpha) dS = \oiint_S \Pi_z \cos(\pi - \alpha) dS_K = - \int_0^{\pi/2} \Pi_z \cos(\alpha) 2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha.$$

Т.к.  $\lambda \gg R$ , то на поверхности шара величину  $|\vec{\Pi}| = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$  в данный момент времени можно считать постоянной.

$$\oiint_S (\vec{\Pi}_z, d\vec{S}) = - \int_0^{\pi/2} \Pi_z 2\pi R^2 \sin \alpha \cdot d(\sin \alpha) = - |\vec{\Pi}| \pi R^2 \sin^2 \alpha \Big|_0^{\pi/2} = - |\vec{\Pi}| \pi R^2.$$

Поэтому

$$F_z = - \frac{|\vec{\Pi}| \pi R^2}{c} = \frac{|\vec{\Pi}| \pi R^2}{c} = \frac{\pi R^2}{c} \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz + \varphi). \clubsuit$$

Как известно из прошлого семестра, интенсивность волны - это средняя мощность, переносимая волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Соответственно, *интенсивность электромагнитной волны* - усреднённое значение модуля вектора Пойнтинга.

$$I = \langle |\vec{\Pi}| \rangle = \frac{E_0^2}{Z_0} \langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0}.$$

Таким образом, *интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости электрического поля*.

Волна, в которой вектор  $\vec{E}$  (и, соответственно,  $\vec{H}$ ) колеблется в одной плоскости, называется *линейно-поляризованной*. Например, если вектор  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  совершает колебания в плоскости, образованной осями X и Z, то такая плоскость называется *плоскостью поляризации волны*.

В волне, соответствующей суперпозиции волн для векторов  $\vec{E}_1 = (E_x, 0, 0)$ ,  $\vec{E}_2 = (0, E_y, 0)$ , колебания векторов происходят с одинаковой частотой, но в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Конец вектора  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  будет описывать в плоскости (X, Y) фигуру Лиссажу, являющуюся, в зависимости от разности фаз этих колебаний, либо эллипсом, либо отрезком прямой.

Если фигура является эллипсом, то говорят, что волна имеет *эллиптическую поляризацию*, а если – отрезок прямой, то – *поляризация линейная*.

***Интерферируют между собой поперечные волны одинаковой линейной поляризации.***

*Излучение электромагнитных волн. Нормальная и аномальная дисперсия. Закон Бугера.  
Рассеяние света.*

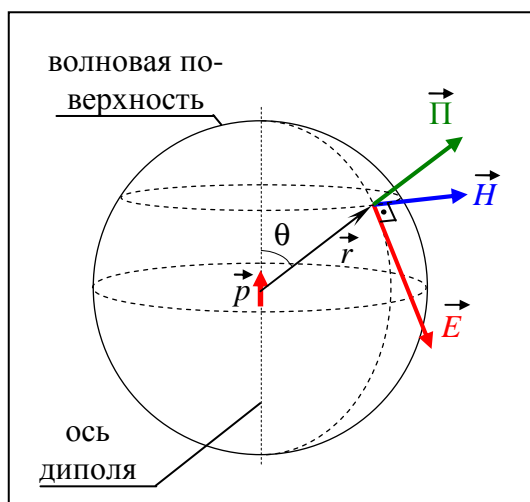
Как показывает опыт, электрические заряды, движущиеся с ускорением, излучают электромагнитные волны.

Ускоренное движение электрических зарядов наблюдается, например, при протекании *переменного* тока в проводниках. Следовательно, переменный электрический ток должен создавать в окружающем пространстве электромагнитные волны.

Для создания (и приёма) электромагнитных волн используют, в частности устройства, содержащие колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора. Частота волны в этом случае равна частоте контура.

*Вибратор Герца (диполь Герца, антенна Герца)* — простейшая система для получения электромагнитных колебаний - это электрический диполь, дипольный момент которого быстро изменяется во времени. Технический эквивалент — небольшая антенна, размер которой много меньше длины волны.

Назван по имени Генриха Герца (Генрих Рудольф Герц (1857 - 1894) — немецкий физик), который использовал подобное устройство в качестве излучающей и приёмной антенн в своих опытах, подтвердивших существование электромагнитных волн.



Рассмотрим колеблющийся диполь, у которого вектор электрического дипольного момента меняется во времени  $\vec{p} = \vec{p}(t)$ . В этом случае решение системы уравнений Максвелла (записанных с помощью *векторных потенциалов*) показывает, что в окружающем пространстве будут создаваться электромагнитные волны. Диполь называется *элементарным*, если длин волны излучения  $\lambda$  много больше длины диполя  $l$ .

При этом все пространство вокруг диполя можно условно разделить на две части – **ближнюю** и **дальнюю** (*волновую*) зоны. В ближней зоне картина излучения сложная, энергия постоянно перекачивается от излучателя в окружающее пространство и обратно.

Зоной излучения является *волновая зона*. Для точек этой зоны выполняется условие: расстояние до диполя много больше длины волны излучения  $r \gg \lambda$ .

В волновой зоне волновой поверхностью является сфера. Вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к меридианам этой сферы, а вектор  $\vec{H}$  - по касательной к параллелям, т.е.  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , а вектор Пойн-

тинга  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$  направлен по радиусу *наружу*. Амплитуды векторов обратно пропорциональны расстоянию от диполя

$$E_0 \sim \frac{1}{r} \sin \theta, \quad H_0 \sim \frac{1}{r} \sin \theta$$

где  $\theta$  - азимутальный угол (угол между осью диполя и радиус вектором  $\vec{r}$ ).

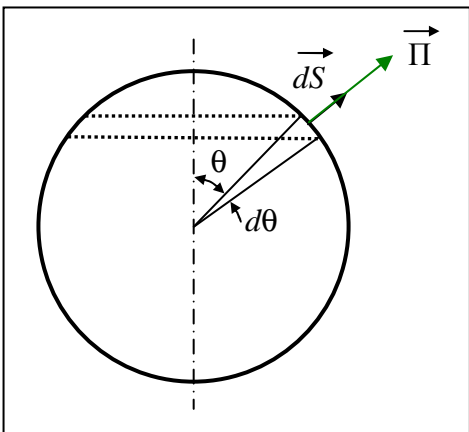
Соотношения между амплитудами в сферической волне такие же, как и для плоской волны

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}.$$

Величина вектора Пойнтинга  $P \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$  обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Следовательно, в направлении оси диполя (т.е.  $\theta=0$ ) нет излучения, а в перпендикулярном направлении ( $\theta=90^\circ$ ) излучение максимальное.

*Пример.* Найдём зависимость мощности излучения диполя от расстояния в волновой зоне.



Мощность излучения равна потоку вектора Пойнтинга, например, через сферу радиуса  $R \gg \lambda$ , внутри которой находится диполь  $N = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$ .

На поверхности сферы векторы  $d\vec{S}$  и  $\vec{P}$  сонаправлены в каждой точке. Т.к.  $P \sim \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$ , то при  $\theta = \text{const}$  величина  $P$  не меняется, поэтому на поверхности выделим тонкое кольцо, отсекаемое двумя конусами, выходящими из центра

сферы под углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  к оси диполя. Площадь этого кольца  $dS_K = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$ , откуда

$$N = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \oint_S P dS_K \sim \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{R^2} 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta, \quad N \sim \left( -2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \right) = \frac{8}{3} \pi$$

т.е. поток вектора Пойнтинга через сферу, в центре которой находится диполь, не зависит от расстояния до диполя  $\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \text{const} \clubsuit$

Следовательно, общая мощность излученной электромагнитной волны (в вакууме) не меняется с расстоянием – через любую замкнутую поверхность (в волновой зоне), охватывающую диполь, за равные промежутки времени проходит одинаковое количество энергии.

Мощность излучения *элементарного диполя* определяется выражением

$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left( \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)^2.$$

В частности, когда один из зарядов покоится, а второй вращается вокруг него с угловой скоростью  $\omega$ , получаем, что  $\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{p}$ . Но  $\vec{p} = q\vec{l}$ ,  $\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = -q\omega^2 \vec{l}$ , тогда

$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \omega^4 l^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} a_n^2,$$

где  $a_n = \omega^2 l$  - нормальное ускорение вращающегося заряда. Оказывается, что эту формулу можно обобщить. Мощность излучения (при небольших величинах ускорения  $a$ )

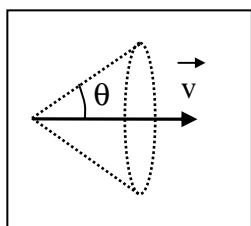
$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \vec{a}^2.$$

При этом заряженная частица теряет энергию, поэтому на заряженную частицу действует сила, называемая силой *радиационного трения*, величина которой определяется производной от ускорения

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

*Замечание.* Механическая модель атома состоит из тяжёлого положительно заряженного ядра и лёгких отрицательно заряженных электронов, вращающихся вокруг него. Следовательно, электроны в этой модели движутся с ускорением, поэтому атом должен терять энергию на излучение. И, в конце концов, электроны должны упасть на ядро. Т.е. механическая модель атома является неустойчивой. В этом заключается неустранимая проблема классического описания строения атома. Данное противоречие отсутствует в *квантовой механике*.

### Эффект Вавилова-Черенкова



Излучение Вавилова-Черенкова возникает при *равномерном* движении заряда в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света

$v > \frac{c}{n}$  в этой среде. Частица теряет энергию и тормозится. В излучении

преобладают короткие волны. Оно испускается не по всем направлениям, а

лишь вдоль образующей конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы

$\cos \theta = \frac{c}{nv}$ . Это явление широко используется в науке и технике.

### Источники электромагнитного излучения.

Источники электромагнитного излучения можно разделить на естественные и искусственные.

*Искусственными* источниками являются устройства по генерации радиоволн, светового и теплового излучения. Это излучение генерируется при подводе к системе энергии. При прекращении подвода энергии излучение, в основном, прекращается.

*Естественными* источниками электромагнитного излучения являются протекающие физические и химические природные процессы.

Например, процессы горения, а также термоядерные процессы в звёздах и т.д., или атмосферные явления (молнии).

Излучение заряженных частиц при движении в магнитном поле планет.

Люминесценция (нетепловое свечение вещества, происходящее после поглощения им энергии возбуждения).

И т.д. и т.п.

При исчерпании запаса энергии в системе такие типы излучения прекращаются.

Однако существует электромагнитное излучение всех без исключения тел, которое не может прекратиться. Это естественное излучение, вызванное тепловым движением (колебаниями) атомов и молекул, которое называется *тепловым излучением*. Особенностью теплового излучения является то, что оно происходит во всём диапазоне длин волн, а также то, что возможно тепловое равновесие в замкнутой системе между излучением и телами.

### **Свойства естественного излучения.**

Естественное излучение можно разделить на *спонтанное* и *вынужденное*.

При спонтанном излучении каждый атом (молекула) испускает электромагнитные волны самопроизвольно, не согласовано с другими атомами (спонтанно). При этом частота испускаемой волны, её фаза, направление распространения, поляризация определяются только состоянием атома.

При вынужденном (*индуцированном*) излучении атом испускает волну под воздействием внешнего излучения. Особенностью такого излучения является то, что испускаемые волны имеют частоту, фазу, направление и поляризацию такую же как и у внешнего излучения.

В естественных источниках относительная доля вынужденного излучения мала по сравнению с долей спонтанного излучения.

Преобладание доли индуцированного излучения над спонтанным излучением удалось добиться в устройствах по генерации излучения – мазерах и лазерах.

Процесс испускания атомом вещества электромагнитной волны длится, в среднем, около  $10^{-8}$  с. За это время испускается отрезок волны, называемый *цугом*, длиной около 3 м. В испущенной волне частота не является постоянной, а меняется в небольшом интервале, который называют *естественной шириной спектральной линии*. Кроме того, в процессе испускания волны на атом действует сила реакции (отдачи) со стороны волны, что приводит к изменению импульса атома, а это, в свою очередь, по эффекту Доплера меняет частоту волны в процессе испускания. Всё это говорит о том, что испущенная волна не является строго монохроматичной.

Немонохроматичную волну можно с помощью преобразований Фурье, представить в виде суперпозиции нескольких *монохроматичных* волн с разными частотами. Набор монохроматических волн с близкими частотами, которые при суперпозиции образуют единую волну (вообще говоря, немонахроматичную), принято называть *волновым пакетом*.

*Замечание.* Применение электромагнитных волн в качестве сигнала возможно, если удастся эту волну не только испустить, но и зарегистрировать. Однако если бы волна была строго монохроматичной, а значит и бесконечной по протяжённости, то её нельзя было бы выделить среди других подобных волн. Поэтому немонахроматичность волны и её ограниченность являются *необходимым условием* применения её в качестве сигнала. Но подобную волну можно представить как суперпозицию монохроматичных волн с близкими частотами. Как известно, подобная суперпозиция приводит к явлению, которое называется *биением*. Амплитуда колебаний в каждой точке пространства, где распространяется подобная волна, в случае биений должна меняться с течением времени – от нулевой до некоторой максимальной и затем, наоборот, уменьшаться. Именно изменение амплитуды и поддаётся регистрации в качестве сигнала. Т.е. сигнал распространяется со скоростью равной скорости движения максимума суммарной амплитуды суперпозиции волн.

Будем рассматривать классическую модель взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, достоинством такого рассмотрения является простота описания. Эта модель приводит к качественно верным результатам.

При колебаниях электроны движутся с ускорением, поэтому излучают электромагнитные волны такой же частоты, что и частота падающей волны. Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения. При колебаниях амплитуда ускорения равна  $a_{MAX} = A\omega^2$ . Следовательно, мощность излучения электронов под действием падающей волны пропорциональна 4-й степени частоты волны. Это излучение называется *рассеянным излучением*.

Атомы (и молекулы) вещества тоже могут совершать колебания под действием падающей волны. Кинетическая энергия колебаний пропорциональна квадрату скорости  $v_{MAX} = \omega A$ , т.е. квадрату частоты колебаний. Увеличение кинетической энергии колебаний приводит к увеличению внутренней энергии тела. Таким образом, часть энергии волны *поглощается веществом*.

#### Закон Бугера.

При рассеянии и поглощении энергия падающей волны уменьшается. При прохождении волной расстояния  $dl$  интенсивность  $I$  уменьшается на величину  $dI$ . Введём коэффициент пропорциональности  $k$ , называемый *коэффициентом поглощения* (единицы измерения 1/м)

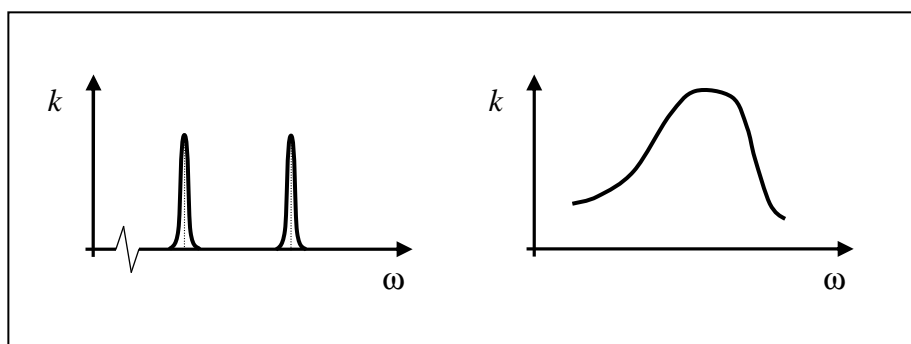
$$dI = -k \cdot I \cdot dl .$$

Откуда получаем закон уменьшения интенсивности (*закон Бугера*)  $I = I_0 e^{-kl}$

где  $I_0$  – величина интенсивности при  $l=0$ . При прохождении расстояния, величина которого равна обратному коэффициенту поглощения, интенсивность излучения уменьшается в  $e$  раз.

Так как причиной появления рассеянного излучения и поглощения энергии являются вынужденные колебания электронов и атомов, то вблизи резонансных частот должно наблюдаться резкое увеличение амплитуды колебаний, следовательно, коэффициент поглощения  $k$  зависит от частоты излучения. Таких частот, вообще говоря, может быть несколько.

Для веществ, атомы которых слабо взаимодействуют между собой (газы при невысоких давлениях), коэффициент поглощения заметно отличен от нуля только вблизи резонансных частот поглощения (так называемый *линейчатый спектр поглощения*). Например, результаты опытов показывают, что спектр солнечного излучения непрерывный. Но при прохождении солнечного света через атмосферу Солнца поглощается часть излучения при резонансных частотах, соответствующих газам, находящимся в составе атмосферы Солнца. Изучая эти частоты, можно



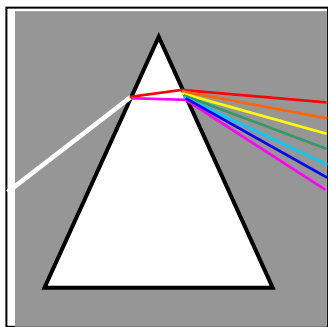
определить химический состав атмосферы Солнца (или звёзд).

Для газов при высоких давлениях, жидкостей и твердых тел характерны широкие полосы поглощения.

### Дисперсия.

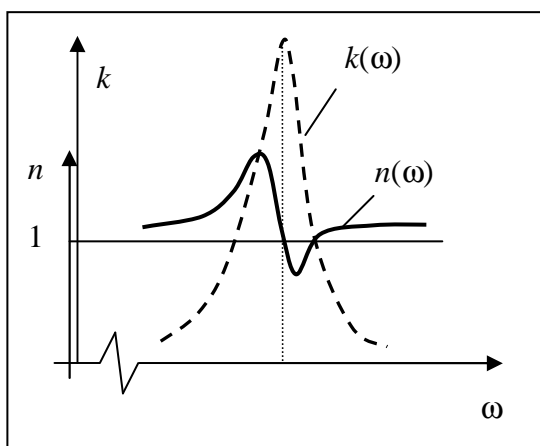
Рассмотрим вещества, не являющиеся проводниками (или плазмой). В таких телах, когда внешнее поле отсутствует  $\vec{E}_{\text{внешн}} = \vec{0}$ , усреднённое положение электрических зарядов является равновесным. Под воздействием внешнего электрического поля более лёгкие электроны смещаются и начинают совершать колебания около положения равновесия. Это приводит к тому, что электрические диполи в диэлектрике совершают вынужденные колебания, следовательно, вектор поляризованности вещества колеблется. В итоге, показатель относительной диэлектрической проницаемости зависит от частоты падающей волны  $\epsilon(\omega)$ . Показатель преломления вещества равен  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ . Большинство оптически прозрачных веществ являются парамагнетиками ( $\mu \approx 1$ ), поэтому  $n \approx \sqrt{\epsilon(\omega)}$ .





Явление зависимости показателя преломления вещества от длины волны излучения называется *дисперсией*. *Нормальная дисперсия* – показатель преломления увеличивается при уменьшении длины волны (увеличении частоты). Обратная зависимость носит название *аномальной дисперсии*.

Нормальная дисперсия наблюдается, в частности, в опыте Ньютона по разложению белого света в спектр при прохождении его через стеклянную призму. В этом опыте у красного света, имеющего большую длину волны, меньший показатель преломления, чем у фиолетового, длина волны которого меньше.



Аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению.

Если совместить два графика – зависимость коэффициента поглощения и показателя преломления от частоты, то можно увидеть, что аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Аномальную дисперсию можно наблюдать, например, в разреженных га-

зах и парах металлов.

### Групповая скорость.

Электромагнитные волны, испущенные естественными источниками, не являются монохроматическими, но их можно представить в виде волнового пакета – как суперпозицию монохроматических волн с близкими частотами. Из-за дисперсии монохроматические волны, составляющие пакет, будут иметь разные фазовые скорости в веществе. Если вещество является *сильно диспергирующим*, т.е. показатель преломления сильно меняется даже при небольшом изменении частоты, то разные фазовые скорости волн будут являться причиной распада пакета – более быстрые волны обгонят более медленные.

Если волновой пакет распространяется в слабо диспергирующей среде, то он будет сохранять целостность длительное время, хотя его «форма» будет меняться.

*Пример.* Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, являющуюся суперпозицией двух монохроматических волн с близкими частотами  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$  и распространяющуюся в веществе. Частоты волн разные, поэтому им соответствуют разные показатели преломления  $n$  и

$n + \Delta n$ , где  $\Delta n = \frac{dn}{d\omega} \Delta\omega$ . Поэтому волны имеют разные фазовые скорости  $v_{\phi}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$ .

Предполагаем, что вещество является *слабо диспергирующим* при данной частоте:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{dn}{d\omega} \frac{\Delta\omega}{n} \ll 1, \text{ т.е. если даже частота изменится в несколько раз } \Delta\omega = N\omega, \text{ то изменение по-}$$

казателя преломления будет малым  $\frac{\Delta n}{n} = \frac{dn}{d\omega} \frac{\omega}{n} N \ll 1$ . Иллюстрацией этого понятия является

дисперсия белого света в опыте Ньютона. Хотя частота фиолетового света практически в два раза больше частоты красного света, но относительное изменение показателя преломления среды невелико.

Уравнение плоской волны, которая движется вдоль оси X:  $A = A_0 \cos(\omega t - kx)$ . (В качестве величины A можно взять либо E либо H). Но  $k = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\omega}{c} n$ , поэтому уравнения волн можно

$$\text{записать в виде } A_1 = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega n}{c} x\right),$$

$$A_2 = A_0 \cos\left((\omega + \Delta\omega)t - \frac{(\omega + \Delta\omega)\left(n + \frac{dn}{d\omega} \Delta\omega\right)}{c} x\right) = A_0 \cos\left((\omega + \Delta\omega)t - \frac{\omega n + \left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega + \frac{dn}{d\omega} (\Delta\omega)^2}{c} x\right)$$

Отбросим величину  $\frac{dn}{d\omega} (\Delta\omega)^2$ , считая её малой, и найдём суперпозицию волн

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega n}{c} x\right) + A_0 \cos\left((\omega + \Delta\omega)t - \frac{\omega n + \left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{c} x\right)$$

$$A_\Sigma = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c} x\right) \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \frac{\omega n + \left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\frac{\Delta\omega}{2}}{c} x\right)$$

Мы получили уравнение, описывающее в каждой фиксированной точке оси X биения. Эти биения тоже распространяются вдоль оси X. Можно считать, что величина амплитуды  $2A_0$  биений является плоской волной

$$A_B = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c} x\right),$$

$$\text{движущейся вдоль оси с фазовой скоростью } v_{GP} = \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c}\right)} = \frac{c}{\omega \frac{dn}{d\omega} + n}.$$

Эта скорость является *характеристикой группы* волн, одновременно распространяющихся в одной области пространства, поэтому её принято называть *групповой скоростью*. Учитывая условие слабой дисперсии  $\frac{dn}{d\omega} \frac{\omega}{n} \ll 1$ , получаем

$$v_{GP} = \frac{c}{\omega \frac{dn}{d\omega} + n} = \frac{c}{n \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}\right)} = \frac{c}{n} \left(1 - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} + \dots\right) \approx \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} = v - v \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}.$$

(Здесь использована формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии с малым показателем и определение фазовой скорости  $v = \frac{c}{n}$ .)

$$\text{Так как } \frac{dv}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{c}{n}\right) = -c \frac{1}{n^2} \frac{dn}{d\omega} = -\frac{c}{n} \frac{1}{n} \frac{dn}{d\omega} = -\frac{v}{n} \frac{dn}{d\omega}, \text{ то } v_{GP} = v - \omega \frac{v}{n} \frac{dn}{d\omega} = v + \omega \frac{dv}{d\omega}.$$

Перейдём в этом выражении от циклической частоты  $\omega$  к длине волны  $\lambda$ .

$$\text{Т.к. } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}, \text{ то при фиксированной скорости } v \text{ выполняется } d\omega = -\frac{2\pi v}{\lambda^2} d\lambda, \text{ поэтому}$$

$$v_{GP} = v + \frac{2\pi v}{\lambda} \frac{dv}{\left(-\frac{2\pi v}{\lambda^2} d\lambda\right)} = v - \frac{2\pi v \lambda^2}{\lambda} \frac{dv}{2\pi v d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \clubsuit$$

Итак, групповая скорость группы волн, одновременно распространяющихся в одной области пространства (волнового пакета), связана с фазовой скоростью волн формулой Рэлея

$$v_{GP} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \text{ В веществе электромагнитный сигнал распространяется именно с групповой скоростью.}$$

При аномальной дисперсии показатель преломления среды уменьшается с увеличением частоты, т.е. с уменьшением длины волны. Поэтому фазовая скорость с уменьшением длины волны тоже уменьшается, следовательно  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ . В случае, когда  $n < 1$  фазовая скорость становится больше чем скорость в вакууме  $v = \frac{c}{n} > c$ , но групповая скорость  $v_{GP} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} < c$ , поэтому противоречия с СТО нет.

*Замечание.* Опыт показывает, что если средой является металл или плазма, то существует определенная частота  $\omega_p$ , называемая *плазменной частотой*, такая, что электромагнитные волны с меньшей частотой  $\omega < \omega_p$  полностью отражаются от тела, для волн с большей частотой  $\omega > \omega_p$  металл или плазма являются полностью прозрачными.

Например, очень тонкий слой золота, нанесённый напылением на поверхность стекла, пропускает видимый свет полностью, а инфракрасное излучение не проходит.

Расчёты показывают, что величина критической частоты  $\omega_p$  зависит от концентрации заряженных частиц.

Верхние слои атмосферы Земли представляют собой ионизированную плазму и образуют *ионосферу*. (Ионизация происходит под действием солнечных и космических лучей.). Опыт показывает, что радиоволны длиной более 10 метров полностью отражаются от ионосферы, что широко используется в радиосвязи. Волны меньшей длины, наоборот, свободно проходят сквозь ионосферу.

**Лекции 12-13. Электромагнитная природа света. Интерференция света.**

*Шкала электромагнитных излучений. Оптическое излучение, его интенсивность. Интерференция электромагнитных волн. Расчёт интерференционной картины с двумя источниками. Пространственно-временная когерентность. Интерференция света в тонких плёнках. Интерференционные полосы равной толщины и равного наклона. Применение интерференции.*

Физическая оптика – раздел физики, изучающий свойства и физическую природу света, а также его взаимодействие с веществом. По своей природе свет является электромагнитным излучением. Поэтому для описания световых явлений справедливы все положения электродинамики.

Электромагнитный спектр принято делить на радиоволны, инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Между ними нет резких переходов. Участки перекрываются, а границы между ними условны.

К радиоволнам относят излучение с длиной волны больше 0,1 мм.

При этом их подразделяют на:

- сверхдлинные радиоволны, для которых длина волны больше 10 км;
- длинные волны  $1 \text{ км} \leq \lambda \leq 10 \text{ км}$ ;
- средние волны  $100 \text{ м} \leq \lambda \leq 1 \text{ км}$ ;
- короткие волны  $10 \text{ м} \leq \lambda \leq 100 \text{ м}$ ;
- ультракороткие волны  $\lambda \leq 10 \text{ м}$ .

Ультракороткие волны, в свою очередь подразделяют на метровые, дециметровые, миллиметровые и субмиллиметровые.

Волны с длиной менее 1 м принято называть волнами *сверхвысоких частот* (соответственно, частоты таких волн более  $3 \cdot 10^8$  Гц.)

К *оптическому диапазону* относят волны в диапазоне  $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$ .

Он включает:

- инфракрасное излучение  $760 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$ ;
- видимый свет  $400 \text{ нм} \leq \lambda \leq 760 \text{ нм}$ ;
- ультрафиолет  $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 400 \text{ нм}$ .

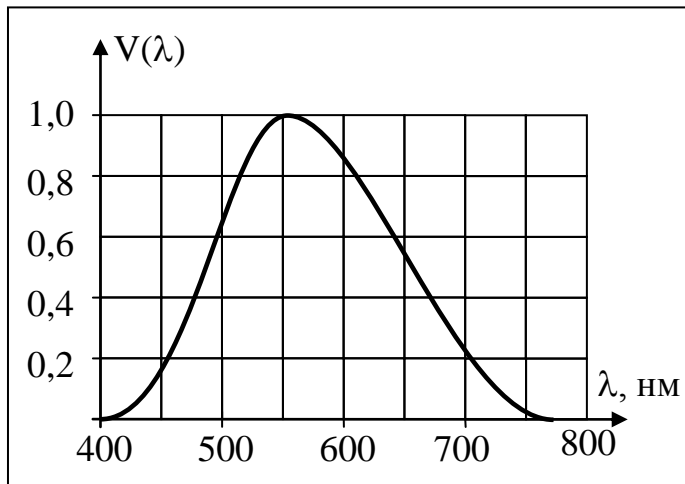
*Естественный белый свет* включает волны с длинами всего видимого диапазона.

В силу биологических особенностей, человеческий глаз реагирует практически только на величину напряжённости  $E$  электрического поля электромагнитной волны. Поэтому в оптике в основном рассматривают вектор напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ , который называют *световым вектором*.

## Характеристики излучения. Световой поток.

Пусть  $d\Phi_{\lambda}$  – поток энергии, приходящийся на интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$ , тогда величина  $\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_{\lambda}}{d\lambda}$  называется *функцией распределения потока энергии по длинам волн*. С помощью функции распределения можно найти поток энергии в интервале от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ :

$$\Phi_{\lambda} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda.$$



*Относительная спектральная чувствительность  $V(\lambda)$  определяет чувствительность нормального человеческого глаза к излучению разной длины волны (дневное зрение).*

Максимальное значение  $V(\lambda_0)=1$  приходится на длину волны  $\lambda_0 \approx 555$  нм (желто-зелёный цвет). Вне интервала длин (400 нм; 760 нм)  $V(\lambda)=0$ .

Значения функции  $V(\lambda)$  обратно пропорциональны величинам потока энергии, вызывающим одинаковые ощущения  $\frac{V(\lambda_2)}{V(\lambda_1)} = \frac{d\Phi_{\lambda}(\lambda_1)}{d\Phi_{\lambda}(\lambda_2)}$ .

*Пример.* Пусть  $V(\lambda)=0,5$ . Это значит, что для того, чтобы свет с данной длиной волны  $\lambda$  создавал зрительное ощущение, такое же как и свет с длиной волны  $\lambda_0 \approx 555$  ( $V(\lambda_0)=1$ ), необходимо, чтобы поток энергии света с длиной волны  $\lambda$  был в два раза больше потока энергии света с длиной волны  $\lambda_0 \approx 555$  (с этим связана рекомендация окраски объектов в зелёный цвет для уменьшения раздражения глаз).

*Световой поток* – поток энергии, оцениваемый по зрительному ощущению. Величина светового потока, приходящегося на интервал длин световых волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$ , определяется соотношением  $d\Phi = V(\lambda)d\Phi_{\lambda}$  или  $d\Phi = V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) \cdot d\lambda$ . Единица измерения *люмен* (лм). Для светового потока в 1 лм с длиной волны  $\lambda_0 \approx 555$  нм поток энергии равен 0,0146 Вт. *Механическим эквивалентом* света называется величина 0,0146 Вт/лм.

Сила света.

Для точечных источников сила света равна отношению светового потока к величине телесного угла  $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$  (Вт/ср – ватт делить на стерадиан). У изотропных точечных источников сила света не зависит от направления, поэтому  $I = \frac{\Phi}{4\pi}$ .

Для протяженных источников берётся отношение потока  $d\Phi$ , излучаемого элементом поверхности в направлении телесного угла  $d\Omega$ .

Сила света измеряется в канделах (кд):  $1 \text{ кд} = 1 \text{ лм/1 ср}$ .

Освещённость.

*Освещённость* – это отношение величины светового потока, падающего на элемент поверхности к величине площади  $E = \frac{d\Phi_{\vec{r}\vec{A}\vec{A}}}{dS}$ . Единица измерения – люкс (лк).  $1 \text{ лк} = 1 \text{ лм/1 м}^2$ .

*Светимость* – отношение светового потока, испускаемого площадкой по всем направлениям, к величине этой площадки

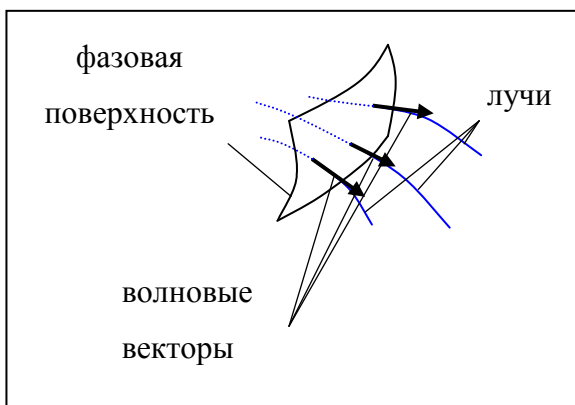
$$M = \frac{d\Phi_{\vec{r}\vec{N}\vec{I}}}{dS}.$$

*Яркость* – характеристика излучения света площадкой  $dS$  в данном направлении - отношение силы, испускаемой источником в данном направлении к величине проекции площадки на плоскость, перпендикулярную данному направлению

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega dS_{\perp}}.$$

Оптическая длина хода лучей.

Распространение волн удобно описывать с помощью понятия *луча*.



*Луч* – линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как волновой вектор. Таким образом, фазовая поверхность волны и касательная к лучу в точке их пересечения перпендикулярны друг к другу.

Если волновой вектор задаётся в координатах  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , то уравнение луча имеет вид

$$\frac{dx}{k_x} = \frac{dy}{k_y} = \frac{dz}{k_z}.$$

Для плоской волны лучи – это прямые, перпендикулярные фазовой поверхности. Для сферической волны – это прямые, выходящие из источника по радиальным направлениям.

В оптике *геометрической длиной* хода лучей  $l$  принято называть длину луча (как кривой линии), а *оптической длиной* хода лучей величину  $L = \int_{\vec{r}O \times} n dl$ , где  $n$  – показатель преломления

вещества. В случае, когда показатель преломления вещества постоянный, оптическая длина хода лучей равна произведению показателя преломления на геометрическую длину хода  $L = n \cdot l$ .

*Замечание.* Физический смысл оптической длины хода можно уяснить из равенства

$$L = \int_{\vec{E} \times \vec{O}} n dl = \int_{\vec{E} \times \vec{O}} \frac{c}{v} dl = c \int_{\vec{E} \times \vec{O}} \frac{dl}{v} = c \cdot \Delta t$$

( $v$  – фазовая скорость света в веществе). Т.е. – это расстояние, которое пройдет свет в вакууме за тот же интервал времени  $\Delta t$ , в течение которого он движется в веществе с показателем преломления  $n$ .

Уравнение плоской электромагнитной наиболее просто записывается с помощью понятия луча

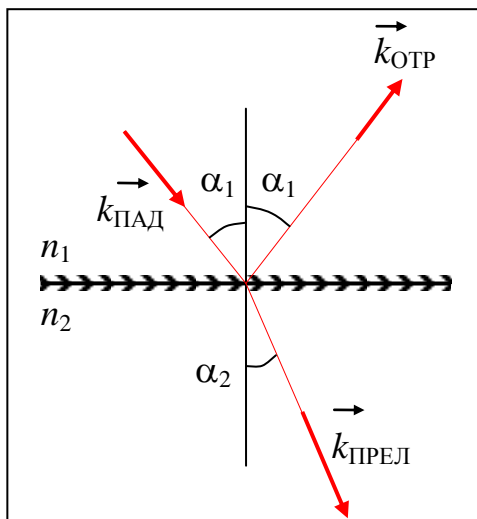
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kl + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kl + \varphi)$$

где  $l$  – геометрическая длина хода луча. Отсюда видно, что геометрическая длина хода может быть определена, как говорят, «с точностью» до длины волны  $\frac{2\pi}{k} = \lambda$ .

