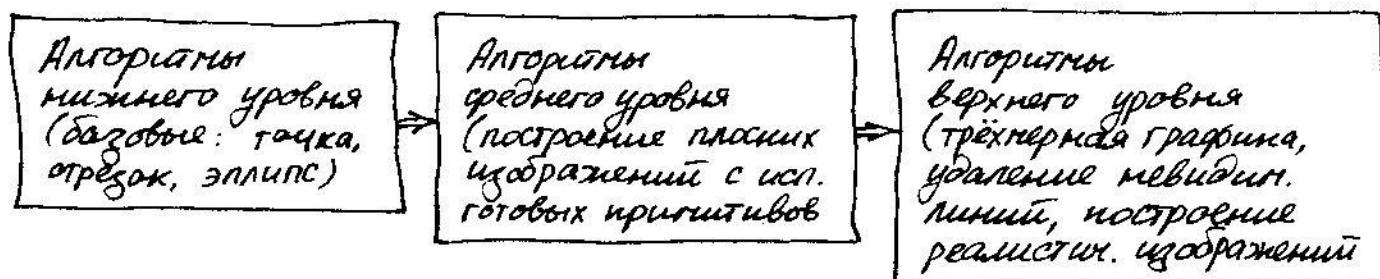


**#1 Задача синтеза сложного динамического изображения. Этапы синтеза изображения.**

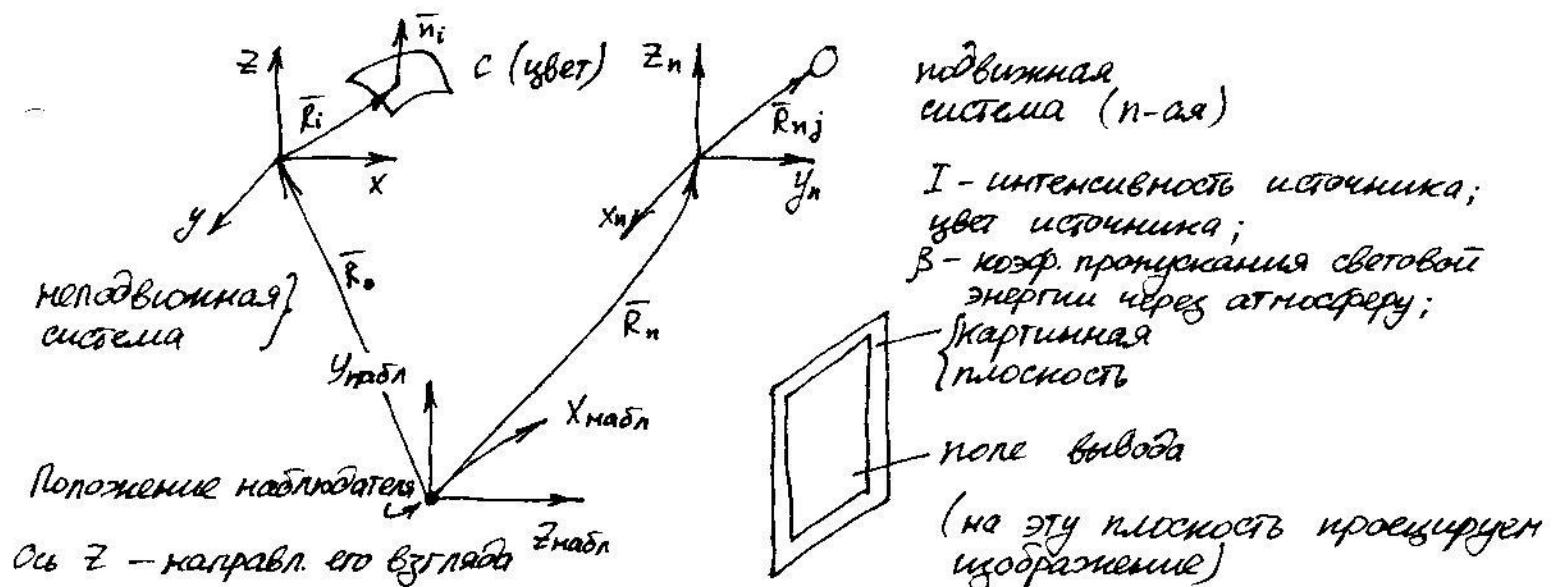
**опр** Маш.граф. – это совокупность методов и средств преобразования информации в графич. форме и из гр. формы с помощью ЭВМ.

1. Декоративная графика (графики, диаграммы)
2. Научная графика (чертежи, документы, например технологии)
3. Числостративная графика (карты местности, генерация символов и раз-ов операций)
4. Численная графика (иллюстрации и тексты)

Три уровня алгоритмов:



Синтез сложного динамического изображения



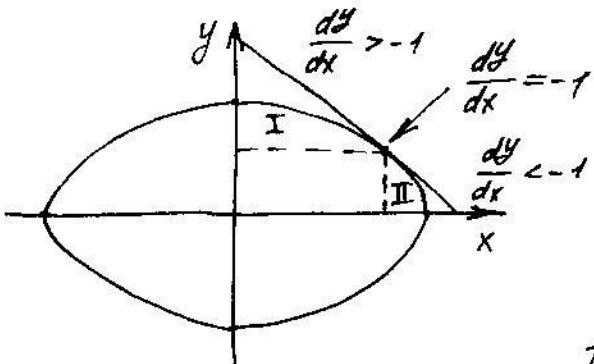
Частота вывода изображения:  $25 \div 30 \text{ Гц}$

Г – интервал вывода одного изображения.

## Этапы синтеза

1. Разработка трехмерной математической модели интегрируемой визуальной обстановки.
2. Задание: положения наблюдателя, картинной плоскости (её положение), размеров окна вывода, значений управляющих сигналов.
3. Определение операторов, определяющих пространственное перемещение объектов визуализации.
4. Преобразование координат объектов в координаты наблюдателя.
5. Отсечение объектов видимого пр-ва в пределах пирамиды видимости.
6. Вычисление 2-мерных перспективных проекций синтезируемых объектов на картинную плоскость.
7. Исключение из сцены невидимых элементов при заданном положении наблюдателя (удаление невидимых линий и ненесущих поверхностей), закрашивание и затенение объектов сцены.
8. Вывод полуточкового изображения на экран растрового дисплея.

#2 Алгоритм построения эллипса и окружности по методу средней точки.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f_{np} = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$$

$$f_{np}(x, y) = \begin{cases} = 0, & (x, y) \in \text{эллипс} \\ > 0, & (x, y) \text{ вне эллипса} \\ < 0, & (x, y) \text{ внутри эллипса} \end{cases}$$

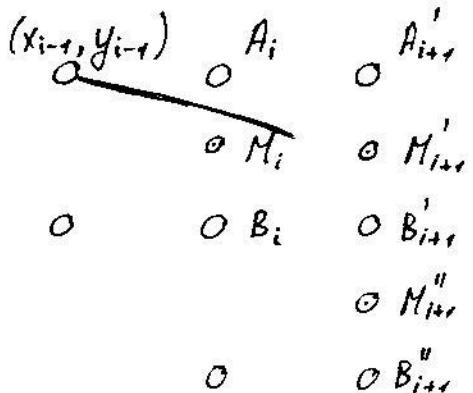
Найти граничной точки:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$2b^2 x dx + 2a^2 y dy - a^2 b^2 = 0$$

$$\frac{a^2 y dy}{b^2 x dx} = -1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow \text{т.к. для граничной точки } \frac{dy}{dx} = -1, \text{ то } b^2 x = a^2 y - \text{ условие границы.}$$

I. Цикл по x слева направо:



$$f_{np_i} = b^2 (x_{i-1} + 1)^2 + a^2 \left(y_{i-1} - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 b^2$$

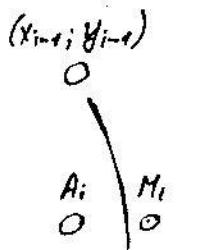
$$f_{np_i} \leftarrow f_{np_i} = \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{т.м. внутри} \Rightarrow A \\ > 0 \Rightarrow \text{т.м. снаружи} \Rightarrow B \end{cases}$$

$$df = f_i - f_{i-1} = b^2 (x_{i-1} + 1)^2 + a^2 \left(y_{i-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 b^2 - b^2 x_{i-1}^2 - a^2 \left(y_{i-1} - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 b^2 = 2b^2 x_{i-1} + b^2$$

Если выбрана т.в. ( $y_i = y_{i-1} - 1$ ), то значение предыдущей ф-ции надо корректировать, т.к. для случая A предыдущая точка была бы:  $(x_{i-1}; y_{i-1} + \frac{1}{2})$ , для случая B:  $(x_{i-1}; y_{i-1} - \frac{1}{2})$ .

$$\Delta f = b^2 (x_{i-1} + 1)^2 + a^2 \left(y_{i-1} - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 b^2 - b^2 (x_{i-1} + 1)^2 - a^2 \left(y_{i-1} + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 b^2 = -2a^2 y_{i-1}$$

## II. Числ по y сверху вниз



$$f_{\text{нр}i} = b^2 \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 (y_{i-1} - 1)^2 - a^2 b^2;$$

$$f_{\text{нр}i} = \begin{cases} < 0 \Rightarrow M \text{ внутри } \Rightarrow B \\ > 0 \Rightarrow M \text{ снаружи } \Rightarrow A \end{cases}$$

$A'_i, M'_i, B'_i, M''_i, B''_i$

$$\Delta f = f_i - f_{i-1} = b^2 \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 (y_{i-1} - 1)^2 - a^2 b^2 - b^2 \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2 - a^2 y_{i-1}^2 + a^2 b^2 = -2a^2 y_{i-1} + a^2$$

Если вос обратся т.в., то проблему функцию надо корректировать, т.к. для случая А проблема точки должна быть:

$(x_{i-1} - \frac{1}{2}; y_{i-1} - 1)$ , а для В:  $(x_{i-1} + \frac{1}{2}; y_{i-1} - 1)$ .

$$\Delta f = b^2 \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 (y_{i-1} - 1)^2 - a^2 b^2 - b^2 \left( x_{i-1} - \frac{1}{2} \right) - a^2 (y_{i-1} - 1)^2 + a^2 b^2 = 2b^2 x_{i-1}$$

### Переход от I к II

$(x_{i-1}; y_{i-1})$

$0 \quad 0 \quad 0$

$(x_{i-1} + \frac{1}{2}; y_{i-1} - 1)$

$$\Delta f = b^2 \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 (y_{i-1} - 1)^2 - a^2 b^2 - b^2 \left( x_{i-1} + 1 \right)^2 - a^2 \left( y_{i-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 b^2 = b^2 \left( x_{i-1}^2 + x_{i-1} + \frac{1}{4} \right) + a^2 \left( y_{i-1}^2 - 2y_{i-1} + 1 \right) - b^2 \left( x_{i-1}^2 + 2x_{i-1} + 1 \right) - a^2 \left( y_{i-1}^2 - y_{i-1} + \frac{1}{4} \right) = b^2 \left( -x_{i-1} - \frac{3}{4} \right) + a^2 \left( -y_{i-1} + \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} (a^2 - b^2) - (b^2 x_{i-1} + a^2 y_{i-1})$$

### Первый шаг

$$i-1: x=0, b=y \Rightarrow i: f_{\text{нр}i} = b^2 + a^2 \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 - a^2 b^2 = b^2 - a^2 b + \frac{a^2}{4}; \dots$$

$$f_i - f_{i-1} = 2b^2 x_{i-1} + b^2 \Rightarrow f_i = f_{i-1} + 2b^2 x_{i-1} + b^2$$

#3 Требования, предъявляемые к алгоритмам вычерчивания отрезков. Помаговой алгоритм разложения отрезка в растр. Разложение в растр по методу цифрового дифференциального алгорита.

Процесс, определяющий пиксели, наилучшим образом аппроксимирующих отрезок, называется разложением отрезка в растр.

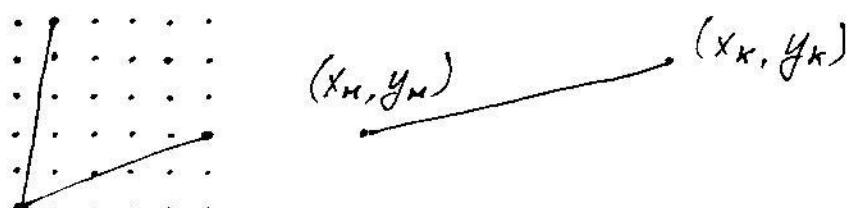
Требования:

1. Отрезок должен выглядеть прямой.
2. Отрезок должен начинаться и заканчиваться в заданных точках.
3. Якость отрезка вдоль его длины должна быть постоянной и не зависеть от угла наклона.
4. Вычерчивание отрезков должно осуществляться быстро.

---

- пестринный эффект

Практически все алгоритмы разложения отрезков в растр работают в пошаговом режиме (выполняются вычисления для следующего шага).



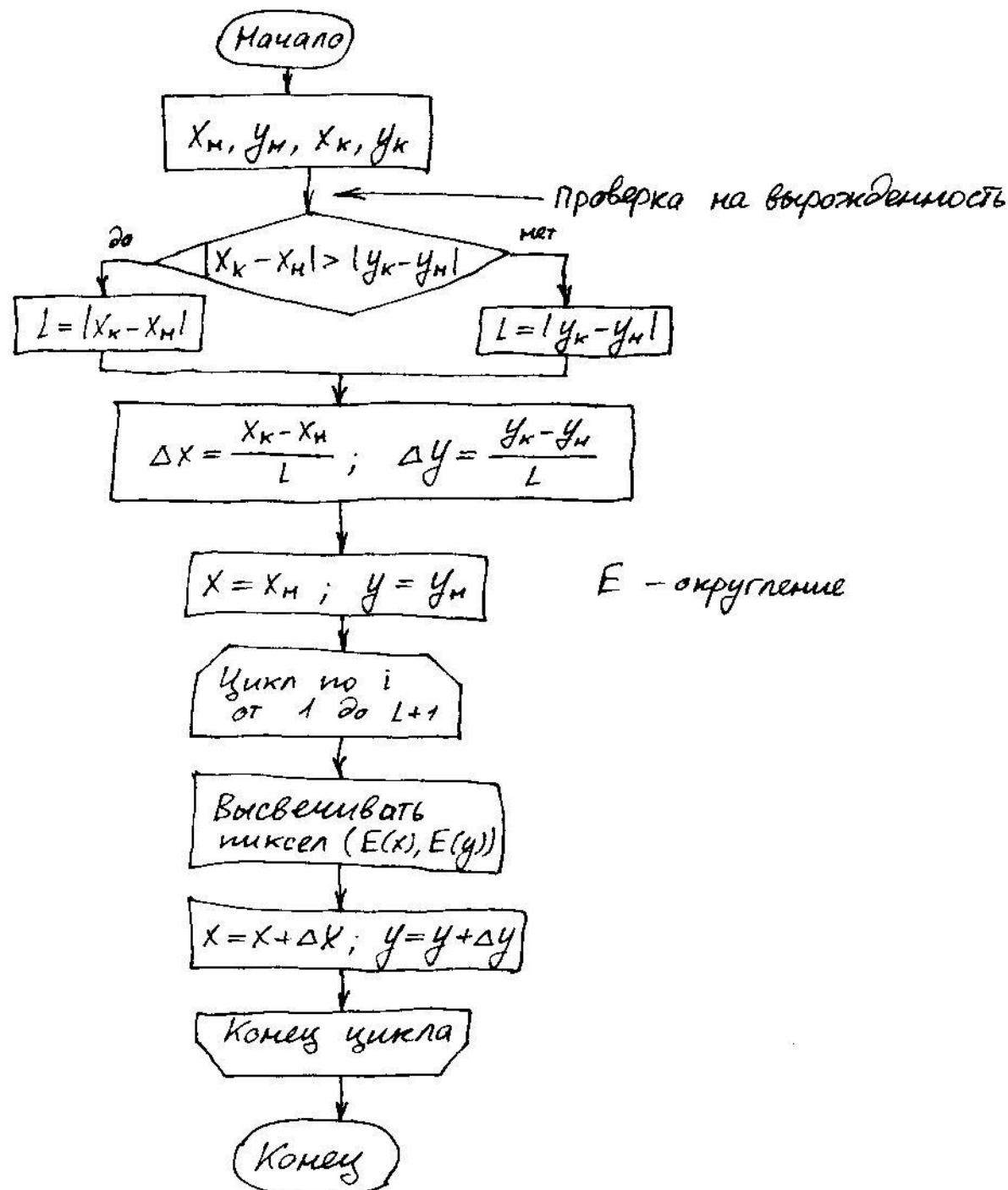
За интервал, по которому будем рассматривать приращения ( $\Delta x$  или  $\Delta y$ ) возьмём интервал большей длины:  $(x_n \dots x_k)$  или  $(y_n \dots y_k)$ .