При сравнении двух оптически прозрачных сред, среда с большим показателем преломления называется *оптически более плотной средой*. Среда с меньшим показателем преломления называется, соответственно, *оптически менее плотной средой*.

### Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух диэлектриков.

Рассмотрим падение *плоской* электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков. *Плоскостью падения* волны называется плоскость, перпендикулярная границе раздела сред и содержащая волновой вектор падающей волны. При падении волны на границу



раздела двух сред в общем случае наблюдаются отраженная и преломленная волны. Углы падения, отражения, преломления отсчитываются между волновыми векторами и нормалью к границе, проведённой через точку падения.

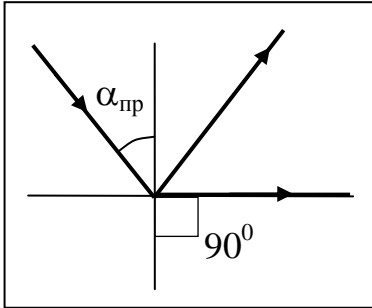
Закон преломления можно сформулировать следующим образом. Волновые векторы всех трёх волн лежат в одной плоскости падения с нормалью к плоской границе (в точке падения). Угол падения равен углу отражения, угол преломления связан с углом отражения соотношением

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Фазы падающей и прошедшей волн одинаковые. Фаза отраженной волны отличается от фазы падающей волны на  $\pi$  при отражении от оптически более плотной среды. Падающая волна, отражённая и преломлённая волны поляризованы одинаково. Но если волна, поляризованная в плоскости падения, падает под углом **Брюстера**  $\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$ , то отраженная волна отсутствует.



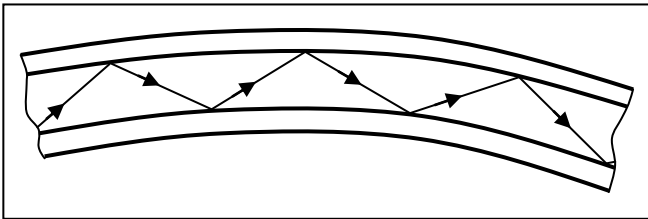
## Явление полного внутреннего отражения.



Из соотношения  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  следует, что когда относительный показатель преломления со стороны падающего луча меньше единицы  $\frac{n_2}{n_1} < 1$ , существует такое значение угла падения, для которого угол преломления равен  $90^\circ$ :  $\sin \alpha_{гд} = \frac{n_2}{n_1}$ .

Этот угол называется *предельным углом падения*. При дальнейшем увеличении угла падения угол преломления не изменяется и остаётся равным  $90^\circ$ . Если угол падения больше или равен предельному углу, то луч преломлённой волны направлен вдоль границы раздела. Следовательно, в этом случае волна, прошедшая во вторую среду, отсутствует. Это явление называется *полным внутренним отражением*.

Явление полного внутреннего отражения широко применяется в науке и технике.



Например, в *оптоволоконных кабелях* показатели преломления материалов, из которых изготовлены внутренняя и граничная области, подобраны так, чтобы свет, распространяющийся внутри, полностью отражался от внешних границ. Это позволяет передавать световой поток практически без потерь.

## Интерференция волн

*Интерференция волн* – взаимное усиление или ослабление когерентных волн при их наложении друг на друга (суперпозиции волн при одновременном распространении в пространстве), что приводит к перераспределению энергии колебаний, *устойчивому во времени*.

Наиболее выраженная интерференционная картина наблюдается в случае наложения волн одного направления. Применительно к электромагнитным волнам это означает, что плоскости поляризации волн должны быть одинаковыми.

Рассмотрим две такие плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в разных направлениях, у которых плоскости поляризации параллельны оси Z.

1) Пусть амплитуды волн одинаковые. Вдоль лучей уравнения волн будут иметь вид

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1), \quad E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2).$$

По принципу суперпозиции волновых полей

$$E_\Sigma = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2),$$

$$E_\Sigma = 2E_0 \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t - \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Если амплитуду результирующей волны записать в виде

$$A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos \left( \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right|,$$

то суперпозиция волн описывается уравнением

$$E_{\Sigma} = A_{\Sigma} \cos \left( \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \theta \right)$$

где

$$\theta=0 \text{ при } \cos \left( \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \geq 0,$$

$$\theta=\pi \text{ при } \cos \left( \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) < 0.$$

Амплитуда результирующей волны  $A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos \left( \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right|$ , не будет за-

висеть от времени в случае, если частоты волн совпадают  $\omega_1 = \omega_2$  и величина  $\varphi_1 - \varphi_2$  не зависит от времени.

*Замечание.* В естественном излучении содержатся волны, испущенные атомами вещества при спонтанных и вынужденных процессах излучения. При этом доля спонтанного излучения значительно больше доли вынужденного. Но при спонтанном излучении, даже в случае равенства частот, начальные фазы волн, испускаемых атомами, никак не согласованы друг с другом. Время процесса излучения каждого атома очень мало и, поэтому при длительном наблюдении суперпозиции волн величина  $\varphi_1 - \varphi_2$ , вообще говоря, будет меняться во времени хаотическим образом.

*Когерентными* называются волны, разность фаз которых не зависит от времени.

Всякая реальная световая волна представляет собой суперпозицию волн, длины которых заключены в некотором интервале  $\Delta\lambda$ . Световая волна (волновой пакет), для которой  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , называется *квазимонохроматической*.

Для монохроматических волн условие когерентности равносильно равенству частот этих волн  $\omega_1 = \omega_2$ , но в общем случае необходимо еще и равенство начальных фаз.

Предположим, что волны являются когерентными, а начальные фазы равны нулю. В этом случае величина результирующей амплитуды  $A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos \left( \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{2} \right) \right|$  зависит от величины

$$\frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{2}.$$

В случаях, когда  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm\pi$  или  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 3\pi$  и т.д, т.е при  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm\pi(2m+1)$ , (т.к для любого натурального  $m$  число  $(2m+1)$  *всегда* нечётное) суммарная амплитуда равна нулю  $A_\Sigma = 0$ .

Но в случаях, когда  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = 0$  или  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 2\pi$  и т.д, т.е при  $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 2\pi m$ , суммарная амплитуда максимальная  $A_\Sigma = 2E_0$ .

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды  $I \sim A^2$ , то в точках пространства, где амплитуда равна нулю, результирующая интенсивность тоже равна нулю, а при максимальной амплитуде результирующей волны интенсивность тоже будет максимальной.

Рассмотрим подробнее величину  $kl = \frac{\omega}{v} l$ . Фазовая скорость волны определяется показателем преломления вещества  $v = \frac{c}{n}$ , а циклическая частота колебаний связана с периодом соотношением  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , поэтому  $kl = \frac{\omega}{v} l = \frac{2\pi}{cT} nl$ . Однако, длина электромагнитной волны в вакууме равна  $\lambda = cT$ , а величина  $L = nl$  является *оптической длиной хода* лучей, следовательно  $kl = \frac{2\pi}{\lambda} L$ .

В случае равенства частот двух волн  $\omega_1 = \omega_2$  их длины волн в вакууме тоже одинаковые  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Поэтому можно переписать условия минимумов и максимумов результирующей амплитуды (или интенсивности). Условие минимума примет вид

$$k_2 l_2 - k_1 l_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} n_2 l_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} n_1 l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (L_2 - L_1) = \pi(2m+1), \text{ откуда } L_2 - L_1 = (2m+1) \frac{\lambda}{2}.$$

Соответственно, для максимумов

$$k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 2\pi m, \text{ откуда } L_2 - L_1 = m\lambda.$$

Будем в дальнейшем называть разность оптических длин хода лучей просто *оптической разностью хода* лучей (или волн).

Условие минимума. Если оптическая разность хода лучей до точки наблюдения равна нечётному числу длин полуволен (в вакууме), то в точке наблюдается минимум интерференционной картины  $L_2 - L_1 = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$ .

Условие максимума. Если оптическая разность хода лучей до точки наблюдения равна целому числу длин волн (в вакууме), то в точке наблюдается максимум интерференционной картины  $L_2 - L_1 = m\lambda$ .

2) Пусть в пространстве перекрываются два волновых поля с разными амплитудами

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1), \quad E_2 = E_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2)$$

Рассмотрим соответствующую амплитудно-векторную диаграмму. По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02} \cos(\pi - \delta)$$

Учтем, что  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$ , где

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 l_2 - k_1 l_1) + \varphi_2 - \varphi_1, \text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \delta.$$

Для когерентных волн разность фаз волн должна быть постоянной во времени (в частности  $\omega_2 = \omega_1$ ), поэтому результирующая амплитуда не зависит от времени

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)).$$

Для интенсивностей волн справедливы зависимости  $I_1 \sim E_{01}^2$ ,  $I_2 \sim E_{02}^2$ ,  $I_\Sigma \sim A_\Sigma^2$  с одинаковыми коэффициентами пропорциональности, поэтому

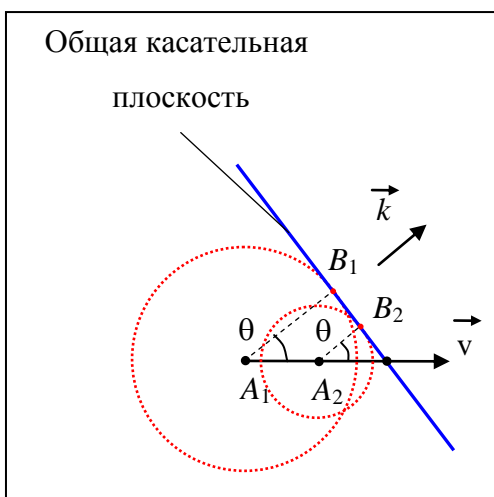
$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)).$$

В тех точках пространства, где

$$\cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)) = -1 \text{ наблюдается минимум интерференционной картины,}$$

$$\cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)) = 1 \text{ - максимум.}$$

*Пример. Рассмотрим эффект Вавилова-Черенкова.*



Пусть заряженная частица движется по прямой линии в веществе с постоянной скоростью, величина которой больше фазовой скорости света в веществе  $v > \frac{c}{n}$ . При своём движении частица непрерывно излучает электромагнитные волны, которые можно рассматривать как сферические. Когда, например, частица находилась в точках  $A_1$  и  $A_2$  она излучила две сферические волны. Скорость волны меньше скорости частицы, поэтому в направлении движения частицы вторая волна «обгонит» первую. Но в этом случае к этим двум сферическим поверхностям в какой-то момент времени можно построить общую касательную плоскость. Обозначим точки касания  $B_1$  и  $B_2$ . Лучи  $A_1 B_1$  и  $A_2 B_2$  параллельны друг другу и перпендикулярны этой плоскости.

При дальнейшем движении фазовых поверхностей выбранных двух сферических волн касательная плоскость будет также двигаться в направлении лучей  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  со скоростью равной фазовой скорости света. Можно рассматривать эту плоскость как фазовую поверхность некоторой плоской волны (с волновым вектором  $\vec{k}$ ). Но тогда фазы плоской волны (на этой плоскости), первой сферической и второй сферической волн в точках касания  $B_1$  и  $B_2$  должны быть одинаковыми. Следовательно, разность фаз сферических волн в направлении, задаваемом углом  $\theta$  постоянна и равна 0. Волны являются *когерентными* в данном направлении и при интерференции усиливают друг друга.

Из равенства промежутков времени  $\frac{|A_1B_1|}{(c/n)} = \frac{|A_1A_2|}{v} + \frac{|A_2B_2|}{(c/n)}$  (см. рисунок) и

$$|A_1B_1| = |A_1A_2|\cos\theta + |A_2B_2| \text{ следует } \frac{|A_1A_2|\cos\theta + |A_2B_2|}{(c/n)} = \frac{|A_1A_2|}{v} + \frac{|A_2B_2|}{(c/n)}.$$

Откуда

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}.$$

Касательных плоскостей, соответствующих другим значениям углов не существует, поэтому разность фаз волн в этих направлениях не будет постоянной, следовательно, волны не будут когерентными. Если же скорость частицы меньше фазовой скорости света, то указанную касательную плоскость построить невозможно.

### **Интерференция двух цилиндрических волн.**

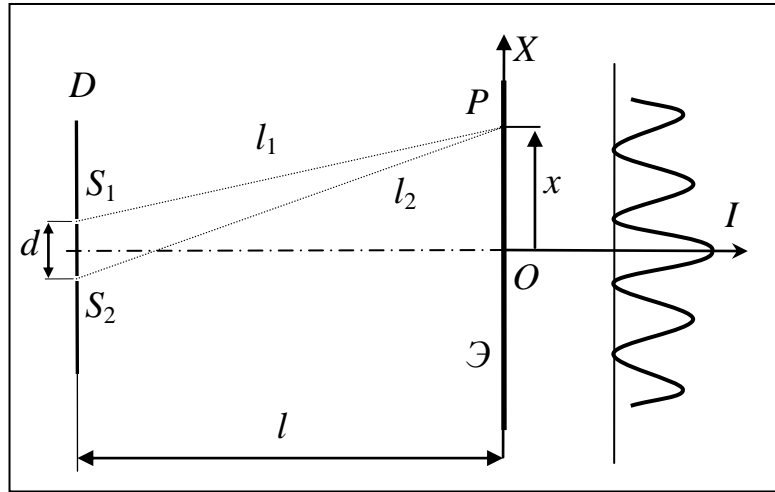
#### **(двулучевая интерференция).**

Рассмотрим интерференцию от двух очень узких щелевых источников монохроматического света. В непрозрачной перегородке ( $D$ ) есть две узкие щели ( $S_1$  и  $S_2$ ), являющиеся источниками света. Интерференционную картину наблюдают на экране ( $\mathcal{E}$ ). Расстояние между щелями много меньше расстояния между экраном и перегородкой  $d \ll l$ . Показатель преломления среды принимаем равным единице  $n=1$ .

Интерференционная картина на экране представляет собой череду *параллельных* тёмных и светлых полос. Будем предполагать, что начальные фазы колебаний от источников равны. Тогда центральная полоса (О), расположенная симметрично относительно источников будет всегда светлой. Вдоль экрана направим ось X, чтобы координата  $x=0$  соответствовала точке О.

Оптическая разность хода лучей от источников до некоторой полосы (Р) равна

$$L_2 - L_1 = l_2 - l_1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_2 + l_1}$$



Т.к.  $d \ll l$ , то при небольших значениях  $x$  можно предполагать, что  $l_2 + l_1 \approx 2l$ . Учитывая, что

$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$  и  $l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$ , получаем, что

$$L_2 - L_1 \approx \frac{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - l^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{2l} = \frac{xd}{l}.$$

Светлые полосы соответствуют максимуму интенсивности. В этом случае оптическая разность хода равна целому числу длин волн  $\frac{xd}{l} = m\lambda$ , откуда координаты максимумов  $x_m^{MAX} = m \frac{l}{d} \lambda$ .

Два соседних максимума с номерами  $m$  и  $m+1$  находятся на расстоянии, величина которого называется шириной интерференционной полосы  $\Delta x = \frac{l}{d} \lambda$ .

Тёмные полосы соответствуют минимуму интенсивности. В этом случае оптическая разность хода равна нечётному числу длин полуволи  $\frac{xd}{l} = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$ , откуда координаты минимумов  $x_m^{MIN} = (2m+1) \frac{l}{d} \frac{\lambda}{2}$ .

Два соседних минимума с номерами  $m$  и  $m+1$  находятся на расстоянии  $\Delta x = \frac{l}{d} \lambda$ . Т.е. расстоянии между соседними максимумами и соседними минимумами одинаковые. Из формулы для ширины интерференционной  $\Delta x$  полосы можно найти угловое расстояние между источниками  $\gamma$  – угол, под которым видны из точки О источники  $S_1$  и  $S_2$   $\gamma = 2 \arctg\left(\frac{d}{2l}\right) \approx \frac{d}{l} = \frac{\lambda}{\Delta x}$ .

Теперь предположим, что свет квазимонохроматический и содержит две волны с длинами  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Тогда на экране общая интерференционная картина является результатом наложения двух картин: для длин волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Координаты максимумов и минимумов для этих волн

разные. Поэтому может произойти совпадения максимумов для одной длины волны с минимумами другой. Найдём номер первого совпадения из условия  $x_m^{MIN}(\lambda) = x_m^{MAX}(\lambda + \Delta\lambda)$ :

$$(2m+1)\frac{l}{d}\frac{\lambda}{2} = m\frac{l}{d}(\lambda + \Delta\lambda)$$

Откуда  $m = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$ . Следовательно, можно ожидать, что будут видны максимумы с номерами меньшими  $m$ . Т.к. нумерация начинается с номера  $m=0$ , отвечающему центральному максимуму, то общее число (первых) различимых полос будет равно  $N = 2(m-1)+1 = 2m-1 = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} - 1$ .

Величина  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  называется *степенью монохроматичности* света.

Следовательно, число видимых полос прямо пропорционально степени монохроматичности света. Чем больше степень монохроматичности, тем больше интерференционных полос видно – можно сказать, что в этом случае свет «ближе» к монохроматичному.

На границе видимой интерференционной картины оптическая разность хода

$$L_2 - L_1 \approx \frac{x_{\Delta\lambda} d}{l} = \frac{m\Delta\lambda d}{l} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} \frac{l}{d} \lambda \frac{d}{l} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

зависит только от параметров волны.

Вся интерференционная картина будет заключена в области, размер которой

$$L_{interf} = 2m \cdot \Delta x = 2 \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} \frac{l}{d} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \frac{l}{d}.$$

Учитывая, что величина  $\gamma \approx \frac{d}{l}$  определяет угловой размер источника, получаем соотношение, не зависящее от геометрических размеров установки для наблюдения интерференции:

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = L_{interf} \gamma.$$

Теперь рассмотрим эту модель по-другому. Найдём суперпозицию волны с длиной  $\lambda$  от источника  $S_1$  с волной длины  $\lambda + \Delta\lambda$  от источника  $S_2$ .

$$E_{\Sigma} = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1\right) + E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda + \Delta\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} l_1\right)$$

$$E_{\Sigma} = 2E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda + \Delta\lambda}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} - \frac{2\pi l_1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda} + \frac{2\pi c}{\lambda + \Delta\lambda}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} + \frac{2\pi l_1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)\right)$$

Полагая  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , получим  $\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \dots\right) \approx \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ . Тогда для амплитуды

$$\text{суммарного колебания } A_{\Sigma} = 2A_0 \left| \cos \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2} \right) t - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l_1}{\lambda} - \frac{2\pi l_2}{\lambda} - \frac{2\pi \Delta\lambda l_2}{\lambda^2} \right) \right) \right|,$$

$$A_{\Sigma} = 2A_0 \left| \cos \left( \frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2} t - \left( \frac{\pi(l_2 - l_1)}{\lambda} + \frac{\pi \Delta\lambda l_2}{\lambda^2} \right) \right) \right|.$$

В любой точке экрана амплитуда результирующего колебания зависит от времени. Период времени, за который величина амплитуды дойдёт от нулевого значения до максимального, и

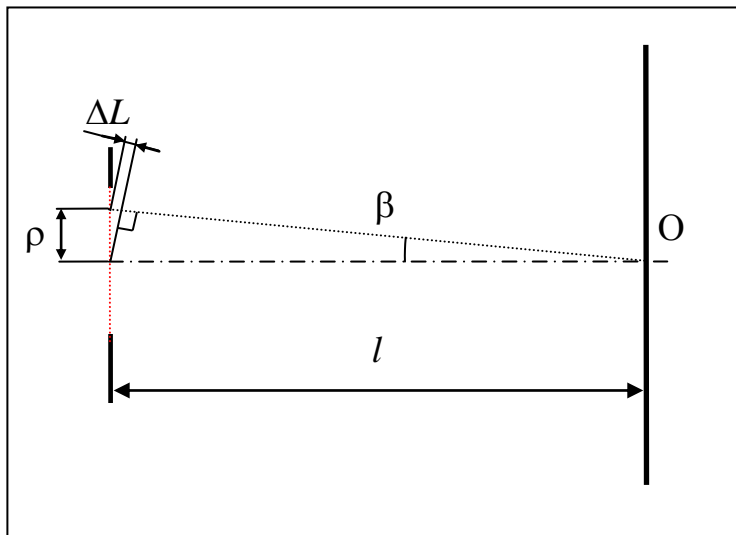
обратно, называют *временем когерентности*  $t_{\hat{E}\hat{I}\hat{A}} = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda^2}{c \Delta\lambda}$ .

Длиной когерентности называется расстояние проходимое светом за время, равное времени ко-

герентности  $l_{\hat{E}\hat{I}\hat{A}} = c \cdot t_{\hat{E}\hat{I}\hat{A}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .

Как видно, эта величина пропорциональна максимальной разности хода лучей *квазимонохроматических* волн, при которой ещё видна интерференционная картина.

Теперь предположим, что щель имеет конечные размеры. И пусть свет будет монохрома-



тическим. Будем рассматривать интенсивность в центральной точке экрана (O).

Если разность хода лучей от центральной точки щели и какой-то точки на расстоянии  $\rho$  от неё до точки O равна нечётному числу длин полуволн, то в этой точке экрана волны от этих двух точек будут колебаться в противофазе, следовательно, будут «гасить» друг друга. Поэтому в щели можно выделить симметричную зону длиной такую, что источники внутри этой зоны не «гасят» друг друга, т.к. оптическая разность хода лучей от них до точки O не больше  $\frac{\lambda}{2}$ .



С учётом малости углов  $\Delta L = \rho \sin \beta \approx \rho \frac{\gamma}{2}$ , где  $\gamma \approx \frac{2\rho}{l}$  - угловой размер центральной части источника. Тогда, условие того, что в точке О *не будет* волн, колеблющихся в противофазе, можно записать в виде  $\rho \frac{\gamma}{2} < \frac{\lambda}{2}$ . Т.е. расстояние между крайней и центральной точками протяжённого источника монохроматического излучения должно определяться соотношением  $\rho\gamma < \lambda$ , тогда в центральной точке экрана будет наблюдаться максимальная интенсивность.

### Пространственная и временная когерентность.

Волны естественного излучения являются суперпозицией множества волн от точечных источников, излучающих спонтанно. Даже в волне, спонтанно испущенной одним источником, частота меняется в узком диапазоне. Фазы двух волн излученных друг за другом одним источником никак не связаны друг с другом. Все это приводит к тому, что в результирующей волне частота и фаза являются усредненными величинами по излучению множества источников. Поэтому их значения колеблются случайным образом около неких средних значений. Следовательно, колебания разных точек волновой поверхности, вообще говоря, могут не быть когерентными.

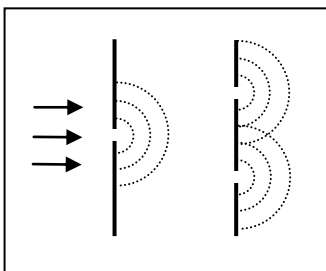
Рассмотрим две разные точки одной волновой поверхности в один и тот же момент времени. Максимальное расстояние (вдоль этой поверхности), на котором излучение в точках ещё являются когерентными, называется *радиусом пространственной когерентности*. Эта величина определяется соотношением  $\rho \sim \frac{\lambda}{\gamma}$ , где  $\lambda$  - основная длина волны,  $\gamma$  - угловой размер источника (из точки наблюдения).

*Пример.* Для излучения Солнца  $\lambda = 0,55$  мкм,  $\gamma \approx 0,01$  рад. Откуда  $\rho \approx 0,05$  мм. Это значит, что для наблюдения интерференционной картины от солнечного света, необходимо, чтобы две щели в непрозрачном экране находились на расстоянии не более 0,05 мм. При этом можно оценить

размер интерференционной картины из соотношения  $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = L_{\text{interf}} \gamma$ . Если принять, что для сол-

нечного света  $\Delta\lambda \approx 0,2$  мкм, то  $L_{\text{interf}} = \frac{\lambda^2}{\gamma\Delta\lambda} = \frac{0,55^2 \cdot 10^{-12}}{0,01 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  м. Изображение такого раз-

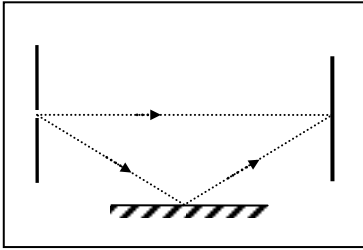
мера увидеть невооружённым глазом практически невозможно.



Для увеличения размера изображения необходимо уменьшить угловой размер источника. Это можно сделать с помощью *ещё одного* непрозрачного экрана, в котором сделана щель, свет из которой будет являться источником для двух других щелей. ♣

Так как начальная фаза волны естественного света меняется

спонтанно, то разность фаз двух волн одинаковой частоты, испущенных из одной и той же точки волновой поверхности, но в *разное время*, вообще говоря, будет меняться во времени. Т.е. волны не будут являться когерентными. В этом случае говорят о *временной когерентности*.



Следовательно, если рассмотреть интерференцию лучей, прямо из щели попадающих на экран и лучей, попадающих после отражения от зеркала, интерференция возможна в случае, если разность хода лучей не больше длины когерентности

$$\Delta l \leq l_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}}.$$

Поэтому можно определить время когерентности  $t_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}} = \frac{l_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}}}{c} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}$ .

*Пример.* Для солнечного света длина когерентности  $l_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{0,55^2 \cdot 10^{-12}}{0,2 \cdot 10^{-6}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$  м, поэтому интерференцию можно наблюдать только в тонких плёнках, а в оконном стекле – нет. Время

когерентности  $t_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}} = \frac{l_{\hat{E} \hat{I} \bar{A}}}{c} \approx 0,5 \cdot 10^{-14}$  с.

### Интерференция света в тонких плёнках.

Во многих оптических приборах используются линзы. Линзы обладают следующим свойством – оптическая разность хода параллельных лучей при прохождении через линзу не меняется. Это приводит, например, к тому, что время движения света вдоль любого из параллельных лучей от одной и той же фазовой плоскости до точки пересечения с какой-то фокальной плоскостью линзы не зависит от выбора луча. (Такое свойство называется *таутохронностью*.)

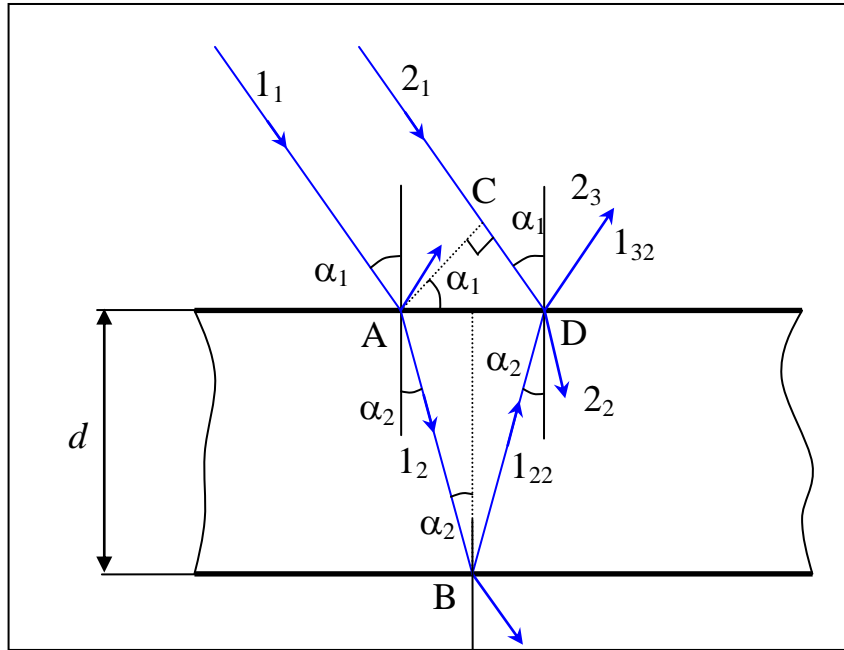
Для солнечного света длина когерентности имеет порядок длины волны. Можно ожидать, что в тонких пленках или тонких зазорах, размер которых сопоставим с длиной волны света, будет наблюдаться интерференционная картины.

### Интерференционные полосы равного наклона.

Пусть на тонкую прозрачную пластинку под углом  $\alpha_1$  падает свет. Показатель преломления окружающей среды  $n_1$ , а материала пластинки  $n_2$ . Толщина пластинки  $d$ .

Луч  $1_1$  соответствует 1й волне, падающей на пластинку,  $1_2$  – преломлённой,  $1_{22}$  – отраженной от нижней поверхности,  $1_{32}$  – еще раз преломлённой и вышедшей обратно.

Луч  $2_1$  соответствует 2й волне, падающей на пластинку,  $2_2$  – один раз преломлённой и  $2_3$  – один раз отражённой 2й волне. Другие отражения и преломления не учитываем.



Будем рассматривать интерференцию лучей  $1_{32}$  и  $2_3$ . Оптическая разность хода этих лучей  $\Delta L = n_2(|AB| + |BD|) - n_1|CD|$  или

$$\Delta L = 2 \frac{d}{\cos \alpha_2} n_2 - 2d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 n_1.$$

С учётом закона преломления  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  и тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\Delta L = 2 \frac{d}{\cos \alpha_2} n_2 - 2d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 n_1 = \frac{2d(n_2 - n_1 \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1)}{\cos \alpha_2} = \frac{2n_2 d (n_2 - n_2 \sin^2 \alpha_2)}{n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}},$$

$$\Delta L = \frac{2d(n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2)}{\sqrt{n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2}} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1},$$

$$\Delta L = 2n_1 d \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha_1}.$$

Теперь предположим, что  $n_2 > n_1$  - т.е. вторая среда оптически более плотная, чем первая. В этом случае фаза отражённого луча  $2_3$  отличается от фазы падающего луча  $2_1$  на  $\pi$ . Это равносильно тому, что оптическая длина хода  $2$  луча изменилась на  $\frac{\lambda}{2}$ . Действительно, изменение фазы будет равно  $\Delta \varphi = k \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$ .

Поэтому условие интерференционных максимумов имеет вид  $\Delta L \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda$ . Откуда

$$2n_1d\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha_1} = (2m \pm 1) \frac{\lambda}{2}.$$

(Знак «+» берём в случае, если нумерация начинается с  $m=0$ ).

Соответственно, минимумы определяются соотношением

$$2n_1d\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha_1} = m\lambda.$$

Если отраженные лучи пропустить через собирающую линзу, в фокальной плоскости которой находится экран, то на экране получится интерференционная картина. Лучи, угол падения которых соответствует условию максимума при отражении, после отражения формируют светлые полосы. Поэтому такую картину называют «полосы равного наклона».

### Интерференционные полосы равной толщины.

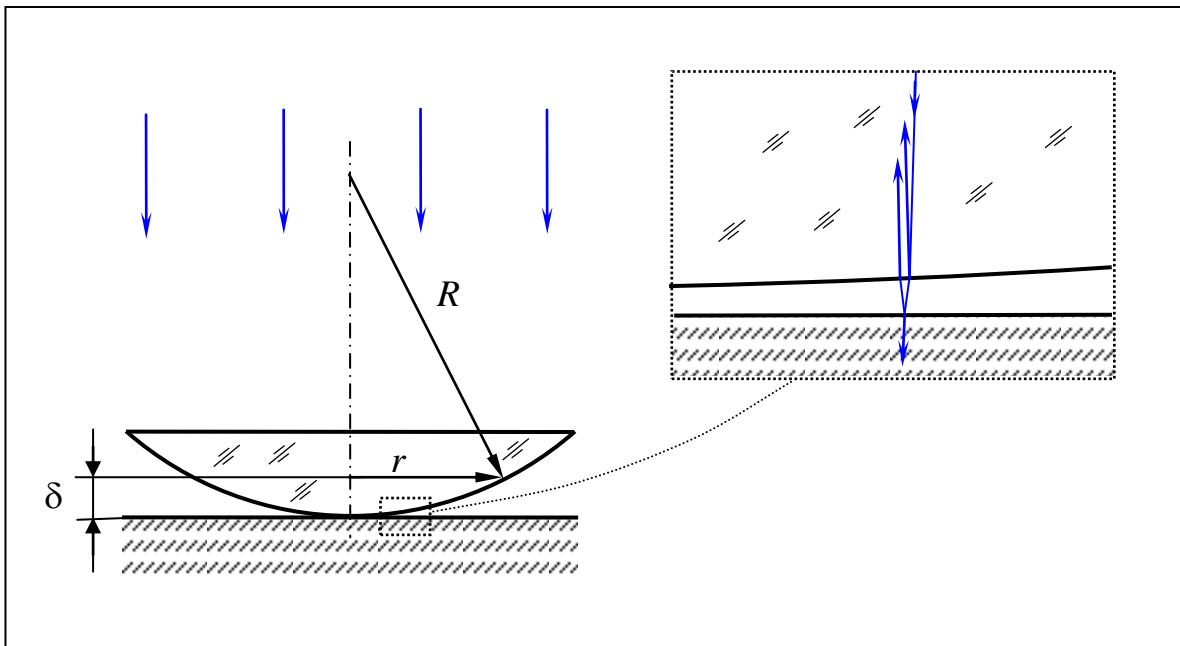
Рассмотрим плоско-выпуклую линзу, лежащую на плоской стеклянной подложке. Недалеко от пятна контакта, зазор имеет толщину соизмеримую с длиной волны света. Поэтому можно ожидать, что в этой зоне будет формироваться интерференционная картина. Пусть на плоскую поверхность линзы нормально падает свет с длиной волны  $\lambda$ . Интерференционная картина представляет собой систему чередующихся тёмных и светлых колец, которые называются *кольцами Ньютона*. Одно кольцо соответствует одинаковой толщине зазора между линзой и стеклом, поэтому данная картина называется «полосы равной толщины». Найдём радиус колец. Если через  $\delta$  обозначить толщину (воздушного) зазора, то радиус кольца

$$r^2 = R^2 - (R - \delta)^2 = 2R\delta - \delta^2.$$

В той области, где наблюдается интерференционная картина, толщина зазора между линзой и стеклом имеет порядок длины волны света  $\delta \sim \lambda$ , поэтому можно пренебречь величиной  $\delta^2$  по сравнению с  $R$ . В этом случае  $r = \sqrt{2R\delta}$ .

Для отражённого света интерференционная картина более контрастная, чем для проходящего (при интерференции в проходящем свете один из лучей должен испытать отражение два раза, поэтому интенсивность отраженного луча будет меньше интенсивности прошедшего. ).

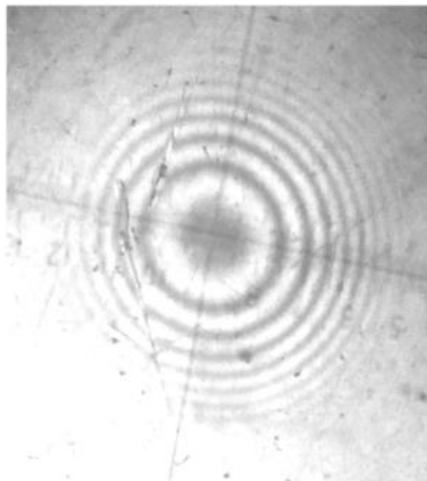
Оптическая разность хода лучей равна  $2\delta$ . При отражении от стекла фаза отражённой волны меняется на  $\pi$ . Это можно учесть введением поправки для оптической разности хода в полволны  $\frac{\lambda}{2}$ .



Светлые кольца соответствуют максимуму интенсивности. Условие максимума

$$2\delta \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \text{ Откуда } 2\delta = m\lambda \pm \frac{\lambda}{2} \text{ и радиус светлого кольца с номером } m: r_m = \sqrt{R \left( m\lambda \pm \frac{\lambda}{2} \right)}.$$

Минимальный радиус светлого кольца  $r_{MIN} = \sqrt{R \frac{\lambda}{2}} > 0$ , поэтому в центре картины находится тёмное пятно.



### Интерферометр.

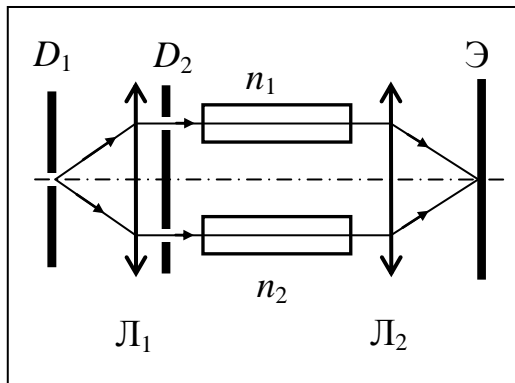
Интерферометр - оптический прибор, принцип действия которого основан на разделении пучка света на два или несколько когерентных пучков, которые проходят различные оптические пути, а затем сводятся вместе.

Полученная интерференционная картина позволяет:

- контролировать качество поверхностей и однородность оптических материалов;
- измерять показатели преломления, длины волн, напряжения в деталях и т.п.

Интерферометры применяются для измерения длины волны спектральных линий и их структуры и абсолютного показателя преломления сред; для измерения длин и перемещений тел; для контроля формы; микрорельефа и деформаций поверхностей оптических деталей; чистоты металлических поверхностей и пр.

### Примеры интерферометров

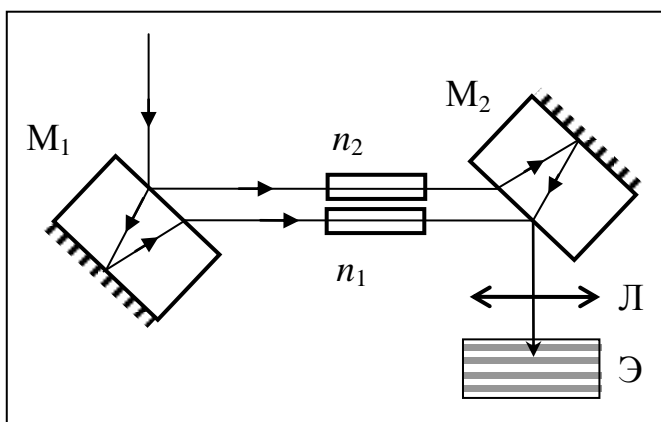


1) *Интерферометр Рэлея.* (Джон Уильям Стретт, третий барон Рэлей, Лорд Рэлей (Рэйли) (англ. *John Strutt, 3rd Baron Rayleigh*) (1842 - 1919) — британский физик) Лорд Рэлей построил интерферометр для измерения показателя преломления жидкостей и газов (*рефрактометр*). Источником света служит ярко освещённая щель в непрозрачной перегородке  $D_1$ , находящейся в фокальной плоскости собирающей линзы  $L_1$ . После неё,

через пару щелей, лучи проходят сквозь трубки рефрактометра: одна из них с эталонным веществом, другая — с исследуемым. Затем лучи собираются линзой на экране, где формируется интерференционная картина. По сдвигу полос интерференции определяют показатель преломления вещества.

2) *Интерферометр Жамена* (Жюль Жамён (фр. *Jules Célestin Jamin*; 1818-1886) - французский физик.)

Интерферометр Жамена, наряду с интерферометром Рэлея, представляет собой одно из наиболее чувствительных интерференционных устройств, что позволяет использовать его для точного определения показателей преломления газов при давлении, близком к атмосферному (при этом давлении соответствующий показатель преломления отличается от единицы в четвертом-пятом знаке после запятой).



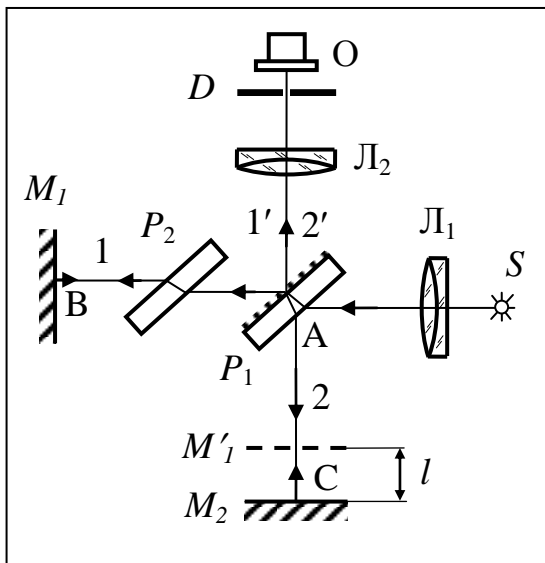
Параллельный пучок света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину  $M_1$ , на заднюю поверхность которой нанесено металлическое зеркало. Два отраженных пучка оказываются при достаточной толщине пластины пространственно разделенными, и направляются порознь в две кюветы

с исследуемым газом и газом сравнения соответственно ( $n_1$  и  $n_2$ ). Прошедшие пучки отражаются от еще одной такой же стеклянной пластины  $M_2$ . Таким образом, оба отраженных пучка оказываются равными по интенсивности, и сводятся в фокальной плоскости линзы  $L$ . В результате,

возникает интерференционная картина из горизонтальных полос на экране Э. При этом при отсутствии по ходу распространения пучков объектов с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  нулевой максимум интерференционной картины лежит на оси системы. При варьировании давления воздуха полосы на экране смещаются.

3. *Интерферометр Майкельсона* (Альберт Абрахам Майкельсон (англ. *Albert Abraham Michelson*); (1852 - 1931) – американский физик).

Этот прибор сыграл очень важную роль в истории науки. С его помощью, например, было доказано отсутствие «мирового эфира».



Параллельный пучок света от источника  $S$ , прошедший через линзу, попадает на полупрозрачную пластинку  $P_1$ , где разделяется на пучки 1 и 2. После отражения от зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и повторного прохождения через пластинку  $P_1$  оба пучка попадают в объектив  $O$ .

Оптическая разность хода  $\Delta L = 2(|AC| - |AB|) = 2l$ , где  $l$  — расстояние между зеркалом  $M_2$  и мнимым изображением  $M'_1$  зеркала  $M_1$  в пластинке  $P_1$ . Таким образом, наблюдаемая интерференционная картина эквивалентна интерференции в воздушной пластинке толщиной  $l$ .

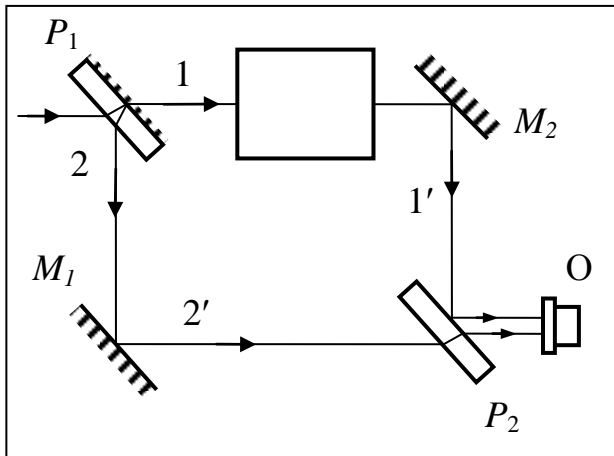
Если зеркало  $M_1$  расположено так, что  $M'_1$  и  $M_2$  параллельны, то образуются полосы равного наклона, локализованные в фокальной плоскости объектива  $O$  и имеющие форму концентрических колец. Если же  $M_2$  и  $M'_1$  образуют воздушный клин, то возникают полосы равной толщины, локализованные в плоскости клина  $M_2M'_1$  и представляющие собой параллельные линии.

Интерферометр Майкельсона широко используется в физических измерениях и технических приборах. С его помощью впервые была измерена абсолютная величина длины волны света, доказана независимость скорости света от движения Земли. Перемещая одно из зеркал интерферометра Майкельсона, получают возможность анализировать спектральный состав падающего излучения. На этом принципе построены Фурье-спектрометры, применяющиеся для длинноволновой инфракрасной области спектра (50—1000 мкм) при решении задач физики твёрдого тела, органической химии и химии полимеров, диагностики плазмы.

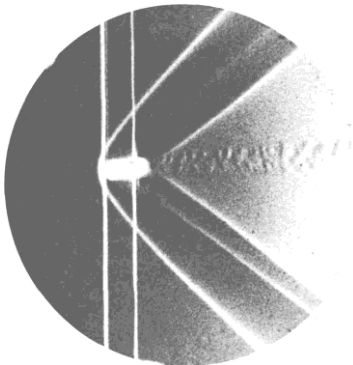
Интерферометр Майкельсона позволяет измерять длины с точностью 20-30 нм. Устройство используется и сегодня в астрономических, физических исследованиях, а также в измерительной технике. В частности, интерферометр Майкельсона лежит в основе оптической схемы современных лазерных гравитационных антенн.

4. *Интерферометр Маха-Цендера*. (Эрнст Мах (нем. *Ernst Mach*, 1836 - 1916) - австрийский физик и философ). (Людвиг Луис Альберт Цендер (англ. *Ludwig Louis Albert Zehnder* (1854 – 1949) - швейцарский физик).

Австрийский физик Эрнст Мах, крупный исследователь процессов аэродинамики, сконструировал специальный интерферометр с широкими пучками и большим расстоянием между



зеркалами для съёмки ударных волн и скачков уплотнения воздушных потоков, обтекающих различные тела. Показатель преломления воздуха в уплотнённом потоке выше, чем в невозмущённой среде. Это отражается на форме линий интерференции.



Пример фотографии, полученной на интерферометре Маха-Цендера.

Движение пули в воздухе со сверхзвуковой скоростью. Наклонные линии – области уплотнения воздуха (ударные волны).



## Дифракция света.

*Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Векторная диаграмма. Дифракция от круглого отверстия и круглого диска. Дифракция Фраунгофера от щели. Предельный переход от волновой оптики к геометрической.*

*Дифракция* – это явление отклонения от прямолинейного распространения света, если оно не может быть следствием отражения, преломления или изгибания световых лучей, вызванным пространственным изменением показателя преломления. При этом отклонение от законов геометрической оптики тем меньше, чем меньше длина волны света.

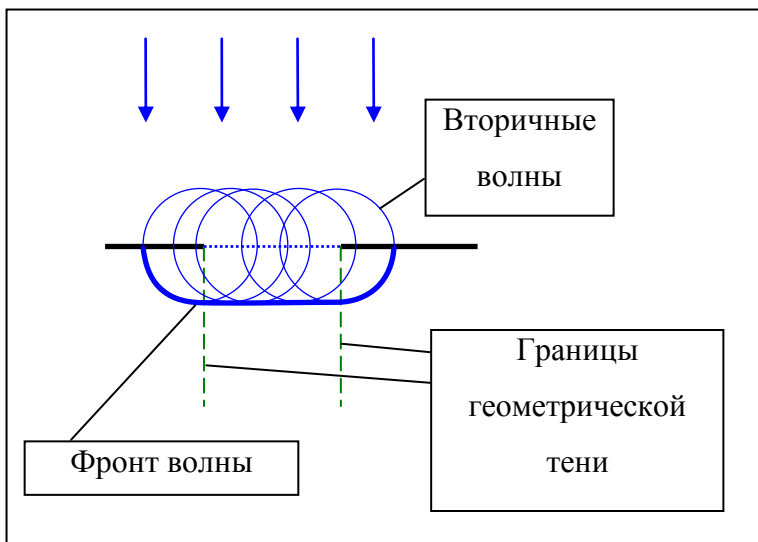
*Замечание.* Между дифракцией и интерференцией нет принципиального различия. Оба явления сопровождаются перераспределением светового потока в результате суперпозиции волн.

Примером дифракции может служить явление при падении света на непрозрачную перегородку с отверстием. В этом случае на экране за перегородкой в области границы геометрической тени наблюдается дифракционная картина.

Принято различать два вида дифракции. В случае, когда волну, падающую на перегородку, можно описать системой параллельных друг другу лучей (например, когда источник света находится достаточно далеко), то говорят о *дифракции Фраунгофера* или дифракции в параллельных лучах. В остальных случаях говорят о *дифракции Френеля* или дифракции в расходящихся лучах.

При описании явлений дифракции необходимо решить систему уравнений Максвелла с соответствующими граничными и начальными условиями. Однако нахождение точного решения в большинстве случаев является весьма затруднительным. Поэтому, в оптике, часто применяют приближённые методы, основанные на принципе Гюйгенса в обобщённой формулировке Френеля или Кирхгофа.

### Принцип Гюйгенса.



#### Формулировка принципа Гюйгенса.

Каждая точка среды, до которой в некоторый момент времени  $t$  дошло волновое движение, служит источником *вторичных сферических волн*. Огибающая этих волн даёт положение фронта волны в следующий близкий момент времени  $t+dt$ . Радиусы вторичных волн равны произведению фазовой скорости света на интервал времени  $r = v \cdot dt$ .

Иллюстрация этого принципа на примере волны падающей на непрозрачную перегородку с отверстием показывает, что волна проникает в область геометрической тени. Это является проявлением дифракции.

Однако принцип Гюйгенса не даёт оценок интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях.

### Принцип Гюйгенса-Френеля.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. По амплитудам вторичных волн с учётом их фаз можно найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства.

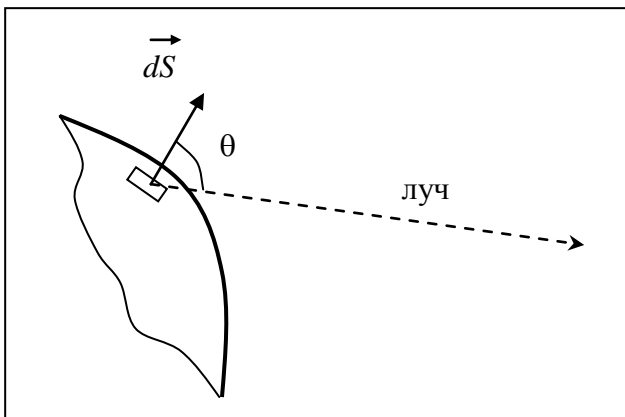
Каждый малый элемент волновой поверхности является источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента  $dS$  и уравнение которой вдоль луча имеет вид

$$dA = K(\theta) \cdot \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

здесь  $a_0$  - коэффициент, пропорциональный амплитуде колебаний точек на волновой поверхности  $dS$ ,  $K(\theta)$  - коэффициент, зависящий от угла  $\theta$  между лучом и вектором  $d\vec{S}$ , и такой, что

при  $\theta = 0$  он принимает максимальное значение,

а при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  - минимальное (близкое к нулю).



Амплитуда результирующего колебания в некоторой точке наблюдения  $P$  определяется аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля, которое вывел *Кирхгоф*:

$$A_P = \iint_S K(\theta) \cdot \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS$$

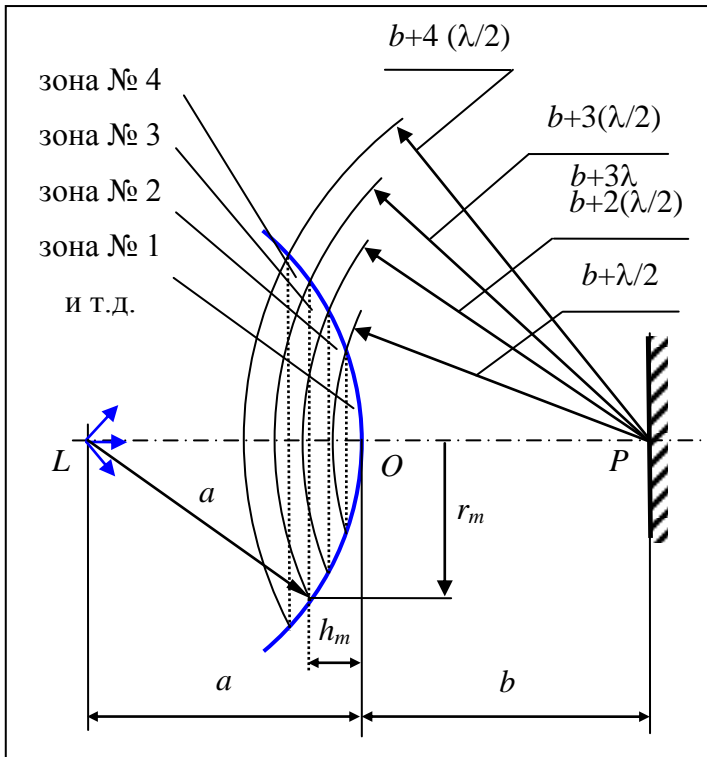
Интеграл берётся по волновой поверхности, зафиксированной в некоторый момент времени.

Для свободно распространяющейся волны значение интеграла не зависит от выбора поверхности интегрирования  $S$ .

Явное вычисление амплитуды результирующего колебания по формуле *Кирхгофа* довольно трудоёмкая процедура, поэтому на практике применяют *приближённые методы* нахождения значения этого интеграла.

Для нахождения амплитуды колебаний в точке наблюдения  $P$  всю волновую поверхность  $S$  разбивают на участки (*зоны Френеля*). Предположим, что мы наблюдаем дифракцию в расходящихся лучах (дифракцию Френеля), т.е. рассматриваем сферическую, распространяющуюся от некоторого точечного источника  $L$ . Волна распространяется в вакууме.

Зафиксируем волновую поверхность в некоторый момент времени  $t$ . Пусть радиус этой поверхности равен  $a$ . Линия  $LP$  пересекает волновую поверхность в точке  $O$ . Предположим, что расстояние между точками  $O$  и  $P$  равно  $b$ . От точки  $P$  последовательно откладываем сферы, ра-



диусы которых  $R_m = b + m \frac{\lambda}{2}$ . Две соседние сферы «отсекают» на волновой поверхности кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. (Как известно, две сферы пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры этих сфер). Найдём расстояние от точки  $O$  до границы зоны с номером  $m$ . Пусть радиус внешней границы зоны Френеля равен  $r_m$ . Т.к. радиус волновой поверхности равен  $a$ , то  $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2$ . При этом,

$$r_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2.$$

Поэтому  $2ah_m - h_m^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2$ , откуда  $h_m = \frac{mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$ .

Для длин волн видимого диапазона и не очень больших значений номеров  $m$  можно пренебречь слагаемым  $\left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2$  по сравнению с  $m\lambda$ . Следовательно, в этом случае  $h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$  и

для квадрата радиуса получаем выражение  $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = 2a \frac{mb\lambda}{2(a+b)} - \left(\frac{mb\lambda}{2(a+b)}\right)^2$ , в котором

опять можно пренебречь последним слагаемым. Тогда радиус  $m$ -й зоны Френеля (для дифракции в расходящихся лучах)

$$r_m = \sqrt{m \frac{ab\lambda}{(a+b)}}.$$

*Следствие.* Для дифракции в параллельных лучах (дифракции Фраунгофера) радиус зон Френеля получается предельным переходом  $a \rightarrow \infty$ :

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

Теперь сравним площади зон Френеля. Площадь сегмента сферической поверхности, лежащей внутри  $m$ -й зоны, как известно, равна  $S(m) = 2\pi a h_m$ . Зона с номером  $m$  заключена между границами зон с номерами  $m$  и  $m-1$ . Поэтому её площадь равна

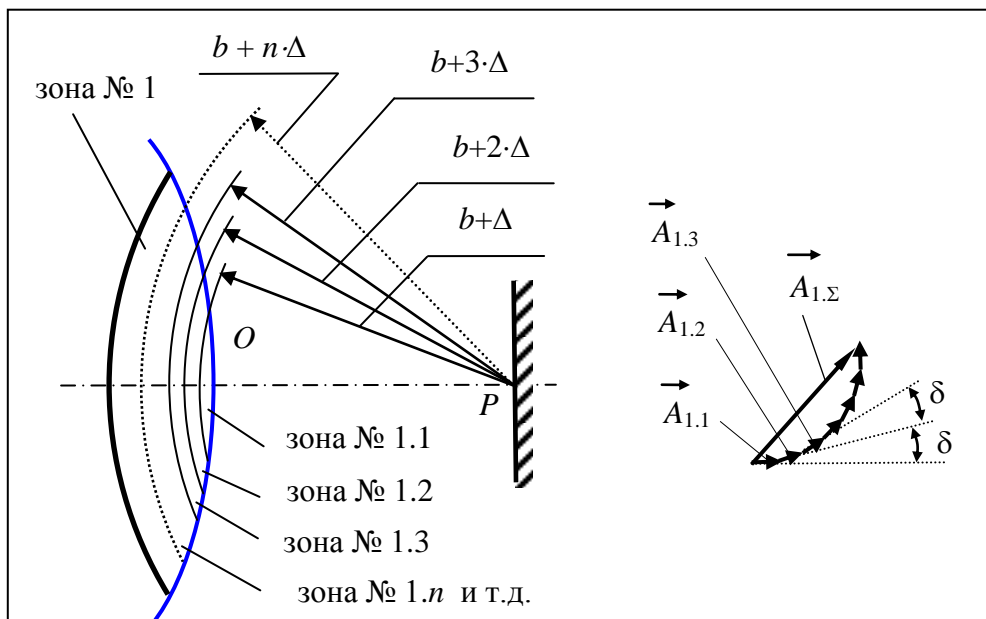
$$S_m = S(m) - S(m-1) = 2\pi a (h_m - h_{m-1}) = 2\pi a \left( \frac{mb\lambda + \left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} - \frac{(m-1)b\lambda + \left((m-1)\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$$

После преобразований выражение примет вид 
$$S_m = 2\pi a \left( \frac{b\lambda + (2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$$

Если пренебречь величиной  $\frac{(2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$ , то из выражения  $S_m = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)}$  следует, что

при небольших номерах площадь зон не зависит от номера  $m$ .

Нахождение результирующей амплитуды в точке наблюдения  $P$  производится следующим образом. Т.к. излучаемые вторичные волны являются когерентными и расстояния от соседних границ до точки  $P$  отличаются на половину длины волны, то разность фаз колебаний от вторичных источников на этих границах, приходящих в точку  $P$ , равна  $\pi$  (как говорят, колебания приходят в противофазе). Аналогично, для любой точки какой-нибудь зоны обязательно найдётся точка в соседней зоне, колебания от которой приходят в  $P$  в противофазе. Величина амплитуды волнового вектора пропорциональна величине площади зоны  $A_p \sim K(\theta) S_m$ . Но площади зон одинаковые, а с ростом номера  $m$  возрастает угол  $\theta$ , поэтому величина  $K(\theta)$  убы-



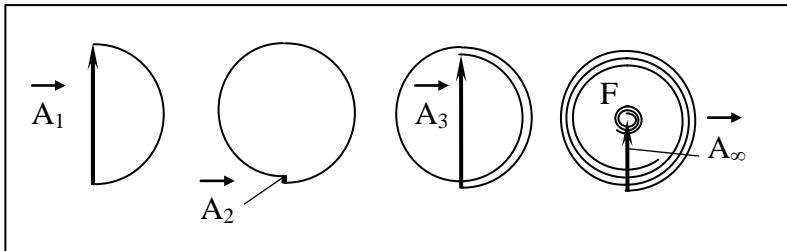
вает. Поэтому можно записать упорядоченную последовательность амплитуд

$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$ . На амплитудно-векторной диаграмме с учётом разности фаз эта последовательность изображается противоположно направленными векторами, поэтому

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_{m-1} \mp A_m \pm A_{m+1} \mp \dots$$

Разобьём первую зону на большое количество  $N$  внутренних зон таким же способом, как и выше, но теперь расстояния от границ двух соседних внутренних зон до точки  $P$  будут отличаться на малую величину  $\Delta = \frac{\lambda/2}{N}$ . Поэтому разность фаз волн, приходящих волн в точку  $P$

будет равна малой величине  $\delta = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ . На амплитудно-векторной диаграмме вектор амплитуды от каждой из внутренних зон будет повернут на малый угол  $\delta$  относительно предыдущего, поэтому амплитуде суммарного колебания от нескольких первых внутренних зон будет соответствовать вектор  $\vec{A}_{1,\Sigma}$  соединяющий начало и конец ломаной линии. При увеличении номера внутренней зоны суммарная разность фаз будет нарастать и на границе первой зоны станет равной  $\pi$ . Это означает, вектор амплитуды от последней внутренней зоны  $\vec{A}_{1,N}$  направлен противоположно вектору амплитуды от первой внутренней зоны  $\vec{A}_{1,1}$ . В пределе бесконечно большого числа внутренних зон эта ломаная линия перейдет в часть спирали.



Амплитуде колебаний от первой зоны Френеля тогда будет соответствовать вектор  $\vec{A}_1$ , от двух зон -  $\vec{A}_2$  и т.д. В случае, если между точкой  $P$  и источником света нет никаких

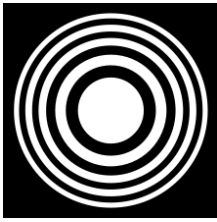
преград, из точки наблюдения будет видно бесконечное число зон, поэтому спираль будет накручиваться на точку фокуса  $F$ . Поэтому свободной волне с интенсивностью  $I_0$  соответствует вектор амплитуды  $\vec{A}_\infty$ , направленный в точку  $F$ .

Из рисунка видно, что для амплитуды от первой зоны можно получить оценку  $A_1 = 2A_\infty$ , поэтому интенсивность от первой зоны  $I_1 = 4I_0$  - в 4 раза больше интенсивности падающей волны. Равенство  $A_1 = 2A_\infty$  можно трактовать и по-другому. Если для бесконечного числа открытых зон суммарную амплитуду записать в виде

$$A_\infty = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$

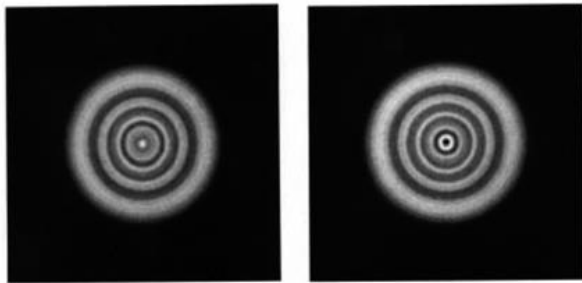
( $m$  - четное число), то из  $A_1 = 2A_\infty$  следует оценка  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$ .

*Замечание.* Если каким-то образом изменить фазы колебаний в точке  $P$  от чётных или нечётных зон на  $\pi$ , или закрыть чётные или нечётные зоны, то суммарная амплитуда увеличится по сравнению с амплитудой открытой волны. Таким свойством обладает *зонная пластинка* - плоскопараллельная стеклянная пластинка с выгравированными concentрическими окружностями, радиус которых совпадает с радиусами зон Френеля. Зонная пластинка «выключает» чётные либо нечётные зоны Френеля, что приводит к увеличению интенсивности света в точке наблюдения.



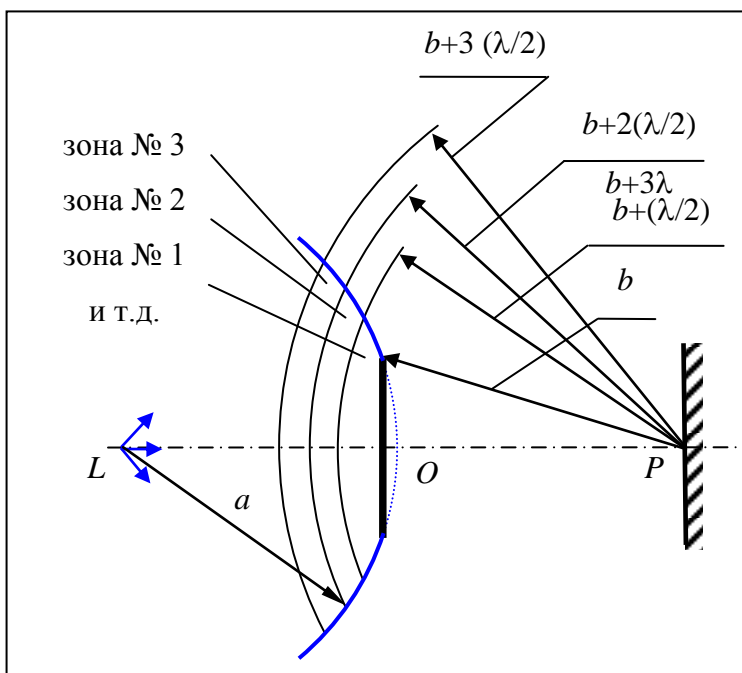
### Дифракция на круглом отверстии.

Рассуждения, приведённые выше, позволяют сделать вывод, что амплитуда колебания в точке  $P$  зависит от числа зон Френеля. *Если для точки наблюдения открыто нечётное число зон Френеля, то в этой точке будет максимум интенсивности. Если открыто чётное число зон – то минимум.*



Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и тёмных колец. При увеличении радиуса отверстия (и увеличения числа зон Френеля) чередование тёмных и светлых колец будет наблюдаться только вблизи границы геометрической тени, а внутри освещённость практически не будет меняться.

### Дифракция на малом диске.



Рассмотрим схему опыта, в котором на пути световой волны расположен непрозрачный круглый диск, радиус которого соизмерим с радиусами первых зон Френеля.

Для рассмотрения дифракционной картины помимо обычных зон построим дополнительные зоны от края диска.

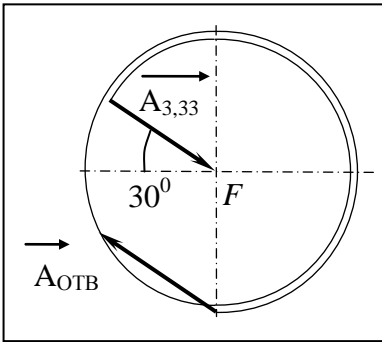
Зоны Френеля от края диска будем строить по прежнему принципу - расстояния от границ двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на половины длины волны. Амплитуда в точке наблюдения

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$



с учётом оценки  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$  будет равна  $A_p = \frac{A_1}{2}$ . Следовательно, в точке наблюдения - в центре геометрической тени *всегда* будет светлое пятно – максимум интенсивности. Это пятно называется *пятном Пуассона*.

*Замечание.* Если диск закрывает только часть обычной первой зоны Френеля, то на экране не будет тени.



*Пример.* На непрозрачный диск диаметром  $D=0,5$  см нормально падает плоская монохроматическая волна, длина которой  $\lambda=700$  нм. Найти диаметр отверстия в центре диска, при котором интенсивность света в точке  $P$  экрана (на оси системы) будет равна нулю. Расстояние между диском и экраном равно  $L=2,68$  м.

*Решение.* Найдём число обычных зон Френеля, которые закрыты диском. Номер зоны найдём из формулы для радиуса при дифрак-

ции Фраунгофера  $m = \frac{1}{L\lambda} \left( \frac{D}{2} \right)^2$

$$m = \frac{1}{2,68 \cdot 7 \cdot 10^{-7}} \left( \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \approx 3,33.$$

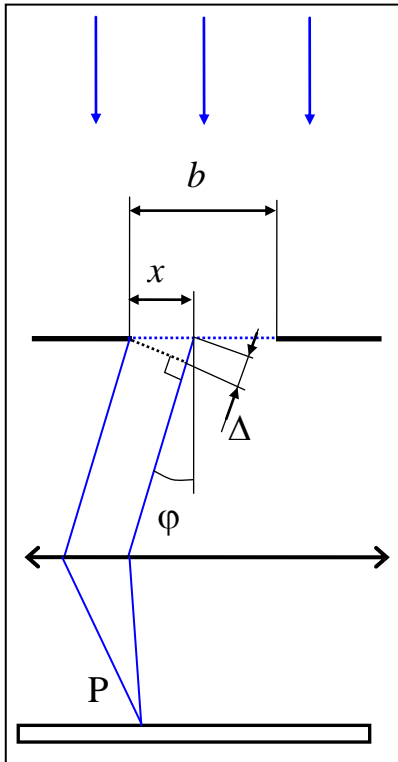
Т.е. диск закрывает 3 целых зоны и еще одну треть. Построим спираль Френеля. Граничной точке этой части в 3,33 зоны соответствует угол наклона к горизонтали, равный  $30^\circ$ . Все остальные зоны открыты, поэтому вектор амплитуды  $\vec{A}_{3,33}$  направлен от граничной точки зоны Френеля в точку  $F$ . Чтобы в точке наблюдения  $P$  интенсивность была равной нулю, надо, чтобы вектор амплитуды света из отверстия  $\vec{A}_{i \text{ отв}}$  был равным по длине, но противоположным по направлению вектору  $\vec{A}_{3,33}$ . Следовательно, он также должен быть наклонен к горизонтали под углом в  $30^\circ$ . В этом случае отверстие должно открывать 1,67 части зоны Френеля. Для  $m=1,67$  получаем радиус отверстия

$$r_{i \text{ отв}} = \sqrt{m\lambda L} = \sqrt{1,67 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \cdot 2,68} \approx 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ м. ♣}$$

### Дифракция Фраунгофера от щели.

Рассмотрим дифракционную картину от узкой длинной щели шириной  $b$ , на которую нормально падает плоская волна. За щелью расположена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран для наблюдения дифракционной картины.

Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллель-



ных краям щели, становятся источниками вторичных *цилиндрических* волн. Разобьем волновую поверхность в щели на маленькие участки  $dx$ , каждый из которых в точке  $P$  создает колебание

$$dA = Ka_0 \cos(\omega t - k\Delta)$$

Где  $\Delta = x \sin \varphi$  - геометрическая разность хода лучей от края

щели и от луча на расстоянии  $x$  от края. Здесь множителя  $\frac{1}{r}$  в амплитуде нет, поскольку рассматриваются *плоские* волны.