# Алгоритм цифрового дифференциального альгорита

$$Ax + By + C = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{const} ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_k - y_n}{x_k - x_n}$$

$$\Delta x = 1 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \Delta y = y_i + \frac{y_k - y_n}{x_k - x_n} \Delta x$$

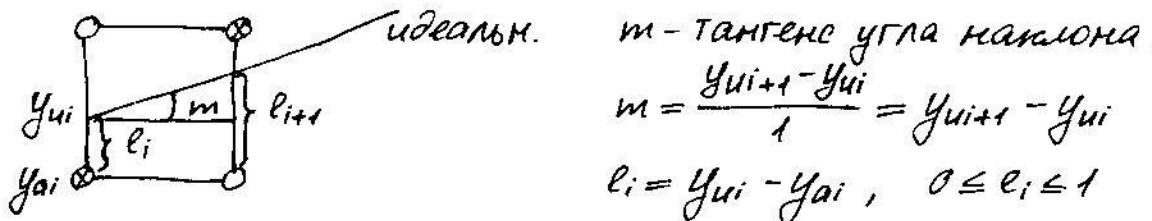


- #4 Алгоритм Брезенхема разложения отрезков в растр. Простой алгоритм Брезенхема. Численный алгоритм Брезенхема. Общий алгоритм Брезенхема

Работа алгоритма строится на понятии "ошибки".

Ошибка - расстояние между действительным положением отрезка и пикселям, аппроксимирующим отрезок на данном шаге.

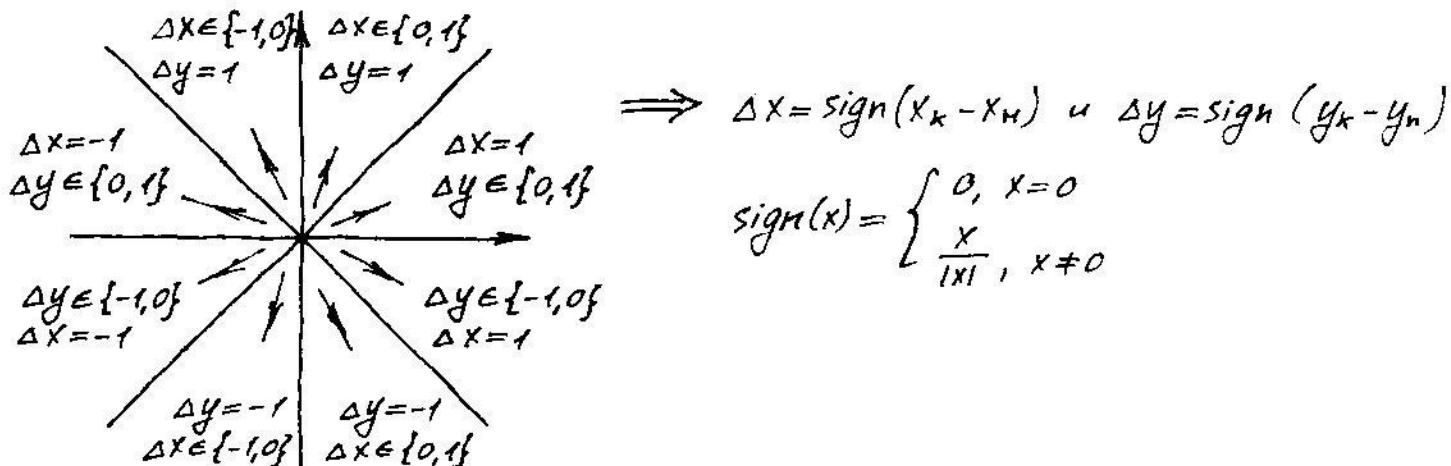
Простой алгоритм позволяет строить отрезок только в I октанте ( $dx \geq 0, dy \geq 0, m \leq 1$ )



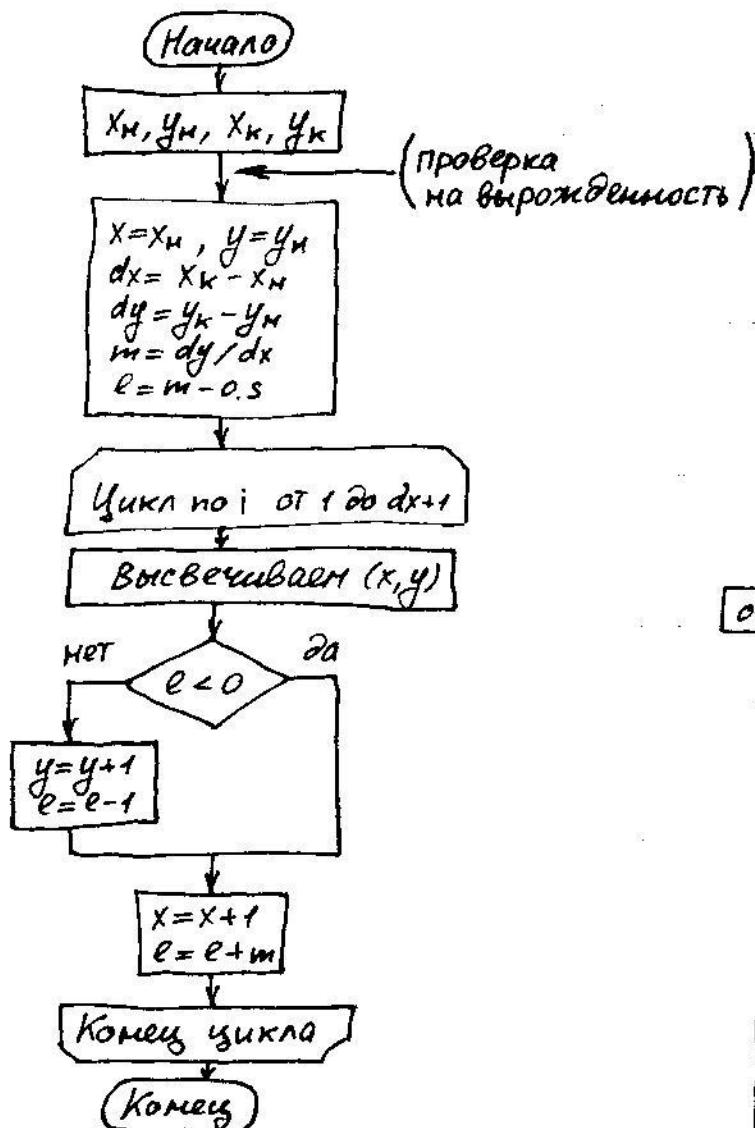
$$e_i < \frac{1}{2} \Rightarrow y_{i+1} = y_i; \quad e_i \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + 1$$

$$e_{i+1} = y_{i+1} - y_{i+1} = y_i + m - y_{i+1} = \begin{cases} y_{i+1} + m - y_i = e_i + m \\ y_{i+1} + m - y_i - 1 = e_i + m - 1 \end{cases}$$

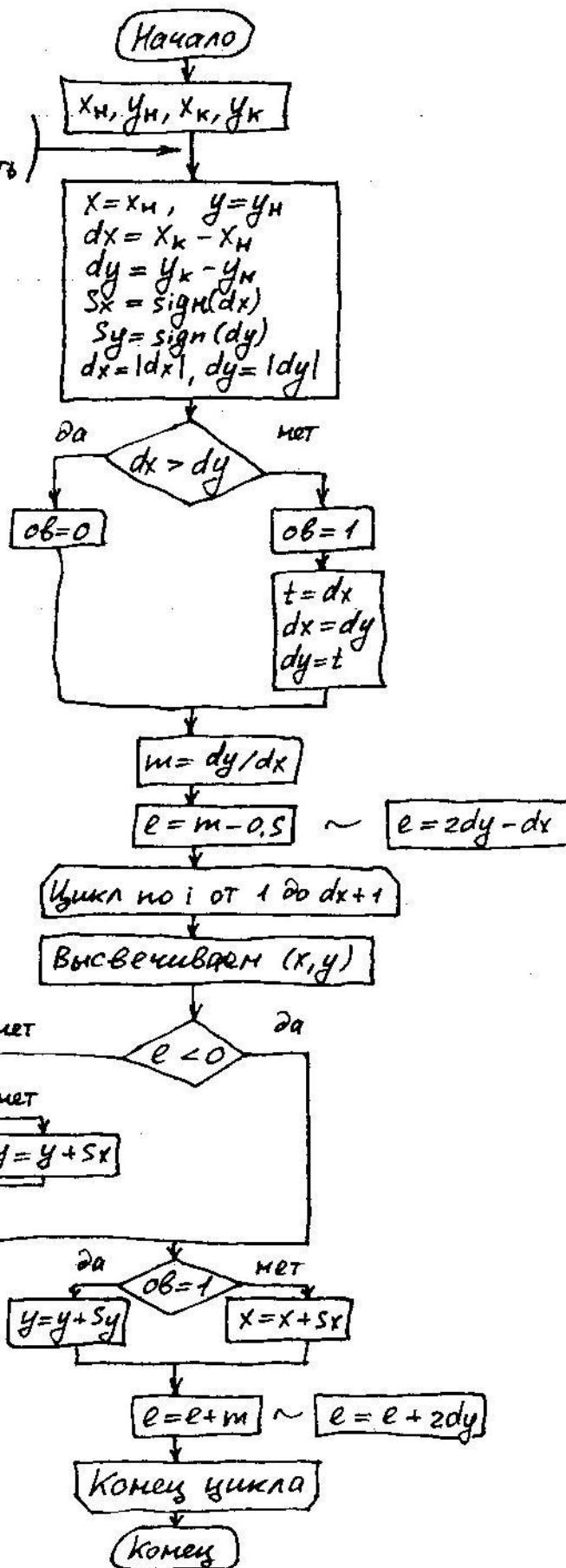
Общий алгоритм Брезенхема позволяет строить отрезок в любой октанте.



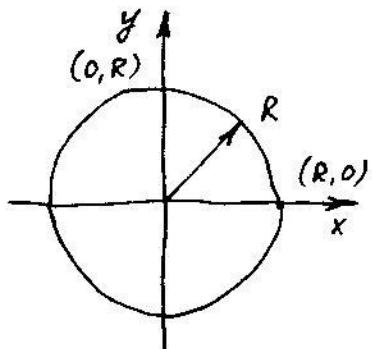
## Простой алгоритм Брезенхема



## Общий алгоритм Брезенхема

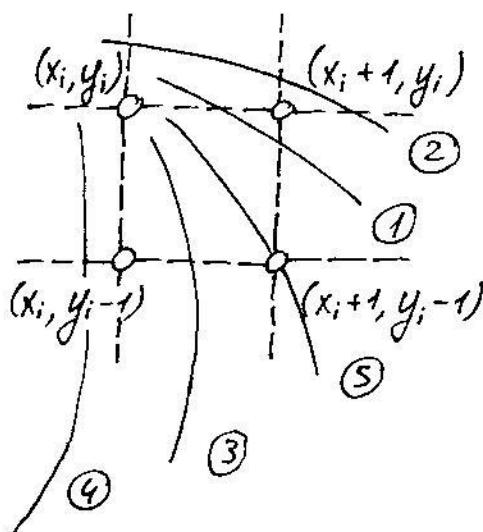
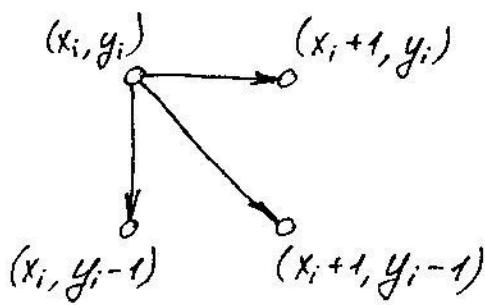


#5 Основные расчётные соотношения и алгоритм Брезенхема для генерации окружности.



Построение в I четверти.

$y = f(x)$  — монотонно убывающая.



$$\Delta_i = (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2$$

1)  $\Delta_i < 0 \Rightarrow$  пиксель лежит внутри окр.

Выбираем диаг. или горизонт. пикс. (случаи 1 или 2)

2)  $\Delta_i = 0 \Rightarrow$  диаг. пиксель лежит на окр. (шаг по диагонали)

3)  $\Delta_i > 0 \Rightarrow$  диаг. пиксель лежит вне окр.

Выбираем диаг. или вертик. пиксель (случаи 3 или 4)

Рассмотрим наши случаи:

1)  $\Delta_i < 0$

$$\delta_i = |(x_i + 1)^2 + y_i^2 - R^2| - |(x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2|$$

$\delta_i \leq 0 \Rightarrow$  расст. до диаг. пикс. больше, чем расст. до гориз. пикселя (выбор горизонт. пикселя)

$\delta_i > 0 \Rightarrow$  расст. до гориз. пикс. больше, чем расст. до диаг. пикселя (выбор диаг. пикселя)

### Случай 1

$$(x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2 \geq 0$$

$$(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 < 0$$

$$\tilde{\delta}_1 = (x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2 + (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 =$$

$$= 2[(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2] + 2y_i - 1 = 2(\Delta_i + y_i) - 1$$

### Случай 2

$$(x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2 < 0$$

$$(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 < 0$$

$$\tilde{\delta}_1 = -(x_i+1)^2 - y_i^2 + R^2 + (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 = -2y_i + 1 < 0$$

2)  $\Delta_i > 0$

$$\tilde{\delta}_2 = |(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2| - |x_i^2 + (y_i-1)^2 - R^2|$$

$\tilde{\delta}_2 \leq 0 \Rightarrow$  расст. до верт. пикселя больше, чем до диаг.  
(выбираем диагональный).

$\tilde{\delta}_2 > 0 \Rightarrow$  расст. до диаг. пикселя больше, чем до верт.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  выбираем вертикальный.

### Случай 3

$$(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 \geq 0$$

$$x_i^2 + (y_i-1)^2 - R^2 < 0$$

$$\tilde{\delta}_2 = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 + x_i^2 + (y_i-1)^2 - R^2 =$$

$$= 2[(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2] - 2x_i - 1 = 2(\Delta_i - x_i) - 1$$

### Случай 4

$$(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 > 0$$

$$x_i^2 + (y_i-1)^2 - R^2 \geq 0$$

$$\tilde{\delta}_2 = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 - x_i^2 - (y_i-1)^2 + R^2 = 2x_i + 1 > 0$$

### Случай 5

$$\Delta_i = 0$$

$$\tilde{\delta}_1 = |(x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2| > 0$$

$$\tilde{\delta}_2 = -|x_i^2 + (y_i-1)^2 - R^2| < 0$$

## 1. Горизонтальный шаг

$$x_{i+1} = x_i + 1, \quad y_{i+1} = y_i$$

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} &= (x_{i+1} + 1)^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - R^2 = (x_i + 2)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 = \\ &= (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 + 2x_i + 3 = \Delta_i + 2x_i + 1\end{aligned}$$

## 2. Диагональный шаг

$$x_{i+1} = x_i + 1, \quad y_{i+1} = y_i - 1$$

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} &= (x_{i+1} + 1)^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - R^2 = (x_i + 2)^2 + (y_i - 2)^2 - R^2 = \\ &= (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 + 2x_i + 3 - 2y_i + 3 = \Delta_i + 2x_{i+1} - 2y_{i+1} + 2\end{aligned}$$

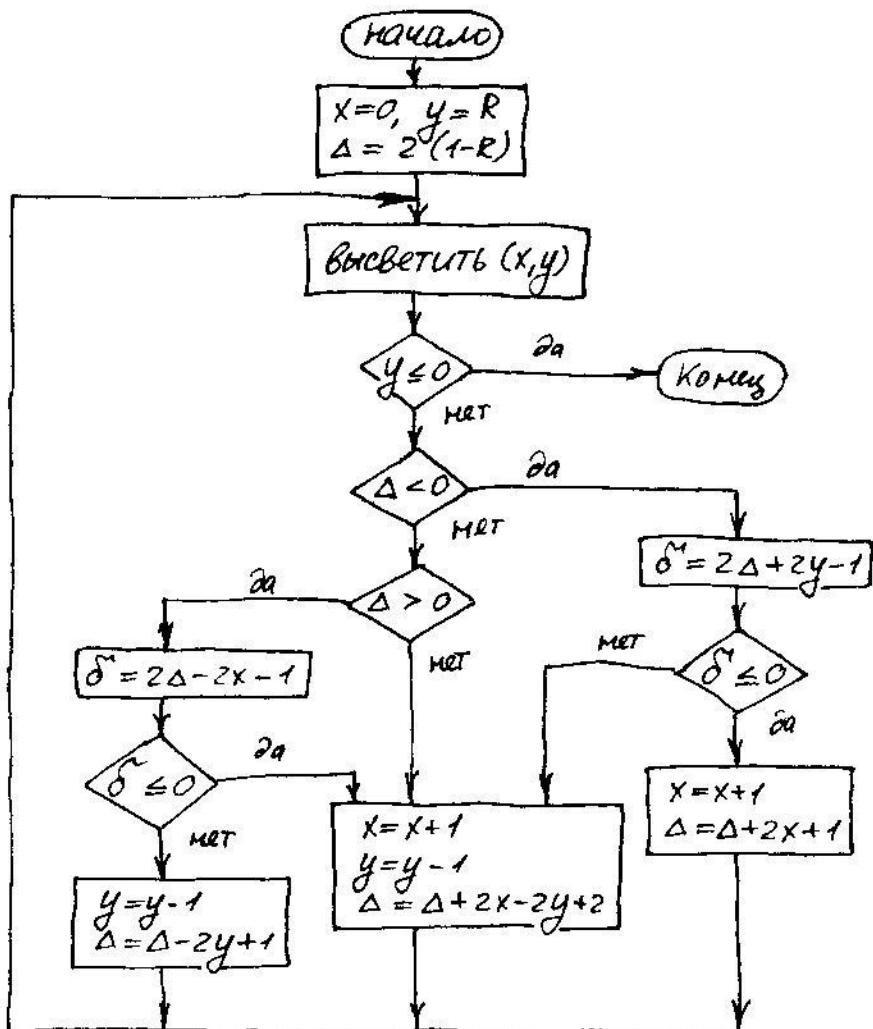
## 3. Вертикальный шаг

$$x_{i+1} = x_i, \quad y_{i+1} = y_i - 1$$

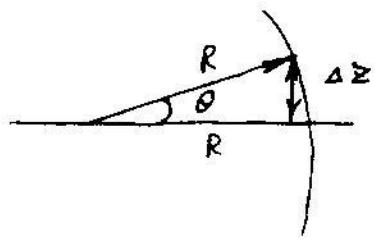
$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} &= (x_{i+1} + 1)^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - R^2 = (x_i + 1)^2 + (y_i - 2)^2 - R^2 = \\ &= (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 - 2y_i + 3 = \Delta_i - 2y_{i+1} + 1\end{aligned}$$

Например:  $\Delta_1 = (0+1)^2 + (R-1)^2 - R^2 = 2(1-R)$

## Блок-схема



## Построение кривых. Входя шага изменения аргумента



$$\sin \theta = \frac{\Delta z}{R}; \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\text{Тогда } \theta = \frac{\Delta z}{R} = \frac{1}{R}$$

При достаточно большом радиусе кривизны 2 соседние точки должны быть выбраны таким образом, чтобы величина угла, выраженная в радианах, образованная радиусами была бы не менее  $\theta = \frac{1}{R}$ .

$$y = f(x)$$

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}$$

Для полярн. коорд:

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right)}$$

#6 Способы генерации растровых изображений.