Каждая полоска шириной  $dx$  даёт одинаковый вклад амплитуды

$$Ka_0 = \frac{A_0}{b} dx, \text{ где } A_0 - \text{амплитуда волны.}$$

Тогда для всей щели

$$A_p = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) dx = -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \sin(\omega t - k(x \sin \varphi)) \Big|_0^b$$

$$\begin{aligned} A_p &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} (\sin(\omega t - k(b \sin \varphi)) - \sin(\omega t)) = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \left( \cos\left(\omega t - k(b \sin \varphi) - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= -\frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \cos\left(\frac{kb \sin \varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \\ A_p &= \frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

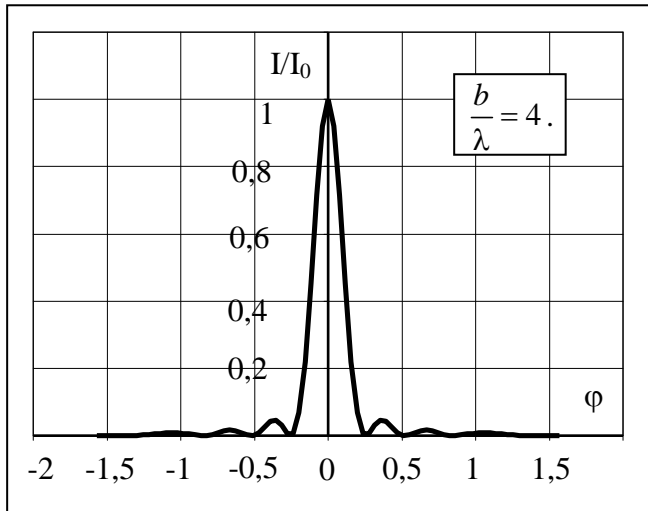
С учетом  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  получаем амплитуду колебания в точке  $P$

$$A_{p0} = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \right|.$$

При  $\varphi \ll 1$  амплитуда в точке  $P$  равна амплитуде падающей волны  $A_{p0} = A_0$ , а при выполнении условия  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число, амплитуда равна нулю  $A_{p0} = 0$ . Поэтому для интенсивности волны в направлении задаваемом углом  $\varphi$



$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)^2}.$$



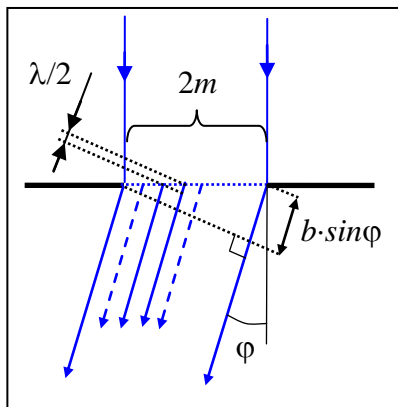
При этом  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

При  $\varphi=0$  находится центральный максимум  $I_{\varphi} = I_0$ , значительно превосходящий по величине остальные максимумы.

Условие минимумов  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число. Центральный максимум ограничен с двух сторон первыми минимумами, положение которых задаётся углом  $\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$ .

Дифракционная картина на экране в этом

случае будет иметь вид чередующихся тёмных и светлых полос, причем яркость светлых сильно убывает по направлению от центральной полосы. Можно сказать, что на экране не будет резкого перехода от света к тени.



Рассмотрим условие минимумов для интерференционной картины от щели подробнее. Перепишем равенство

$$b \sin \varphi = m\lambda \text{ в виде } b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Выражение  $\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2}$  можно трактовать как сумму чётного числа  $2m$  длин полуволн. Т.е. в случае минимума интенсивности всю щель можно разбить на чётное число одинаковых участков так, что разность хода волн от граничных точек двух любых соседних участков до точки

наблюдения равна  $\frac{\lambda}{2}$ . Но в этом случае, как известно, в точке

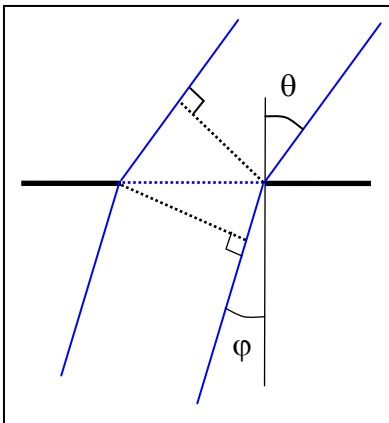
наблюдения будет минимум интенсивности.

Если свет падает на щель не перпендикулярно, а под некоторым углом  $\theta$ , то разность хода волн от краёв щели равна

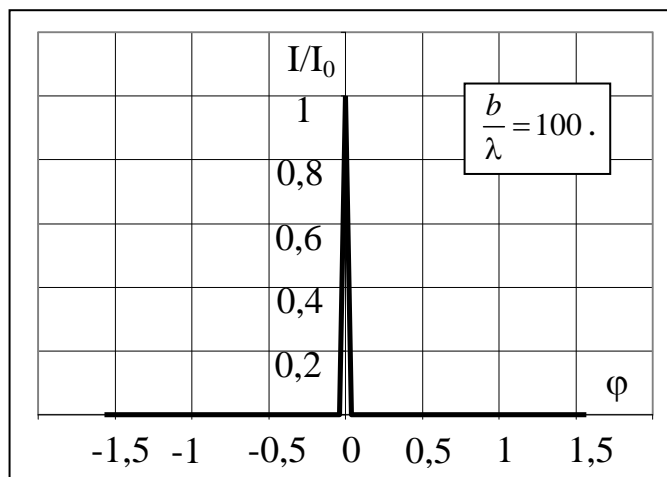
$$\Delta L = b \sin \theta - b \sin \varphi = b(\sin \theta - \sin \varphi), \text{ поэтому, аналогично, усло-}$$

вие минимумов будет иметь вид

$$\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda \text{ или } b(\sin \theta - \sin \varphi) = m\lambda.$$



### Предельный переход от волновой оптики к геометрической.



Рассмотрим положение первого минимума для дифракции на щели

$\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$ . В случае  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  это выражение

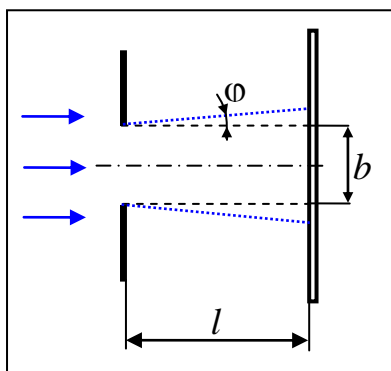
можно записать в виде  $\varphi \approx \pm \frac{\lambda}{b}$ .

Но при  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  относительные интенсивности

всех максимумов, кроме *центрального*, стремятся к нулю  $I/I_0 \rightarrow 0$ . Поэтому на экране

будет видна резкая граница тени от краёв щели. Подобную же картину можно получить применением методов геометрической оптики. Однако в данном случае будет наблюдаться не-

большое различие относительных размеров изображения щели на экране.



При построении методами геометрической оптики размеры щели и изображения на (параллельно расположенном) экране будут одинаковыми независимо от расстояния  $l$  между экраном и перегородкой с щелью.

Если строить изображение щели методом волновой оптики, то *граница тени соответствует первому минимуму*, положение

которого определяется углом  $\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$ . Поэтому относительный размер изображения равен

$$\frac{b + 2 \cdot l \cdot \tan \varphi}{b} \approx \frac{b + 2 \cdot l \cdot \varphi}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \frac{\lambda}{b}}{b} = 1 + 2 \cdot \frac{l \lambda}{b^2}.$$

Следовательно, если выполняется  $\frac{l \lambda}{b^2} \ll 1$ , то результаты построения методами волновой и геометрической оптики практически совпадают.

В обратном случае надо пользоваться методами волновой оптики. Но тогда следует различать ситуации, в которых либо  $\frac{l \lambda}{b^2} \sim 1$ , либо  $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$ . Но дифракционные явления становятся

заметными, когда размер щели (отверстия) или преграды соизмерим с длиной волны света  $b \sim \lambda$ .

Тогда условие  $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$  примет вид  $\frac{l}{b} \gg 1$ . А это означает, что расстояние от перегородки до

экрана много больше размера отверстия (преграды). Следовательно, лучи, падающие на экран

можно считать параллельными друг другу – это дифракция Фраунгофера. Применяя формулу для радиуса зон Френеля при дифракции Фраунгофера  $r_m = \sqrt{ml\lambda}$ , и учитывая, что  $b \sim r_m$ ,

найдем число зон Френеля, которые видно из точки наблюдения. В этом случае  $m = \frac{b^2}{l\lambda} \ll 1$ , т.е.

видно только малую часть первой зоны.

Оставшийся случай  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  соответствует дифракции Френеля. Это можно пояснить, ис-

пользуя формулу для радиусов зон Френеля  $r_m = \sqrt{m \frac{al\lambda}{(a+l)}}$ . Принимая оценку величины отвер-

стия  $b \sim r_m$ , получаем  $b^2 = m \frac{al\lambda}{(a+l)}$ , откуда из  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  следует  $\frac{l\lambda}{\left(m \frac{al\lambda}{(a+l)}\right)} = \frac{(a+l)}{ma} \sim 1$ . Это вы-

ражение означает, что расстояния от источника света соизмеримо с расстоянием от перегородки до экрана. Поэтому волна является сферической и наблюдается дифракция Френеля, при которой из точки наблюдения видно небольшое число зон Френеля.

*Замечание.* Формулу для первого минимума  $b \sin \varphi = \lambda$  можно трактовать следующим образом:

параллельные лучи света после прохождения отверстия шириной  $b$  отклоняются на угол  $\varphi$ , величина которого зависит от отношения  $\frac{\lambda}{b}$ . Это отклонение приводит к расхождению лучей –

*любой пучок параллельных лучей света после дифракции претерпевает «расхождение» на угловую величину, пропорциональную  $\frac{\lambda}{b}$ .*

Т.к.  $\sin \varphi \leq \varphi$  (в радианах), то закон расхождения лучей при дифракции можно записать в виде  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} \leq \varphi$  или  $\varphi \frac{b}{\lambda} \geq 1$ .

Следовательно, пучков света, состоящих из абсолютно параллельных лучей, быть *не может в принципе*. Это «запрещено» волновой природой света. Любое устройство, формирующее параллельные лучи, неизбежно будет приводить к явлению дифракции и, соответственно, к расхождению лучей.

## Лекции 14-15. Дифракция света.

*Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Векторная диаграмма. Дифракция от круглого отверстия и круглого диска. Дифракция Фраунгофера от щели. Предельный переход от волновой оптики к геометрической.*

*Многолучевая интерференция. Дифракционная решётка. Спектральные характеристики дифракционных решёток. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа-Брэгга. Понятие о рентгеноструктурном анализе.*

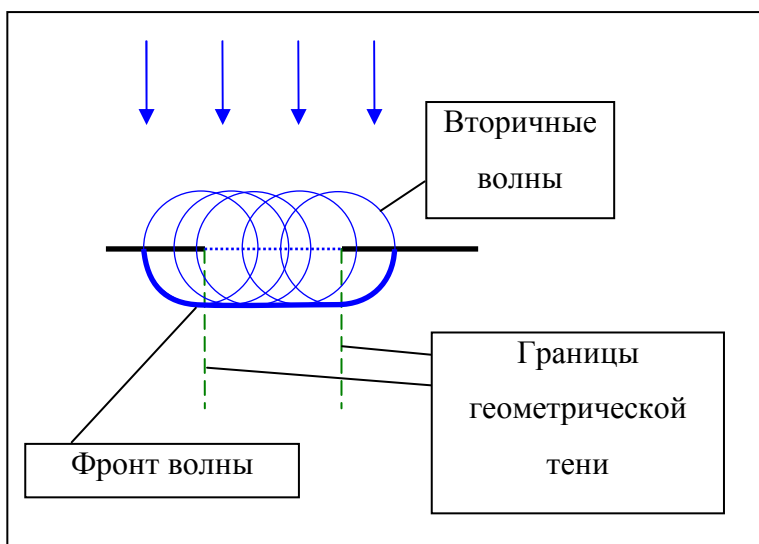
Дифракция – это явление отклонения от прямолинейного распространения света, если оно не может быть следствием отражения, преломления или изгибания световых лучей, вызванным пространственным изменением показателя преломления. При этом отклонение от законов геометрической оптики тем меньше, чем меньше длина волны света.

*Замечание.* Между дифракцией и интерференцией нет принципиального различия. Оба явления сопровождаются перераспределением светового потока в результате суперпозиции волн.

Примером дифракции может служить явление при падении света на непрозрачную перегородку с отверстием. В этом случае на экране за перегородкой в области границы геометрической тени наблюдается дифракционная картина.

Принято различать два вида дифракции. В случае, когда волну, падающую на перегородку, можно описать системой параллельных друг другу лучей (например, когда источник света находится достаточно далеко), то говорят о *дифракции Фраунгофера* или дифракции в параллельных лучах. В остальных случаях говорят о *дифракции Френеля* или дифракции в расходящихся лучах.

При описании явлений дифракции необходимо решить систему уравнений Максвелла с соответствующими граничными и начальными условиями. Однако нахождение точного решения в большинстве случаев является весьма затруднительным. Поэтому, в оптике, часто применяют приближённые методы, основанные на принципе Гюйгенса в обобщённой формулировке Френеля или Кирхгофа.



### Принцип Гюйгенса.

#### Формулировка принципа Гюйгенса.

Каждая точка среды, до которой в некоторый момент времени  $t$  дошло волновое движение, служит источником *вторичных сферических волн*. Огибающая этих волн даёт положение фронта волны в следующий близкий момент времени  $t+dt$ . Радиусы вторичных волн равны произведению фазовой

скорости света на интервал времени  $r = v \cdot dt$ .

Иллюстрация этого принципа на примере волны падающей на непрозрачную перегородку с отверстием показывает, что волна проникает в область геометрической тени. Это является проявлением дифракции.

Однако принцип Гюйгенса не даёт оценок интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях.

### Принцип Гюйгенса-Френеля.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. По амплитудам вторичных волн с учётом их фаз можно найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства.

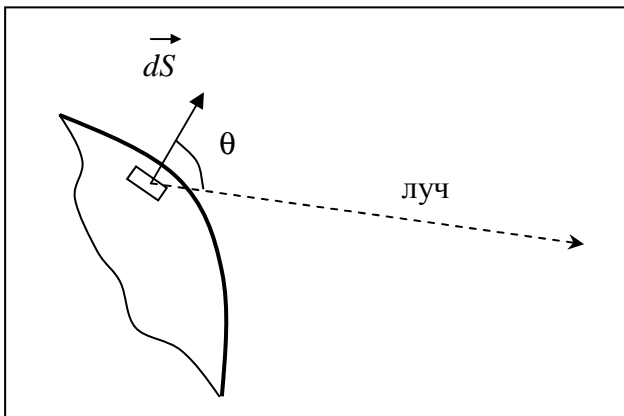
Каждый малый элемент волновой поверхности является источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента  $dS$  и уравнение которой вдоль луча имеет вид

$$dA = K(\theta) \cdot \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

здесь  $a_0$  - коэффициент, пропорциональный амплитуде колебаний точек на волновой поверхности  $dS$ ,  $K(\theta)$  - коэффициент, зависящий от угла  $\theta$  между лучом и вектором  $\vec{dS}$ , и такой, что

при  $\theta = 0$  он принимает максимальное значение,

а при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  - минимальное (близкое к нулю).



Амплитуда результирующего колебания в некоторой точке наблюдения  $P$  определяется аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля, которое вывел *Кирхгоф*:

$$A_P = \iint_S K(\theta) \cdot \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS$$

Интеграл берётся по волновой поверхности, зафиксированной в некоторый момент времени.

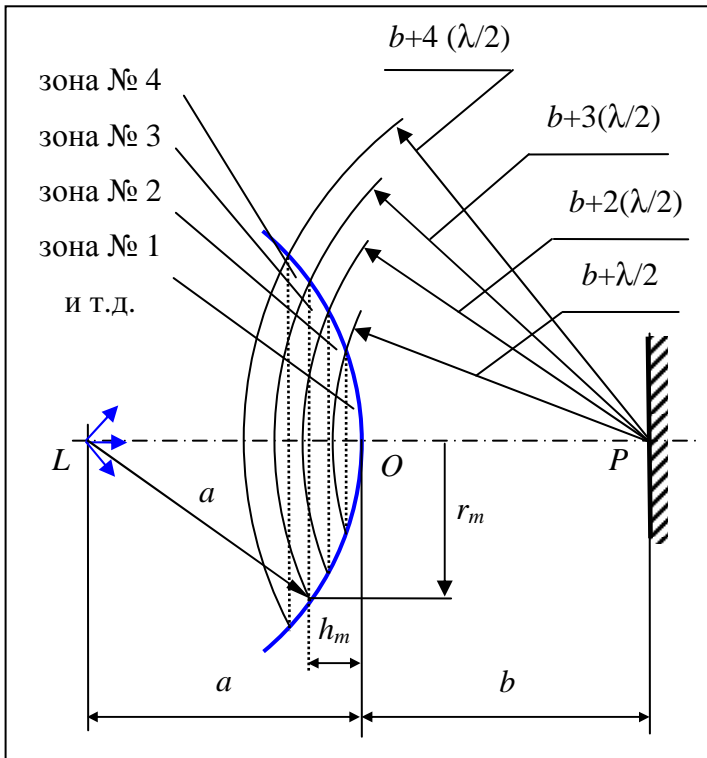
Для свободно распространяющейся волны значение интеграла не зависит от выбора поверхности интегрирования  $S$ .

Явное вычисление амплитуды результирующего колебания по формуле *Кирхгофа* довольно трудоёмкая процедура, поэтому на практике применяют *приближённые методы* нахождения значения этого интеграла.

Для нахождения амплитуды колебаний в точке наблюдения  $P$  всю волновую поверхность  $S$  разбивают на участки (*зоны Френеля*). Предположим, что мы наблюдаем дифракцию в расхо-

дящихся лучах (дифракцию Френеля), т.е. рассматриваем сферическую, распространяющуюся от некоторого точечного источника  $L$ . Волна распространяется в вакууме.

Зафиксируем волновую поверхность в некоторый момент времени  $t$ . Пусть радиус этой поверхности равен  $a$ . Линия  $LP$  пересекает волновую поверхность в точке  $O$ . Предположим, что расстояние между точками  $O$  и  $P$  равно  $b$ . От точки  $P$  последовательно откладываем сферы, радиусы которых  $R_m = b + m \frac{\lambda}{2}$ . Две сосед-



ние сферы «отсекают» на волновой поверхности кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. (Как известно, две сферы пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры этих сфер). Найдём расстояние от точки  $O$  до границы зоны с номером  $m$ . Пусть радиус внешней границы зоны Френеля равен  $r_m$ . Т.к. радиус волновой поверхности равен  $a$ , то  $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2$ . При этом,

$$r_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2.$$

Поэтому  $2ah_m - h_m^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2$ , откуда  $h_m = \frac{mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$ .

Для длин волн видимого диапазона и не очень больших значений номеров  $m$  можно пренебречь слагаемым  $\left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2$  по сравнению с  $m\lambda$ . Следовательно, в этом случае  $h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$  и

для квадрата радиуса получаем выражение  $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = 2a \frac{mb\lambda}{2(a+b)} - \left(\frac{mb\lambda}{2(a+b)}\right)^2$ , в котором

опять можно пренебречь последним слагаемым. Тогда радиус  $m$ -й зоны Френеля (для дифракции в расходящихся лучах)

$$r_m = \sqrt{m \frac{ab\lambda}{(a+b)}}.$$

*Следствие.* Для дифракции в параллельных лучах (дифракции Фраунгофера) радиус зон Френеля получается предельных переходом  $a \rightarrow \infty$ :

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

Теперь сравним площади зон Френеля. Площадь сегмента сферической поверхности, лежащей внутри  $m$ -й зоны, как известно, равна  $S(m) = 2\pi a h_m$ . Зона с номером  $m$  заключена между границами зон с номерами  $m$  и  $m-1$ . Поэтому её площадь равна

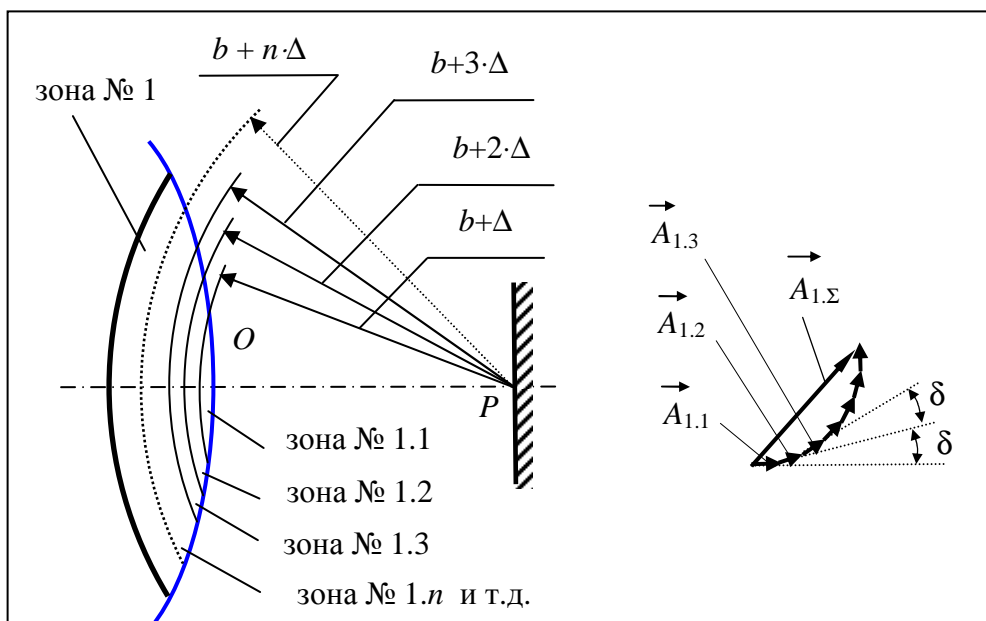
$$S_m = S(m) - S(m-1) = 2\pi a (h_m - h_{m-1}) = 2\pi a \left( \frac{mb\lambda + \left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} - \frac{(m-1)b\lambda + \left((m-1)\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$$

После преобразований выражение примет вид 
$$S_m = 2\pi a \left( \frac{b\lambda + (2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$$

Если пренебречь величиной  $\frac{(2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$ , то из выражения  $S_m = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)}$  следует, что

при небольших номерах площадь зон не зависит от номера  $m$ .

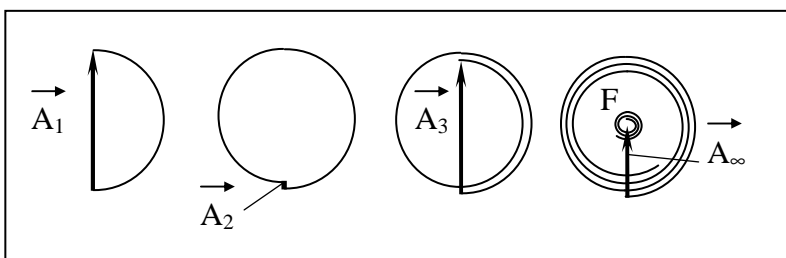
Нахождение результирующей амплитуды в точке наблюдения  $P$  производится следующим образом. Т.к. излучаемые вторичные волны являются когерентными и расстояния от соседних границ до точки  $P$  отличаются на половину длины волны, то разность фаз колебаний от вторичных источников на этих границах, приходящих в точку  $P$ , равна  $\pi$  (как говорят, колебания приходят в противофазе). Аналогично, для любой точки какой-нибудь зоны обязательно



найдётся точка в соседней зоне, колебания от которой приходят в  $P$  в противофазе. Величина амплитуды волнового вектора пропорциональна величине площади зоны  $A_p \sim K(\theta) S_m$ . Но площади зон одинаковые, а с ростом номера  $m$  возрастает угол  $\theta$ , поэтому величина  $K(\theta)$  убывает. Поэтому можно записать упорядоченную последовательность амплитуд  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$ . На амплитудно-векторной диаграмме с учётом разности фаз эта последовательность изображается противоположно направленными векторами, поэтому

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_{m-1} \mp A_m \pm A_{m+1} \mp \dots$$

Разобьём первую зону на большое количество  $N$  внутренних зон таким же способом, как и выше, но теперь расстояния от границ двух соседних внутренних зон до точки  $P$  будут отличаться на малую величину  $\Delta = \frac{\lambda/2}{N}$ . Поэтому разность фаз волн, приходящих волн в точку  $P$  будет равна малой величине  $\delta = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ . На амплитудно-векторной диаграмме вектор амплитуды от каждой из внутренних зон будет повернут на малый угол  $\delta$  относительно предыдущего, поэтому амплитуде суммарного колебания от нескольких первых внутренних зон будет соответствовать вектор  $\vec{A}_{1,\Sigma}$  соединяющий начало и конец ломаной линии. При увеличении номера внутренней зоны суммарная разность фаз будет нарастать и на границе первой зоны станет равной  $\pi$ . Это означает, вектор амплитуды от последней внутренней зоны  $\vec{A}_{1,N}$  направлен противоположно вектору амплитуды от первой внутренней зоны  $\vec{A}_{1,1}$ . В пределе бесконечно большого числа внутренних зон эта ломаная линия перейдет в часть спирали.



Амплитуде колебаний от первой зоны Френеля тогда будет соответствовать вектор  $\vec{A}_1$ , от двух зон -  $\vec{A}_2$  и т.д. В случае, если между точкой  $P$  и источником света нет никаких пре-

град, из точки наблюдения будет видно бесконечное число зон, поэтому спираль будет навиваться на точку фокуса  $F$ . Следовательно, свободной волне с интенсивностью  $I_0$  соответствует вектор амплитуды  $\vec{A}_\infty$ , направленный в точку  $F$ .

Из рисунка видно, что для амплитуды от первой зоны можно получить оценку  $A_1 = 2A_\infty$ , поэтому интенсивность от первой зоны  $I_1 = 4I_0$  - в 4 раза больше интенсивности падающей волны. Равенство  $A_1 = 2A_\infty$  можно трактовать и по-другому. Если для бесконечного числа открытых зон суммарную амплитуду записать в виде



$$A_{\infty} = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$

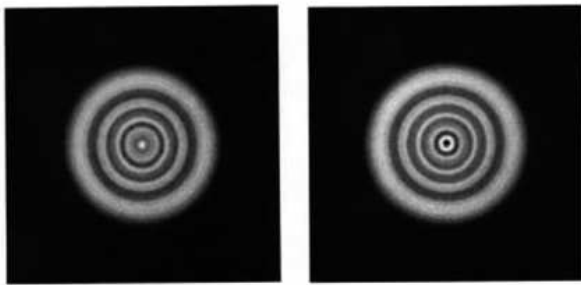
( $m$  – четное число), то из  $A_1 = 2A_{\infty}$  следует оценка  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$ .

*Замечание.* Если каким-то образом изменить фазы колебаний в точке  $P$  от чётных или нечётных зон на  $\pi$ , или закрыть чётные или нечётные зоны, то суммарная амплитуда увеличится по сравнению с амплитудой открытой волны. Таким свойством обладает *зонная пластинка* – плоскопараллельная стеклянная пластинка с выгравированными концентрическими окружностями, радиус которых совпадает с радиусами зон Френеля. Зонная пластинка «выключает» чётные либо нечётные зоны Френеля, что приводит к увеличению интенсивности света в точке наблюдения.



### Дифракция на круглом отверстии.

Рассуждения, приведённые выше, позволяют сделать вывод, что амплитуда колебания в

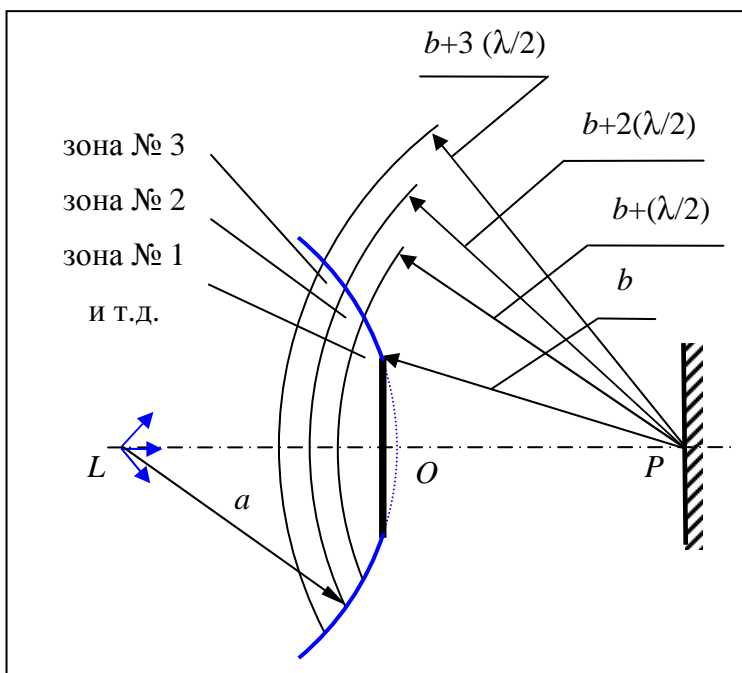


точке  $P$  зависит от числа зон Френеля. Если для точки наблюдения открыто нечётное число зон Френеля, то в этой точке будет максимум интенсивности. Если открыто чётное число зон – то минимум.

Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и тёмных колец. При увеличении радиуса отверстия (и увеличения числа зон Френеля) чередование тёмных и светлых колец будет наблюдаться только вблизи границы геометрической тени, а внутри освещённость практически не будет меняться.

### Дифракция на малом диске.

Рассмотрим схему опыта, в котором на пути световой волны расположен непрозрачный круглый диск, радиус которого соизмерим с радиусами первых зон Френеля.



Для рассмотрения дифракционной

картины помимо обычных зон построим дополнительные зоны от края диска.

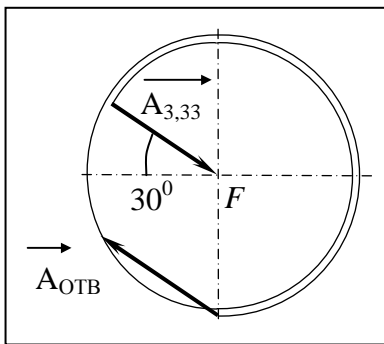
Зоны Френеля от края диска будем строить по прежнему принципу - расстояния от границ двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на половины длины волны. Амплитуда в точке наблюдения

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$



с учётом оценки  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$  будет равна  $A_p = \frac{A_1}{2}$ . Следовательно, в точке наблюдения - в центре геометрической тени *всегда* будет светлое пятно – максимум интенсивности. Это пятно называется *пятном Пуассона*.

*Замечание.* Если диск закрывает только часть обычной первой зоны Френеля, то на экране не будет тени.



*Пример.* На непрозрачный диск диаметром  $D=0,5$  см нормально падает плоская монохроматическая волна, длина которой  $\lambda=700$  нм. Найти диаметр отверстия в центре диска, при котором интенсивность света в точке  $P$  экрана (на оси системы) будет равна нулю. Расстояние между диском и экраном равно  $L=2,68$  м.

*Решение.* Найдём число обычных зон Френеля, которые закрыты диском. Номер зоны найдём из формулы для радиуса при дифрак-

ции Фраунгофера  $m = \frac{1}{L\lambda} \left( \frac{D}{2} \right)^2$

$$m = \frac{1}{2,68 \cdot 7 \cdot 10^{-7}} \left( \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \approx 3,33.$$

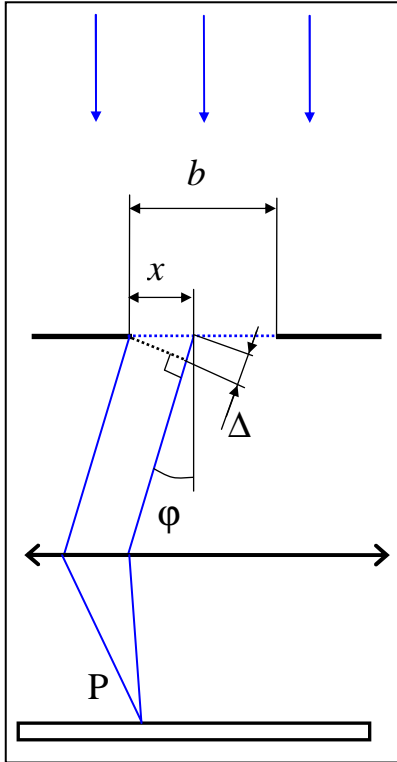
Т.е. диск закрывает 3 целых зоны и еще одну треть. Построим спираль Френеля. Граничной точке этой части в 3,33 зоны соответствует угол наклона к горизонтали, равный  $30^\circ$ . Все остальные зоны открыты, поэтому вектор амплитуды  $\vec{A}_{3,33}$  направлен от граничной точки зоны Френеля в точку  $F$ . Чтобы в точке наблюдения  $P$  интенсивность была равной нулю, надо, чтобы вектор амплитуды света из отверстия  $\vec{A}_{отв}$  был равным по длине, но противоположным по направлению вектору  $\vec{A}_{3,33}$ . Следовательно, он также должен быть наклонен к горизонтали под углом в  $30^\circ$ . В этом случае отверстие должно открывать 1,67 части зоны Френеля. Для  $m=1,67$  получаем радиус отверстия

$$r_{отв} = \sqrt{m\lambda L} = \sqrt{1,67 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \cdot 2,68} \approx 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ м. ♣}$$

### Дифракция Фраунгофера от щели.

Рассмотрим дифракционную картину от узкой длинной щели шириной  $b$ , на которую нормально падает плоская волна. За щелью расположена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран для наблюдения дифракционной картины.

Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллель-



ных краям щели, становятся источниками вторичных *цилиндрических* волн. Разобьем волновую поверхность в щели на маленькие участки  $dx$ , каждый из которых в точке  $P$  создает колебание

$$dA = Ka_0 \cos(\omega t - k\Delta)$$

Где  $\Delta = x \sin \varphi$  - геометрическая разность хода лучей от края

щели и от луча на расстоянии  $x$  от края. Здесь множителя  $\frac{1}{r}$  в амплитуде нет, поскольку рассматриваются *плоские* волны. Каждая полоска шириной  $dx$  даёт одинаковый вклад амплитуды

$$Ka_0 = \frac{A_0}{b} dx, \text{ где } A_0 - \text{амплитуда волны.}$$

Тогда для всей щели

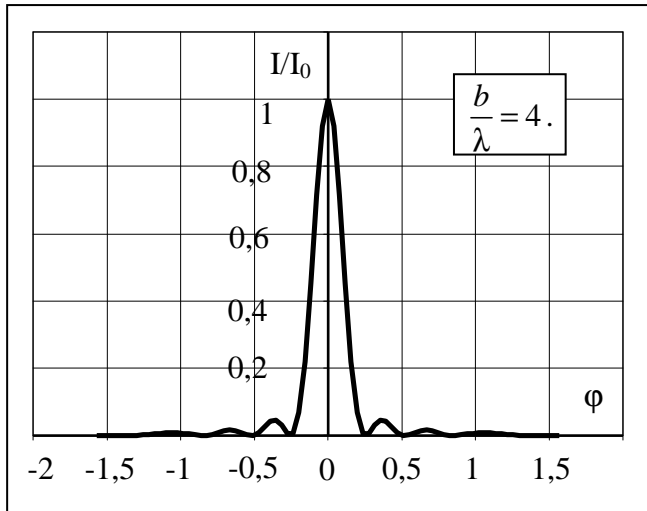
$$A_P = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) dx = -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \sin(\omega t - k(x \sin \varphi)) \Big|_0^b$$

$$\begin{aligned} A_P &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} (\sin(\omega t - k(b \sin \varphi)) - \sin(\omega t)) = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \left( \cos\left(\omega t - k(b \sin \varphi) - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= -\frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \cos\left(\frac{kb \sin \varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \\ A_P &= \frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

С учетом  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  получаем амплитуду колебания в точке  $P$   $A_{P0} = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \right|$ .