Развертка в реальном времени (организация списка активных рёбер).

Способы генерации изображений:

1. Память буфера кадра.
2. Растровая развертка в реальном времени.
3. Групповое кодирование.
4. Клеточное кодирование.

Растровая развертка в реальном времени

- геометр. характеристики (коорд. x, y, угол наклона, текст);
- информация о визуальных характеристиках (цвет, интенсивность).

В буфере мы храним информацию о списках акт. рёбер.  
САР хранит инф-цию о тех активных рёбрах, которые пересекают текущую скан. строку.

Для организации САР необходимо:

1. Упорядочить рёбра по убыванию их координаты y вершин рёбер.
2. Если на одной сканирующей строке начинается несколько рёбер, то их надо упорядочить по убыванию y-координаты вторых вершин.

$x_A$  - абсцисса вершины A.

$\Delta x_A$  - изменение абсциссы точки пересечения ребра при переходе к след. скан. строке.

$\Delta y$  - кол-во строк, пересекаемых ребром.

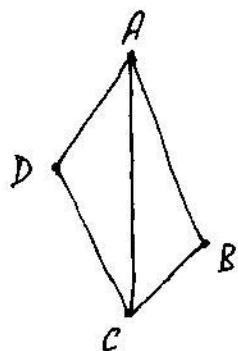
$$\Delta x_A = \frac{x_B - x_A}{\Delta y}$$

Для построения ребра достаточно знать:

$$x_A, \Delta x, \Delta y, \text{ где } \Delta x = \frac{x_B - x_A}{\Delta y}, \Delta y = y_B - y_A.$$

3. Ввести указатели на начало и конец списка:

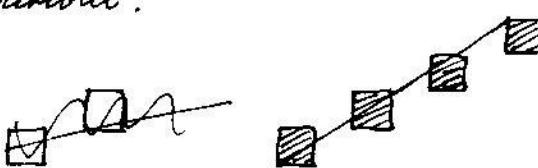
Например



$y_A: \overbrace{AD, AB, AC, DC, BC}^{\uparrow \downarrow}$

$y_D: \overbrace{AD, \overbrace{AB, AC, DC, BC}^{\uparrow \downarrow}}$

При рисовании пологих отрезков может получаться, что он рваный:



$y_{max\ AD} \quad x_{AD} \quad \Delta x_{AD} \quad \Delta y_{AD}$

$y_{max\ AB} \quad x_{AB} \quad \Delta x_{AB} \quad \Delta y_{AB}$

$y_{тек} > y_{max\ в\ том\ же\ те} - \text{нет}\ акт.\ рёбер$

$\Delta y_{AD} < 0 - \text{эт-т из списка удаляется}$

I способ: ( $y$ -группы)

|   |
|---|
| $x_1, \Delta x_1, \Delta y_1$             |
| $x_2, \Delta x_2, \Delta y_2, \dots$      |
| $x_k, \Delta x_k, \Delta y_k$             |
| —   |
| —   |
| $x_{k+1}, \Delta x_{k+1}, \Delta y_{k+1}$ |
| —   |

инф-ция об отрезке начиная с эт. строке

Недорогий метод.

II способ:

|       |    |                 |
|-------|----|-----------------|
| 1     | 1  | 1               |
| —     | 2  | $x_{AD}$        |
| —     | 3  | $\Delta x_{AD}$ |
| —     | 4  | $\Delta y_{AD}$ |
| $y_D$ | 5  | $x_{AB}$        |
|       | 6  | $\Delta x_{AB}$ |
|       | 7  | $\Delta y_{AB}$ |
|       | 8  | $x_{AC}$        |
|       | 9  | $\Delta x_{AC}$ |
|       | 10 | $\Delta y_{AC}$ |
|       | 11 | —               |
|       | 12 | $x_{DC}$        |
|       | 13 | $\Delta x_{DC}$ |
|       | 14 | $\Delta y_{DC}$ |
|       | —  | —               |

III способ:

|       |     |
|-------|-----|
| $y_A$ | 1   |
|       | ... |
| $y_D$ | 13  |
|       | ... |
| $y_B$ | 17  |
|       | ... |

|    |                 |
|----|-----------------|
| 1  | $x_{AD}$        |
| 2  | $\Delta x_{AD}$ |
| 3  | $\Delta y_{AD}$ |
| 4  | S               |
| 5  | $x_{AB}$        |
| 6  | $\Delta x_{AB}$ |
| 7  | $\Delta y_{AB}$ |
| 8  | ?               |
| 9  | $x_{AC}$        |
| 10 | $\Delta x_{AC}$ |
| 11 | $\Delta y_{AC}$ |
| 12 | —               |
| 13 | $x_{DC}$        |
| 14 | $\Delta x_{DC}$ |
| 15 | $\Delta y_{DC}$ |
| 16 | —               |
| 17 | $x_{BC}$        |
| 18 | $\Delta x_{BC}$ |
| 19 | $\Delta y_{BC}$ |
| 20 | —               |

- след. отрезок

#7 Способы генерации изображений:

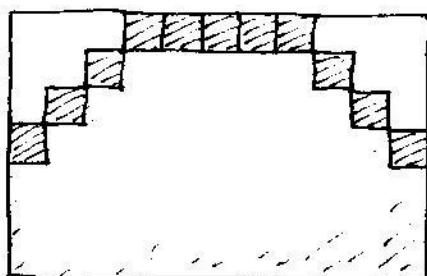
групповое кодирование, клеточное кодирование, адресация растра.

### Групповое кодирование

интенсивность длина участка - информационная ячейка

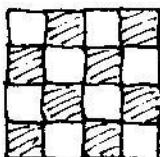
интенсивность красного интенсивн. зелёного интенсивн. синего длина участка - с учётом цвета

Например:



|   |    |   |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|---|
| 4 | 3  | 8 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| 4 | 2  | 8 | 7 | 4 | 2 | 6 |
| 4 | 1  | 8 | 9 | 4 | 1 | 6 |
| 8 | 4  |   |   |   |   | 2 |
| 8 | 4  |   |   |   |   | 2 |
| 8 | 11 |   |   |   |   | 2 |
| 8 | 11 |   |   |   |   | 2 |

$$7 \cdot 11 = 77 > 26 \quad \text{-- т.е. мы получили хорошее сжатие}$$

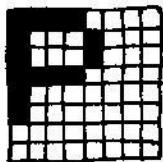


- здесь этот метод проигрывает пикセルному хранению в 2 раза.

Добавление или удаление отрезков или текста в изобр. является трудоёмкой операцией и занимает много времени из-за последовательного хранения этих участков.

### Клеточное кодирование

Область экрана разбивается на клетки площадью  $n \times n$  (например, клетки  $8 \times 8$  хватят для вывода матрицы). Для вывода изображения с использованием этого метода в ПЗУ нужно хранить идентификаторы сегментов изображения. Тогда комбинации таких сегментов, расположенных в соседних клетках реализуют построение изображения.



Для произвольной ячейки размером  $n \times n$  существует  $2^{n^2}$  возможных шаблонов, составленных из пикселов.

Хотя показано, что для алгоритма Брезенхема для отрезков с тангенсом угла наклона между 0 и 1 существует не более  $2^n - 1$  шаблонов, представляющих сегменты.

Жордан и Баррет показали, что для ячейки  $8 \times 8$  при использовании перевода, отражения и маскирования требуется только 108 <sup>шаблонов</sup> сегментов отрезков.

### Адресация растра

Пусть пиксель в растре имеет координаты  $(x, y)$ .

Цифровая память организована в линейный список адресов.

Тогда: Адрес =  $(x_{\max} - x_{\min})(y - y_{\min}) + (x - x_{\min}) + \text{базовый адрес.}$

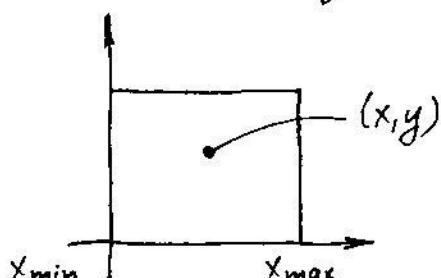
Адрес =  $K_1 + K_2 y + x$ , где  $K_1 = \text{базовый адрес} - K_2 y_{\min} - x_{\min}$ ;

$$K_2 = x_{\max} - x_{\min}$$

$$\text{Адрес}(x \pm 1, y) = K_1 + K_2 y + x \pm 1 = \text{Адрес}(x, y) \pm 1$$

$$\text{Адрес}(x, y \pm 1) = K_1 + K_2 (y \pm 1) + x = \text{Адрес}(x, y) \pm K_2$$

$$\text{Адрес}(x \pm 1, y \pm 1) = \text{Адрес}(x, y) \pm K_2 \pm 1$$

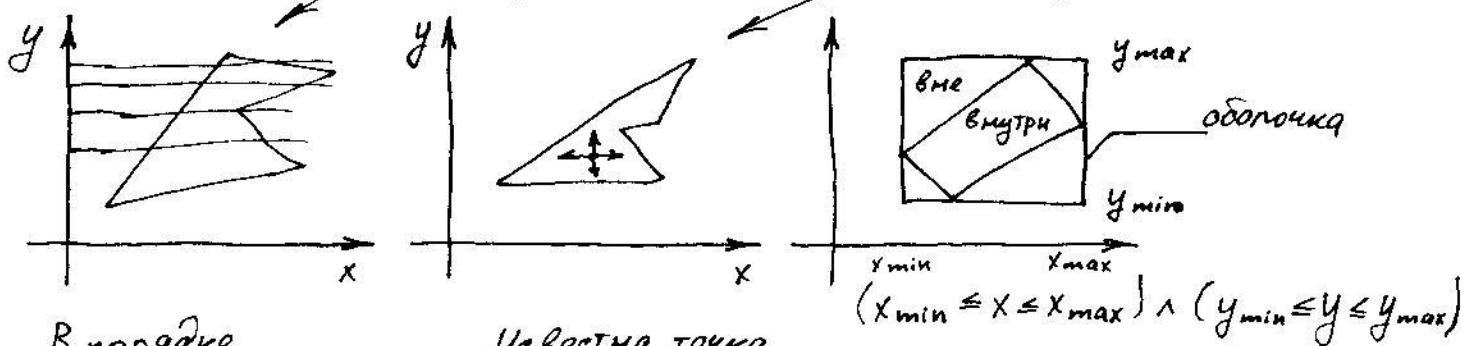


#8) Растровая развертка сплошных областей.  
Алгоритм с упорядоченным списком рёбер.

Под растровой разверткой сплошных областей понимается генерация областей на основе простых описаний рёбер или вершин многоугольников (запраска).

Для этого используется две категории методов:

растровая развертка и затравочное заполнение.



В порядке сканирования строк определяют, лежат ли точки внутри многоугольника. Эти алгоритмы методы применимы для растровых и векторных дисплеев.

Известна точка (затравка) внутри замкнутого контура. Ищут точки, соседние с затравочной и расположенные внутри контура. Если точка не внутри, то обнаружена граница. Поиск рекурсивный. Эти методы применимы только к растровым дисплеям.

Алгоритм заполнения с упорядоченным списком рёбер

1. Найти точки пересечения всех скан. строк со всеми рёбрами.
2. Все точки в массив (список).
3. Сортировать точки по убыванию  $y$ .
4. Сортировать интервалы точек разных  $y$  по возрастанию  $x$ :  $((x_k, y_k), (x_l, y_l))$ , если  $y_1 > y_2$  или  $x_k \leq x_l$  и  $y_1 = y_2$ .
5. Работать на пары и выставить все пиксели между точками каждой пары.

#9 Заполнение многоугольников.

Алгоритм заполнения по рёбрам, с перегородкой, со списком рёбер и флагом.

Алгоритм заполнения по рёбрам

фон = цв. закраски

цв. закраски = фон

Для каждой сканирующей строки, пересекающей ребра мы-ка дополнить все пиксели, лежащие правее точек пересечения.

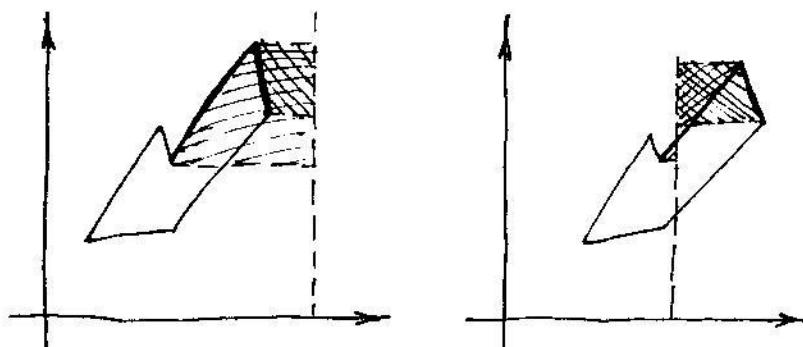
Недостаток: каждый пиксель может перекрываться много раз.

Алгоритм заполнения по рёбрам с перегородкой

фон = цв. закр.

цв. закр. = фон

Если т. пересечения скан. строки с ребром мы-ка лежит левее перегородки (вертикальная линия между  $x_{min}$  и  $x_{max}$ ), то дополнить все пиксели, лежащие правее т. пересечения, но левее перегородки. Если правее перегородки - то дополнить все пиксели левее пересечения, но правее перегородки.

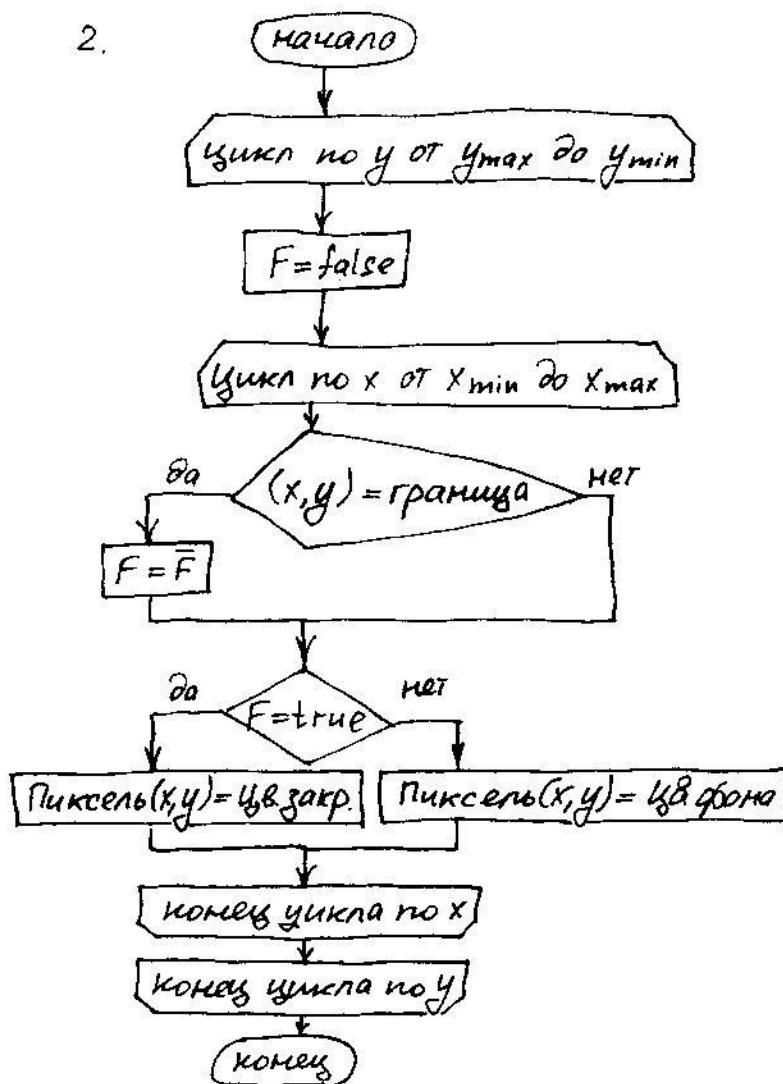


В обоих алгоритмах очертывания границы закрашиваемой области не нужно.

## Алгоритм со списком рёбер и флагом

1. Очергить контур, в результате чего на каждой строке обрастаются пары ограничивающих пикселов.

2.



#10 Алгоритм заполнения с затравкой,  
простой алгоритм заполнения с затравкой

Алгоритм заполнения с затравкой

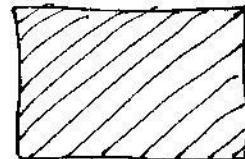
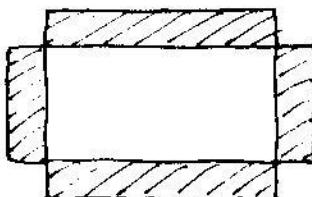
Необходимо:

- 1) Задать область.
- 2) Знать координаты точки, лежащей внутри.

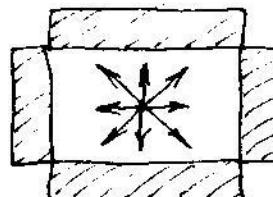
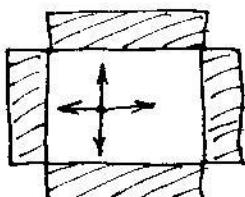
Рассматриваются пиксели, соседние с данным.

Используется стек.

Границно-опред. области:      Внутренне-определенное



Области бывают 4-связные и 8-связные:



Простой алгоритм

1. Задание исх. данных  
(область и затрав. пиксель)
2. Поместить затрав. пиксель в стек
3. Пока стек не пуст:

- a) извлечь пиксель  $(x, y)$  из стека
- b)  $\text{Цвет}(x, y) \neq \text{Цв.закраски} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \text{Цвет}(x, y) = \text{Цв.закраски}$

- c) Анализ 4-х соседних пикселей:  
 $(x-1, y), (x, y+1), (x+1, y), (x, y-1)$

$\text{Цвет пикс.} \neq \text{Цв.затр. и} \neq \text{Цв.границы} \Rightarrow$  Пиксель в стек

Недостатки:

1. Стек увеличивается.
2. Несимметрич. пиксели могут появляться в стеке не один раз.

## #11 Алгоритмы заполнения с затравкой.

Построенный алгоритм заполнения с затравкой.

Основное отличие от простого: ограниченное количество пикселей в стеке.

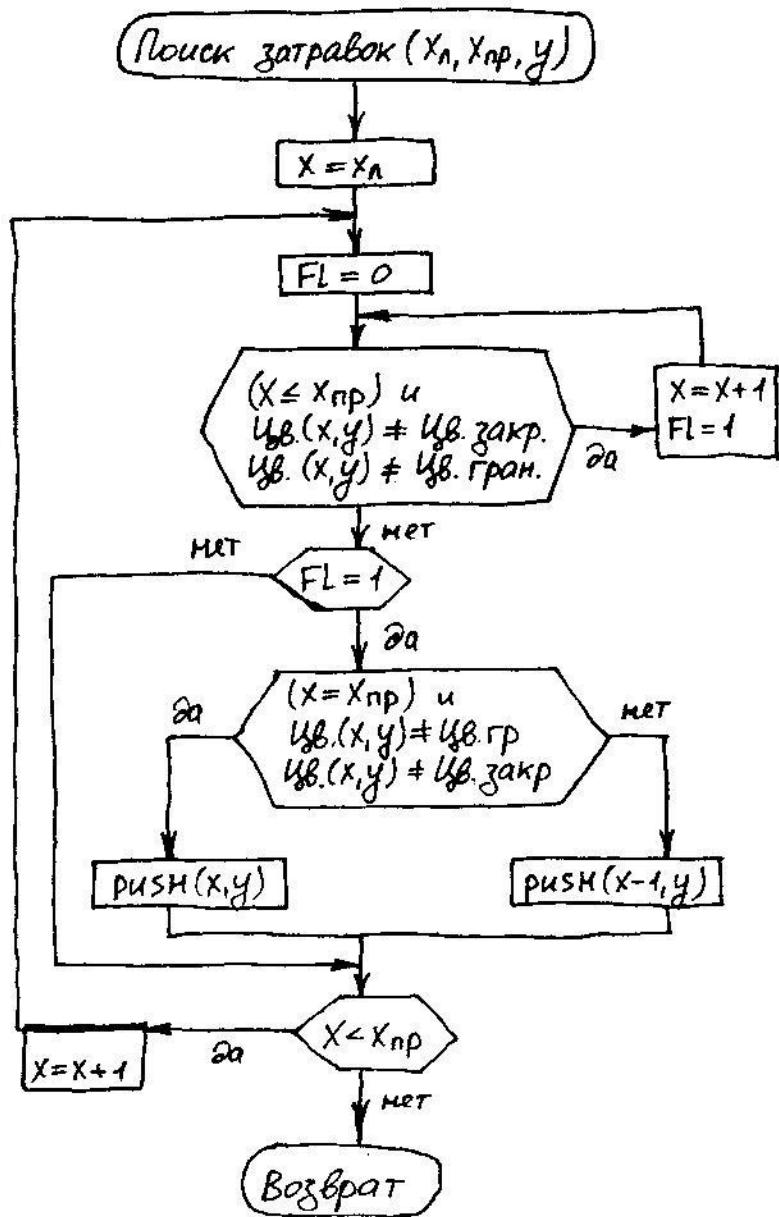
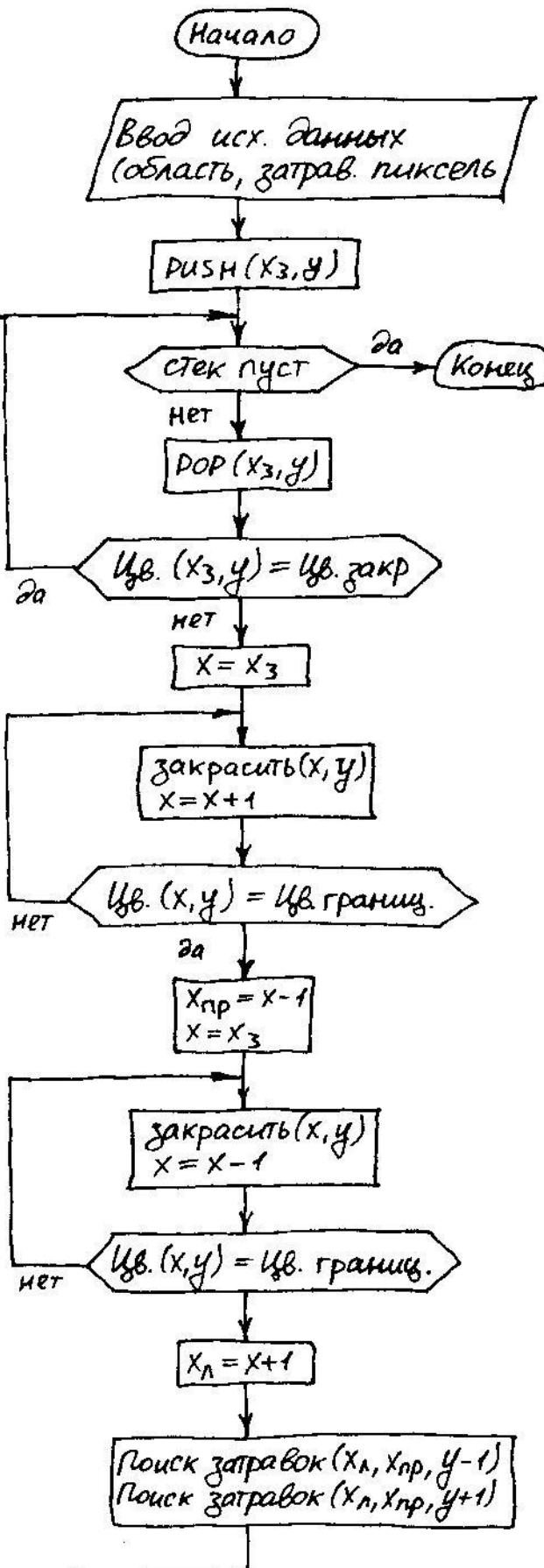
Непрерывный интервал пикселей - группа прилегающих друг к другу пикселей, незакрашенных и неграницевых, которые ограничены закрашенными или граничными пикселями.

В стек помещается один из пикселей этой группы.

Алгоритм:

1. Задание исходных данных (область, затрав. пиксель).
2. Поместить в стек затрав. пиксель.
3. Пока стек не пуст, выполнять:
  - a) Извлечь затравочный пиксель из стека.
  - b) Заполнение пикселей, лежащих левее затравочного (в пределах строки), до встречи с граничным.
  - c) Заполнение пикселей, лежащих правее затравочного, до встречи с граничным.
  - d) Запомнить самый правый закрашенный пиксель в Хлев.
  - e) Поиск затравочных пикселей на соседних строках ( $y+1$ ,  $y-1$ ) в интервалах  $X_{лев} \leq X \leq X_{прав}$  (для интервала незакрашенных и неграницевых пикселей самый правый - затравочный - поместить его в стек).

Блок-схема алгоритма:



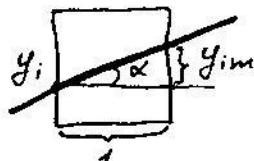
#12 Основы методов устранения ступенчатости.

Алгоритм брезенхема с устранением ступенчатости.

Основная причина появления лестничного эффекта заключается в том, что отрезки имеют непрерывную природу, тогда как растровое устройство дискретно.

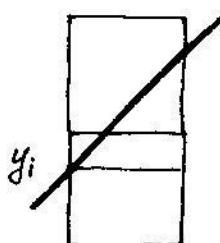
Существует 2 метода устранения искажений изображения:

- 1) увеличить частоту выборки, что достигается с помощью увеличения разрешения растра  $\Rightarrow$  учитываются более мелкие детали.
- 2) трактовать пиксели не как точки, а как конечную область (высвечивать пиксели интенсивностью, пропорциональной площади части пикселя, находящейся под отрезком).

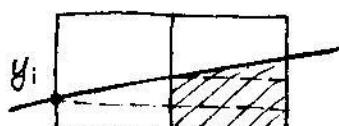


$$\operatorname{tg} \alpha = m \quad \text{и} \quad y_{i+m} = m$$

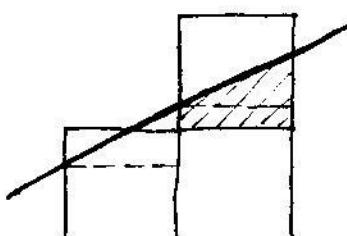
$$S = S_{\square} + S_{\Delta} = y_i \cdot 1 + \frac{m \cdot 1}{2} = y_i + \frac{m}{2}$$



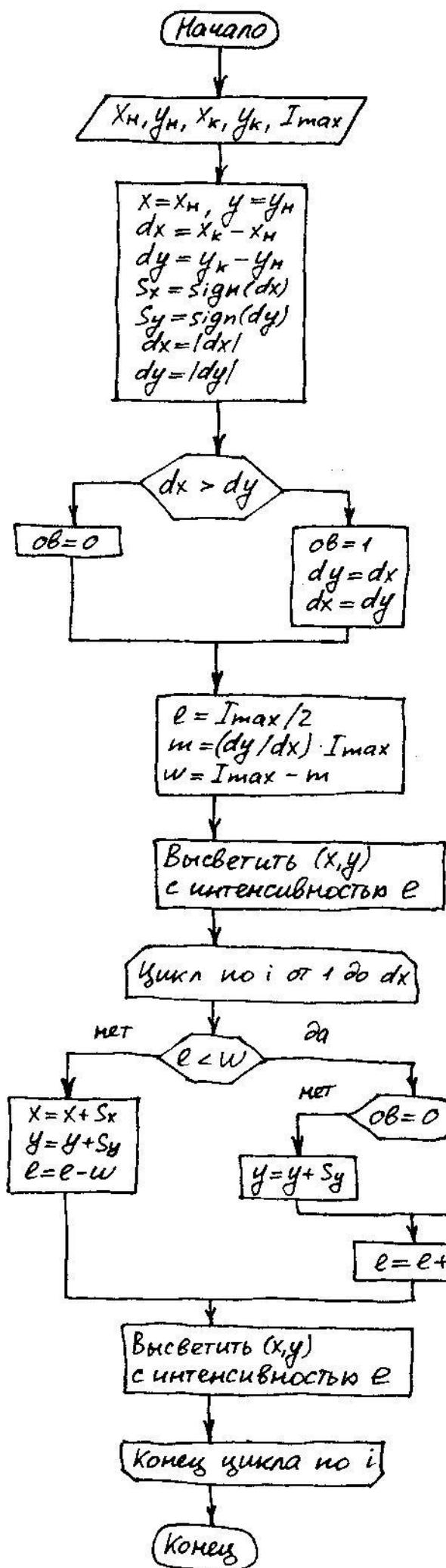
$$S = S_{\square} + S_{\Delta} = y_i \cdot 1 + \frac{m \cdot 1}{2} = y_i + \frac{m}{2}$$



$$S_{i+1} = y_i \cdot 1 + m \cdot 1 + \frac{m \cdot 1}{2} = S_i + m$$



$$S_{i+1} = y_i \cdot 1 + m \cdot 1 + \frac{m \cdot 1}{2} - 1 \cdot 1 = S_i + m - 1 = S_i - (1-m)$$



#13 Двумерное отсечение. Простой алгоритм отсечения отрезка.

Отсечение — удаление изображения за пределами видимой области (окна).

Для того, чтобы отсечь, необходимо знать:

1. Геометрические характеристики отсекаемых объектов.
2. Характеристики отсекателя.

Объект, целиком лежащий в области, — видимый.

Невидимый — если целиком расположен за пределами отсекателя.

Частично видимый — часть в пределах, часть за пределами.

|      |      |      |
|------|------|------|
| 1001 | 1000 | 1010 |
| 0001 | 0000 | 0010 |
| 0101 | 0100 | 0110 |

$$\left. \begin{array}{l} T_{i0} = 1, \text{ если } x < x_n, \text{ иначе } T_{i0} = 0 \\ T_{i1} = 1, \text{ если } x > x_{pr}, \text{ иначе } T_{i1} = 0 \\ T_{i2} = 1, \text{ если } y < y_n, \text{ иначе } T_{i2} = 0 \\ T_{i3} = 1, \text{ если } y > y_b, \text{ иначе } T_{i3} = 0 \end{array} \right\} \text{код точки } P_i$$

$$S_j = \sum_{i=0}^3 T_{ji} \quad \text{и} \quad P = \sum_{i=0}^3 T_{i1} \cdot T_{i2}$$

$S_j \neq 0 \Rightarrow$  точка невидима.

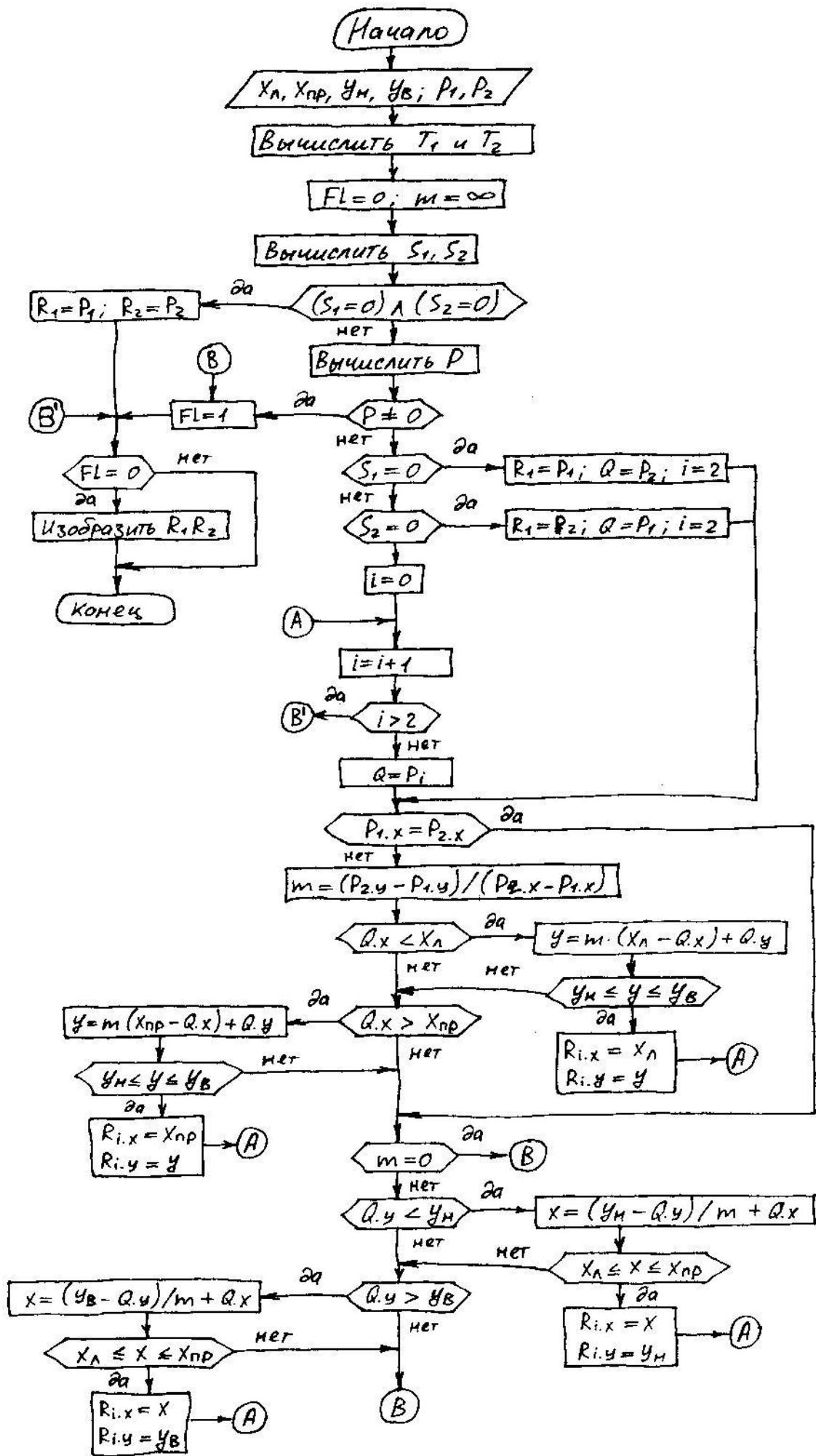
$S_j = 0 \Rightarrow$  точка видима.