При  $\varphi \ll 1$  амплитуда в точке  $P$  равна амплитуде падающей волны  $A_{P0} = A_0$ , а при выполнении условия  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число, амплитуда равна нулю  $A_{P0} = 0$ . Поэтому для интенсивности волны в направлении задаваемом углом  $\varphi$

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)^2}.$$



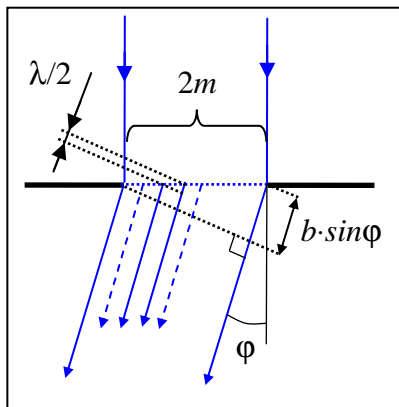
При этом  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

При  $\varphi=0$  находится центральный максимум  $I_{\varphi} = I_0$ , значительно превосходящий по величине остальные максимумы.

Условие минимумов  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число. Центральный максимум ограничен с двух сторон первыми минимумами, положение которых задаётся углом  $\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$ .

Дифракционная картина на экране в этом

случае будет иметь вид чередующихся тёмных и светлых полос, причем яркость светлых сильно убывает по направлению от центральной полосы. Можно сказать, что на экране не будет резкого перехода от света к тени.



Рассмотрим условие минимумов для интерференционной картины от щели подробнее. Перепишем равенство

$$b \sin \varphi = m\lambda \text{ в виде } b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Выражение  $\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2}$  можно трактовать как сумму чётного числа  $2m$  длин полуволн. Т.е. в случае минимума интенсивности всю щель можно разбить на чётное число одинаковых участков так, что разность хода волн от граничных точек двух любых соседних участков до точки

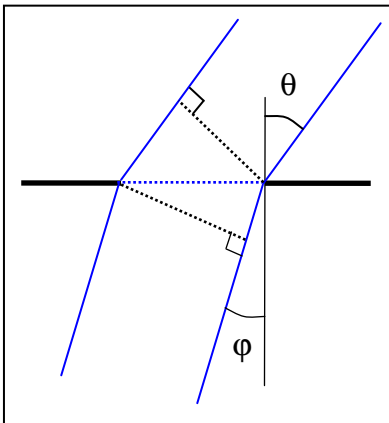
наблюдения равна  $\frac{\lambda}{2}$ . Но в этом случае, как известно, в точке наблюдения будет минимум интенсивности.

Если свет падает на щель не перпендикулярно, а под некоторым углом  $\theta$ , то разность хода волн от краёв щели равна

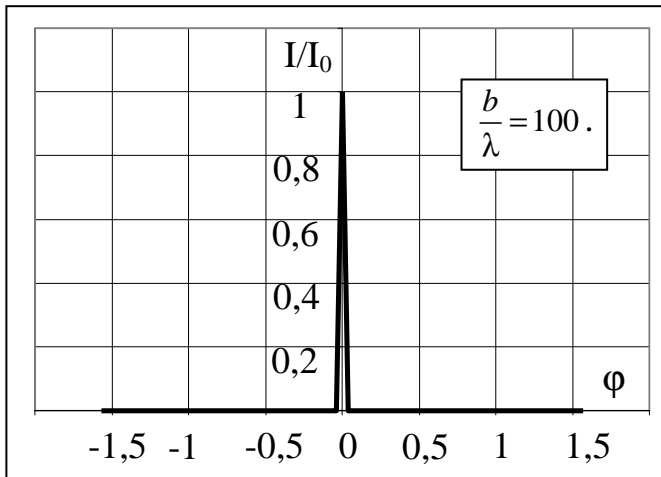
$$\Delta L = b \sin \theta - b \sin \varphi = b (\sin \theta - \sin \varphi), \text{ поэтому, аналогично, усло-}$$

вие минимумов будет иметь вид

$$\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda \text{ или } b (\sin \theta - \sin \varphi) = m\lambda.$$



### Предельный переход от волновой оптики к геометрической.



Рассмотрим положение первого минимума для дифракции на щели

$\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$ . В случае  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  это выражение

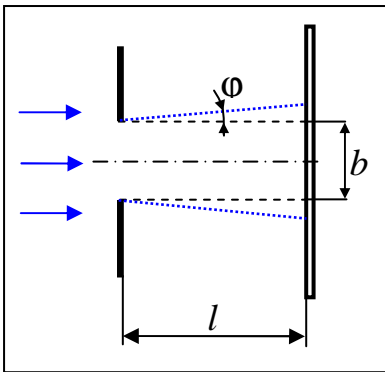
можно записать в виде  $\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$ .

Но при  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  относительные интенсивности

всех максимумов, кроме *центрального*, стремятся к нулю  $I/I_0 \rightarrow 0$ . Поэтому на экране

будет видна резкая граница тени от краёв щели. Подобную же картину можно получить применением методов геометрической оптики. Однако в данном случае будет наблюдаться не-

большое различие относительных размеров изображения щели на экране.



При построении методами геометрической оптики размеры щели и изображения на (параллельно расположенном) экране будут одинаковыми независимо от расстояния  $l$  между экраном и перегородкой с щелью.

Если строить изображение щели методом волновой оптики, то *граница тени соответствует первому минимуму*, положение

которого определяется углом  $\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$ . Поэтому относительный размер изображения равен

$$\frac{b + 2 \cdot l \cdot \tan \varphi}{b} \approx \frac{b + 2 \cdot l \cdot \varphi}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \frac{\lambda}{b}}{b} = 1 + 2 \cdot \frac{l \lambda}{b^2}.$$

Следовательно, если выполняется  $\frac{l \lambda}{b^2} \ll 1$ , то результаты построения методами волновой и геометрической оптики практически совпадают.

В обратном случае надо пользоваться методами волновой оптики. Но тогда следует различать ситуации, в которых либо  $\frac{l \lambda}{b^2} \sim 1$ , либо  $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$ . Но дифракционные явления становятся

заметными, когда размер щели (отверстия) или преграды соизмерим с длиной волны света  $b \sim \lambda$ .

Тогда условие  $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$  примет вид  $\frac{l}{b} \gg 1$ . А это означает, что расстояние от перегородки до экрана много больше размера отверстия (преграды). Следовательно, лучи, падающие на экран

можно считать параллельными друг другу – это дифракция Фраунгофера. Применяя формулу для радиуса зон Френеля при дифракции Фраунгофера  $r_m = \sqrt{ml\lambda}$ , и учитывая, что  $b \sim r_m$ , найдём число зон Френеля, которые видно из точки наблюдения. В этом случае  $m = \frac{b^2}{l\lambda} \ll 1$ , т.е. видно только малую часть первой зоны.

Оставшийся случай  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  соответствует дифракции Френеля. Это можно пояснить, используя формулу для радиусов зон Френеля  $r_m = \sqrt{m \frac{al\lambda}{(a+l)}}$ . Принимая оценку величины отверстия  $b \sim r_m$ , получаем  $b^2 = m \frac{al\lambda}{(a+l)}$ , откуда из  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  следует  $\frac{l\lambda}{\left(m \frac{al\lambda}{(a+l)}\right)} = \frac{(a+l)}{ma} \sim 1$ . Это вы-

ражение означает, что расстояния от источника света соизмеримо с расстоянием от перегородки до экрана. Поэтому волна является сферической и наблюдается дифракция Френеля, при которой из точки наблюдения видно небольшое число зон Френеля.

*Замечание.* Формулу для первого минимума  $b \sin \varphi = \lambda$  можно трактовать следующим образом: параллельные лучи света после прохождения отверстия шириной  $b$  отклоняются на угол  $\varphi$ , величина которого зависит от отношения  $\frac{\lambda}{b}$ . Это отклонение приводит к расхождению лучей – любой пучок параллельных лучей света после дифракции претерпевает «расхождение» на угловую величину, пропорциональную  $\frac{\lambda}{b}$ .

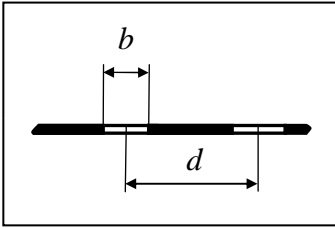
Т.к.  $\sin \varphi \leq \varphi$  (в радианах), то закон расхождения лучей при дифракции можно записать в виде  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} \leq \varphi$  или  $\varphi \frac{b}{\lambda} \geq 1$ .

Следовательно, пучков света, состоящих из абсолютно параллельных лучей, быть *не может в принципе*. Это «запрещено» волновой природой света. Любое устройство, формирующее параллельные лучи, неизбежно будет приводить к явлению дифракции и, соответственно, к расхождению лучей.

## Дифракционная решётка

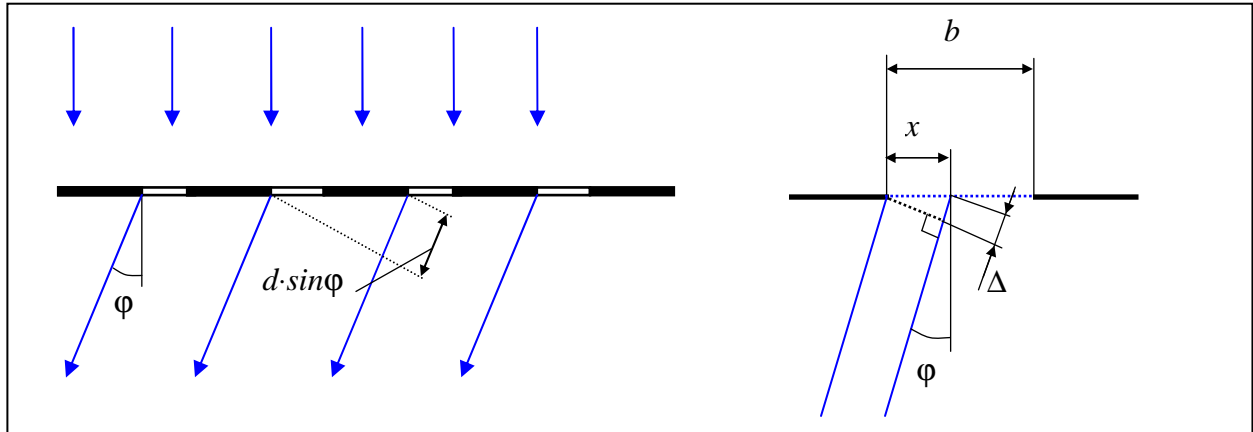
Интерференционная картина, образующаяся при наложении нескольких когерентных волн называется *многолучевой интерференцией*.

Будем исследовать интерференционную картину, получающуюся при дифракции света на системе параллельных одинаковых щелей, расположенных в одной плоскости. Такая система



реализуется в оптическом приборе – прозрачной дифракционной решётке. Обозначения: ширина щели  $b$ , расстояние между серединами соседних щелей  $d$  – эта величина называется *периодом дифракционной решётки*.

Экран, на котором формируется картина, расположен параллельно решётке и находится в фокальной плоскости собирающей линзы. Свет падает на решётку нормально (т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежат щели).



Проведём рассуждения при поиске результирующей амплитуды для системы щелей аналогично рассуждениям для одной щели из предыдущей лекции. Только теперь будем учитывать сумму лучей от  $N$  щелей. Во всех щелях выделим луч на расстоянии  $x$  от левого края щели. Оптическая разность хода таких лучей в соседних щелях равна  $d \sin \varphi$ . Поэтому результирующая амплитуда определяется вкладом лучей от всех щелей

$$\begin{aligned} \delta A_p = & K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + d \sin \varphi)) + \\ & + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + 2d \sin \varphi)) + \dots + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi)) \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений можно воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

где  $i^2 = -1$ . (Эта формула является основной в теории комплексного анализа, и часто применяется в теоретических расчётах).

Отсюда, в частности, следует, что  $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$  и  $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ .

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned}
\delta A_p &= K a_0 \left( \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) + \dots + \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi)) \right) = \\
&= K a_0 \left( \frac{e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))}}{2} + \dots + \frac{e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))}}{2} \right) = \\
&= \frac{K a_0}{2} \left( e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + \dots + e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + \dots + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} \right)
\end{aligned}$$

или, после перегруппировки:

$$\delta A_p = \frac{A_0}{2b} \left( e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \left( 1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} \right) + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \left( 1 + e^{ikd \sin \varphi} + \dots + e^{ik(N-1)d \sin \varphi} \right) \right).$$

Используя формулы для частичной суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

получаем равенство  $1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} = \frac{1 - e^{i(-Nkd \sin \varphi)}}{1 - e^{i(-kd \sin \varphi)}}.$

Затем проводим преобразования

$$\frac{1 - e^{i(-Nkd \sin \varphi)}}{1 - e^{i(-kd \sin \varphi)}} = \frac{\left( e^{\frac{i Nkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) e^{-\frac{i Nkd \sin \varphi}{2}}}{\left( e^{\frac{i kd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) e^{-\frac{i kd \sin \varphi}{2}}} = \frac{\left( e^{\frac{i Nkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i}{\left( e^{\frac{i kd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}.$$

Следовательно

$$1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} = \frac{\left( e^{\frac{i Nkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i}{\left( e^{\frac{i kd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}$$

Аналогично

$$1 + e^{ikd \sin \varphi} + \dots + e^{ik(N-1)d \sin \varphi} = \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}.$$

Тогда

$$\delta A_p = \frac{K a_0}{2} \left( e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} \right),$$



$$\delta A_p = Ka_0 \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \left( \frac{e^{i\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)} + e^{-i\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)}}{2} \right),$$

$$\delta A_p = Ka_0 \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \cos\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right).$$

Учитывая, что  $Ka_0 = \frac{A_0}{b} dx$ , получаем

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^b \frac{A_0}{b} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \cos\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) dx = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \sin\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) \Bigg|_0^b = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \left( \sin\left(\omega t - kb \sin \varphi - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Т.к.

$$\sin \alpha - \sin \beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

то

$$A_p = 2 \frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2} - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)$$

С учетом  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  получаем выражение для амплитуды колебаний в точке наблюдения

$$A_N = 2A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{kb \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \right| = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right|$$

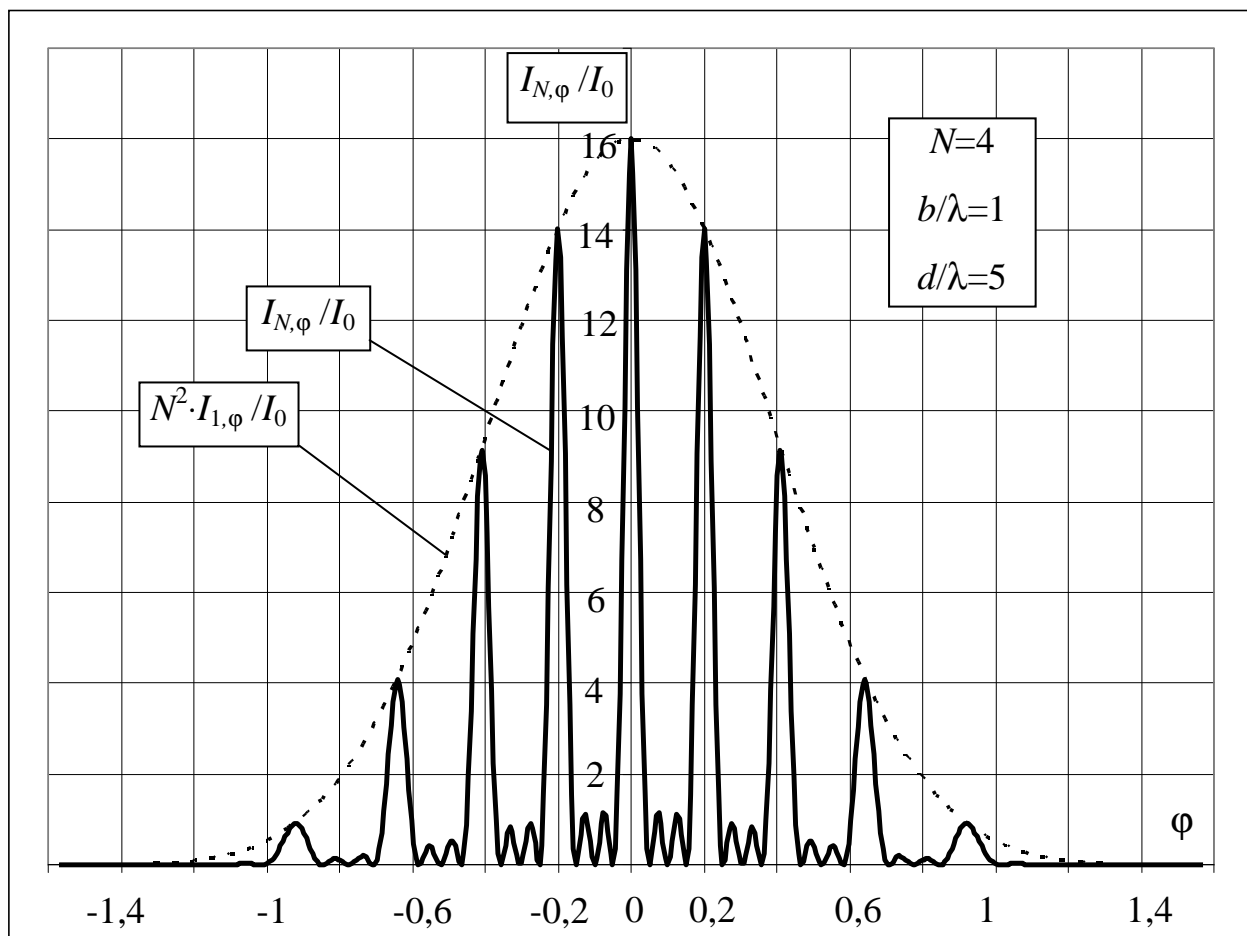
Так как амплитуда колебаний от одной щели равна  $A_1 = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi}$ , то амплитуда от  $N$

щелей  $A_N = A_1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)}$ .

Поэтому интенсивность света в дифракционной картине

$$I_{N,\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right)^2 = I_{1,\varphi} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right)^2,$$

где  $I_{1,\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)^2}$  - интенсивность от одной щели.



Из этих формул следует, что интенсивность центрального максимума ( $\varphi=0$ ) для системы

из  $N$  щелей больше интенсивности центрального максимума от одной щели в  $N^2$  раз

$$I_{N,0} = I_{1,0} N^2$$

Максимумы и минимумы дифракционной картины можно подразделить на *главные* и *вторичные*.

Главные максимумы выделяются условием  $I_{N,\varphi} = I_{1,\varphi} N^2$ , т.е.  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} = \pm N$ .

Пусть  $\alpha = m \cdot \pi + \beta$  ( $m$  – целое число) и  $N$  – целое число, тогда при  $\beta \rightarrow 0$  справедливо:

$$\frac{\sin(N(m \cdot \pi + \beta))}{\sin(m \cdot \pi + \beta)} = (-1)^{(N-1)m} \frac{\sin(N\beta)}{\sin(\beta)} \approx N \cdot (-1)^{(N-1)m}.$$

Поэтому главные максимумы определяются условием  $\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = m\pi$ , т.е.

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Целое число  $m$  называется номером главного максимума или *порядком спектра*.

Главные минимумы соответствуют условию минимума интенсивности от одной щели  $I_{1,\varphi} = 0$ , т.е.  $b \sin \varphi = k\lambda$ , где  $k$  – целое число.

Между главными максимумами находятся вторичные максимумы и минимумы. Вторич-

ным минимумам соответствуют условия  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} = 0$ . Т.к. они находятся между сосед-

ними главными максимума с номерами  $m$  и  $m+1$ , то их положение можно определить из соотношения  $\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right) = 0$  при условии  $m \frac{\lambda}{d} < \sin \varphi < (m+1) \frac{\lambda}{d}$ . Это выполняется, если

$$\sin \varphi = \left(m + \frac{n}{N}\right) \frac{\lambda}{d} \text{ и } 1 < n < N-1. \text{ Целое число } n \text{ называется номером вторичного минимума.}$$

Следовательно, **количество вторичных минимумов между любыми двумя главными максимумами на единицу меньше числа щелей  $N$ .**

Интенсивность вторичных максимумов значительно меньше интенсивности главных максимумов.

Положение главных максимумов и минимумов определяется длиной волны падающего света. Поэтому решетка способна разлагать излучение в спектр, то есть она *является спектральным прибором*. Если свет немонохроматический, то в спектре будут наблюдаться главные

максимумы разных длин волн. Но центральный максимум будет содержать все длины волн. Поэтому он наиболее яркий.

При разложении белого света для первого максимума меньший угол у фиолетового цвета, а больший – у красного. В этом смысле дифракционная решётка как спектральный прибор противоположна стеклянной призме в опыте Ньютона, в которой наибольшее отклонение испытывали лучи фиолетового цвета.

*Замечание.* Интенсивность главных максимумов убывает с ростом номера  $m$ . Как правило, на практике количество достаточно различимых максимумов не превышает 3.

*Замечание.* Если свет падает на дифракционную решетку под углом  $\theta$ , то положение главных максимумов определяется соотношением

$$d (\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda.$$

### Спектральные характеристики дифракционных решёток.

*Угловая дисперсия*  $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\varphi$  - угловое расстояние между двумя главными максимумами

одного порядка, соответствующим волнам, длины которых отличаются на величину  $\delta\lambda$ . Из

формулы  $d \sin \varphi = m\lambda$  получаем  $d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda$ , откуда  $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$ .

*Дисперсионная область.* Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный прибор становится непригодным для исследования соответствующих участков спектра. Максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой еще не происходит перекрытия спектров, называется дисперсионной областью спектрального прибора. Для решетки из условия совпадения максимумов соседних порядков для разных длин волн

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda, \text{ получаем, что должно быть } \Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

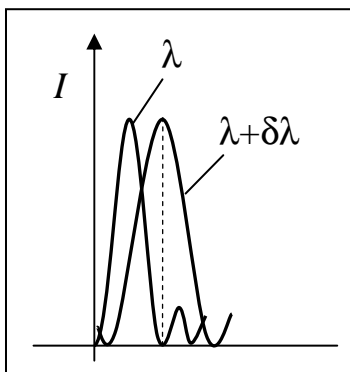
Как правило,  $m \leq 3$ . Поэтому решетки пригодны для исследования широких участков спектра.

*Разрешающая сила* Разрешающей способностью спектрального прибора называется величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \text{ где } \delta\lambda - \text{минимальная разность длин двух волн, при кото-}$$

рой они воспринимаются раздельно друг от друга.

*Критерий разрешения Рэля.* Спектральные линии с близкими значениями  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$  считаются разрешенными (т.е. визуально воспринимаются разделёнными), если главный максимум для одной длины волны совпадает по своему положению с первым минимумом для другой длины волны.



Если главный максимум порядка  $m$  для длины волны  $\lambda + \delta\lambda$

накладывается на первый вторичный минимум того же порядка, то  $m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$ . Откуда  $m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$ , поэтому **разрешающая сила дифракционной решётки** определяется по формуле  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ .

Дифракционные решётки бывают прозрачные и отражающие. Прозрачные изготавливаются из стеклянных или кварцевых пластинок, на поверхность которых нанесены штрихи, непрозрачные для света. На зеркальную поверхность отражательных решёток тоже наносят штрихи. Типичным примером отражательной дифракционной решётки являются компьютерные компакт-диски.

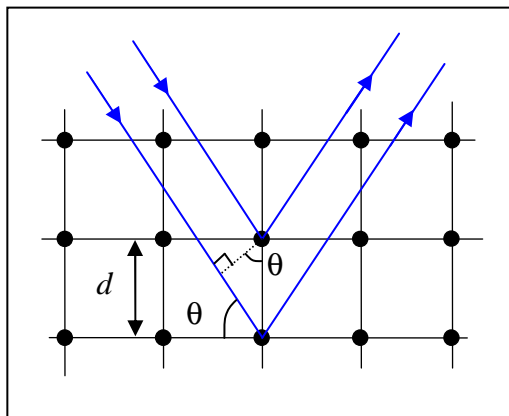
### Дифракция рентгеновских лучей.

Если две дифракционные решетки наложить одна на другую так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными, то такая пластинка будет являться двумерной решёткой.

Естественным примером *трёхмерной* дифракционной решётки являются все кристаллические тела. В расположении атомов у таких тел наблюдается определённая упорядоченность, характеризующаяся пространственным периодом. Период расположения атомов зависит от направления. Среднее расстояние между атомами в кристаллических телах имеет порядок  $10^{-10}$  м, что сопоставимо с длиной волны рентгеновского излучения. Поэтому на кристаллических телах наблюдается дифракция рентгеновских лучей.

Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов была экспериментально обнаружена немецкими физиками М. Лауэ, В. Фридрихом и П. Книппингом в 1912 г.

Под действием рентгеновского излучения каждый атом кристаллической решетки становится вторичным источником сферических волн той же частоты, что и падающих волн. Русский



ученый Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно провести следующим простым способом.

Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости. В дальнейшем мы будем называть их *атомными плоскостями*. Если падающая на кристалл волна плоская, то огибающая вторичных волн, порождаемых атомами, лежащими в такой плоскости, также будет плоской. Таким образом, суммарное излучение атомов, лежащих в одной атомной плоскости, можно пред-

ставить в виде плоской волны, отразившейся от усеянной атомами поверхности по обычным законам отражения. Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решетки. При этом вторичные волны будут практически гасить друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной  $\lambda$ . Разность хода двух волн, отразившихся от соседних атомных плоскостей, равна  $2d \sin \theta$ , где  $d$  – расстояние между атомными плоскостями,  $\theta$  – угол, дополнительный к углу падения и называемый углом *скольжения* падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получают дифракционные максимумы, определяются условием:

$$2d \sin \theta = m\lambda .$$

Соотношение называется *формулой Вульфа – Брэгга*.

Плоскости, в которых наблюдается наибольшее количество атомов, называются *главными атомными* (или *кристаллографическими*) плоскостями. При дифракции рентгеновского излучения на кристалле наблюдается отражение от большого количества различных атомных плоскостей, но наибольшая интенсивность у излучения, отразившегося от главных атомных плоскостей.

*Рентгеновский структурный анализ* (рентгеноструктурный анализ) – это метод исследования атомно-молекулярного строения веществ, преимущественно с кристаллической структурой, основанный на изучении дифракционной картины, полученной при взаимодействии с исследуемым образцом рентгеновского излучения.

Например, *метод Лауэ* – простейший метод получения рентгенограмм от монокристаллов. Кристалл в эксперименте Лауэ неподвижен, а используемое рентгеновское излучение имеет непрерывный спектр. Расположение дифракционных пятен на *лауэграммах* зависит от симметрии кристалла и его ориентации относительно падающего луча. По характеру пятен на лауэграммах можно выявить внутренние напряжения и некоторые др. дефекты кристаллической структуры. Методом Лауэ проверяют качество монокристаллов при выборе образца для его более полного структурного исследования.

*Рентгеновская спектроскопия* – получение рентгеновских спектров испускания и поглощения и их применение к исследованию электронной энергетической структуры атомов, молекул и твёрдых тел. Для получения рентгеновских спектров исследуемое вещество бомбардируют электронами в рентгеновской трубке либо возбуждают флуоресценцию исследуемого вещества под действием рентгеновского излучения.

## Лекция 16. Поляризация света.

*Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Закон Брюстера. Распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах. Двойное лучепреломление. Поляризация света при двойном лучепреломлении. Поляризационные призмы и поляроиды.*

Световые волны – это электромагнитные волны, поэтому они поперечные. В естественном свете все направления колебаний вектора  $\vec{E}$  (относительно луча) являются равновероятными, т.к. волна естественного света – это результат суперпозиции волн от большого количества излучающих атомов.

*Поляризованный свет* – это свет, в котором направление колебаний вектора напряжённости электрического поля каким-то образом упорядочено. Если вектор  $\vec{E}$  колеблется в одной плоскости, содержащей луч, то говорят, что свет является *плоско* (или *линейно*) поляризованным.

Если вектор  $\vec{E}$  вращается вокруг луча, то говорят об *эллиптической* поляризации. (*Круговая* поляризация – это частный случай эллиптической поляризации.)

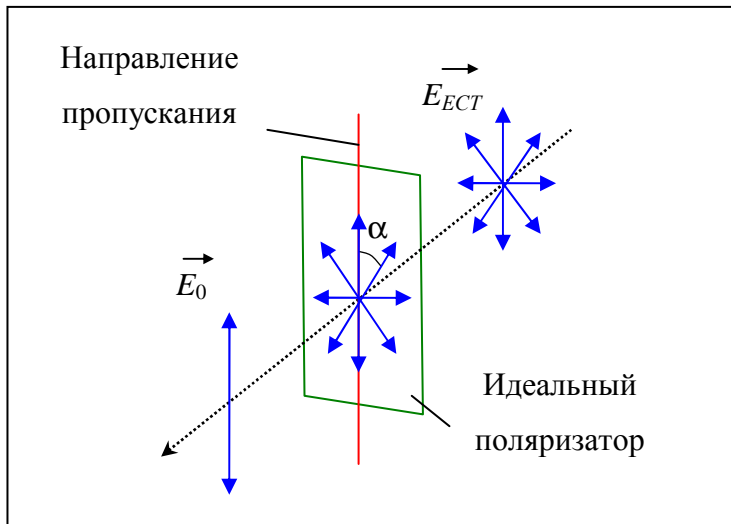
Введём декартову систему координат так, чтобы ось Z была направлена вдоль луча. Тогда световая волна распространяется вдоль оси Z, поэтому вектор напряжённости лежит в плоскости XY, т.е.  $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ . Раскладывая  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ , где  $\vec{E}_x = (E_{0x} \sin(\omega t - kz + \alpha_x), 0, 0)$ ,  $\vec{E}_y = (0, E_{0y} \sin(\omega t - kz + \alpha_y), 0)$  получаем, что конец вектора  $\vec{E}$  совершает одновременно два взаимно перпендикулярных колебания. Т.е. он описывает траекторию – фигуру Лиссажу. В зависимости от разности начальных фаз  $\Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x$  траекторией будет либо отрезок прямой – линейная поляризация, либо – эллипс (эллиптическая поляризация).

*Поляризатор* – это оптический прибор, приводящий к поляризации света. После прохождения через *идеальный поляризатор* получается линейно поляризованный свет, в котором полностью отсутствуют колебания в определённом направлении. После прохождения через *неидеальный поляризатор* получается частично поляризованный свет – свет, у которого интенсивность в определённом направлении преобладает над интенсивностью в другом направлении.

Степень поляризации света  $P = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$ . Для линейно поляризованного света  $P=1$ .

Для естественного света  $P=0$ . Для частично поляризованного  $0 < P < 1$ .

*Замечание.* Степень поляризованности не применима к свету с эллиптической поляризацией.



Рассмотрим идеальный поляризатор, через который проходит естественный свет.

Вещество поляризатора анизотропно по своим свойствам – его свойства в окрестности любой точки зависят от направления. Существует такое *направление пропускания*, что волна, в которой вектор  $\vec{E}_{\parallel}$  параллелен этому направлению, проходит беспрепятственно,

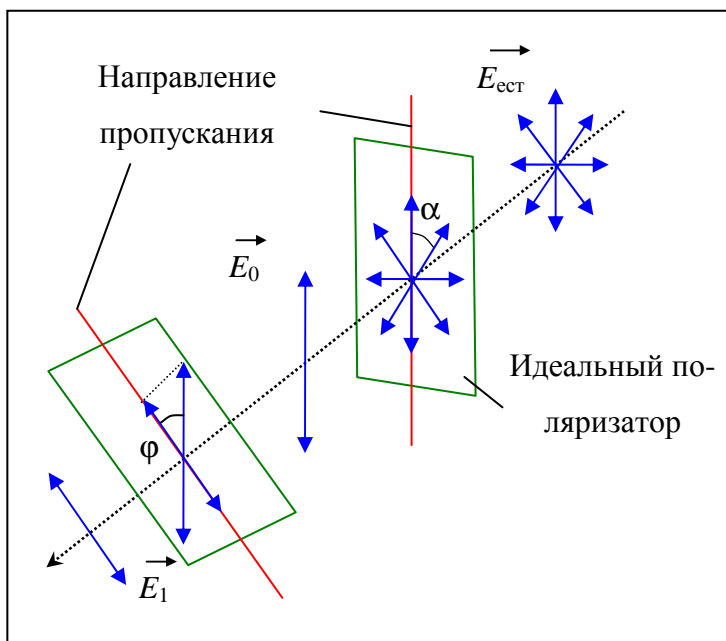
а с перпендикулярным вектором  $\vec{E}_{\perp}$  – нет. Но  $E_{\parallel} = E \cos \alpha$ , поэтому для интенсивности

$I_{\parallel} \sim E_{\parallel}^2 = E^2 \cos^2 \alpha \sim I \cos^2 \alpha$ . В естественном свете все направления колебаний равноправны,

поэтому углу  $d\alpha$  соответствует интенсивность  $I = \frac{I_{ECT}}{2\pi} d\alpha$ . Тогда для интенсивности прошедшего света

$$I_0 = \sum_{\alpha} I_{\alpha\parallel} = \int_0^{2\pi} \frac{I_{ECT}}{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = I_{ECT} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{2\pi} d\alpha = \frac{I_{ECT}}{2}.$$

Т.е. через идеальный поляризатор проходит только половина от интенсивности естественного света.



Теперь рассмотрим два идеальных поляризатора, у которых направления пропускания расположены под углом  $\phi$  друг к другу.

Так как после первого поляризатора свет выходит линейно-поляризованным, то в предыдущем рассуждении всё повториться, за исключением усреднения по углу  $\phi$  (т.к. этот угол зафиксирован). После первого поляризатора выходит свет с интенсивно-

стью  $I_0 = \frac{I_{ECT}}{2}$ , после второго

$I_1 = I_0 \cos^2 \phi$ , поэтому



$$I_1 = \frac{I_{ECT}}{2} \cos^2 \varphi.$$

Это выражение носит название закона Малюса (Этьен Луи Малюс (23 июля 1775 - 23 февраля 1812) - французский инженер, физик и математик).

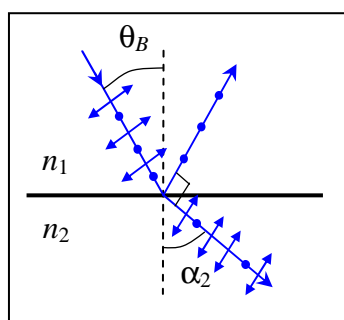
В частности, система из двух идеальных поляризаторов может не пропускать свет полностью. Вторым поляризатор, таким образом, позволяет определить поляризованный свет. Поэтому в такой оптической системе второй поляризатор принято называть *анализатором*.

Однако если между поляризатором и анализатором, направления пропускания у которых взаимно перпендикулярны, вставить третий идеальный поляризатор, направление пропускания у которого не параллельно ни одному из направлений первых двух, то свет будет проходить через такую систему.