$P \neq 0 \Rightarrow$  отрезок лежит по одному из сторон окна (невидим).

$(S_1 = 0) \wedge (S_2 = 0) \Rightarrow$  отрезок полностью видим.

$((S_1 = 0) \wedge (S_2 \neq 0)) \vee ((S_1 \neq 0) \wedge (S_2 = 0)) \Rightarrow$  частично видим.

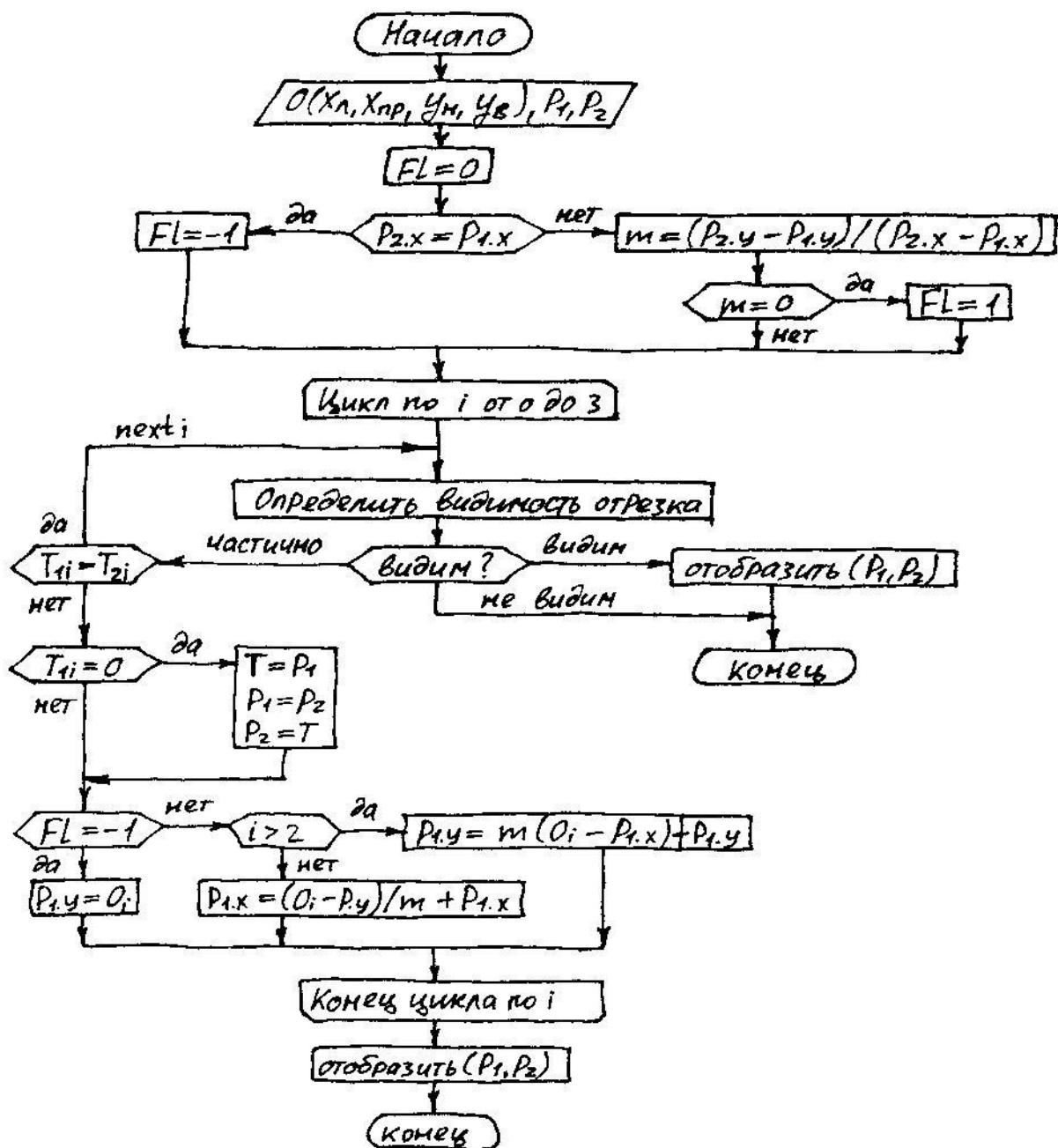
# Блок-схема простого алгоритма отсечения



## #14 Отсечение. Алгоритм Сандерленда-Козна отсечения отрезка.

Алгоритм отличается от простого способом нахождения точки пересечения. Отрезок на каждом шаге разбивается на 2 части (если сторона отсекателя или её продолжение пересекают отрезок). Одна часть отрезка будет видимой (или частично видимой), а другая будет невидимой - её мы отбрасываем.

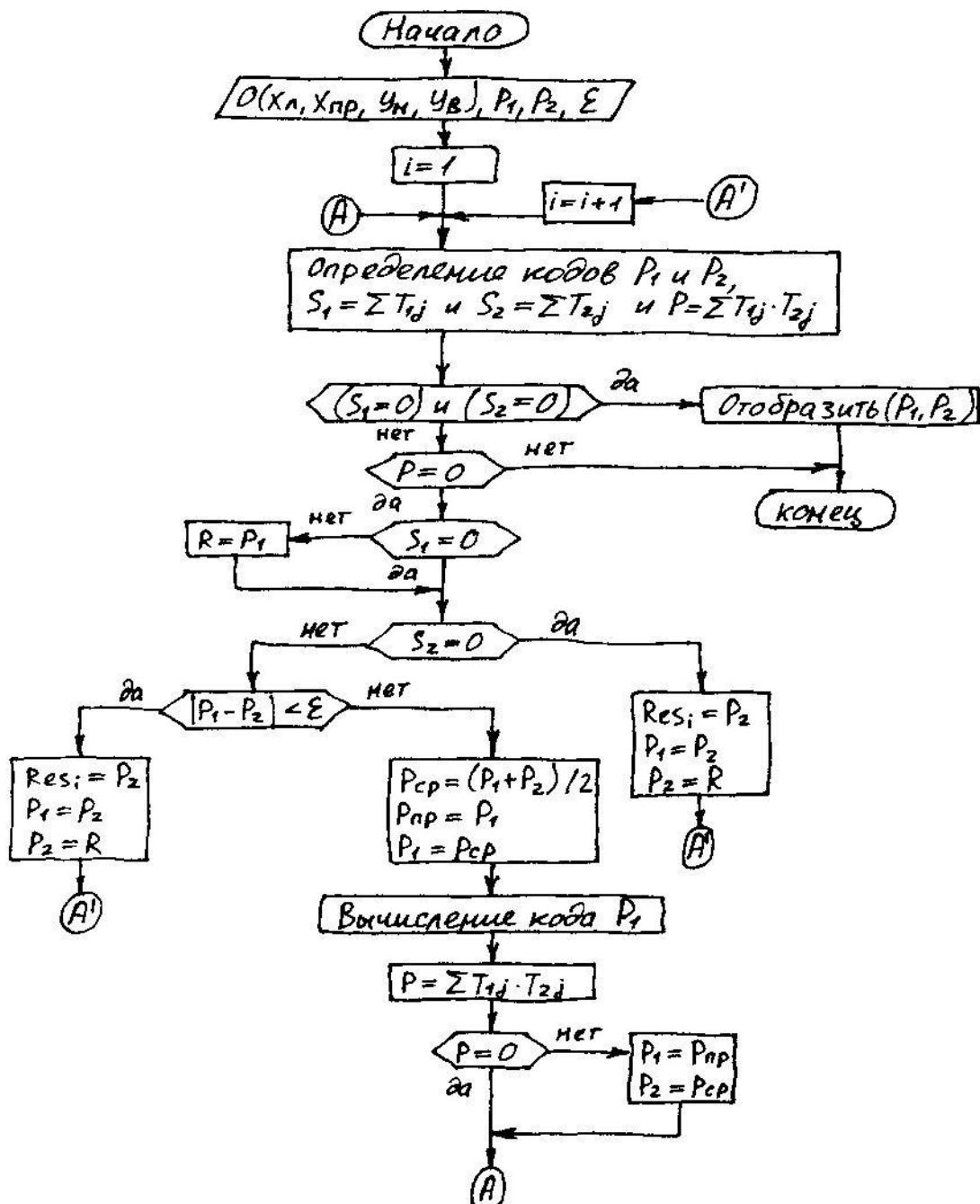
Блок-схема:



#15 Отсечение. Алгоритм разбиения средней точкой при отсечении отрезка.

При реализации программным путём этот алгоритм работает медленнее простого, при реализации аппаратным путём — быстрее.  $\varepsilon \approx \sqrt{2}$ .

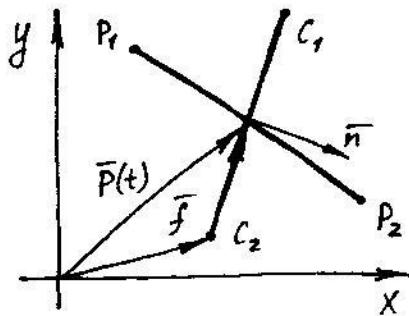
БЛОК-СХЕМА:



#16 Отсечение. Алгоритм Кируса-Бека отсечения отрезка.

Параметрическое задание отрезка:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1) \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 1$$



$(P(t) - f_i) \cdot \bar{n}_i = 0$  при таком  $t$ , которое соответствует  $P(t)$  — точке пересечения  $P_1P_2$  и  $C_1C_2$  ( $f_i$  —  $\forall$  точка на  $C_1C_2$ ,  $\bar{n}$  — нормаль к  $C_1C_2$ ).

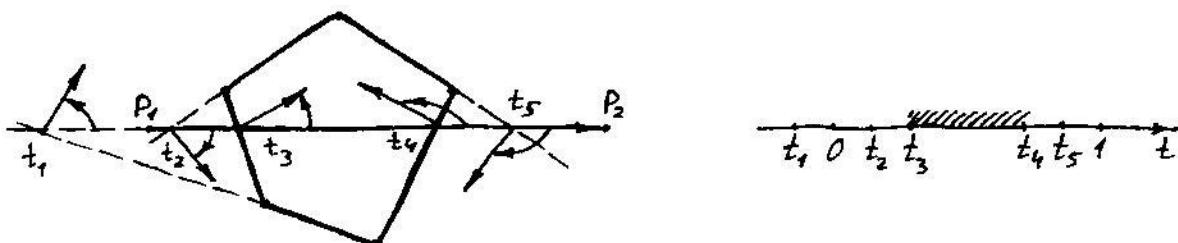
$$(P_1 + (P_2 - P_1) \cdot t - f_i) \cdot \bar{n}_i = 0$$

$$t = -\frac{W_{CKi}}{D_{CKi}}, \text{ где } W_{CKi} = (P_1 - f_i) \cdot \bar{n}_i \text{ и } D_{CKi} = (P_2 - P_1) \cdot \bar{n}_i;$$

$$D_{CKi} = 0 \Rightarrow C_1C_2 \parallel P_1P_2$$

Отрезок может пересекать выпуклое окно не более, чем в двух точках.

Пусть  $\bar{n}_i = \bar{n}_{BHi}$  — вектор внутренней нормали выпуклого окна.



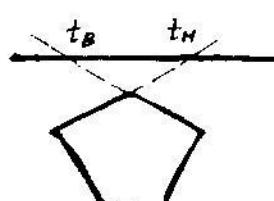
$D_{CKi} > 0 \Rightarrow t_i$  пересечения с  $i$ -ой грани лежит ближе к видимой части отрезка (ближе к началу). Если  $D_{CKi} > 0$ , то  $t_i$  принадлежит нижней группе видимости (в примере это:  $t_1, t_2, t_3$ ).

$D_{CKi} < 0 \Rightarrow t_i$  пересечения с  $i$ -ой грани лежит ближе к концу видимой части отрезка. Если  $D_{CKi} < 0$ , то  $t_i$  принадлежит верхней группе видимости (в примере это:  $t_4, t_5$ ).

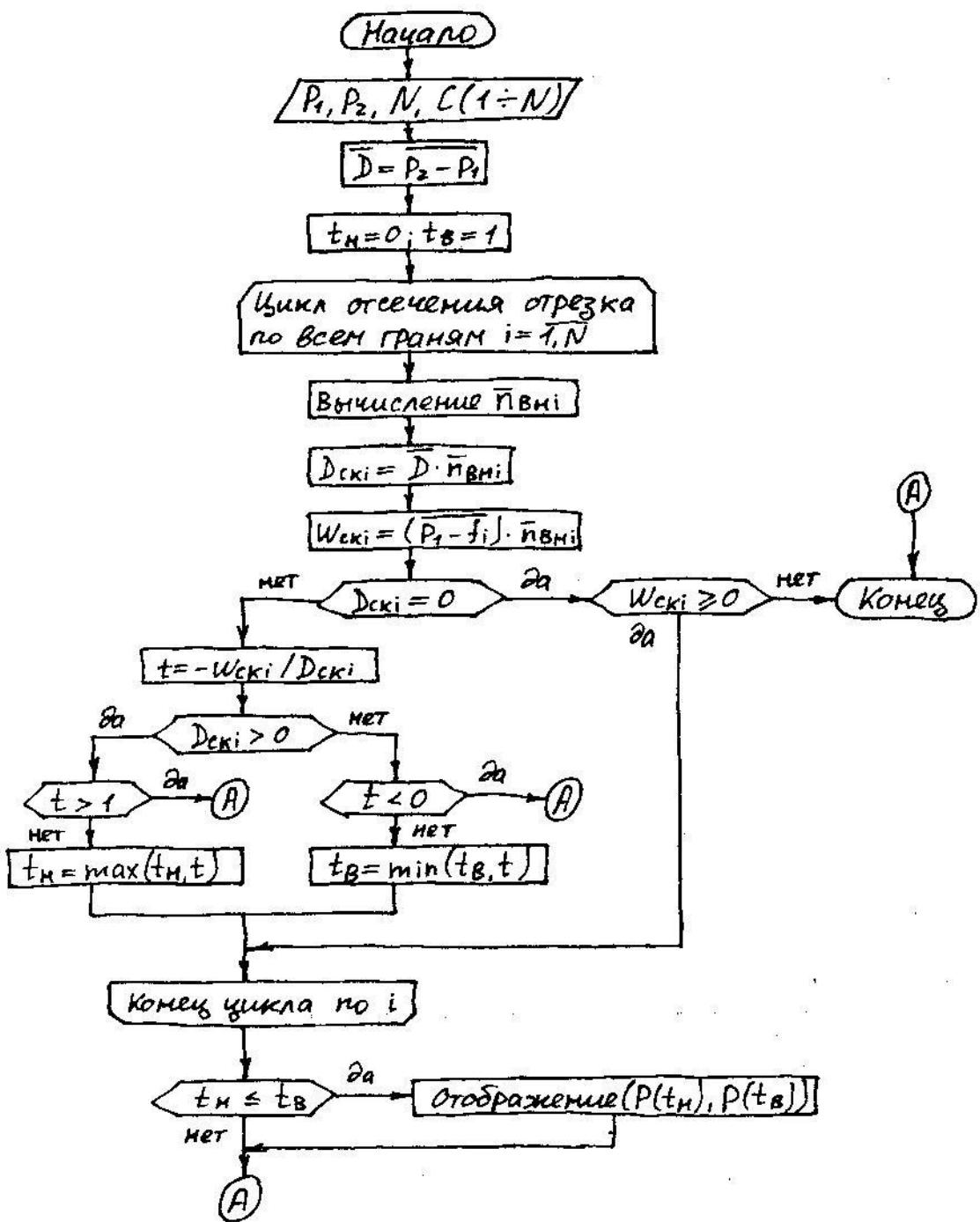
$$t_u = \max t_{Bi} \text{ и } t_b = \min t_{Bi}$$

Необходимо проверить, чтобы  $t_u \leq t_b$ .

$$W_{CKi} = \begin{cases} > 0 & \Rightarrow P_i \text{ видима} \\ = 0 & \Rightarrow P_i \text{ на грани} \\ < 0 & \Rightarrow P_i \text{ изолирована} \end{cases}$$



## БЛОК-СХЕМА:

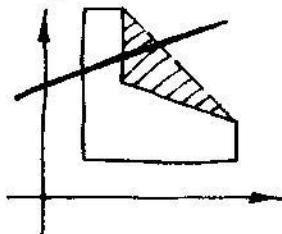


#17 Внутреннее и внешнее отсечение. Определение выпуклости многоугольника; определение нормали; разбиение невыпуклых многоугольников.