*Замечание.* Если свет поляризован по кругу, то интенсивность света не будет меняться при повороте поляризатора.

Для интенсивности частично поляризованного света можно записать выражение

$$I = I_{MIN} + (I_{MAX} - I_{MIN}) \cos^2 \varphi.$$



При падении естественного света на границу раздела прозрачных диэлектриков под углом Брюстера  $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$  отраженная волна света будет линейно поляризованной, т.к. вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости, параллельной границе раздела. (Сэр Дэвид Брюстер; (11 декабря 1781 - 10 февраля 1868) - шотландский физик.) Преломившаяся волна является частично поляризованной. При этом преломившийся луч и преломлённый луч направлены перпендикулярно друг к другу.

Следовательно, если на границу прозрачных диэлектриков падает под углом Брюстера

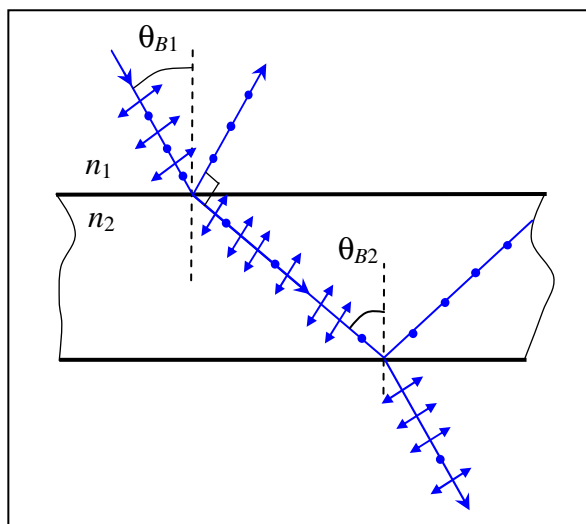
$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$  волна, поляризованная в плоскости падения, то отражённой волны *не будет*.

*Замечание.* В случае, когда волна падает под углом Брюстера, угол преломления тоже является углом Брюстера, но для лучей, идущих в обратном направлении - из 2й среды в 1ю. Действи-

тельно, т.к.  $\alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta_B$ , то  $\tan \alpha_2 = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right)} = \frac{\cos \theta_B}{\sin \theta_B} = \frac{1}{\tan \theta_B} = \frac{n_1}{n_2}$ .

*Пример.* Для границы воздух-стекло  $\operatorname{tg} \theta_{B1} = \frac{n_2}{n_1} \approx 1,5$ , откуда  $\theta_{B1} \approx 56,31^\circ$  для направления света

из воздуха в стекло и  $\operatorname{tg} \theta_{B2} = \frac{n_1}{n_2} \approx 0,67$ , откуда  $\theta_{B2} \approx 33,82^\circ$  для обратного направления.



*Стопа Столетова.* Рассмотрим падение естественного света на стеклянную плоскую пластинку под углом Брюстера  $\operatorname{tg} \theta_{B1} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тогда отражённый луч будет линейно-поляризован. Прошедший луч будет частично поляризован. Но на нижнюю границу он падает тоже под углом Брюстера

$$\operatorname{tg} \theta_{B2} = \frac{n_1}{n_2}, \text{ поэтому отражённый луч также будет}$$

линейно-поляризован, а степень поляризации прошедшего луча увеличится. Если затем прошедший луч направить на такую же плоскопараллельную пластинку, то опять получим отражённые линейно-поляризованные лучи и на выходе из неё прошедший луч с большей степенью поляризации. Если пренебречь поглощением света в пластинках, то в идеальном случае большого числа пластин можно получить линейно-поляризованный отражённый и прошедший свет, интенсивности которых будут одинаковыми и равными половине интенсивности падающего света. Реальная конструкция содержит 8-10 пластин и носит название *стопа Столетова*.

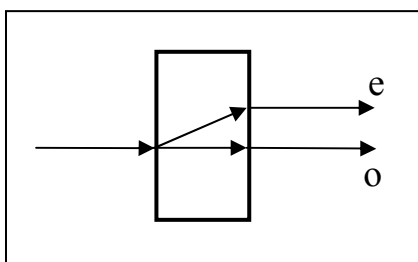
### Двойное лучепреломление.

Если естественный свет проходит через прозрачные кристаллы, решётка которых не является кубической, то наблюдается явление, заключающееся в том, что падающий луч внутри кристалла разделяется на два луча, распространяющихся в разных направлениях с разными скоростями. Это явление носит название *двойного лучепреломления*.

Кристаллы, в которых наблюдается двойное лучепреломление подразделяются на одноосные и двуосные.

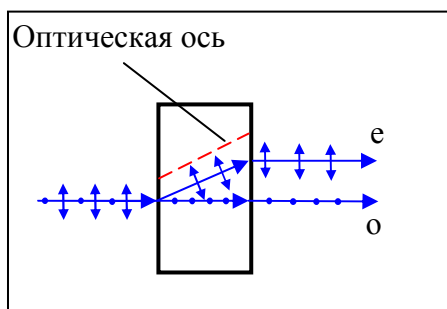
Типичные одноосные кристаллы – исландский шпат, кварц, турмалин.

В таких кристаллах один из преломлённых лучей подчиняется обычным законам преломления,



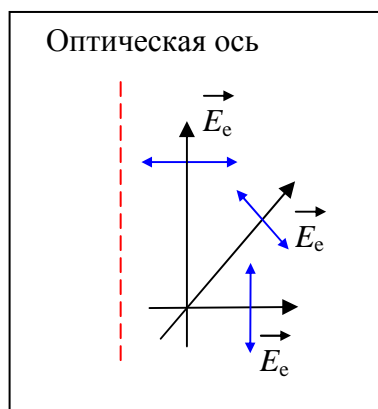
поэтому его называют *обыкновенным* лучом и обозначают «о» (o - ordinary), а второй не подчиняется законам преломления, поэтому его называют *необыкновенным* лучом и обозначают «е» (e - extraordinary). Даже при нормальном падении света необыкновенный луч может отклоняться от нормали. При

этом необыкновенный луч не лежит в плоскости, содержащей падающий луч и нормаль к поверхности.



Но у одноосных кристаллов существует такое направление, что лучи распространяющиеся вдоль него не разделяются. Это направление называется *главной оптической осью* кристалла. Любая плоскость, параллельная оптической оси называется *главной оптической плоскостью* (главным сечением). Если рассмотреть прошедшие лучи, то окажется, что

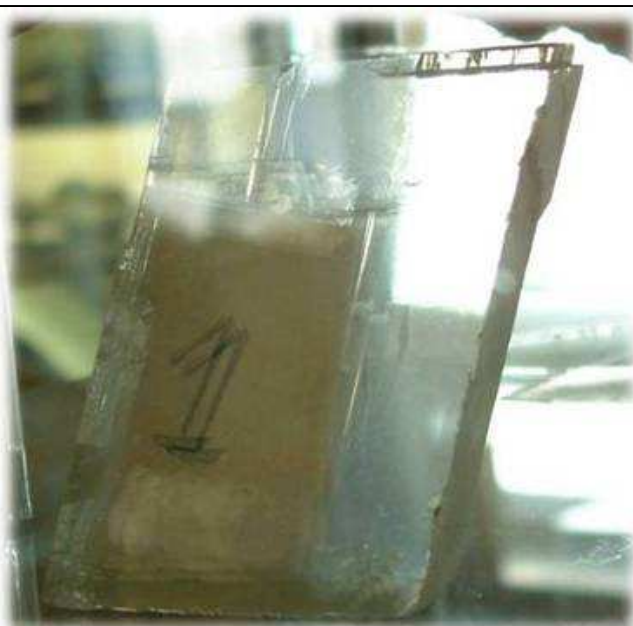
необыкновенный луч линейно поляризован так, что вектор  $\vec{E}_e$  колеблется в главной плоскости содержащей необыкновенный луч, а у обыкновенного луча – в перпендикулярном направлении к главной плоскости, содержащей обыкновенный луч.



У двуосных кристаллов существуют две оптические оси. Оба луча ведут себя как необыкновенные. Типичные представители – слюда, гипс.

Для изготовления поляризаторов используются вещества, у которых ярко выражено явление *дихроизма* – поглощения одного из лучей. Например, в турмалине обыкновенный луч практически полностью поглощается уже при толщине в 1 мм.

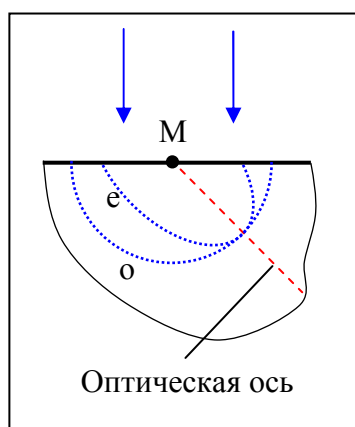
Двойное лучепреломление объясняется анизотропией диэлектрических свойств – величина относительной диэлектрической проницаемости зависит от направления внутри кристалла относительно оптической оси. У обыкновенного луча направле-



Двойное лучепреломление в кристалле исландского шпата (кальцита). Изображение цифры «1» снято сквозь кристалл в Минералогическом музее ОИГГиМ СО РАН.

ние  $\vec{E}_o$  всегда перпендикулярно главной плоскости содержащей этот луч, т.е. всегда перпендикулярно оптической оси, поэтому величина  $\epsilon_o$  не меняется. У обыкновенного луча вектор  $\vec{E}_e$  лежит в главной плоскости, содержащей этот луч, поэтому может быть как параллельным оптической, так и перпендикулярным ему. Следовательно, величина  $\epsilon_e$  не постоянная.

Так как в оптически прозрачной среде  $\mu \approx 1$  и поэтому  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ , то показатели преломления и фазовые скорости обыкновенного и необыкновенного лучей будут разными в направлении перпендикулярном оптической оси. Следовательно, фазовая скорость лучей будет одинаковой вдоль оптической оси и разной в перпендикулярном направлении. Кристаллы принято делить



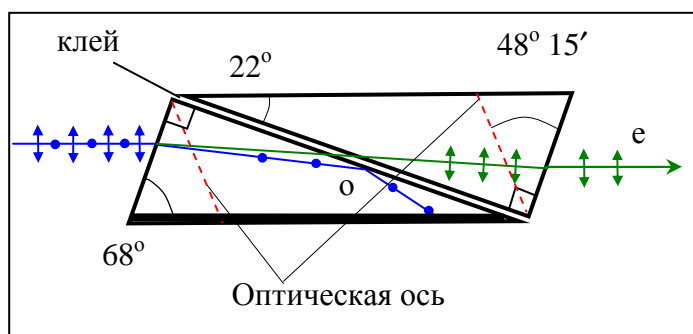
на положительные – это когда  $n_o < n_e$ , и отрицательные – в этом случае  $n_o > n_e$ .

Рассмотрим, например, положительный кристалл. Внутри кристалла фазовая скорость обыкновенного луча больше фазовой скорости необыкновенного луча в направлении перпендикулярном оптической оси. Пусть оптическая ось наклонена к поверхности кристалла. Распространение волны можно описать по принципу Гюйгенса. Тогда обыкновенная и необыкновенная волны, испущенные одновременно точкой M на поверхности, будут двигаться одинаково вдоль

оси. Но в перпендикулярном направлении необыкновенная волна будет отставать.

*Пример.* Призма Николя (николь) - поляризационное устройство, в основе принципа действия которого лежат эффекты двойного лучепреломления и полного внутреннего отражения. Устройство изобрёл Уильям Николь в 1820 г.

Призма Николя представляет собой две одинаковые треугольные призмы из исландского шпата, склеенные тонким слоем канадского бальзама. Призмы вытачиваются так, чтобы торец был скошен под углом  $68^\circ$  относительно направления проходящего света, а склеиваемые стороны составляли прямой угол с торцами. При этом оптические оси кристаллов параллельны друг



другу и образуют угол  $48^\circ 15'$  с торцами призм. Призмы склеены между собой специальным клеем - канадским бальзамом, показатель преломления которого по величине находится между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей

(Призма не может применяться для поляризации ультрафиолета, так как канадский бальзам поглощает ультрафиолет.)

Свет с произвольной поляризацией, проходя через торец призмы испытывает двойное лучепреломление, расщепляясь на два луча - обыкновенный, имеющий горизонтальную плоскость поляризации и необыкновенный, с вертикальной плоскостью поляризации. После чего обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение о плоскость склеивания и поглощается зачернённой нижней гранью. Необыкновенный луч беспрепятственно выходит через противоположный торец призмы.

*Поляроид* (поляризационный светофильтр) - один из основных типов оптических линейных поляризаторов; представляет собой тонкую поляризационную плёнку, заклеенную для защиты от механических повреждений и действия влаги между двумя прозрачными пластинками (плёнками).

Рассмотрим нормальное падение света на тонкую пластинку, вырезанную из одноосного кристалла, в котором оптическая ось направлена параллельно её грани. Т.е. свет падает перпендикулярно к её оптической оси. В этом случае не будет пространственного разделения на лучи «о» и «е». Но т.к. фазовые скорости зависят от направления поляризации волны, то на выходе из пластинки толщиной  $d$  у этих лучей появится оптическая разность хода  $\Delta L = |n_o - n_e| d$ , следовательно, появится разность фаз  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d$ .

В волне, вышедшей из пластинки  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ , где  $\vec{E}_x = (E_{0x} \sin(\omega t - kz + \alpha_x), 0, 0)$ ,

$$\vec{E}_y = (0, E_{0y} \sin(\omega t - kz + \alpha_y), 0) \text{ и } \Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d.$$

получаем, что конец вектора  $\vec{E}$  фигуру Лиссажу. Вид этой фигуры зависит (для данного вещества) от толщины пластинки.

Если  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d = \frac{\pi}{2} + \pi m$  то фигура будет эллипсом, откуда для толщины пластинки  $|n_o - n_e| d = \frac{\lambda}{4} + \frac{m\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$ . Такой случай принято называть «пластинка в четверть волны». Волна, проходящая через пластинку в четверть волны, поляризована эллиптически.

Если  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d = \pi m$  то фигура Лиссажу – отрезок прямой. В этом случае  $|n_o - n_e| d = \frac{m\lambda}{2}$  - и получается «пластинка в полволны». Волна, соответственно, будет линейно-поляризована.

Предположим, что на пластинку падает линейно-поляризованная волна. Тогда пластинка в четверть «превратит» её в эллиптически поляризованную. А пластинка в полволны оставит

линейную поляризацию, но при чётных  $m$  плоскость поляризации не изменится, а при нечётных  $m$  повернётся на  $\pi/2$ .

Возможно также применение подобных пластинок для определения эллиптически поляризованного света – так называемых компенсаторов. Если на пути эллиптически поляризованного света поместить пластинку в «четверть волны», то он превратится в линейно-поляризованный. Линейно-поляризованный свет можно определить с помощью обычного поляризатора.

*Естественное вращение.* Некоторые вещества, называемые *оптически активными*, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через них линейно поляризованного света. К числу таких веществ принадлежат кристаллические тела (например, кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и др.).

Помимо кристаллов двойное лучепреломление наблюдается в *искусственно анизотропных средах* (в стеклах, жидкостях и др.), помещенных в электрическое поле (*эффект Керра*), в магнитном поле (*эффект Фарадея*) (*эффект Коттона — Мутона*), под действием механических напряжений (*Фотоупругость*) и т. п. Во всех этих случаях среда становится оптически анизотропной, причём оптическая ось параллельна направлению электрического поля, магнитного поля и т. п.

*Эффект Керра*, или квадратичный электрооптический эффект - явление изменения значения показателя преломления оптического материала пропорционально второй степени напряженности приложенного электрического поля. (В сильных полях наблюдаются небольшие отклонения от закона Керра.) Эффект Керра был открыт в 1875 году шотландским физиком *Джоном Керром*. Под воздействием внешнего постоянного или переменного электрического поля в среде может наблюдаться двойное лучепреломление, вследствие изменения поляризации вещества.

*Эффект Поккельса* (электрооптический эффект Поккельса) - это явление возникновения двойного лучепреломления в оптических средах при наложении постоянного или переменного электрического поля. Он отличается от эффекта Керра тем, что линейен по полю, в то время как эффект Керра квадратичен. Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии: в силу линейности при изменении направления поля эффект должен менять знак, что невозможно в центрально-симметричных телах. Эффект хорошо заметен на кристаллах ниобата лития или арсенида галлия.

*Эффект Фарадея* (продольный электрооптический эффект Фарадея) - магнитооптический эффект, который заключается в том, что при распространении линейно поляризованного света через оптически неактивное вещество, находящееся в магнитном поле, наблюдается вра-

щение плоскости поляризации света. Эффект был обнаружен *М. Фарадеем* в 1845 году. Эффект Фарадея тесно связан с эффектом Зеемана, заключающимся в расщеплении уровней энергии атомов в магнитном поле. При этом переходы между расщеплёнными уровнями происходят с испусканием фотонов правой и левой поляризации, что приводит к различным показателям преломления и коэффициентам поглощения для волн различной поляризации. Строгое описание эффекта Фарадея проводится в рамках квантовой механики.

*Эффект Коттона - Мутона* (или *эффект Фохта*) - явление возникновения под действием магнитного поля в оптически изотропных средах двойного лучепреломления. При распространении света поперек вектора индукции магнитного поля поляризация остается линейной, то есть наблюдается обычное двойное лучепреломление, в отличие от эффекта Фарадея: при распространении света вдоль магнитного поля возникают две волны, поляризованные по кругу и имеющие разные показатели преломления, то есть наблюдается двойное круговое лучепреломление. Исследования эффекта Коттона - Мутона позволяют получить информацию о структуре молекул, образовании межмолекулярных агрегатов и подвижности молекул.

*Фотоупругость*, (фотоэластический эффект, пьзооптический эффект) - возникновение оптической анизотропии в первоначально изотропных твёрдых телах (в том числе полимерах) под действием механических напряжений. Открыта Т.И. Зеебеком (1813) и Д. Брюстером (1816). Фотоупругость является следствием зависимости диэлектрической проницаемости вещества от деформации и проявляется в виде двойного лучепреломления и дихроизма, возникающих под действием механических нагрузок. При одноосном растяжении или сжатии изотропное тело приобретает свойства оптически одноосного кристалла с оптической осью, параллельной оси растяжения или сжатия. При более сложных деформациях, например при двустороннем растяжении, образец становится оптически двухосным.

Фотоупругость используется при исследовании напряжений в механических конструкциях, расчёт которых слишком сложен. Исследование двойного лучепреломления под действием нагрузок в выполненной из прозрачного материала модели (обычно уменьшенной) изучаемой конструкции позволяет установить характер и распределение в ней напряжений.

*Замечание.* ЖК-монитор состоит из огромного числа маленьких пикселей. Каждый такой



пиксель состоит из триады раскрашенных жидкокристаллических ячеек (красной, зелёной и синей). С двух сторон от жидкокристаллической панели приклеиваются линейные поляризаторы. Сзади располагается подсветка (сами ЖК-ячейки не светятся). Проходя через первую поляризационную плёнку, свет поляризуется. Напряжение на жидкокристаллической ячейке заставляет сворачиваться её в спираль, при этом происходит изме-

нение направления поляризации поляризованного света. После прохождения поляризованного света через вторую поляризованную плёнку происходит снижение интенсивности. Управляя напряжением на ячейке меняют угол «сворачивания» плоскости поляризации света. Таким способом управляют интенсивностью свечения отдельной ячейки. Три ячейки смешиванием образуют цвет пикселя, а весь монитор - полное изображение. Таким образом, на выходе любого цветного ЖК-монитора мы получаем поляризованный свет.

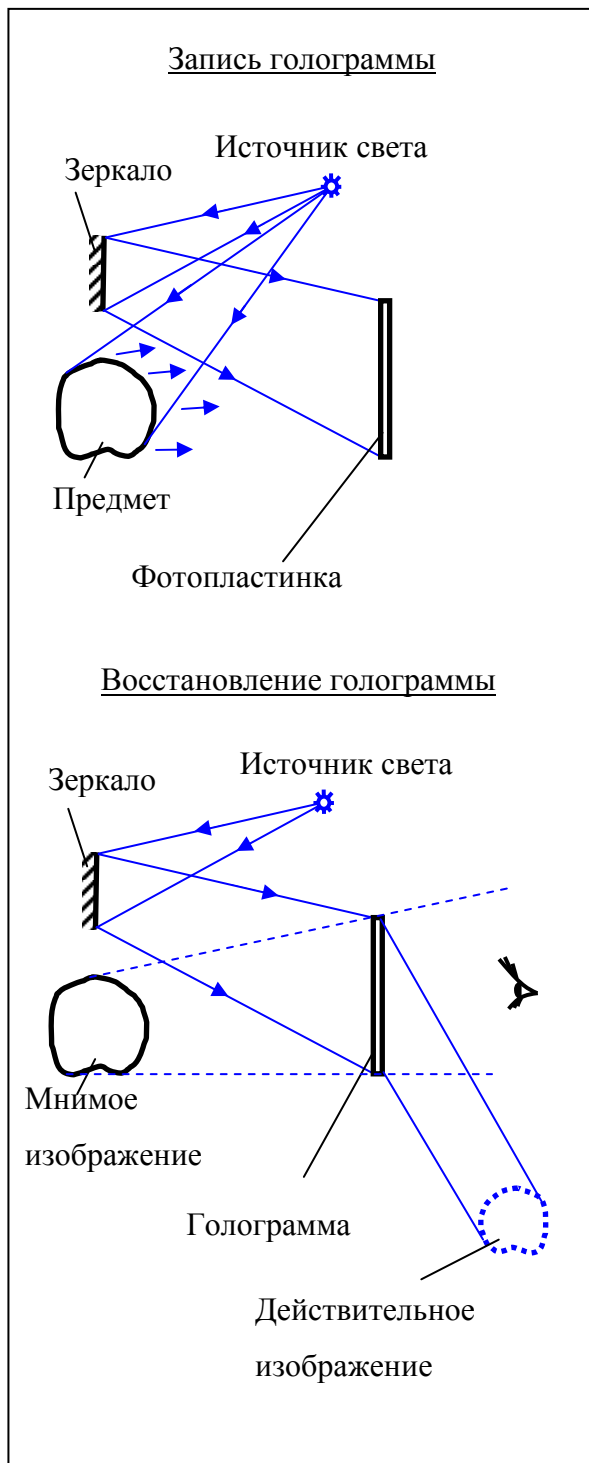
#### Эллипсометрия.

*Эллипсометрия* - совокупность методов изучения поверхностей жидких и твёрдых тел по состоянию поляризации светового пучка, отражённого этой поверхностью и преломлённого на ней. Падающий на поверхность плоско поляризованный свет приобретает при отражении и преломлении эллиптическую поляризацию вследствие наличия тонкого переходного слоя на границе раздела сред. Зависимость между оптическими постоянными слоя и параметрами эллиптически поляризованного света устанавливается на основании формул Френеля. На принципах эллипсометрии построены методы чувствительных бесконтактных исследований поверхности жидкости или твёрдых веществ, процессов адсорбции, коррозии и др. В качестве источника света в эллипсометрии используется монохроматическое излучение зелёной линии ртути, а в последнее время – лазерное излучение, что даёт возможность исследовать микроскопические неоднородности на поверхности изучаемого объекта.



## Лекция 17. Голография.

*Опорная и предметная световые волны. Запись и воспроизведение голограмм. Применение голографии.*



Голография (от греч. *holos* - весь, полный и *grapho* - пишу) - способ записи и восстановления волнового поля, основанный на регистрации интерференционной картины, которая образована волной, отражённой предметом, освещаемым источником света (*предметная волна*), и когерентной с ней волной, идущей непосредственно от источника света (*опорная волна*). Зарегистрированная интерференционная картина называется *голограммой*. Голограмма, освещённая опорной волной, создаёт такое же амплитудно-фазовое пространственное распределение волнового поля, которое создавала при записи предметная волна. Таким образом, в соответствии с принципом Гюйгенса - Френеля, голограмма преобразует опорную волну в копию предметной волны.

Основы голографии были заложены в 1948 физиком Денисом Габором (Великобритания). Однако отсутствие мощных источников когерентного света не позволило ему получить качественные голографические изображения. Второе рождение голография пережила в 1962 – 63 гг., когда американские физики Э. Лейт и Ю. Упатниекс применили в качестве источника света лазер и разработали схему с наклонным опорным пучком, а Ю. Н. Денисюк осуществил запись голограммы в трёхмерной среде, объединив, таким образом, идею Габора с цветной фотографией Липмана. К 1965 – 66 гг. были созданы теоретические и экспериментальные основы голографии.

В последующие годы развитие голографии идёт главным образом по пути совершенствования её применений.

Принцип голографии. Обычно для получения изображения какого-либо объекта фотографическим методом пользуются фотоаппаратом, который фиксирует на фотопластинке излуче-

ние, рассеиваемое объектом. Каждая точка объекта в этом случае является центром рассеяния падающего света; она посылает в пространство расходящуюся сферическую световую волну, которая фокусируется с помощью объектива в небольшое пятнышко на светочувствительной поверхности фотопластинки. Так как отражательная способность объекта меняется от точки к точке, то интенсивность света, падающего на соответствующие участки фотопластинки, оказывается различной. Поэтому на фотопластинке возникает изображение объекта. Это изображение складывается из получающихся на каждом участке светочувствительной поверхности изображений соответствующих точек объекта. При этом трёхмерные объекты регистрируются в виде плоских двухмерных изображений.

В процессе *фотографирования на фотопластинке фиксируется лишь распределение интенсивности, то есть амплитуды электромагнитной волны*, отражённой от объекта (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды). Однако световая волна при отражении от объекта изменяет не только амплитуду, но и фазу в соответствии со свойствами поверхности объекта в данной точке.

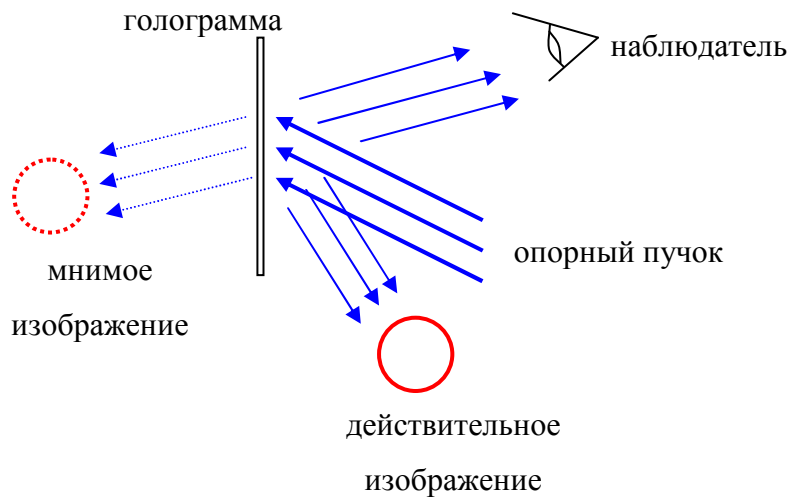
*Голография позволяет получить более полную информацию об объекте, так как представляет собой процесс регистрации на фотопластинке не только амплитуд, но и фаз световых волн, рассеянных объектом.* Для этого на фотопластинку одновременно с волной, рассеянной объектом (предметная волна), необходимо направить вспомогательную волну, идущую от того же источника света (лазера), с фиксированной амплитудой и фазой (опорная волна).

Интерференционная картина (чередование тёмных и светлых полос или пятен), возникающая в результате взаимодействия сигнальной и опорной волн, содержит полную информацию об амплитуде и фазе предметной волны, то есть об объекте. Зафиксированная на светочувствительной поверхности интерференционная картина после проявления называется *голограммой*. Если рассматривать голограмму в микроскоп, то в простейшем случае видна система чередующихся светлых и тёмных полос. Интерференционный узор реальных объектов весьма сложен.

Для того чтобы увидеть изображение предмета, голограмму необходимо просветить той же опорной волной, которая использовалась при её получении. В простейшем случае - интерференции двух плоских волн (двух параллельных пучков) - голограмма представляет собой обычную дифракционную решётку. Плоская волна, падая на такую голограмму, частично проходит сквозь неё, сохраняя прежнее направление, а частично вследствие дифракции преобразуется в две вторичные плоские волны, распространяющиеся под углом  $\theta$ , который связан с шагом решётки  $d$  и длиной световой волны  $\lambda$  формулой:  $d \sin \theta = \pm \lambda$

Одна из волн ничем не отличается от волны, идущей от объекта при непосредственном его наблюдении. Таким образом, при просвечивании голограммы восстанавливается та же са-

мая волна, которая исходила от объекта. В результате этого наблюдатель, смотрящий сквозь



голограмму, увидит мнимое изображение объекта в том месте, где объект находился при съёмке. Другая волна также содержит информацию об объекте и образует его действительное изображение.

Голографическое изображение является объёмным, причём зрительное восприятие этого изображения ничем не отличается от восприятия исходного объ-

екта. Фотографируя мнимое изображение, можно, в зависимости от места расположения фотоаппарата и его фокусировки, зафиксировать все особенности на снимках. Экспериментально такие голограммы впервые получили американские физики Э. Лэйтс и Ю. Упатниекс в 1962.

Действительное изображение также трёхмерно и обладает всеми упомянутыми свойствами; оно как бы висит перед голограммой, но наблюдать его несколько труднее.

Интерференционная структура может быть зарегистрирована светочувствительным материалом одним из следующих способов:

в виде вариаций коэффициента пропускания света или его отражения. Такие голограммы при восстановлении волнового фронта модулируют амплитуду освещающей волны и называются *амплитудными*.

В виде вариаций коэффициента преломления или толщины (рельефа). Такие голограммы при восстановлении волнового фронта модулируют фазу освещающей волны и поэтому называются *фазовыми*. Часто одновременно осуществляется фазовая и амплитудная модуляции. Например, обычная фотопластинка регистрирует интерференционную структуру в виде вариаций почернения, показателя преломления и рельефа. После отбеливания голограммы остаётся только фазовая модуляция.

#### Типы голограмм.

Структура голограммы зависит от способа формирования предметной и опорной волн и от способа записи интерференционной картины. Предмет освещается пучком когерентного света, рассеянная им световая волна, несущая информацию о предмете, падает на фотопластинку, освещаемую опорным пучком. В зависимости от взаимного расположения предмета и пластинки, а также от наличия оптических элементов между ними, связь между амплитудно-фазовыми

распределениями предметной волны в плоскостях голограммы и предмета различна. Если предмет лежит в плоскости голограммы или сфокусирован на неё, то амплитудно-фазовое распределение на голограмме будет тем же, что и в плоскости

При встрече опорной и предметной волн в пространстве образуется система стоячих волн, максимумы которых соответствуют зонам, в которых интерферирующие волны находятся в одной фазе, а минимумы - в противофазе. В схеме Габора опорный источник и предмет расположены на оси голограммы. Осевые голограммы называют также *однолучевыми*, т. к. используется один пучок света, часть которого рассеивается предметом и образует предметную волну, а другая часть, прошедшая через объект без искажения, - опорную волну. При этом все три волны распространяются за голограммой в одном и том же направлении, создавая взаимные помехи.

В схеме Лейта и Упатниекса такие помехи были устранены наклоном опорной волны (*неосевая схема*). В схеме Лейта и Упатниекса когерентный наклонный опорный пучок формируется отдельно (*двулучевая голограмма*). Для двулучевых голограмм требуются фотоматериалы с более высоким пространственным разрешением. Интерференционные максимумы располагаются вдоль поверхности материала в его толще. Эта схема была впервые предложена *Денисюком*. Поскольку при освещении такой голограммы опорным пучком восстановленная предметная волна распространяется навстречу освещающему пучку, такие голограммы иногда называют *отражательными*. Если толщина светочувствительного слоя много больше расстояния между соседними поверхностями интерференционных максимумов, то голограмму следует рассматривать как *объёмную*. Если же запись интерференционной структуры происходит на поверхности слоя или если толщина слоя сравнима с расстоянием между соседними элементами структуры, то голограммы называют *плоскими*.

#### Голограмма Денисюка

В пятидесятых годах двадцатого века советский физик Ю.Н. Денисюк разработал метод регистрации голографических изображений во встречных пучках. В основе метода лежит то обстоятельство, что интерференционное поле в области перекрытия опорной и предметной волн распределено во всем пространстве пересечения. Используя подходящие светочувствительные материалы, трехмерную интерференционную картину возможно зарегистрировать. Для этого используют стеклянные фотопластины, политые слоем желатина, в котором распределены микрорекристаллы галогенидов серебра. Эти фотопластинки должны обладать полной прозрачностью до проявления. Толщина желатинового слоя порядка 10 мкм достаточна, чтобы регистрировать объёмную интерференционную картину, поскольку эта величина много больше, чем длина волны света, порядка 0.5 мкм.

Фотопластинку располагают в оптической схеме таким образом, что с одной стороны ее освещает равномерное поле лазерного света, которое играет роль опорной волны, а с другой свет от того же лазера, отраженный от объекта, голограмму которого необходимо получить. Так как желатин прозрачен для света, в толщине его слоя происходит интерференция этих световых полей, в результате которой происходит формирование интерференционной картины. Интерференционное поле представляет собой сложную структуру, проявляющуюся в виде чередования светлых и темных полос. После проявления и закрепления фотопластины, внутри желатинового слоя оказываются микрообласти с различными показателями преломления и поглощения. При просвечивании голограммы в отраженном свете восстанавливается изображение объекта. Важное для практического применения свойство голограмм Денисюка заключается в возможности восстановления голограммы с помощью расходящегося пучка белого света. Это объясняется тем, что при освещении голограммы условия дифракции выполняются только для тех длин волн и тех направлений распространения света, которые удовлетворяют условиям дифракции. Весь остальной свет проходит сквозь голограмму, не взаимодействуя с ней. Поэтому голограмма видна в том цвете, в котором она была записана. Возможно также получение цветных голографических изображений. Для этого в фотопластинке нужно зарегистрировать три элементарных голограммы при длинах волн синего, зеленого и красного света. При восстановлении голограммы белым светом каждая из элементарных голограмм формирует свое изображение в соответствующем цвете. Эти три изображения образуют полноцветную картину, подобно тому, как это происходит на экране цветного телевизора.

Зарегистрированная на фотопластинке интерференционная структура обычно сохраняется долго, т. е. процесс записи отделён во времени от процесса восстановления (стационарные голограммы). Однако существуют светочувствительные среды (некоторые красители, кристаллы, пары металлов), которые почти мгновенно реагируют фазовыми или амплитудными характеристиками на освещённость. В этом случае голограмма существует только во время воздействия на среду предметной и опорной волн, а восстановление волнового фронта производится одновременно с записью, в результате взаимодействия опорной и предметной волн с образованной ими же интерференционной структурой (динамические голограммы). На принципах динамических голограмм могут быть созданы системы постоянной и оперативной памяти, корректоры излучения лазеров, усилители изображений, устройства управления лазерным излучением, обращения волнового фронта.

#### Свойства голограмм.

Основное свойство голограммы, отличающее её от фотографического снимка, состоит в том, что на снимке регистрируется лишь распределение амплитуды падающей на неё предмет-

ной световой волны, в то время как на голограмме, кроме того, регистрируется и распределение фазы предметной волны относительно фазы опорной волны. Информация об амплитуде предметной волны записана на голограмме в виде контраста интерференционного рельефа, а информация о фазе - в виде формы и частоты интерференционных полос. В результате голограмма при освещении опорной волной восстанавливает копию предметной волны.

В тех случаях, когда при записи голограммы свет от каждой точки объекта попадает на всю поверхность голограммы, каждый малый участок последней способен восстановить всё изображение объекта. Однако меньший участок голограммы восстановит меньший участок волнового фронта, несущего информацию об объекте. Если этот участок будет очень мал, то качество восстановленного изображения ухудшается. В случае голограмм сфокусированного изображения каждая точка объекта посылает свет на соответствующий ей малый участок голограммы. Поэтому фрагмент такой голограммы восстанавливает лишь соответствующий ему участок объекта.

Полный интервал яркостей, передаваемый фотографической пластинкой, как правило, не превышает одного-двух порядков, между тем реальные объекты часто имеют гораздо большие перепады яркостей. В голограмме, обладающей фокусирующими свойствами, используется для построения наиболее ярких участков изображения весь свет, падающий на всю её поверхность, и она способна передать градации яркости до пяти-шести порядков.

Если при восстановлении волнового фронта освещать голограмму опорным источником, расположенным относительно голограммы так же, как и при её экспонировании, то восстановленное мнимое изображение совпадает по форме и положению с самим предметом. При изменении положения восстанавливающего источника, при изменении его длины волны  $\lambda$  или ориентации голограммы и её размера соответствие нарушается. Как правило, такие изменения сопровождаются аберрациями восстановленного изображения.

Яркость восстановленного изображения определяется дифракционной эффективностью, равной отношению светового потока в восстановленной волне к световому потоку, падающему на голограмму при восстановлении. Она определяется типом голограммы, условиями её записи, а также свойствами регистрирующего материала.

Источники света в голографии должны создавать когерентное излучение достаточно большой яркости. Временная когерентность определяет максимальную разность хода  $\Delta L$  между предметным и опорным пучками, допустимую без уменьшения контраста интерференционной структуры. Эта величина определяется шириной спектральной линии  $\Delta\lambda$  излучения (степенью монохроматичности)  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ . Пространственная когерентность излучения определяет способность

создавать контрастную интерференционную картину световыми волнами, испущенными источником в разных направлениях. Для теплового источника она зависит от его размеров.

Лазерное излучение обладает высокой пространственной и временной когерентностью при огромной мощности излучения. Для голограмм стационарных объектов обычно используются лазеры непрерывного излучения, генерирующие в одной поперечной моде, в частности гелий-неоновый лазер ( $\lambda=632,8$  нм) и аргоновый ( $\lambda=488,0$  нм,  $514,5$  нм). Для получения голограмм быстропротекающих процессов обычно применяют импульсные рубиновые лазеры ( $\lambda=694,3$  нм).

### Применение.

Записанные на голограмме световые волны при их восстановлении создают полную иллюзию существования объекта, неотличимого от оригинала. В пределах телесного угла, охватываемого голограммой, изображение объекта можно осматривать с разных направлений, т. е. оно является трёхмерным. Эти свойства голограмм используются в лекционных демонстрациях, при создании объёмных копий произведений искусства, голографических портретов (изобразительная голограмма). Трёхмерные свойства голографических изображений используются для исследования движущихся частиц, капель дождя или тумана, треков ядерных частиц в пузырьковых камерах и искровых камерах. При этом голограмму создают с помощью импульсного лазера, а изображения восстанавливают в непрерывном излучении.

Объёмность изображения делает перспективным создание голографического кино и телевидения. Главная трудность - создание огромных голограмм, через которые как через окно одновременно могло бы наблюдать изображение большое число зрителей. Эти голограммы должны быть динамическими, т. е. меняться во времени в соответствии с изменениями, происходящими с объектом. Голографическое телевидение также встретилось с трудностями создания динамических сред в передающей и приёмной частях телевизионной системы. Другая трудность состоит в недостаточно большой полосе пропускания телевизионного канала, которую необходимо увеличить на несколько порядков для передачи трёхмерных движущихся сцен. С помощью голограммы решается проблема визуализации акустических полей и электромагнитных полей в радиодиапазоне. Если поместить голограмму на то место, где она экспонировалась, и осветить опорным пучком, то восстановится волна, рассеивавшаяся объектом во время экспозиции. Если же объект не убирать, то можно одновременно наблюдать две волны: непосредственно идущую от объекта и восстановленную голограммой. Эти волны когерентны и могут интерферировать. Если с объектом происходят какие-либо изменения, ведущие к фазовым искажениям рассеянной им волны (например, деформация или изменение коэффициента преломления), то это скажется на виде наблюдаемой картины. Появятся интерференционные полосы, форма которых однозначно связана с изменениями. На этом основана голографическая ин-

терферометрия, где, как и в обычной интерферометрии, происходит сравнение нескольких волн. Наблюдаемая интерференционная картина указывает на различие форм сравниваемых волн, однако в обычной интерферометрии они формируются одновременно или с очень небольшой временной задержкой, максимальная величина которой определяется временем когерентности ( $10^{-4}$  -  $10^{-5}$  с). Голограмма же позволяет зафиксировать световую волну и восстановить её копию в любой момент времени. Поэтому голографическая интерферометрия не связана с требованием одновременности формирования волн. Эта же особенность снизила требования к качеству оптических деталей, т. к. обе интерферирующие волны, проходя по одному и тому же каналу, одинаково искажаются погрешностями оптики.

С помощью голограммы можно восстановить интерференционные картины световых волн, рассеянных объектом в разных направлениях. Это позволяет изучать пространственные неоднородности показателя преломления.

Одним из первых применений голографической интерферометрии было исследование механических деформаций. На одной и той же фотопластинке в различные моменты времени записываются две голограммы исследуемого объекта. При восстановлении обе волны, несущие информацию об объекте, накладываются друг на друга. Если за время между экспозициями с объектом произошли какие-либо изменения, то на восстановленном изображении появляется система интерференционных полос. Расшифровывая полученную интерференционную картину, можно определить происшедшие изменения. Этот метод позволяет измерять очень небольшие (порядка долей мкм) деформации объектов со сложной формой поверхности, обусловленные вибрацией, нагреванием и т. п. Его можно использовать также для неразрушающего контроля изделий, для исследования взрывов, ударных волн, для изучения потоков газа в сверхзвуковом сопле, для исследования плазмы и т. д.

Голография применяется для хранения и обработки информации. Информация об объекте, записанная в виде интерференционной структуры, однородно распределена на большой площади. Это обуславливает высокую плотность записи информации и её большую надёжность. Обработка записанного на голограмме массива информации световым пучком происходит одновременно по всей голограмме (с огромной скоростью).

Записывая голограммы в средах со специальными свойствами, можно воспроизводить состояние поляризации предметной волны и даже её изменение во времени.

Голограмма может быть изготовлена не только оптическим методом, но и рассчитана на ЭВМ (цифровая голограмма). Машинные голограммы используются для получения объёмных изображений не существующих ещё объектов. Машинные голограммы сложных оптических поверхностей служат эталонами для интерференционного контроля поверхностей изделий.



## Приложение 1

*Носители тока в средах. Сила и плотность тока. Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы. Закон Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах. (Законы Кирхгофа).*

*Электрический ток* – это упорядоченное движение электрических зарядов, которые называются носителями тока (например -электроны, ионы, макроскопические заряженные частицы – капельки, пылинки и т.д.)

Характеристикой электрического тока является *вектор плотности тока*

$$\vec{j} = qn \langle \vec{v} \rangle ,$$

где  $q$  – заряд носителей,  $n$  - концентрация носителей,  $\langle \vec{v} \rangle$  - вектор средней скорости упорядоченного движения. Единица измерения величины плотности тока А/м<sup>2</sup> (Ампер на метр квадратный).

*Замечание.* Если носители тока совершают хаотическое (тепловое) движение, то в этом случае средняя скорость движения  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$  и электрический ток отсутствует.

Если электрический ток одновременно создают разные носители (например, отрицательные и положительные ионы в электролите), то плотность тока определяется

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = q_+ n_+ \langle \vec{v}_+ \rangle + q_- n_- \langle \vec{v}_- \rangle ,$$

индексы «+» и «-» соответствуют положительно и отрицательно заряженным носителям.

*Замечание.* Рассмотрим прямолинейное движение заряженных частиц под действием электрического поля, вектор напряженности которого  $\vec{E}$  параллелен траектории частиц. В этом случае положительные заряженные частицы будут двигаться в направлении вектора напряжённости, поэтому вектор плотности тока положительных носителей  $\vec{j}_+ = q_+ n_+ \langle \vec{v}_+ \rangle$  будет направлен так же как и вектор напряжённости  $\vec{j}_+ \uparrow \uparrow \vec{E}$ .

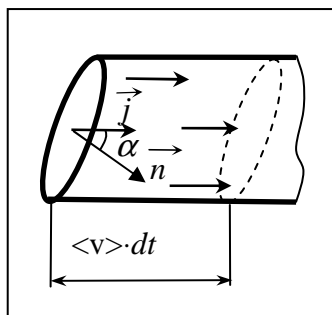
Отрицательно заряженные частицы будут двигаться против направления вектора напряжённости, но так как  $q_- < 0$ , то вектор плотности тока отрицательных носителей  $\vec{j}_- = q_- n_- \langle \vec{v}_- \rangle$  тоже будет направлен как и  $\vec{E}$ !

*За направление электрического тока принимается направление движения положительно заряженных носителей.*

Таким образом, если в некоторой области среды (или тела) задано векторное поле плотности электрического тока, то говорят, что в этой области среды (или тела) «течёт» электрический ток. Соответственно, говорят, что эта область среды (или тела) является *проводником электриче-*

ского тока или, что эта область среды (или тела) *проводит электрический ток*. Типичный проводник – металлы. В металлах носителями тока являются *валентные электроны*.

Если вектор плотности в любой точке тока не зависит от времени, то говорят, что ток *постоянный*. При этом вектор плотности тока может меняться от точки к точке.



*Линия тока* – линия, касательная к которой в каждой точке направлена так же как и вектор плотности тока.

**Силой тока**, текущего в проводнике, называется величина отношения заряда  $dQ$ , переносимого через поперечное сечение проводника (с учетом направления) за промежуток времени  $dt$ , к величине

этого промежутка времени:  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

Докажем, что сила тока в проводнике равна величине потока вектора плотности тока через сечение проводника. Сечение проводника при этом является *ориентированной* поверхностью.

Рассмотрим цилиндрический проводник, в котором задано однородное векторное поле плотности тока  $\vec{j} = qn <\vec{v}>$ . Найдём суммарный электрический заряд, прошедший через сечение проводника за малый промежуток времени  $dt$ , нормаль к которому образует угол  $\alpha$  с вектором плотности тока. Все прошедшие через сечение заряды заполнят косой цилиндр, объём которого  $V = SL \cos \alpha$ . Длина этого цилиндра  $L = <v> dt$ , где  $<v>$  – скорость упорядоченного движения носителей. Величина электрического заряда прошедшего через сечение проводника  $dQ = qN$ , где  $q$  – заряд одного носителя,  $N$  – количество носителей в цилиндре. Если  $n$  – концентрация носителей, то  $N = nV = nSL \cos \alpha = nS <v> dt \cos \alpha$ , поэтому

$$dQ = qnS <v> dt \cos \alpha = jS \cos \alpha dt.$$

Если ввести вектор  $\vec{S} = nS$ , то можно записать  $dQ = (\vec{j}, \vec{S}) dt$ .

Поэтому сила тока в проводнике  $I = \left| \frac{dQ}{dt} \right| = \left| (\vec{j}, \vec{S}) \right|$ .

Если векторное поле плотности тока неоднородное, а сечение не является плоским, то сечение разбивается на малые участки  $dS$ , в пределах каждого из которых поле тока можно считать однородным. Затем суммируются все потоки по этим участкам

$$I = \left| \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) \right|.$$

Сила тока измеряется в Амперах (А):  $A = Кл/с$ .

Сила тока через поперечное сечение проводника, в котором вектор плотности тока

$\vec{j} = const$ , а ориентация сечения совпадает с направлением вектора плотности тока

$$I = \left| \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) \right| = \iint_S j dS = j S_{\perp}, \text{ где } S_{\perp} - \text{площадь поперечного сечения. Откуда } j = \frac{I}{S_{\perp}}.$$

*Замечание.* Иногда удобно силу тока считать алгебраической величиной, т.е. приписывать знак «+» или «-» в зависимости от какого-то направления (т.е. ориентации поперечного сечения). Если при подобном соглашении знак силы тока получается отрицательным, то это означает, что направление движения положительных зарядов в данном случае – противоположное выбранному.

### Закон сохранения электрического заряда.

Рассмотрим поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность, ориентированную наружу:

$$\Phi_{\vec{j}} = \oiint_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Если  $\Phi_{\vec{j}} > 0$ , то это означает, что положительные частицы выходят из объёма, охваченного этой поверхностью (или отрицательные входят в объём). Поэтому алгебраическая величина заряда (с учётом знака) уменьшается внутри объёма, охваченного поверхностью  $S$ :  $\frac{dQ}{dt} < 0$ . Следовательно-

$$\text{но, должно быть справедливо равенство } \Phi_{\vec{j}} = -\frac{dQ}{dt}. \text{ Т.е. } \oiint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{dQ}{dt}.$$

Это соотношение называется *законом сохранения электрического заряда* в интегральной форме.

Если ввести функцию объёмной плотности заряда  $\rho$ , то  $Q = \iiint_V \rho dV$ .

$$\text{Получаем равенство } \oiint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right).$$

$$\text{Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса } \oiint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{j}) dV.$$

$$\text{Если поверхность } S \text{ неподвижная, то можно написать равенство } \frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right) = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV.$$

Тогда из равенства  $\iiint_V \operatorname{div}(\vec{j}) dV = -\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$  следует *закон сохранения заряда в дифференциальной форме*

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0.$$

*Следствие.* Если внутри замкнутой поверхности величина заряда не изменяется  $\frac{dQ}{dt} = 0$ , то это означает, что суммарный поток плотности тока через эту поверхность равен нулю

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Так как замкнутая поверхность ориентирована наружу, то поток векторного поля, направленного наружу - положительный, а направленного внутрь – отрицательный. Поэтому можно сказать, что сила втекающего тока имеет отрицательный знак, а вытекающего - положительный: Тогда

$$I_{\text{ВЫТЕК}} - I_{\text{ВТЕК}} = -\frac{dQ}{dt} = 0$$

Т.е. в случае постоянного заряда сила втекающего тока равна силе вытекающего тока.

### СТОРОННИЕ СИЛЫ.

Кроме кулоновской силы (со стороны электростатического поля) на заряженную частицу могут действовать и другие силы. Например, сила тяжести. В химических источниках тока заряженные частицы движутся под действием сил межмолекулярного взаимодействия т .д..

Силы, действующие на заряженную частицу и отличные от кулоновских, называются *сторонними*. При перемещении заряда эти силы тоже совершают работу  $A_{\text{стор}}$ . Отношение работы сторонних сил по перемещению электрического заряда между двумя точками поля к величине перенесенного заряда называется *электродвижущей силой* (ЭДС):  $\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$ .

Как видно из определения, ЭДС измеряется в Вольтах.

*Пример.* Электрон под действием силы тяжести опустился вниз на 10 м. Найти величину ЭДС силы тяжести между начальной и конечной точками.

*Решение.* Работа силы тяжести  $A = mgH$ , масса электрона  $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, заряд электрона  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Поэтому ЭДС силы тяжести между начальной и конечной точками

$$\mathcal{E} = \frac{mgH}{q} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8 \cdot 10}{-1,6 \cdot 10^{-19}} \approx -55,7 \cdot 10^{-11} \text{ В.} \clubsuit$$

*Напряженностью поля сторонней силы* называется векторная величина  $\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q}$ .

*Пример.* Напряженность поля силы тяжести как сторонней силы равна по величине  $\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{m\vec{g}}{q}$

♣

Для ЭДС между двумя точками поля можно записать  $\int_{\Gamma} (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = \mathcal{E}_{12}$ .

*Полным напряжением* между двумя точками поля называется величина отношения работы всех сил по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда:

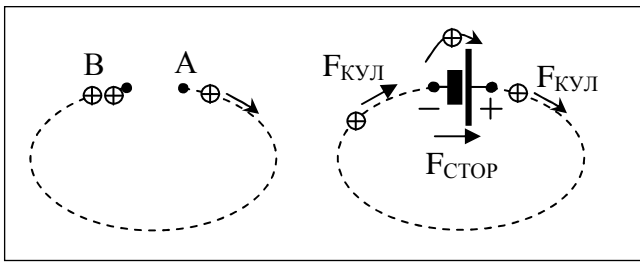
$$U_{\text{полн}} = \left| \frac{A}{q} \right| = \left| \frac{A_{\text{кул}} + A_{\text{стор}}}{q} \right|.$$

Т.к.  $\int_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2$ , то  $\frac{A_{\text{кул}} + A_{\text{стор}}}{q} = \int_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{\Gamma} (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$ , поэтому

$$U_{\text{полн}} = |\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|.$$

Величина  $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$  называется *напряжением* между точками поля.

### ИСТОЧНИКИ ЭДС.




Рассмотрим две точки в пространстве: А и В.

Пусть нам необходимо перенести между этими точками некоторый положительный электрический заряд  $Q$ . Так как этот заряд кратен элементарному  $Q = N \cdot e$ , то фактически требуется перенести  $N$  элементарных положительных зарядов.

Перенос зарядов осуществляют кулоновские силы, работа которых  $A_{\text{кул}} = q(\varphi_A - \varphi_B)$ . Работа кулоновской силы будет *больше нуля*  $A_{\text{кул}} > 0$  при переносе положительного заряда  $q = +e > 0$  если  $\varphi_A > \varphi_B$ . Т.е. кулоновские силы смогут переносить заряд между этими точками, пока  $\varphi_A > \varphi_B$ . Но т.к. положительные заряды будут уходить из точки А, то её потенциал будет уменьшаться. И т.к. заряды будут приходить в точку В, то её потенциал будет увеличиваться. И в какой-то момент времени неравенство  $\varphi_A > \varphi_B$  перестанет выполняться. Т.е. кулоновские силы больше не смогут переносить заряд между этими точками.

Однако, если каким-то образом убирать заряды из точки В и переносить их обратно в А, то неравенство  $\varphi_A > \varphi_B$  будет выполняться. Кулоновские силы не могут сделать такой перенос (т.к. они при этом совершили бы отрицательную работу), поэтому нужны силы, отличные от кулоновских, т.е. сторонние. Таким образом, *сторонние силы должны переносить положительный заряд из области с низким потенциалом в область высокого потенциала*.

Элементы цепи, в которых действуют сторонние силы, называются элементами ЭДС и обозначаются . Область высокого потенциала обозначается «длинной тонкой палочкой», а низкого – «толстой и короткой». Область высокого потенциала обозначают знаком «+», а область низкого «-».

Таким образом, элемент ЭДС работает как «насос», перекачивая положительные заряды из области с низким потенциалом в область с более высоким потенциалом. При этом сторонние силы совершают работу  $A_{\text{стор}} = \mathcal{E} \cdot q$ . Внутри источника ЭДС кулоновские силы совершают от-

рицательную работу  $A_{\text{КУЛ}} = -q(\varphi_A - \varphi_B)$ , так как они препятствуют перемещению положительного заряда от низкого потенциала к высокому.

Суммарная работа всех сил на замкнутой траектории движения зарядов будет равна сумме работ вне элемента ЭДС и внутри ЭДС  $A_{\text{СУМ}} = A_{\text{ВНЕШ}} + A_{\text{ВНУТР}}$ .

Но  $A_{\text{ВНЕШ}} = A_{\text{КУЛ}} = q(\varphi_A - \varphi_B)$ ,  $A_{\text{ВНУТР}} = A_{\text{СТОП}} + A_{\text{КУЛ}} = \mathcal{E} \cdot q - q(\varphi_A - \varphi_B)$

Поэтому на замкнутой линии тока  $A_{\text{СУМ}} = q(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E} \cdot q - q(\varphi_A - \varphi_B) = \mathcal{E} \cdot q$ , т.е. суммарная работа равна работе сторонних сил.

### ЗАКОН ОМА

Опыт показывает, что в большинстве проводников на движущиеся заряженные частицы кроме внешних сил, вызывающих движение, действуют силы сопротивления движению. Поэтому скорость частиц ограничена по величине. При этом величина средней скорости упорядоченного движения заряженной частицы пропорциональна величине внешней силы.

*Пример.* Опишем прямолинейное движение частицы массы  $m$  под действием постоянной внешней силы  $F$  и силы сопротивления  $\vec{F}_C = -r \cdot \vec{v}$ . Второй закон Ньютона вдоль прямой

$ma = F - rv$ . Установившееся значение скорости определяется условием  $a=0$ :  $v = \frac{F}{r}$ . Если

внешняя сила, например, - электрическая, т.е.  $F = qE$ , то величина установившейся скорости пропорциональна напряжённости электрического поля  $v = \frac{q}{r} E$ . ♣

Силы сопротивления могут быть вызваны различными причинами (неоднородностями, нарушениями кристаллической структуры, тепловыми колебаниями и т.д.). Но для данного вещества существует прямая зависимость между величиной средней скорости упорядоченного движения носителей и величиной напряжённости электрического поля или поля сторонних сил

$\langle v \rangle = \mu E$ . Коэффициент  $\mu = \frac{\langle v \rangle}{E}$  называется *коэффициентом подвижности носителей*, единицы измерения  $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ .

*Замечание.* Если в проводнике несколько видов носителей, то у каждого вида свой коэффициент подвижности.

Тогда для вектора плотности тока можно написать  $\vec{j} = qn \langle \vec{v} \rangle = qn\mu\vec{E} = \gamma\vec{E}$ .

Коэффициент  $\gamma = qn\mu$  называется *коэффициентом удельной электропроводности* (удельной проводимости) вещества. Единица измерения удельной проводимости См/м (Сименс/метр). Об-

ратная величина  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  называется *удельным сопротивлением* вещества. Единица измерения удельного сопротивления Ом·м.

Выражение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

является выражением *закона Ома* в дифференциальной форме. Из этого закона следует, в частности, что линии тока и силовые линии электрического поля (поля сторонних сил) в проводнике совпадают.

Участок проводника, на котором действуют сторонние силы, называется *неоднородным*.

Участок проводника, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*.

Будем считать, что неоднородный участок проводника имеет вид цилиндра (постоянного сечения), в котором задано однородное векторное поле плотности тока. Проинтегрируем закон Ома  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  вдоль кривой  $\Gamma$ , являющейся линией тока:

$$\int_{\Gamma} (\vec{j}, d\vec{l}) = \int_{\Gamma} (\gamma \vec{E}, d\vec{l}).$$

Вдоль линии тока  $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}$  и  $\gamma \vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ , поэтому  $(\vec{j}, d\vec{l}) = j dl$  и  $(\gamma \vec{E}, d\vec{l}) = \gamma E dl$ .

Т.к. поперечное сечение и вектор плотности тока взаимно перпендикулярны в каждой точке сечения и вдоль сечения  $j = \text{const}$ , то сила тока через сечение  $I = \left| \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) \right| = \iint_S j dS = j S_{\perp}$ , где  $S_{\perp}$  -

площадь поперечного сечения. Откуда  $j = \frac{I}{S_{\perp}}$ . Тогда  $\left| \int_{\Gamma} (\vec{j}, d\vec{l}) \right| = \frac{I}{S_{\perp}} l$ .

Т.к.  $\left| \int_{\Gamma} (\gamma \vec{E}, d\vec{l}) \right| = \gamma |\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|$ , то получаем соотношение

$$I \frac{l}{S_{\perp}} = \gamma |\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|.$$

Величина  $R = \frac{l}{\gamma S_{\perp}} = \rho \frac{l}{S_{\perp}}$  называется (электрическим) *сопротивлением* проводника. Единицы измерения сопротивления – Ом. Тогда получаем соотношение

$$IR = |\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|.$$

Это выражение называется *законом Ома в интегральной форме*.

Величина силы тока в проводнике прямо пропорциональна полному напряжению на этом проводнике и обратно пропорциональна сопротивлению этого проводника

$$I = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|}{R} = \frac{U_{\text{полн}}}{R}.$$

*Замечание.* Если силу тока считать алгебраической величиной, то это выражение можно записать в виде  $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$ .

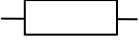
На однородном участке проводника не действуют сторонние силы, т.е.  $\mathcal{E}_{12} = 0$ . Тогда закон Ома для однородного участка  $I = \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{R}$  (или с учётом знака  $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$ ).

Величина силы тока на однородном участке прямо пропорциональна напряжению на участке и обратно пропорциональна сопротивлению участка:  $I = \frac{U}{R}$ .

*Замечание.* Из соотношения  $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$  видно, что на однородном проводнике положительным направлением для тока является направление от точки с высоким потенциалом к точке с низким потенциалом  $\Phi_1 > \Phi_2$ . Поэтому можно записать вдоль положительного направления тока:  $\Phi_2 = \Phi_1 - IR$  или  $\Phi_2 = \Phi_1 - U$ . Т.е. потенциал на однородном участке уменьшается в направлении тока на величину напряжения на этом участке. Поэтому часто напряжение называют падением напряжения.

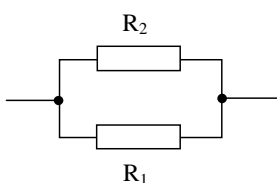
Соединение проводников, по которым может протекать электрический ток, называется электрической цепью.

Узлом электрической цепи называется место соединения более двух проводников. Так как заряд каждого узла остается постоянным, то сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла (Это утверждение называется 1-е правило Кирхгофа).

Элемент электрической цепи, сопротивление которого значительно отличается от сопротивления проводников цепи, называется резистором (сопротивлением). Резистор условно обозначается прямоугольником .

### Расчет сопротивлений при параллельном соединении

Пусть сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно. Найдём общее сопротивление этого участка. Пусть напряжение на этом участке равно  $U$ . Тогда на каждом из сопротивлений



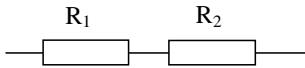
$U_1 = U_2 = U$ . Сила тока в цепи равна сумме сил токов через каждое из сопротивлений:  $I = I_1 + I_2$  или

$$\frac{U}{R_{\text{общ}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Таким образом, при параллельном соединении сопротивления складываются по закону обратных чисел.



## Расчет сопротивлений при последовательном соединении:



Так как сопротивления соединены последовательно, то сила тока одинаковая, а напряжение равно сумме напряжений на каждом из участков

$$U = U_1 + U_2 \text{ или } I \cdot R_{\text{общ}} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2.$$

Поэтому  $R_{\text{общ}} = R_1 + R_2$ . При последовательном соединении сопротивления суммируются.

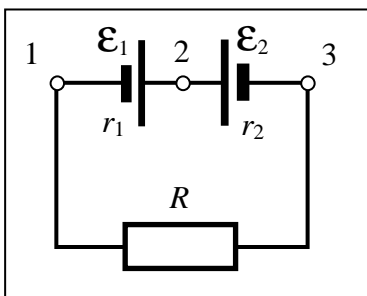
## Закон Ома для замкнутой неразветвлённой цепи.

Если неразветвлённая цепь замкнута, то в выражении  $IR = |\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}|$   $\varphi_1 = \varphi_2$ , поэтому

$$I = \frac{|\mathcal{E}_{\text{общ}}|}{R_{\text{общ}}}.$$

Сила тока в неразветвлённой замкнутой цепи равна отношению суммарной ЭДС (с учётом знаков) к суммарному сопротивлению. Положительным направлением для тока является направление, для которого сумма ЭДС больше нуля.

*Правило знаков для ЭДС:* если ток данного направления направлен внутри ЭДС от минуса к плюсу, то величина ЭДС считается положительной, и наоборот.



*Пример.* Рассмотрим замкнутую неразветвлённую цепь, содержащую два элемента ЭДС и один резистор. Элементы ЭДС включены «навстречу», т.к. знак «+» одного элемента соединен со знаком «+» другого. В цепи выделены три точки (белые кружки) 1, 2, 3.

Пусть  $\mathcal{E}_1 = 20$  В,  $\mathcal{E}_2 = 10$  В,  $R = 5$  Ом,  $r_1 = 3$  Ом,  $r_2 = 2$  Ом.

Выберем сначала за положительное направление для тока направление

в контуре против часовой стрелки. Тогда по правилу знаков для ЭДС:  $\mathcal{E}_1 < 0$ ,  $\mathcal{E}_2 > 0$  и

$\mathcal{E}_{\text{общ}} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = -10$  В. Поэтому положительное направление для тока в контуре – по часовой

стрелке и  $\mathcal{E}_{\text{общ}} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 10$  В. Все сопротивления считаются положительными, поэтому

$R_{\text{общ}} = R + r_1 + r_2 = 10$  Ом. Следовательно, сила тока  $I = \frac{|\mathcal{E}_{\text{общ}}|}{R_{\text{общ}}} = 1$  А. Найдем напряжение на резисторе.

Так положительное направление для тока в контуре – по часовой стрелке и участок цепи 3-1 является однородным, то  $\varphi_1 = \varphi_3 - IR$ . Т.е.  $U_{31} = |\varphi_3 - \varphi_1| = IR = 5$  В.

Теперь найдем напряжения на неоднородных участках цепи между точками 1 и 2, 2 и 3.

Вдоль положительного направления для тока от точки 1 к точке 2:  $\varphi_2 = \varphi_1 - Ir_1 + \mathcal{E}_1$ . Поэтому

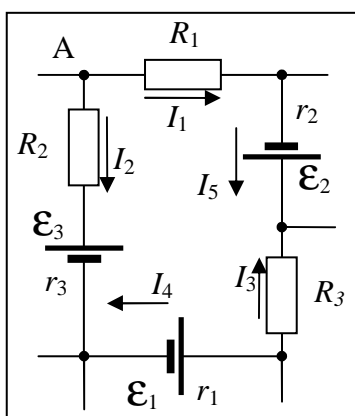
$U_{12} = |\varphi_1 - \varphi_2| = |-\mathcal{E}_1 + Ir_1| = |-20 + 3| = 17$  В. В данном случае, хоть ток и течёт от 1 к 2, но  $\varphi_2 > \varphi_1$  потому что участок цепи *не является однородным!*

Теперь вдоль положительного направления для тока от точки 2 к точке 3:

$$\varphi_3 = \varphi_2 - Ir_2 - \mathcal{E}_2. \text{ Т.е. } U_{23} = |\varphi_2 - \varphi_3| = Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 12 \text{ В.}$$

### Расчет разветвленных электрических цепей.

Одним из методов расчёта токов в электрических цепях является метод, основанный на двух правилах Кирхгофа. Первое правило нам уже известно: *сумма токов, втекающих в узел равна сумме токов, вытекающих из узла.*



Чтобы получить второе правило, рассмотрим любой замкнутый контур в какой-то разветвлённой цепи. (Этот контур сам может содержать замкнутые контуры). На каждом неразветвлённом участке произвольно зададим положительное направление для тока (стрелками). Возьмём произвольную точку контура (например, точку А) и совершим обход вдоль контура в любом направлении (например, по часовой стрелке):

$$\varphi_A - I_1 R_1 - I_5 r_2 + \mathcal{E}_2 + I_3 R_3 - I_4 r_1 - \mathcal{E}_1 + I_2 r_3 + \mathcal{E}_3 + I_2 R_2 = \varphi_A$$

(здесь учтено, что на сопротивлении потенциал убывает при движении по положительному направлению тока и возрастает при движении против положительного направления). Т.е.

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = I_1 R_1 + I_5 r_2 - I_3 R_3 + I_4 r_1 - I_2 r_3 - I_2 R_2.$$

Введём напряжения на сопротивлениях

$$U_{R_1} = I_1 R_1, U_{r_2} = I_5 r_2, U_{R_3} = I_3 R_3, U_{r_1} = I_4 r_1, U_{r_3} = I_2 r_3, U_{R_2} = I_2 R_2$$

и получим второе правило Кирхгофа

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = U_{R_1} + U_{r_2} - U_{R_3} + U_{r_1} - U_{r_3} - U_{R_2}$$

*в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме напряжений.*

Если направление тока на сопротивлении совпадает с направлением обхода, то напряжение на сопротивлении берётся со знаком «+», если нет – то «-». В примере направления токов совпадают с направлением обхода на сопротивлениях  $R_1$ ,  $r_2$ ,  $r_1$ . Поэтому для них напряжения берутся со знаком «+».

Для элементов ЭДС правило следующее:

1) сначала определяется знак по направлению тока через элемент ЭДС обычным способом – если он направлен внутри от «-» к «+», то считается, что  $\mathcal{E} > 0$ ,

2) далее вводится *поправка* на направление обхода – если ток через ЭДС направлен по направлению обхода, то знак ЭДС не меняется, а если против – то меняется на противоположный. Например, на элементе с ЭДС величиной  $\mathcal{E}_1$ , ток внутри течёт от «+» к «-», поэтому по общему правилу надо брать  $-\mathcal{E}_1$ , направление тока на этом элементе совпадает с направлением обхода, поэтому поправка знак не меняет.

На элементе с ЭДС величиной  $\mathcal{E}_2$ , ток внутри течёт от «-» к «+», поэтому по общему правилу надо брать  $+\mathcal{E}_2$ , направление тока на этом элементе совпадает с направлением обхода, поэтому поправка знак не меняет.

На элементе с ЭДС величиной  $\mathcal{E}_3$ , ток внутри течёт от «+» к «-», поэтому по общему правилу надо брать  $-\mathcal{E}_3$ , направление тока на этом элементе не совпадает с направлением обхода, поэтому поправка меняет знак  $-(-\mathcal{E}_3) = +\mathcal{E}_3$ .

*Замечания.*

1) Может показаться, что второе правило Кирхгофа содержит произвол в записи уравнений в зависимости от направления обхода. Чтобы показать, что это не так, пройдем от точки А вдоль контура против часовой стрелки:

$$\varphi_A - I_2 R_2 - I_2 r_3 - \mathcal{E}_3 + I_4 r_1 + \mathcal{E}_1 - I_3 R_3 + I_5 r_2 - \mathcal{E}_2 + I_1 R_1 = \varphi_A$$

откуда получаем такое же уравнение

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = I_1 R_1 + I_5 r_2 - I_3 R_3 + I_4 r_1 - I_2 r_3 - I_2 R_2.$$

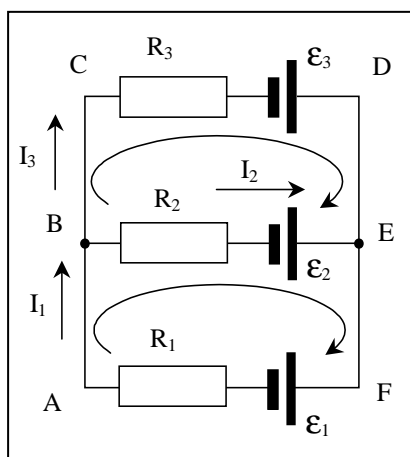
2) Произвол в расстановке направлений токов приводит к тому, что при решении могут получаться значения силы тока со знаком минус – это означает, что для данного тока положительное направление надо выбрать противоположным.