Внутреннее отсечение: определяются части отрезков, лежащие внутри отсекателя, и вычерчиваются.

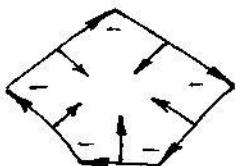
Внешнее отсечение: определяются части отрезков, лежащие вне отсекателя, и вычерчиваются.

Внешнее отсечение играет важную роль в дисплеях, допускающих работу с несколькими окнами.



Внешним отсечением можно воспользоваться при работе с возможным окном.  
(для рис.: относительно треуг-ка сделать внешнее отсечение).

Определение факта выпуклости



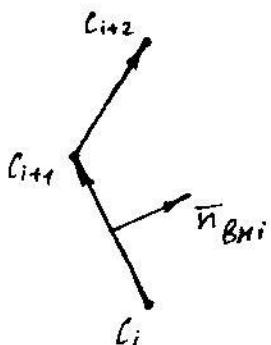
Нужно вычислить векторные произведения всех пар смежных сторон:

- 1) если все равны нулю  $\Rightarrow$  мн-к вырожден в отрезок;
- 2) если есть неравные нулю  $\Rightarrow$  мн-к невырожден;
- 3) если есть и положительные и отрицательные  $\Rightarrow$  мн-к невыпуклый;
- 4) если все неотрицательные  $\Rightarrow$  мн-к выпуклый, внутренние нормали ориентированы влево от рёбер-векторов;
- 5) если все неположительные  $\Rightarrow$  мн-к выпуклый, внутренние нормали ориентированы вправо от рёбер-векторов.

## Определение факта выпуклости и разбиение невыпуклого

- 1) Перенести мн-к так, чтобы  $i$ -ая вершина совпала с  $(0,0)$ .
- 2) Повернуть мн-к вокруг  $(0,0)$  так, чтобы его  $(i+1)$ -ая вершина оказалась на положительной части оси абсцисс.
- 3) Внимать знаки ординат всех  $(i+2)$ -ых вершин:
  - 3.1) если все равны нулю  $\Rightarrow$  мн-к вырожден в отрезок;
  - 3.2) если все знаки одинаковы  $\Rightarrow$  мн-к выпуклый относительно  $i$ -го ребра; в повернутой системе координат внутренняя нормаль имеет ту же самую абсциссу и ординату, равную знаку ордината  $(i+2)$ -ой вершины;
  - 3.3) если есть и положительные и отрицательные знаки  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  мн-к невыпуклый; мн-к разрезается на две части вдоль оси абсцисс, далее работа ведётся уже с двумя мн-ками.

## Определение внутренней нормали



$$\overrightarrow{c_i c_{i+1}} = c_{ix} \cdot \vec{i} + c_{iy} \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{n_{\text{вн}}} = n_{ix} \cdot \vec{i} + n_{iy} \cdot \vec{j}$$

$$(\overrightarrow{c_i c_{i+1}}) \cdot \overrightarrow{n_{\text{вн}}} = 0$$

$$c_{ix} \cdot n_{ix} + c_{iy} \cdot n_{iy} = 0$$

Пусть  $n_{iy} = 1 \Rightarrow n_{ix} = -\frac{c_{iy}}{c_{ix}}$  для  $c_{ix} \neq 0$ ;

$n_{iy} = 0$  и  $n_{ix} = 1$  для  $c_{ix} = 0$ .

#18 Отсечение мн-ков. Алгоритм Сандерленда - Ходжмена.

В этом алгоритме исходный и каждый из промежуточных мн-ков отсекается последовательно относительно прямой.

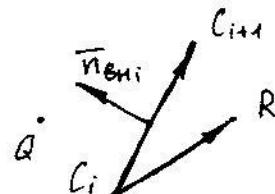
Суть алгоритма:

1. Определить видимость вершин мн-ка.

a)  $f_{ip}(x, y) = Ax + By + C$  — пробная ф-ция, где  $A, B, C$  — коэф-ты уравнения прямой, проходящей через  $i$ -е ребро. Нужно сравнить знаки  $f_{ip}(Q_x, Q_y)$  и  $f_{ip}(R_x, R_y)$ , где  $(Q_x, Q_y)$  — точка с известным положением,  $(R_x, R_y)$  — испытываемая точка.

б) Использовать  $(\vec{n}_{bi} \cdot \vec{C_i R})$ .

в) Использовать  $\overrightarrow{C_i C_{i+1}} \otimes \overrightarrow{C_i R}$ .



2. Определить точки пересечения рёбер исходного многоугольника и рёбер отсекателя.

Прежде чем искать т. пересечения, нужно убедиться, что она существует. Если т. пересечения есть, то решить систему:

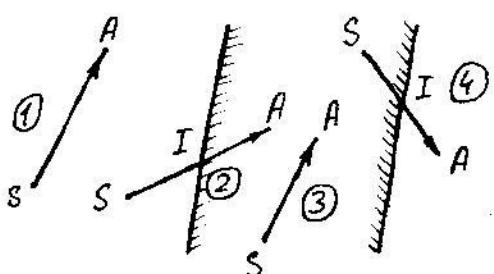
$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1) \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{— ребро мн-ка.}$$

$$Q(s) = Q_1 + (Q_2 - Q_1) \cdot s, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{— ребро отсекателя.}$$

$$\begin{cases} P_{1,x} + (P_{2,x} - P_{1,x}) \cdot t = Q_{1,x} + (Q_{2,x} - Q_{1,x}) \cdot s \\ P_{1,y} + (P_{2,y} - P_{1,y}) \cdot t = Q_{1,y} + (Q_{2,y} - Q_{1,y}) \cdot s \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{1,x} + (P_{2,x} - P_{1,x}) \cdot t = Q_{1,x} + (Q_{2,x} - Q_{1,x}) \cdot s \\ P_{1,y} + (P_{2,y} - P_{1,y}) \cdot t = Q_{1,y} + (Q_{2,y} - Q_{1,y}) \cdot s \end{cases}$$

3. Заносить видимые вершины и найденные т. пересечения в результатирующую список.



① Ничего не заносить в список.

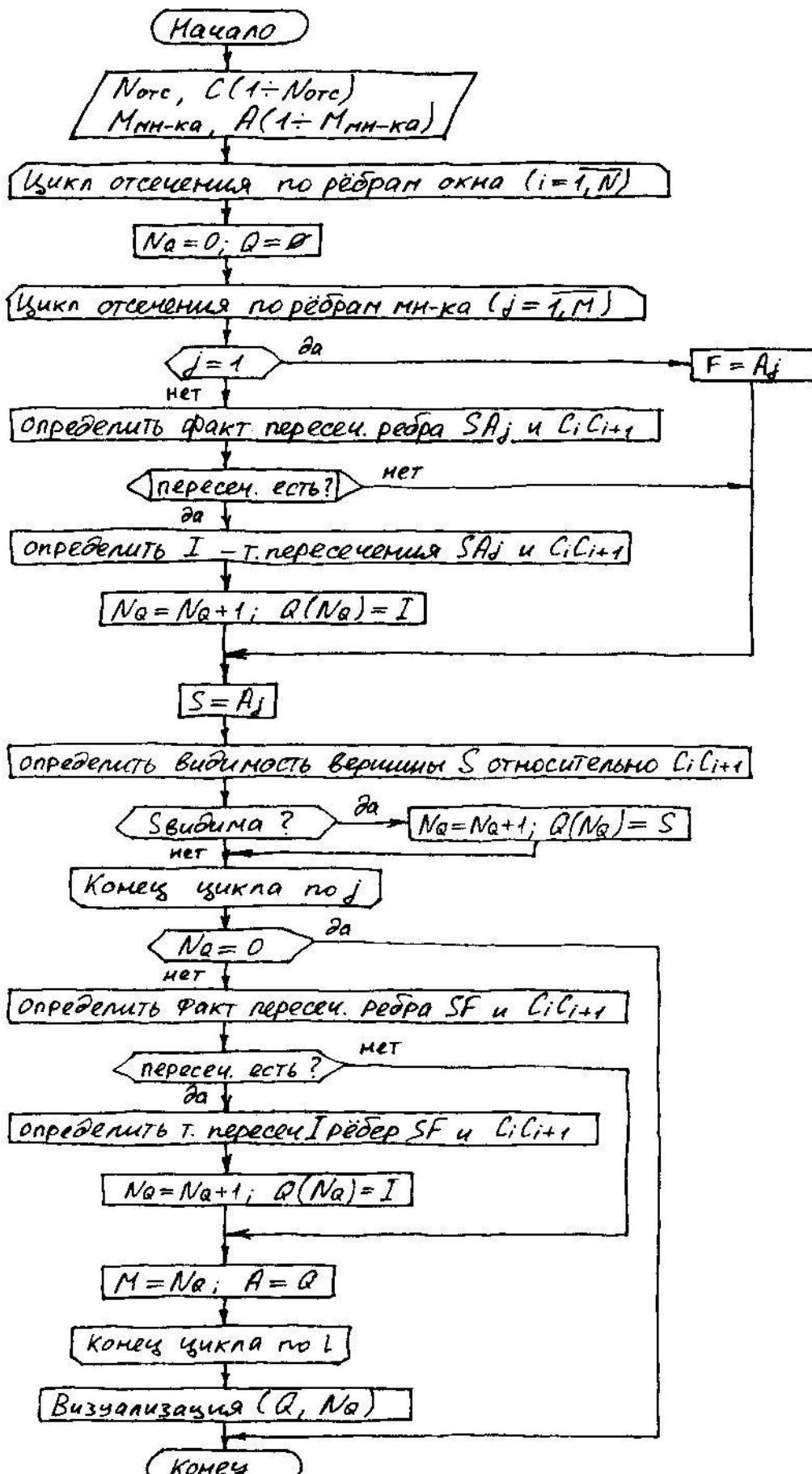
② Занести т. I и т. A.

③ Занести т. A.

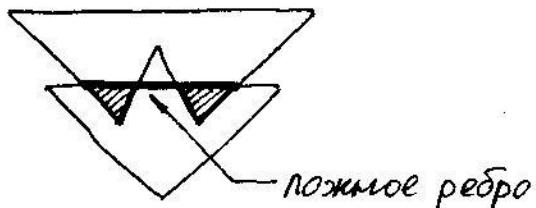
④ Занести т. I.

(возможные положения рёбер отсекателя и мн-ка).

## БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМА:

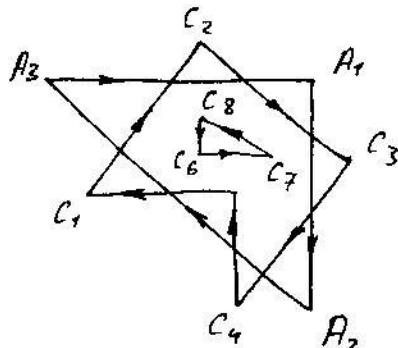


Недостаток алгоритма:



#19 Отсечение мн-ков невыпуклыми областями.  
Алгоритм Вейнера-Азерттона.

Внешние границы мн-ка или отсекателя задаются по часовой стрелке, внутренние — против часовой.



Результат отсечения — мн-к, ребра которого либо совпадают с ребрами исходного мн-ка, либо с ребрами отсекателя.  
Новые ребра не появляются.

Точной входа называется т. пересечения, если в этой точке ребро мн-ка входит в отсекатель. Точной выхода называется т. пересечения, если в ней ребро мн-ка выходит из отсекателя.

Чтобы получить внутренний мн-к в результате отсечения, нужно просматривать список с вершинами входного типа.

Чтобы получить внешний мн-к в результате отсечения, нужно просматривать список с вершинами выходного типа.

Описание алгоритма:

1. Ввод исходных данных.
2. Сформировать двунаправленные циклические списки вершин.
3. Найти все точки пересечения ребер отсекаемого мн-ка и отсекателя.
4. Добавить точки пересечения в списки в соответствующие места.
5. Разделить точки пересечения на две группы: точки входа и точки выхода.

### Внутренне отсечение:

1. Взять очередную точку из списка точек входа.  
Если этот список исчерпан, то поиск внутренних  
мн-ков завершён.
2. Просматривать список вершин отсекаемого мн-ка  
пока не встретится т. пересечения.
3. Просмотренные вершины скопировать в список  
вершин редуцирующего мн-ка.
4. В т. пересечения перейти к списку вершин отсекателя.  
Просматривать список вершин отсекателя, пока не встретит-  
ся т. пересечения.
5. Просмотренные вершины добавить в список вершин  
редуцирующего мн-ка.
6. В точке пересечения вернуться назад к списку вершин  
отсекаемого мн-ка.
7. Повторять эти переходы и ходы по спискам пока не будет  
достигнута исходная вершина. При достижении исходной  
вершины внутр. мн-к замыкается. Для поиска следующего  
мн-ка надо взять след. вершину из входного списка.

### Внешнее отсечение:

Аналогично внутреннему, но:

1. В качестве начальной вершины нужно брать точку  
из выходного списка.
2. Список вершин отсекателя нужно просматривать  
в обратном порядке.

#20) Модели трёхмерных объектов. Требования, предъявляемые к объектам.

Геометрическая модель тела является машинным представлением его формы и размеров.

Виды геометрических моделей:

- 1) Каркасная модель ("проволочная").

Информационная часть: координаты вершин и рёбер. Не даёт представления о наимен отверстий.

- 2) Поверхностная модель.

Не даёт представления о том, на какую сторону материал, а на какую пустота.

- 3) Объёмная модель (сплошное тело).

Добавляется информация о том, где материал, а где пустота. Самая информативная.

Требования к 3D-модели:

- 1) Модель не должна противоречить исходному объекту.
- 2) Модель должна допускать возможность конструирования тела целиком (полнота модели).
- 3) Модель должна позволять вычисление геометрических характеристик тела.
- 4) Модель должна позволять проводить расчёты:  
кинематические,  
сопротивление материала.

## Свойства объёмных моделей:

- 1) Однородность (тело заполнено изнутри).
- 2) Конечность (каждое тело занимает конечный объём).
- 3) Жёсткость (сжатое тело должно сохранять форму независимо от положения в пространстве).

## Требования к программам геометрической моделирования:

- 1) Согласованность операций ( $\forall$  операции, проводимые над симметричными телами, должны приводить к симметричным телам).
- 2) Возможность описания ( $\forall$  тело должно представляться в машинном виде).
- 3) Непротиворечивость информации ( $\forall$  точка пространства должна принадлежать только одному телу; для  $\forall$  точки можно сформулировать: принадлежит ли она какому телу или нет).
- 4) Компактность модели (определяется количеством информации).
- 5) Открытость модели (разрабатываемая модель должна иметь применение при работе с различными алгоритмами).

#21 Операции преобразования в трёхмерном пространстве. Матрицы преобразований.

1. Перенос

$$M_{\text{пер.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x + dx \\ y_1 = y + dy \\ z_1 = z + dz \end{cases}$$

2. Масштабирование

$(x_M, y_M, z_M)$  - центр масштабирования.

$$M_{\text{масшт.}} = \begin{pmatrix} kx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = kx \cdot x + (1-kx)x_M \\ y_1 = ky \cdot y + (1-ky)y_M \\ z_1 = kz \cdot z + (1-kz)z_M \end{cases}$$

3. Поворот

$(x_c, y_c, z_c)$  - центр поворота

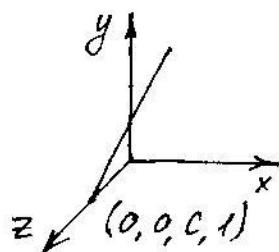
$$M_{\text{повор.}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y_c + (y-y_c) \cos\theta - (z-z_c) \sin\theta \\ z_1 = z_c + (z-z_c) \cos\theta + (y-y_c) \sin\theta \end{cases}$$

$$M_{\text{повор.y}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_c + (x-x_c) \cos\theta + (z-z_c) \sin\theta \\ y_1 = y \\ z_1 = z_c - (x-x_c) \sin\theta + (z-z_c) \cos\theta \end{cases}$$

$$M_{\text{повор.z}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_c + (x-x_c) \cos\theta - (y-y_c) \sin\theta \\ y_1 = y_c + (x-x_c) \sin\theta + (y-y_c) \cos\theta \\ z_1 = z \end{cases}$$

4. Матрица проецирования (перспек.)

$$M_{\text{пер.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

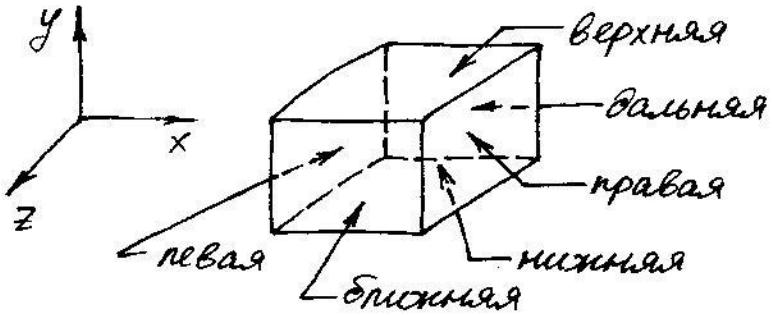


#22 Отсечение отрезков в трёхмерном пространстве.

Алгоритм отсечения средней точкой.

Виды отсекателей:

1. Прямоугольный параллелепипед.