3) Количество уравнений на токи по первому правилу Кирхгофа на единицу меньше количества узлов, а количество уравнений по второму правилу меньше числа контуров тоже на единицу. Поэтому общее число уравнений равно числу неизвестных значений токов.

4) Недостатком метода, основанного на двух правилах Кирхгофа, является возникающее при этом большее число уравнений, решение которых является порой весьма трудоёмкой задачей.

*Пример.* Найти величины и направления токов в схеме, если  $R_1=2$  Ом,  $R_2=2$  Ом,  $R_3=2$  Ом,  $\mathcal{E}_1=2$  В,  $\mathcal{E}_2=4$  В,  $\mathcal{E}_3=6$  В. Внутренние сопротивления источников ЭДС считать равными нулю.

*Решение.* Проставим произвольным образом направления токов. Схема содержит два узла, поэтому имеем одно уравнение для токов, например, в левом узле (В):  $I_1=I_2+I_3$ .



Количество замкнутых контуров в схеме равно трем - перечислим их:

первый ABEFA состоит из  $R_1$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $R_2$ ,  $\mathcal{E}_2$ ; второй BCDEB состоит из  $R_2$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $R_3$ ,  $\mathcal{E}_3$ ; третий ACDFFA состоит из  $R_1$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $R_3$ ,  $\mathcal{E}_3$ , поэтому количество уравнений равно двум. Запишем эти уравнения, например, для контуров ABEFA и BCDEB.

Прежде всего, зададимся направлениями обхода в этих контурах – по часовой стрелке.

Для контура ABEFA:  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = I_2 R_2 + I_1 R_1$ .

Для контура BCDEA:  $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = I_3 R_3 - I_2 R_2$ .

Получаем систему из трех уравнений для трех неизвестных:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 &= I_2 R_2 + I_1 R_1 \\ \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 &= I_3 R_3 - I_2 R_2 \end{aligned}$$

Подставим данные и решим систему.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 2 &= 2I_2 + 2I_1 \\ 2 &= 2I_3 - 2I_2 \end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений:  $I_1 = 1 - I_2$ ,  $I_3 = 1 + I_2$ . Подставим это в первое уравнение

$$1 - I_2 - I_2 - 1 - I_2 = 0.$$

Отсюда:  $I_2 = 0$  А,  $I_1 = 1$  А,  $I_3 = 1$  А. Так как значения токов  $I_1$  и  $I_3$  положительные, то положительные направления для них совпадают с выбранными.♣

### Закон Джоуля-Ленца.

Согласно первому началу термодинамики работа внешних сил равна изменению энергии системы и количеству тепла, отданного системой:

$$A' = \Delta W + \tilde{Q}$$

(тильда введена для отличия обозначений количества теплоты от величины заряда).

Изменение энергии равно сумме изменений кинетической, потенциальной и внутренней энергий:

$$\Delta W = \Delta W_{кин} + \Delta W_{пот} + \Delta U$$

Если проводник покоится и его форма не меняется, то изменением кинетической и потенциальной можно пренебречь  $\Delta W_{кин} = 0$ ,  $\Delta W_{пот} = 0$ . Если температура проводника постоянная, то внутренняя энергия не меняется  $\Delta U = 0$ . Поэтому изменение энергии

$$\Delta W = \Delta W_{кин} + \Delta W_{пот} + \Delta U = 0.$$

Тогда  $A' = \tilde{Q}$  - работа внешних сил равна количеству теплоты, выделившемуся в проводнике.

При протекании тока по проводнику работу совершают кулоновские и сторонние силы

$$A_{кул} + A_{стор} = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12})q$$

На однородном участке проводника  $A_{кул} = (\varphi_1 - \varphi_2)q$ . Если по проводнику протекает постоян-

ный ток силой  $I$ , то за интервал времени  $dt$  через сечение проводника пройдёт заряд  $|q| = I \cdot dt$ ,

поэтому в абсолютных величинах  $|A_{кул}| = |(\varphi_1 - \varphi_2)||q| = UI dt$ .

Т.е. количество теплоты, выделившееся в проводнике при протекании постоянного тока за время  $dt$  равно

$$\delta \tilde{Q} = UI dt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt$$

(Выделившееся количество считается положительным  $\tilde{Q} > 0$ ). Эта запись закона Джоуля-Ленца в *интегральной* форме.

Если у рассматриваемого цилиндрического проводника площадь поперечного сечения равна  $S_{\perp}$ , длина  $l$ , а удельное сопротивление  $\rho$ , то сила тока  $I = jS_{\perp}$ , сопротивление  $R = \rho \frac{l}{S_{\perp}}$ , поэтому

$$\delta \tilde{Q} = I^2 R dt = j^2 S_{\perp}^2 \rho \frac{l}{S_{\perp}} dt = j^2 \rho S_{\perp} l dt$$

Т.к. объём проводника  $V = lS_{\perp}$ , то можно найти объёмную мощность тепловыделения

$$\tilde{q} = \frac{\delta \tilde{Q}}{V dt} = j^2 \rho$$

Это выражение *закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме*.

*Замечание.* С увеличением температуры, удельное сопротивление проводников возрастает, что обусловлено тепловыми колебаниями решётки.

## Приложение 2.

**Падение волны на границу раздела диэлектриков**

Рассмотрим падение *плоской* электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков.

Будем предполагать, что волна является линейно-поляризованной.

Уравнения волны  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi)$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi)$ ,  $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$ .

Ход каждой из волн зададим с помощью лучей и соответствующих волновых векторов.

Рассмотрим *любую* точку на границе. В ней пересекаются три луча – луч падающей волны, луч прошедшей волны и луч отражённой волны.

Вдоль границы введём систему координат так, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости (XY), где ось X направлена вдоль границы, а

вектор Y перпендикулярен ей, а начало координат совпадало с выбранной точкой. Тогда

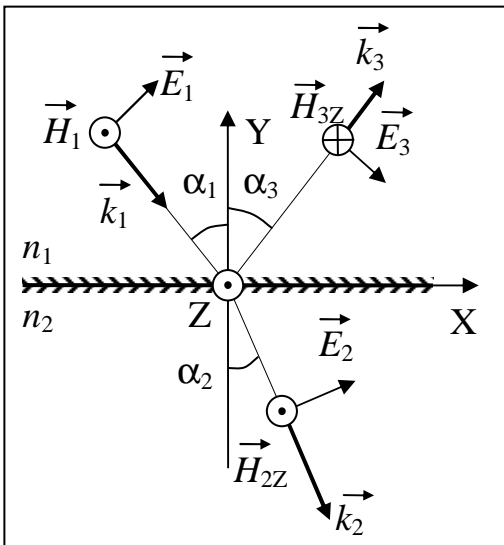
$\vec{k}_1 = (k_1 \sin \alpha_1, -k_2 \cos \alpha_1, 0)$ , где угол  $\alpha_1$  между нор-

малью к границе (осью Y) и лучом падающей волны будем называть *углом падения*.

Будем обозначать параметры падающей волны индексом «1», прошедшей волны индексом «2», а отражённой – «3». Введём угол *преломления*  $\alpha_2$  и угол *отражения*  $\alpha_3$  - углы между нормалью и соответствующими лучами. Тогда

$$\vec{k}_2 = (k_2 \sin \alpha_2, -k_2 \cos \alpha_2, k_{2Z}), \quad \vec{k}_3 = (k_3 \sin \alpha_3, k_3 \cos \alpha_3, k_{3Z}).$$

В общем случае падающую волну можно представить в виде суперпозиции двух волн, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны. Поэтому рассмотрим падение таких волн по-отдельности.



1) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор  $\vec{H}_1 = (0, 0, H_1)$  параллелен границе, а вектор  $\vec{E}_1$  лежит в плоскости (XY), т.е.  $\vec{E}_1 = (E_{1X}, E_{1Y}, 0)$ . Как говорят, волна поляризована в плоскости падения.

Так как на границе должны выполняться условия  $\vec{E}_{1t} + \vec{E}_{3t} = \vec{E}_{2t}$  и  $\vec{H}_{1t} + \vec{H}_{3t} = \vec{H}_{2t}$ , то

$$E_{1X} + E_{3X} = E_{2X} \text{ и } E_{3Z} = E_{2Z},$$

$$H_1 + H_{3Z} = H_{2Z} \text{ и } H_{3X} = H_{2X}.$$

Кроме того, на границе выполняются условия

$$\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{3n} = \vec{D}_{2n} \text{ и } \vec{B}_{1n} + \vec{B}_{3n} = \vec{B}_{2n}, \text{ поэтому } \epsilon_1 (E_{1Y} + E_{3Y}) = \epsilon_2 E_{2Y}, \mu_1 H_{3Y} = \mu_2 H_{2Y}.$$

Координаты  $E_{2Z}, E_{3Z}, H_{2X}, H_{3X}, H_{2Y}, H_{3Y}$  не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к.  $\vec{E}_2 = (E_{2X}, E_{2Y}, 0)$ ,  $\vec{E}_3 = (E_{3X}, E_{3Y}, 0)$ ,  $\vec{H}_2 = (0, 0, H_2)$ ,  $\vec{H}_3 = (0, 0, H_3)$ .

Тогда волновые векторы тоже лежат в плоскости (XY):

$$\vec{k}_2 = (k_{2X}, k_{2Y}, 0), \vec{k}_3 = (k_{3X}, k_{3Y}, 0).$$

Уравнения для напряжённостей всех трех волн

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - (\vec{k}_1, \vec{r}) + \varphi_1), \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - (\vec{k}_2, \vec{r}) + \varphi_2), \vec{E}_3 = \vec{E}_{03} \cos(\omega_3 t - (\vec{k}_3, \vec{r}) + \varphi_3)$$

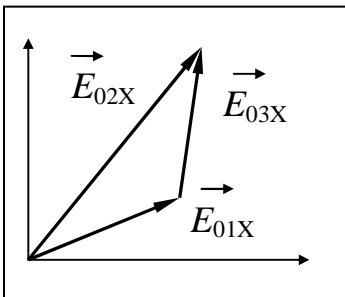
Для них должно выполняться условие на границе  $E_{1X} + E_{3X} = E_{2X}$ . Точки границы задаются радиус-вектором  $\vec{r} = (x, 0, z)$ , поэтому на границе выполняется равенство

$$E_{01X} \cos(\omega_1 t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03X} \cos(\omega_3 t - (k_{3X} x) + \varphi_3) = E_{02X} \cos(\omega_2 t - (k_{2X} x) + \varphi_2).$$

В частности, в точке  $x=0$ :

$$E_{01X} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_{03X} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) = E_{02X} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

На амплитудно-векторной диаграмме сумма трех векторов постоянной длины  $\vec{E}_{01X} + \vec{E}_{03X} = \vec{E}_{02X}$  будет выполняться, если только угловые скорости вращения этих векторов одинаковые  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ .



Т.е. частоты всех трех волн одинаковые. Обозначим эту частоту  $\omega$ .

Теперь зафиксируем какой-то момент времени  $t_0$ . Тогда в любой точке границы (для любого значения  $x$ ) выполняется равенство

$$E_{01X} \cos(-(k_{1X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_1\}) + E_{03X} \cos(-(k_{3X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_3\}) = E_{02X} \cos(-(k_{2X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_2\})$$

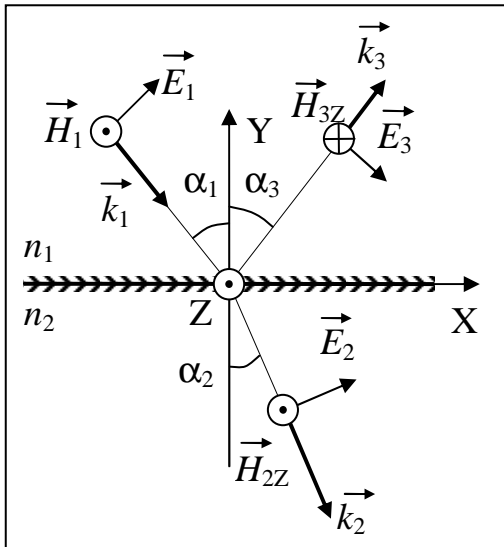
Так как величина  $x$  является параметром, то волновые числа  $k_{1X}$ ,  $k_{2X}$ ,  $k_{3X}$  будут являться аналогом угловой скорости вращения векторов  $\vec{E}_{01}$ ,  $\vec{E}_{02}$ ,  $\vec{E}_{03}$  на амплитудно-векторной диаграмме. Следовательно, равенство  $\vec{E}_{01} + \vec{E}_{03} = \vec{E}_{02}$  возможно только в случае, когда  $k_{1X} = k_{2X} = k_{3X}$ .

Из  $k_{1X} = k_{2X}$  следует соотношение  $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$ . Т.к.  $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c}$  и

$k_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega n_2}{c}$ , то угол падения и угол преломления связаны соотношением

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Из  $k_{1X} = k_{3X}$  следует соотношение  $k_1 \sin \alpha_1 = k_3 \sin \alpha_3$ . Т.к. падающая и отра-



жённая волны распространяются в одной среде, то  $k_1 = k_3$ , откуда  $\alpha_1 = \alpha_3$  - угол отражения равен углу падения.

Найдём соотношения между величинами напряжённостей. Предположим, что векторы напряжённостей электрического и магнитного полей в падающей, прошедшей и отражённой волнах в некоторый момент времени имеют направления, указанные на рисунке. Тогда

$$\vec{E}_1 = (E_1 \cos \alpha_1, E_1 \sin \alpha_1, 0), \quad \vec{E}_2 = (E_2 \cos \alpha_2, E_2 \sin \alpha_2, 0) \quad \text{и} \quad \vec{E}_3 = (E_3 \cos \alpha_1, -E_3 \sin \alpha_1, 0).$$

Условие  $E_{1X} + E_{3X} = E_{2X}$  примет вид

$$E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2)$$

Из  $\epsilon_1 (E_{1Y} + E_{3Y}) = \epsilon_2 E_{2Y}$  получаем равенство

$$E_{01} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) - E_{03} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{02} \sin \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2)$$



Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2x}x) + \varphi_2) \\ E_{01} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_1) - E_{03} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_3) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{02} \sin \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2x}x) + \varphi_2) \end{cases}$$

Из закона преломления  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  следует, что уравнения выполняются в случае нормального падения волны на границу  $\alpha_1 = 0$ .

Предположим, что  $\alpha_1 \neq 0$ . Первое уравнение умножаем на  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2$ , а второе

на  $\cos \alpha_2$  и, вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\begin{aligned} E_{01} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_1) - \\ + E_{03} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{1x}x) + \varphi_3) = 0 \end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение

$$\begin{aligned} \left( E_{01} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_3) \right) \cos(\omega t - (k_{1x}x)) \\ - \left( E_{01} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_1) + E_{03} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_3) \right) \sin(\omega t - (k_{1x}x)) = 0 \end{aligned}$$

В этом уравнении коэффициенты при  $\cos(\omega t - (k_{1x}x))$  и  $\sin(\omega t - (k_{1x}x))$  не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$E_{01} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_3) = 0$$

$$E_{03} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_3) + E_{01} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_1) = 0$$

выполняются одновременно при  $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_3)$  и  $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_3)$ .

Перепишем эти условия в виде  $\sin(\varphi_3) \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_3) \sin(\varphi_1) = 0$  и получим, что

$\sin(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$ , т.е. начальные фазы падающей и отражённой волн либо равны, ли-

бо отличаются друг от друга на  $\pi$ . Поэтому  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = \pm 1$  (либо  $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_3)} = \pm 1$ ). Тогда

можно записать

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right)}{\left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Для оптически прозрачных сред  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n \approx \sqrt{\varepsilon}$ . С учётом  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ ,  $\sin \alpha_1 \neq 0$  можно провести некоторые преобразования

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\left( \frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \right)}{\left( \frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{(\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)}{(\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right),$$

$$E_{03} = -E_{01} \frac{(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2)}{(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{\left( \cos\left(2\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right)}{\left( \cos\left(2\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right),$$

$$E_{03} = -E_{01} \frac{2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos\left(\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right)}{2 \cos\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Величины амплитуд  $E_{01}$  и  $E_{03}$  положительные.

Т.к.  $\alpha_1 \leq \pi/2$  и  $\alpha_2 \leq \pi/2$ , то  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$ , поэтому  $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$ .

Следовательно, в случае  $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$ , (т.е. когда  $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ ) должно быть

$\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = -1$  - фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на  $\pi$ .

В этом случае  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ , поэтому  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$ , т.е. волна отражается от оптически более плотной среды.

Случаю  $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$  соответствует отражение от оптически менее плотной среды и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

Возможен случай, когда нет отражённой волны  $E_{03} = 0$ .

Это возможно либо при  $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ , т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2$  - волна не преломляется, либо при  $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \rightarrow +\infty$ , т.е.  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$  - волновые векторы преломлённого луча и отраженного луча взаимно перпендикулярны.

Тогда равенство  $E_{03}=0$  равносильно  $\frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 0$ . Но  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ , поэтому

$\frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 = \sin \alpha_1$ . Следовательно, если тангенс угла падения равен *относительному*

*показателю преломления* двух сред

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

то при отражении света от границы между ними нет волны, плоскость поляризации которой совпадает с плоскостью падения. Этот угол называется *углом Брюстера*.

Теперь в системе уравнений

$$\begin{cases} E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \\ E_{01} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) - E_{03} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{02} \sin \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \end{cases}$$

первое уравнение умножим на  $\sin \alpha_1$ , а второе на  $\cos \alpha_1$  и сложим друг с другом.

$$2E_{01} \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) = E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2)$$

Используем условие  $k_{1X} = k_{2X}$

$$\begin{aligned} E_{01} \sin 2\alpha_1 \left( \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t - (k_{1X}x)) \sin(\varphi_1) \right) = \\ E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \left( \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \cos(\varphi_2) - \sin(\omega t - (k_{1X}x)) \sin(\varphi_2) \right) \\ \left( E_{01} \sin 2\alpha_1 \cos(\varphi_1) - E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \cos(\varphi_2) \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \\ - \left( E_{01} \sin 2\alpha_1 \sin(\varphi_1) - E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \sin(\varphi_2) \right) \sin(\omega t - (k_{1X}x)) = 0 \end{aligned}$$

В этом уравнении коэффициенты не зависят от времени, поэтому они равны нулю:

$$E_{01} \sin 2\alpha_1 \cos(\varphi_1) - E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \cos(\varphi_2) = 0,$$

$$E_{01} \sin 2\alpha_1 \sin(\varphi_1) - E_{02} \left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right) \sin(\varphi_2) = 0.$$

Это возможно, если  $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2)$  и  $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$ . Объединяем эти соотношения в одно равенство  $\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$  или  $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ . Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на  $\pi$ .

Тогда  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = \pm 1$  (либо  $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \pm 1$ ). Поэтому

$$E_{02} = E_{01} \frac{\sin 2\alpha_1}{\left( \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right).$$

Для оптически прозрачных сред  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n \approx \sqrt{\varepsilon}$ . С учётом  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ ,  $\sin \alpha_1 \neq 0$  можно провести некоторые преобразования

$$E_{02} = E_{01} \frac{2 \sin \alpha_1}{\left( \cos \alpha_2 + \frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right) = E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\left( \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right),$$

$$E_{02} = E_{01} \frac{4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\left( \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_1 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right) = E_{01} \frac{4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\left( \cos \left( 2\alpha_2 - \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left( 2\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right),$$

$$E_{02} = E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right).$$

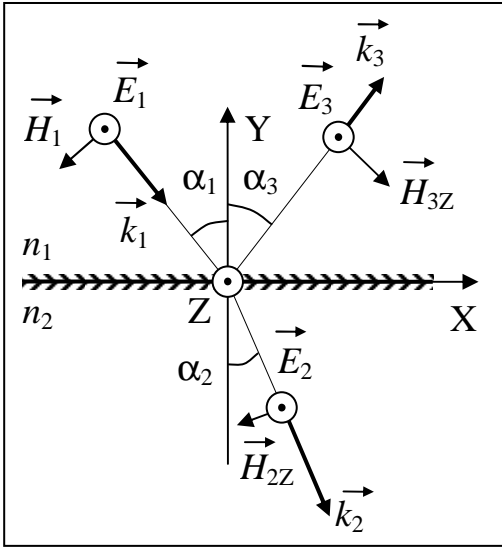
Величины амплитуд  $E_{01}$  и  $E_{02}$  положительные.

Т.к.  $\alpha_1 \leq \pi/2$  и  $\alpha_2 \leq \pi/2$ , то  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$ , поэтому  $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$  и  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$ . Следовательно, должно быть  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = 1$ , т.е. фазы прошедшей и падающей волн совпадают.

2) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор  $\vec{E}_1 = (0, 0, E_1)$  параллелен границе, а вектор  $\vec{H}_1$  лежит в плоскости (XY), т.е.  $\vec{H}_1 = (H_{1X}, H_{1Y}, 0)$ . Волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Так как на границе должны выполняться условия  $\vec{E}_{1t} + \vec{E}_{3t} = \vec{E}_{2t}$  и  $\vec{H}_{1t} + \vec{H}_{3t} = \vec{H}_{2t}$ , то

$$E_{3X} = E_{2X} \text{ и } E_1 + E_{3Z} = E_{2Z}, \quad H_{3Z} = H_{2Z} \text{ и } H_{1X} + H_{3X} = H_{2X}.$$

Кроме того, на границе выполняются условия



$$\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{3n} = \vec{D}_{2n} \text{ и } \vec{B}_{1n} + \vec{B}_{3n} = \vec{B}_{2n}, \text{ поэтому } \epsilon_1 E_{3Y} = \epsilon_2 E_{2Y},$$

$$\mu_1 (H_{1Y} + H_{3Y}) = \mu_2 H_{2Y}.$$

Координаты  $E_{2X}, E_{3X}, E_{2Y}, E_{3Y}, H_{2Z}, H_{3Z}$ , не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к.

$$\vec{E}_2 = (0, 0, E_2), \quad \vec{E}_3 = (0, 0, E_3), \quad \vec{H}_2 = (H_{2X}, H_{2Y}, 0),$$

$$\vec{H}_3 = (H_{3X}, H_{3Y}, 0).$$

*Законы преломления остаются прежними  $\alpha_3 = \alpha_1$ ,  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ .*

Найдём соотношения между величинами напряжённостей. Предположим, что векторы напряжённостей электрического и магнитного полей в падающей, прошедшей и отражённой волнах в некоторый момент времени имеют направления, указанные на рисунке. Поэтому  $\vec{H}_1 = (-H_1 \cos \alpha_1, -H_1 \sin \alpha_1, 0)$ ,

$$\vec{H}_2 = (-H_2 \cos \alpha_2, -H_2 \sin \alpha_2, 0) \text{ и } \vec{H}_3 = (H_3 \cos \alpha_1, -H_2 \sin \alpha_1, 0).$$

Тогда условие  $H_{1X} + H_{3X} = H_{2X}$  примет вид

$$\begin{aligned} -H_{10} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + H_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = \\ = -H_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \end{aligned}$$

С учётом  $H = E \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}}$

$$\begin{aligned} -E_{10} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = \\ = -E_{02} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \end{aligned}$$

Условие  $E_1 + E_3 = E_2$  примет вид

$$E_{10} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = E_{02} \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = \\ = -E_{02}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \\ E_{10} \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на  $\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2\mu_0}} \cos \alpha_2$  и суммируем первое и второе:

$$E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = 0$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) & \left( \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t - (k_{1X}x)) \sin(\varphi_1) \right) \\ + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) & \left( \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \cos(\varphi_3) - \sin(\omega t - (k_{1X}x)) \sin(\varphi_3) \right) = 0 \end{aligned}$$

и получим

$$\begin{aligned} & \left( E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\varphi_3) \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \\ & - \left( E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \sin(\varphi_1) + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \sin(\varphi_3) \right) \sin(\omega t - (k_{1X}x)) = 0 \end{aligned}$$

В этом уравнении коэффициенты при  $\cos(\omega t - (k_{1X}x))$  и  $\sin(\omega t - (k_{1X}x))$  не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \cos(\varphi_3) = 0$$

$$E_{10} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \sin(\varphi_1) + E_{03} \left( \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right) \sin(\varphi_3) = 0$$

выполняются, если  $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_3)$  и  $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_3)$ . Объединяем эти соотношения в одно равенство  $\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_1) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_3)$  или  $\sin(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$ . Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на  $\pi$ .

Тогда  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = \pm 1$  (либо  $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_3)} = \pm 1$ ). Поэтому

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}.$$

Для оптически прозрачных сред  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ . С учётом  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ , можно провести некоторые преобразования

$$E_{03} = -E_{10} \frac{(n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1)}{(n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} = -E_{10} \frac{(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)}{(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}$$

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}$$

Т.к.  $\alpha_1 \leq \pi/2$  и  $\alpha_2 \leq \pi/2$ , то  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$ , поэтому  $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$ .

Следовательно, в случае  $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$ , (т.е. когда  $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ ) должно быть

$$\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = -1 - \text{фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на } \pi.$$

В этом случае  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ , поэтому  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$ , т.е. волна отражается от оптически более плотной среды.

Случаю  $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$  соответствует отражение от оптически менее плотной среды и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

В системе

$$\begin{cases} -E_{10} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = \\ = -E_{02} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \\ E_{10} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = E_{02} \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \end{cases}$$

второе уравнение умножим на  $\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1$  и вычтем из второго уравнения первое:

$$2E_{10} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) = E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + E_{02} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Т.к.  $k_{1X} = k_{2X}$ , то

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \left( \cos(\omega t - (k_{1x}x)) \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t - (k_{1x}x)) \sin(\varphi_1) \right) - E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \left( \cos(\omega t - (k_{1x}x)) \cos(\varphi_2) - \sin(\omega t - (k_{1x}x)) \sin(\varphi_2) \right) = 0$$

откуда

$$\left( 2E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\varphi_1) - E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_2) \right) \cos(\omega t - (k_{1x}x)) - \left( 2E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \sin(\varphi_1) - E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_2) \right) \sin(\omega t - (k_{1x}x)) = 0$$

В этом уравнении коэффициенты при  $\cos(\omega t - (k_{1x}x))$  и  $\sin(\omega t - (k_{1x}x))$  не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \cos(\varphi_1) - E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_2) = 0$$

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \sin(\varphi_1) - E_{02} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_2) = 0$$

выполняются, если  $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2)$  и  $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$ . Объединяем эти соотношения в одно равенство  $\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$  или  $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ . Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на  $\pi$ .

Тогда  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = \pm 1$  (либо  $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \pm 1$ ). Поэтому

$$E_{02} = E_{10} \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)$$

Для оптически прозрачных сред  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ . С учётом  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ , можно провести некоторые преобразования

$$E_{02} = E_{10} \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right) = E_{10} \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)$$

Поэтому должно быть  $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = 1$ , т.е. фазы преломлённой и падающей волн одинаковые.



В итоге, закон преломления можно сформулировать следующим образом. Волновые векторы всех трёх волн лежат в одной плоскости падения. Угол падения равен углу отражения, угол преломления связан с углом отражения соотношением

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Фазы падающей и прошедшей волн одинаковые. Фаза отраженной волны отличается от фазы падающей волны на  $\pi$  при отражении от оптически более плотной среды.

Падающая волна, отражённая и преломлённая волны поляризованы одинаково. Но если волна, поляризованная в плоскости падения, падает под углом Брюстера  $\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$ , то отраженная волна отсутствует.

Вектор Пойнтинга падающей волны представим в виде суммы вектора, параллельного границе и перпендикулярного к границе  $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_t + \vec{\Pi}_n$ .

Поток энергии волны через границу  $\iint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \iint_S \Pi_n dS$  определяется нормальной составляющей вектор Пойнтинга.

Но

$$\vec{\Pi} = (\vec{E} \times \vec{H}) = ((\vec{E}_n + \vec{E}_t) \times (\vec{H}_n + \vec{H}_t)) = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_n \times \vec{H}_t) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_t).$$

Поэтому  $\vec{\Pi}_t = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_n \times \vec{H}_t) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_n)$  и  $\vec{\Pi}_n = (\vec{E}_t \times \vec{H}_t)$ .

Так на границе выполняются равенства  $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$  и  $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$ , то

$$\vec{\Pi}_{1n} = (\vec{E}_{1t} \times \vec{H}_{1t}) = (\vec{E}_{2t} \times \vec{H}_{2t}) = \vec{\Pi}_{2n}.$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии: при переходе через границу раздела диэлектриков величина нормальной составляющей вектора Пойнтинга не меняется, что означает, что энергия на границе не теряется.

В общем случае падения электромагнитной волны на границу раздела диэлектриков будут наблюдаться волна, отраженная от границы, и волна, прошед-

шая через границу. Так как  $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_t^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{E}_t^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}$  и  $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_t^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{H}_t^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}$ , то на границе выполняется равенство  $\vec{\Pi}_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{\Pi}_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \vec{\Pi}_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}}$ .

Падающая волна

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (E_y H_z - E_z H_y) + \vec{e}_y (E_z H_x - E_x H_z) + \vec{e}_z (E_x H_y - E_y H_x)$$

1) Падающая волна поляризована в плоскости падения  $\vec{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, 0)$ ,  $\vec{H}_1 = (0, 0, H_1)$

Тогда

$$\Pi_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = \Pi_{1y} = E_{1z} H_{1x} - E_{1x} H_{1z} = -E_{1x} H_1$$

$$E_x = E_1 \cos \alpha_1 = E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_1)$$

$$H_1 = E_1 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_{01} \cos(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_1)$$

$$\Pi_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos \alpha_1 \cos^2(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_1)$$

Отражённая волна  $\vec{E}_3 = (E_3 \cos \alpha_1, -E_3 \sin \alpha_1, 0)$

$$E_{3x} = E_3 \cos \alpha_1 = -E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right) \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_3)$$

$$H_{3z} = -H_3 = -E_3 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right) \cos(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_3)$$

$$\Pi_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \Pi_{3y} = -E_{3x} H_{3z}$$

$$\Pi_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = -E_{3x} H_{3z} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left( E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \cos \alpha_1 \cos^2(\omega t - (k_{1x} x) + \varphi_3)$$

(Здесь учтено, что  $\left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)^2 = 1$ ).

Прошедшая волна  $\vec{E}_2 = (E_2 \cos \alpha_2, E_2 \sin \alpha_2, 0)$

$$E_{2x} = E_2 \cos \alpha_2 = E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2x} x) + \varphi_2)$$

$$H_{2z} = H_2 = E_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) \cos(\omega t - (k_{2x} x) + \varphi_2)$$

$$\Pi_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = \Pi_{2Y} = -E_{2X} H_{2Z}$$

$$\Pi_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = -E_{2X} H_{2Z} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left( E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) \right)^2 \cos \alpha_2 \cos^2(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Интенсивность – среднее значение величины вектора Пойнтинга

$$I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos \alpha_1$$

$$I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left( E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \cos \alpha_1$$

$$I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left( E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \right)^2 \cos \alpha_2$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \left( \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2$$

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{4 \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \cos \alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{n_2}{n_1} \frac{4 \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \cos \alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$D = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \frac{4 \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \cos \alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$D = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \left( \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 = \\
& (\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2))^2 + 4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = \\
& ((\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1))(\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)))^2 \\
& + 4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = \\
& (\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2))^2 + 4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = \\
& (\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2))^2 \\
& \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \\
& ((\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2))(\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1)))^2 = \\
& (\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2))^2
\end{aligned}$$

$$R + D = 1$$

(Это выражение выражает собой закон сохранения энергии).

При нормальном падении, когда  $\alpha_1 \ll 1$  получаем, что из  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  следует  $n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$ ,  $\cos \alpha_1 \approx 1$ ,  $\cos \alpha_2 \approx 1$ , тогда

$$\begin{aligned}
R &= \left( \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \approx \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} = \frac{\left( \alpha_1 - \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 \right)^2}{\left( \alpha_1 + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 \right)^2} = \frac{\left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right)^2}{\left( 1 + \frac{n_1}{n_2} \right)^2} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}, \\
D &= \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} \approx \frac{2\alpha_1 2\alpha_2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} = \frac{4\alpha_1 \frac{n_1}{n_2} \alpha_1}{\left( \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 + \alpha_1 \right)^2} = \frac{4 \frac{n_1}{n_2}}{\left( \frac{n_1}{n_2} + 1 \right)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.
\end{aligned}$$

2) Падающая волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.  $\vec{E}_1 = (0, 0, E_1)$ ,  $\vec{E}_2 = (0, 0, E_2)$ ,  $\vec{E}_3 = (0, 0, E_3)$ , ..

$$\vec{H}_1 = (-H_1 \cos \alpha_1, -H_1 \sin \alpha_1, 0), \vec{H}_2 = (-H_2 \cos \alpha_2, -H_2 \sin \alpha_2, 0), \vec{H}_3 = (H_3 \cos \alpha_1, -H_2 \sin \alpha_1, 0).$$

$$H = E \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}}$$

$$\Pi_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = \Pi_{1Y} = E_{1Z} H_{1X} - E_{1X} H_{1Z} = E_{1Z} H_{1X}$$

$$\Pi_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = -E_1 H_1 \cos \alpha_1 = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos \alpha_1 \cos^2(\omega t - (k_{1X} x) + \phi_1)$$

$$\Pi_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \Pi_{3Y} = E_{3Z} H_{3X} = E_3 H_3 \cos \alpha_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_3)^2 \cos \alpha_1$$

С учётом соотношения между амплитудами отражённой и падающей волн:

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right)$$

получаем

$$\Pi_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left( E_{10} \frac{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \right)^2 \cos \alpha_1 \cos^2(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3).$$

Для прошедшей волны

$$\Pi_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = \Pi_{2Y} = E_{2Z} H_{2X} = -E_2 H_2 \cos \alpha_2 = -\sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} (E_2)^2 \cos \alpha_2$$

но

$$E_{02} = E_{10} \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right)} \left( \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right),$$

откуда

$$\Pi_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left( E_{10} \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right)} \right)^2 \cos \alpha_2 \cos^2(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Тогда выражения для интенсивностей

$$I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos \alpha_1$$

$$I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left( E_{10} \frac{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \right)^2 \cos \alpha_1$$

$$I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left( E_{10} \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right)} \right)^2 \cos \alpha_2$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \frac{\left( \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \right)^2}{\left( \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 \right)} \right)^2} = \left( \frac{(n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1)}{(n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1)} \right)^2$$

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \left( \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1}{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \right)} \right)^2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2 n_1 \cos \alpha_1}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)} \right)^2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

$$D = \frac{4 n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$R + D = \left( \frac{(n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1)}{(n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1)} \right)^2 + \frac{4 n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$R + D = \frac{(n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1)^2 + 4 n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1)^2} = 1$$

При нормальном падении, когда  $\alpha_1 \ll 1$  получаем, что из  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  следует

$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$ ,  $\cos \alpha_1 \approx 1$ ,  $\cos \alpha_2 \approx 1$ , тогда

$$R = \frac{(n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1)^2}{(n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1)^2} \approx \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}$$

$$D = \frac{4 n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2} \approx \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Следовательно, при малых углах падения коэффициенты отражения и пропускания для обоих случаев поляризации *одинаковые*.