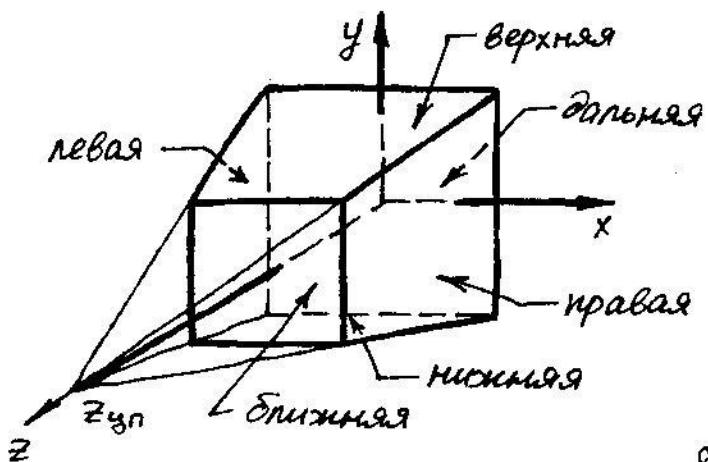


Как и в двумерном отсечении, здесь используется битовый код видимости вершин (обобщённый):

$$T_{14} = 1, \text{ если } Z > Z_B, \text{ иначе } T_{14} = 0$$

$$T_{15} = 1, \text{ если } Z < Z_D, \text{ иначе } T_{15} = 0$$

2. Усеченная пирамида видимости.



$Z_{CVP}$  - центр проекции

Уравнение плоскости, проходящей через правую грани:

$$x = (z - Z_{CVP}) \cdot x_{pr} / (Z_D - Z_{CVP})$$

$$x = Z\alpha_1 + \alpha_2, \text{ где}$$

$$\alpha_1 = x_{pr} / (Z_D - Z_{CVP}) \text{ и } \alpha_2 = \alpha_1 \cdot (-Z_{CVP})$$

$$f_n = x - Z\alpha_1 - \alpha_2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ справа от плоскости *} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow \text{слева от плоскости} \end{cases}$$

$$f_1 = x - Z\beta_1 - \beta_2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ справа от плоскости} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow P \text{ слева от плоскости *} \end{cases}$$

$$\beta_1 = x_1 / (Z_D - Z_{CVP}), \beta_2 = -\beta_1 Z_{CVP}$$

$$f_B = y - z \gamma_1 - \gamma_2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ выше плоскости} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow P \text{ ниже плоскости} \end{cases} *$$

$$\gamma_1 = y_B / (z_D - z_{\text{уп}}), \quad \gamma_2 = -\gamma_1 z_{\text{уп}}$$

$$f_H = y - z \delta_1 - \delta_2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ выше плоскости} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow P \text{ ниже плоскости} \end{cases} *$$

$$\delta_1 = y_H / (z_D - z_{\text{уп}}), \quad \delta_2 = -\delta_1 z_{\text{уп}}$$

$$f_B = z - z_B \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ ближе плоскости} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow P \text{ дальше плоскости} \end{cases} *$$

$$f_D = z - z_D \begin{cases} > 0 \Rightarrow P \text{ ближе плоскости} \\ = 0 \Rightarrow P \text{ на плоскости} \\ < 0 \Rightarrow P \text{ дальше плоскости} \end{cases} *$$

### Трёхмерный алгоритм разбиения средней точкой

Аналогичен двумерному, но к координатам вершин добавляется третья компонента, код видимости вершины задаётся 6-ю битами. Если отсекатель - усечённая пирамида, то для составления 6-битного кода используются промежуточные функции:

$f_L, f_R, f_B, f_H, f_B, f_D$ .

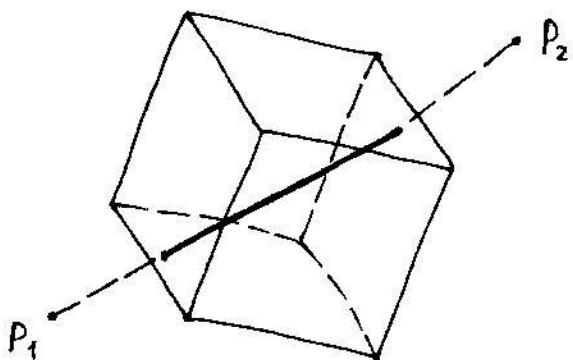
(#23) Отсечение отрезков в трёхмерном пространстве.

Трёхмерный алгоритм Кирса - Бека.

В трёхмерном варианте отсекатель может быть произвольным выпуклым телом.

Трёхмерный алгоритм аналогичен двумерному, только теперь векторы имеют по 3 компоненты:  $x, y, z$ .

На каждом шаге ищем точку пересечения  $i$ -ой грани и отрезка.



(#29) Определение факта выпуклости трёхмерных тел. Разбиение тела на выпуклые многоугольники.

1. Перенести тело так, чтобы одна из вершин грани совпала с началом координат.
2. Повернуть тело вокруг начала координат таким образом, чтобы одно из рёбер, выходящих из рассматриваемой вершины, совместилось с одной из коорд. осей.
3. Поворот вокруг выбранной оси коорд. такой, чтобы рассматриваемая грань тела совпала с коорд. плоскостью.
4. Для всех вершин многогранника, не лежащих в рассматриваемой плоскости, определить знаки координаты, которая  $\perp$  на рассматриваемой плоскости.

Если знаки для всех вершин одинаковы (или равны нулю), то тело выпуклое относительно рассматриваемой грани.

Если тело выпукло относительно всех своих граней, то оно и в целом выпуклое.

Если знаки в целом не совпадают, то тело невыпукло.

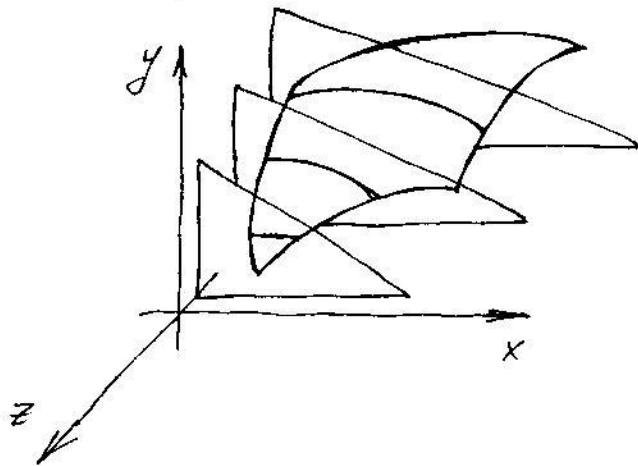
Если все эти знаки равны нулю, то тело возрожденное

Если тело не выпуклое, то плоскость, проходящей через рассматриваемую грань, мы разделяем тело на составляющие части. Рассматриваемую процедуру приложим к каждой из полученных частей.

5. Вектор внутр. нормали к расши. грани (для вып. тела) будет иметь 2 ненулевые компоненты (те, кот. лежат в пл-ти этой грани), а третья будет совпадать с осью, 1-ной расши. грани ( $u \neq 0$ ). Знак этой компоненты совпадает со знаком любой вершины, не лежащей в данной пл-ти. Получим вектор внутренней нормали в повернутой системе координат. Для вычисления его в исх. системе координат надо выполнить обратные преобразования.

(#25) Алгоритм плавающего горизонта

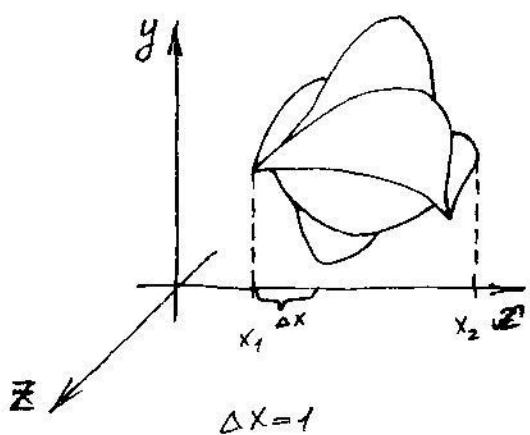
$F(x, y, z) = 0$  — поверхность в 3-мерном пространстве.



$$z = \text{const}$$

$$y = f(x, z = \text{const})$$

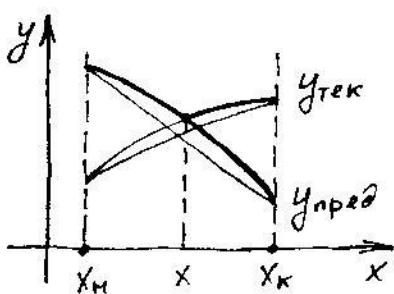
$$x = \varphi(y, z = \text{const})$$



$y_{\max}$  — массив значений верхнего горизонта.

$y_{\min}$  — массив значений нижнего горизонта.

$y_{\min}(x_i) < y(x_i) < y_{\max}(x_i)$  — точка невидимая, иначе — видима.



$$m_{\text{пред}} = \frac{y_{\text{предк}} - y_{\text{предн}}}{x_k - x_n}$$

$$m_{\text{тек}} = \frac{y_{\text{текк}} - y_{\text{текн}}}{x_k - x_n}$$

$$y_{\text{предн}} + m_{\text{пред}}(x - x_n) = y_{\text{текн}} + m_{\text{тек}}(x - x_n)$$

$$x_{\text{пред}} = x_n + \frac{y_{\text{текн}} - y_{\text{предн}}}{m_{\text{пред}} - m_{\text{тек}}} = x_n + \frac{\Delta x (y_{\text{текн}} - y_{\text{предн}})}{\Delta y_{\text{пред}} - \Delta y_{\text{тек}}}$$

$$y_{\text{пред}} = y_{\text{предн}} + m_{\text{пред}}(x - x_n)$$

### Обработка боковых рёбер

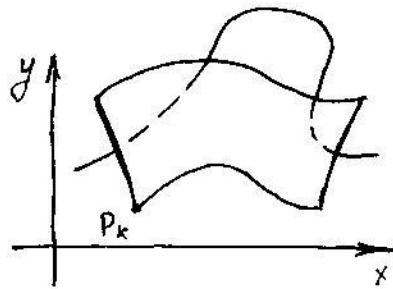
1. Левое: если  $P_k$  — первая точка первой кривой, то эту точку запоминаем в качестве предыдущей точки:  $P_{k-1}$ .

Если  $P_k$  — первая точка на непервой кривой, то ~~запоминаем~~

соединяют  $P_k$  и  $P_{k+1}$ , т.е. создают боковое ребро и заполняем текущую точку  $P_k$  в качестве  $P_{k+1}$ .

Правое: аналогично.

В массивы верхнего и нижнего горизонтов занесем ординаты бокового ребра.



### Суть Алгоритма

Для каждой текущей плоскости  $Z = \text{const}$  выполнить:

- a) обработать левое боковое ребро;
- б) для каждой точки, лежащей на очередной ~~прямой~~ <sup>кривой</sup>, проверить условие:  $Y_{\min}(x_i) < Y(x_i) < Y_{\max}(x_i)$ . Если оно истинно, то кривая невидима в этой точке, иначе - видима;
- в) если на участке от  $X_{\text{пред}}$  до  $X_{\text{тек}}$  видимость кривой изменилась, то вычислить  $X_{\text{пересеч}}$ ;
- г) если на текущем сегменте от  $X_{\text{пред}}$  до  $X_{\text{тек}}$  участок кривой полностью виден, то изобразить его целиком;
- д) Если сегмент кривой стал невидим, то изобразить участок от  $X_{\text{пред}}$  до  $X_{\text{пересеч}}$ ;
- е) Если кривая стала видимой, то изобразить участок от  $X_{\text{пересеч}}$  до  $X_{\text{тек}}$ ;
- ж) заполнить массивы горизонтов;
- з) обработать правое бок. ребро.

$$Y_{\max}(x_i) = \max(Y_{\max}(x_i), Y(x_i))$$

$$Y_{\min}(x_i) = \min(Y_{\min}(x_i), Y(x_i))$$

**#26** Задача удаления невидимых линий и поверхностей. Её значение в машинной графике. Классификация алгоритмов по способу выбора системы координат (объектное пространство, пространство изображений).

Основные этапы Алгоритма Роберта.

Задача удаления невидимых линий и поверхностей является одной из наиболее сложных в машинной графике. Алгоритмы удаления невидимых линий и поверхностей служат для определения линий рёбер, поверхностей или объёмов, которые видны или невидимы для наблюдателя, находящегося в заданной точке пр-ва.

Единого и наилучшего способа удаления не существует для этой, одной из центральных задач машинной графики. Сложность задачи приводит к появлению большого числа различных способов её решения. Многие из них ориентированы на специализированные приложения.

Все алгоритмы удаления невидимых линий (поверхностей) включают в себя сортировку. Главная сортировка ведётся по геометрическому расположению от тела, поверхности, ребра или точки до точки наблюдения. Эффективность этих алгоритмов зависит в большей мере от эффективности процесса сортировки.

Существует тесная взаимосвязь между скоростью работы алгоритма и детальностью его результата.

Ни один из алгоритмов не может достичнуть хороших оценок для двух этих показателей одновременно.

(Ещё есть сортировка по загораживанию тел друг другом)

Алгоритмы удаления делятся на две группы:

- 1) работающие в объектном пр-ве (система координат; высокая точность);
- 2) работающие в пр-ве изображений (система координат связана с дисплеем; точность ограничена разрешающей способностью экрана; например, при увеличении изображения во много раз могут не совпасть концы отрезков).

Сложность для алгоритма, работающего в объектном пр-ве,  $\sim N^2$ , где  $N$  - количество объектов;  
для алгоритма, работающего в пр-ве изображений,  $\sim N \cdot M$ ,  
где  $M$  - число пикселов.

$N^2 < N \cdot M$ , но алгоритмы, работающие в пр-ве изображений на практике могут быть эффективнее в силу свойства когерентности при растровой реализации (рядом расположенные пиксели чаще всего будут обладать одинаковыми свойствами).

### Алгоритм Роберса. Основные этапы и матем. предпосылки

Удаление невидимых линий (в объектном пр-ве).

Работает только с выпуклыми телами.

~~Иdea~~ Идея сортировки тел по мере их удалённости от наблюдателя. Сложность  $\sim N^2$ .

#### Этапы работы:

- I. Подготовка исх. данных.
- II. Удаление линий, экранируемых самим телом (для одного тела на этом работа заканчивается).
- III. Удаление линий, экранируемых другими телами.
- IV. Удаление линий пересечения тел, экранируемых самими телами, связанными отношением прорывания, и др. телами.

#27 Алгоритм Робертса. Формирование матрицы тела. Удаление ненужных плоскостей.

Требуется, чтобы все изображаемые тела были выпуклыми. Невыпуклые должны быть разбиты на выпукл. части.

Уравнение плоскости:  $ax + by + cz + d = 0$ .

Выпуклое многогранное тело можно представить, как пересечение набора пересекающихся плоскостей.

$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$  — уравнение плоскости в матр. форме.

$[V] = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \\ d_1 & \dots & d_n \end{bmatrix}$  — тогда это матрица  $4 \times n$  — матрица тела, состоящая из коэф-тов.

$[S] = [x \ y \ z \ 1]$  — точка, лежащая внутри тела.

Матрица тела должна быть составлена так, чтобы для  $[R] = [S][V]$  — для  $[R]$  каждый его компонент  $r_i > 0$ .

Точку, лежащую внутри тела, можно получить умножением координат тела.

Если мат в  $[R]$  какой-то компонент  $r_i < 0$ , то матрица тела  $[V]$  корректируется умножением  $i$ -го столбца на  $-1$ .

Если для  $ax + by + cz + d$  коэф-ты известны, то их (зная координаты 3-х  $\infty$  точек плоскости) можно найти так:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d_2 = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d_3 = 0 \end{cases} \sim a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 = -1 \quad (a' = \frac{a}{d} \text{ и т.д.})$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [x][c] = [d] \Rightarrow [c] = [x]^{-1}[d]$$

Зная все координаты вершин соотв. грани, коэф-ты вычисл:

$$\left. \begin{array}{l} a = \sum_{i=1}^n (y_i - y_j)(z_i + z_j) \\ b = \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)(z_i + z_j) \\ c = \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)(y_i + y_j) \end{array} \right\} \text{ где } j = \begin{cases} i+1, & \text{если } i < n \\ 1, & \text{если } i = n \end{cases}$$

Зная уравнение нормали для плоскости  $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ , сразу видим  $a, b, c$ , а  $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$  для известн. точки.

Если мы преобразуем тело матрицей преобразования  $[T]$ :

$[B]$  — матрица вершин ( $m \times 4$ )

$[V]$  — матрица тела (коэф-ты,  $4 \times n$ )

$$[B][V] = [D]$$

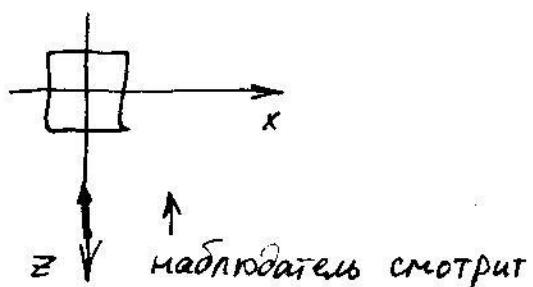
$[BT] = [B][T]$  — матрица вершин преобр. тела.

$[VT]$  — матрица коэф-тов преобр. тела.

$$[BT][VT] = [D]$$

$$[B][T][VT] = [B][V] \Rightarrow [VT] = [T]^{-1}[V]$$

### Удаление невидимых плоскостей



$[E] = [0, 0, -1, 0]$  — вектор наблюдения.

У вектора  $[E_i] = [E] \cdot [V]$  отрицательные компоненты будут соответствовать невидимым граням.

$[E] \cdot \bar{n}_{\text{внутр}} > 0$  —  $i$ -ая грань видима.

$[E] \cdot \bar{n}_{\text{внутр}} < 0$  —  $i$ -ая грань невидима.

$[E] \cdot \bar{n}_{\text{внутр}} = 0$  —  $i$ -ая грань на грани видимости.

Невидимые рёбра об разуются пересечением невидимых граней. Поэтому, удалив невидимые грани, мы удалим невидимые рёбра. Других невид. рёбер быть не может.

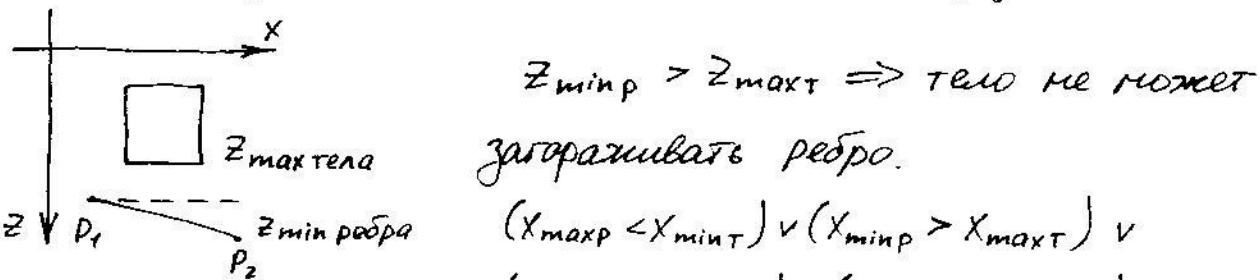
#28 Алгоритм Робертса. Удаление отрезков, экранируемых другими телами.

Тело, рёбра которого проверяются на предмет экранирования другими телами, — пробный объект. С которым сравнивается — пробное тело.

Отсортировать все тела по максимальному  $Z$  тела:

$$Z_{\max 1} < Z_{\max 2} < \dots < Z_{\max n}; \quad Z - \text{расст. до наблюдателя}.$$

Наиболее удалённое тело — более экранируемое.



$\Rightarrow$  тело экранировать ребро не будет.

Удаление экранируемых участков ~~тела~~ отрезка

$P_1, P_2$  — исходящий отрезок.

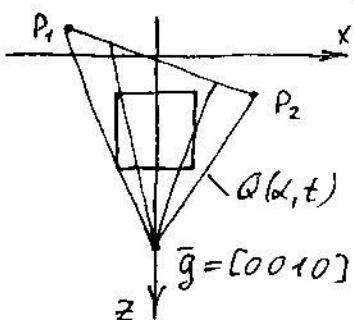
$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad - \text{паран. ур-е отрезка}$$

$\bar{V} = \bar{s} + t \cdot \bar{d}$ , где  $\bar{V}$  — вектор точки на отрезке,

$\bar{s}$  — начальная точка,  $\bar{d}$  — направление.

Нужно найти  $t$ , при которых изменяется видимость отрезка.  
Параметрически зададим отрезок от точки

$\bar{V}$  до точки  $\bar{g}$  — точки наблюдения:  $Q(x, t) = \bar{V} + x \cdot \bar{g}$ ,  $0 \leq x$



Наблюдатель находится в  $(+\infty)$ , а не в  $(-\infty)$ , поэтому  $\bar{g} = [0010]$ .

$Q(x, t) = \bar{s} + t \cdot \bar{d} + x \cdot \bar{g}$  — и это физическое уравнение плоскости.

Скалярное произведение  $\bar{V}$  точки, лежащей внутри тела, на матрицу коэф-тов расположено:

Найдём такие  $\alpha$  и  $t$ , для которых:

$$\bar{H} = (\bar{S} + t \cdot \bar{d} + \alpha \cdot \bar{g}) \cdot [V] > 0$$

$$\bar{H} = \bar{S} \cdot [V] + t \cdot \bar{d} \cdot [V] + \alpha \cdot \bar{g} \cdot [V] > 0$$

Если все компоненты  $\bar{H}$  для некоторых  $t$  и  $\alpha$  неотрицательны, то отрезок при этих  $t$  экранируется галом.

Обозначим:  $\bar{P} = \bar{S} \cdot [V]$ ;  $\bar{q} = \bar{d} \cdot [V]$ ;  $\bar{w} = \bar{g} \cdot [V]$ .

Тогда:  $h_j = p_j + t q_j + \alpha w_j > 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha$ , а  $j$  - номер грани.

Т.е. можно решить задачу линейного программирования при  $n$  неизвестных и  $m$  ограничениях (р-ва, неравенства)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_{ri} x_i \leq b_r, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \leq b_m \end{array} \right. \quad L = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

$h_j > 0$ ,  $t$  - целевая ф-ция

Решать  $h_j = 0$ . Получить все возможные пары систем 2-х уравнений ( $n$  граней)  $\Rightarrow$  число решений  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Числовые ограничения:  $0 \leq \alpha$ ,  $1 \geq t$ ,  $t \geq 0$  - получим  $\frac{(n+3)(n+2)}{2}$  возможных решений.

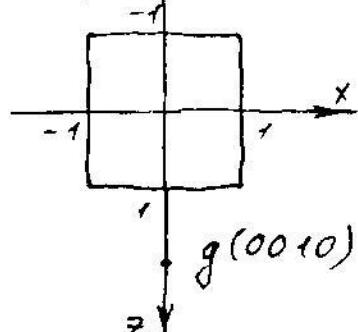
Сначала мы находим  $\alpha$  и  $t$  для одной пары ур-ий и подставляем в остальные.

Затем найдём  $t_{\max}$  - максимальное среди максимальных и  $t_{\min}$  - минимальное среди максимальных.

Отрезок невидим при  $t_{\max} < t < t_{\min}$ .

Пример

$$P_1(-20-21) \quad P_2(20-21)$$



$$[V] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{d} = (4000); \quad S = (-20-21)$$

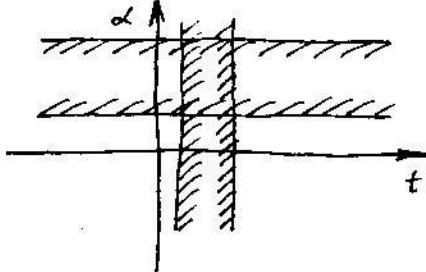
$$P = \bar{S} \cdot [V] = (-1311-13)$$

$$W = \bar{g} \cdot [V] = (00001-1)$$

$$Q = \bar{d} \cdot [V] = (4-40000)$$

$$h_j = p_j + t q_j + \alpha w_j > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + 4t > 0 \\ 3 - 4t > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \\ -1 + \alpha > 0 \\ 3 - \alpha > 0 \end{cases}$$

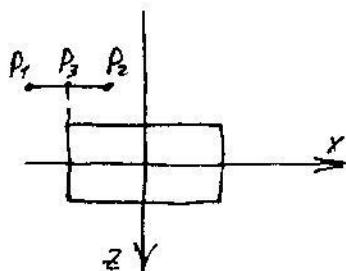


$$P_3 = P\left(\frac{1}{4}\right) = (-20-21) + (4000)\frac{1}{4} = (-10-21)$$

$$P_4 = P\left(\frac{3}{4}\right) = (-20-21) + (4000)\frac{3}{4} = (10-21)$$

$P_3 P_4$  – невидимая часть.

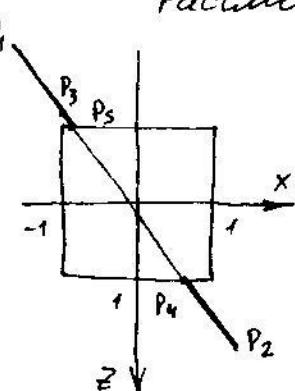
Если ситуация такая:



то нужно будет учесть  $t \leq 1$ . В др. случаях: ост.

И здесь  $P_4 = P_2$ .

Рассмотрим случай, когда отрезок проникает тело:

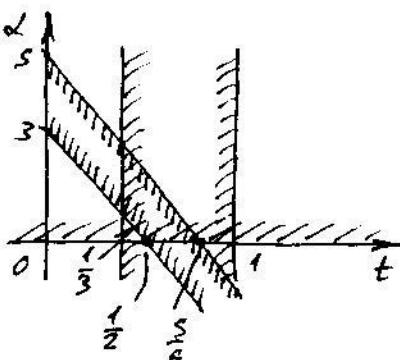


$$d = (3060) \Leftarrow P_1(-20-41) \text{ и } P_2(1021)$$

$$S = (-20-41), \quad P = \bar{S}[V] = (-1311-35)$$

$$SE \quad q = \bar{d}[V] = (3-3006-6), \quad w = \bar{g}[V] = (00001-1)$$

$$\begin{cases} -1 + 3t > 0 \\ 3 - 3t > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \\ -3 + 6t + \alpha > 0 \\ 5 - 6t - \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Мы учли доп. условие  $\alpha \leq 0$

$$P_3 = (-20-41) + \frac{1}{3}(3060) = (-10-21)$$

$$P_4 = (-20-41) + \frac{5}{6}(3060) = (0,50-11)$$

Точки проникания находятся при  $\alpha = 0$

$$t_{up1} = \frac{1}{2}, \quad t_{up2} = \frac{5}{6}.$$

$$P_5 = (-20-41) + \frac{1}{2}(3060) = (-0,50-11), \quad P_6 = P_4.$$

Можно заранее (не решая систему) определить факт полной видимости отрезка:

$P_j < 0$  - 1-ая вершина отрезка лежит по внешнему сторону от  $j$ -грани.

$P_j + q_j < 0$  - 2-ая вершина отр. лежит по внешн. сторону от  $j$ -грани.

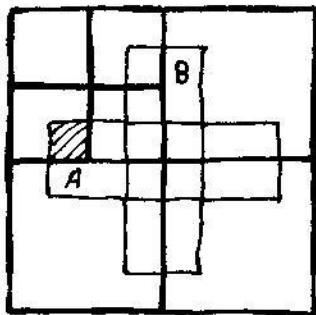
$W_j \leq 0$  - точка наблюдения лежит  $j$ -ой грани видима.

$W_j \leq 0$  и  $P_j \leq 0$  - один конец отрезка лежит или на видимой плоскости или между видимой плоскостью и точкой наблюдения.

$W_j \leq 0$  и  $P_j \leq 0$  и  $P_j + q_j \leq 0$  для  $\forall j$  гарантирует, что отрезок полностью видим.

Можно определить, что оба конца отрезка позади невидимой плоскости, но невозможно определить, будут ли при этом концы отрезка позади тела.

#29 Удаление невидимых линий и поверхностей в пространстве изображений. Алгоритм Варнока (разбиение окнами): последовательность действия и основное принципы.

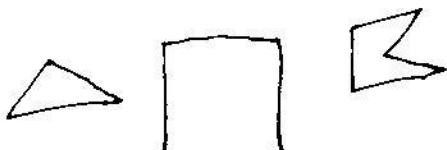


Одной единственной версии этого алгоритма не существует.  
Окно разбивается на части, если оно не пусто. Это продолжается до тех пор, пока не получим окно в 1 пиксель (в простейшем случае алгоритма Варнока).

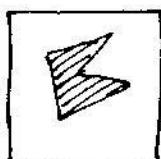
В более сложных версиях этого алгоритма на этапах, когда окно имеет размер  $> 1$  пикселя, ставится вопрос о том, что изображается в этом окне.

Окна делят на подокна, если нельзя сказать, что изображать в окне.

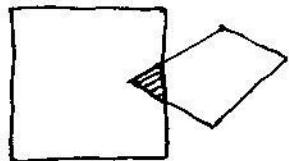
1. Все многоугольники явл. внешними  $\Rightarrow$  окно закрасить цветом фона.



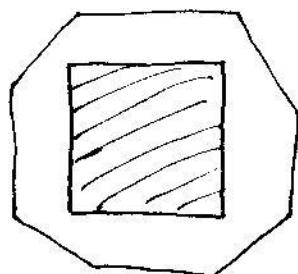
2. Мин-к, связанный с окном, является внутренним:  
закрасить окно цветом фона;  
растровая развертка мин-ка.



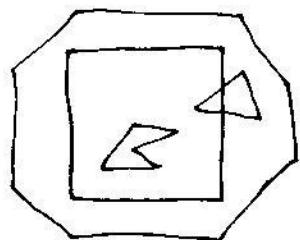
3. Ми-к, сидящий с окном, является пересекающим:  
отсечение ми-ка по границе окна;  
далее работа, как в п. 2.



4. С окном связан один охватывающий ми-к  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  всё окно закрасить цветом ми-ка.



5. С окном связаны внутренние, пересекающие ми-ки,  
и есть хотя бы один охватывающий, расположенный ближе  
всех остальных по отношению к наблюдателю.

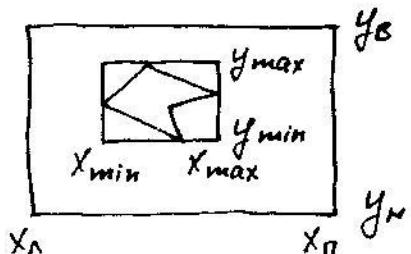


#### Рекомендуемая последовательность действий:

1. Проводится простейший габаритный тест с прям угл. оболочкой;  
определяется как можно большее кол-во пустых окон и окон  
с единств. внутр. ми-ком. Найденные окна сразу изображаются;
2. Выполнение теста с целью определения окон, пересекаемых  
единственным ми-ком;
3. Тест с целью распознавания внешних и охватыв. ми-ков.  
Получен новые пустые окна и окна, охватываемые ед. ми-ком;
4. Можно либо проводить разбиение окна на подокна, либо  
проводить еще один тест на обнаружение ми-ка (охватываю-  
щего), лежащего ближе к наблюдателю.

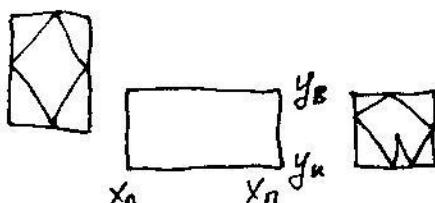
#30 Типы многоугольников, анализируемых в алгоритме Варнака. Методы их идентификации.

### Определение внутреннего мн-ка



$$(x_{\min} > x_n) \wedge (x_{\max} < x_n) \wedge (y_{\min} > y_n) \wedge (y_{\max} < y_B) \\ \Rightarrow \text{мн-к полностью виден в окне.}$$

### Определение некоторых внешних мн-ков

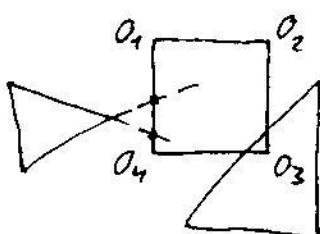


$$(x_{\min} > x_n) \vee (x_{\max} < x_n) \vee (y_{\min} > y_B) \vee (y_{\max} < y_n) \\ \Rightarrow \text{мн-к внешний}$$

С помощью этого теста мы не распознаем такой случай:



### Определение пересекающих



Составить ур-я прямых, проходящих через каждое ребро мн-ка:

$$f_{np_i} = A_i x + B_i y + C_i$$

\* Нужно еще проверить принадлежность точек пересечения ребру.

Ур-я прямой, проходящей через две вершины  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ :  $y = mx + b \Rightarrow f_{np} = y - mx - b$ , где  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ,  $x_2 - x_1 \neq 0$

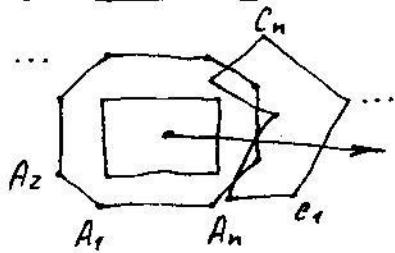
$b = y_1 - mx_1$

$f_{np} = x - x_1$ , если  $x_2 - x_1 = 0$

Координаты вершин окна подставим в  $f_{np_i}$ . Если знак  $f_{np_i}$  не зависит от выбора вершины окна, то все его вершины лежат по одну сторону от наступившей прямой и точек пересечения нет. Если знаки различаются, то мн-к <sup>с учетом \*</sup>пересекает окно.

Если ни одно из рёбер не пересекает окно, то он либо внешний, либо охватывающий.

### Тест с бесконечными лучами (внеш. или охватывающий)

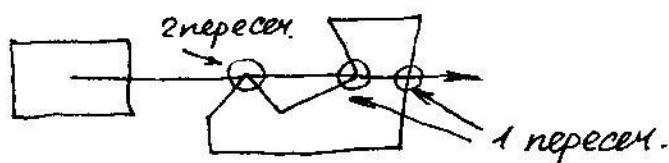


$m$  - кол-во пересечений луча с рёбрами.

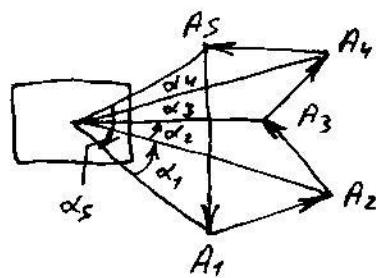
$m$  - чётное  $\Rightarrow$  мн-к внешний;

$m$  - нечётное  $\Rightarrow$  мн-к охватывающий.

#### Частный случай:



### Тест, основанный на вычислении угла (внеш. или охват.)

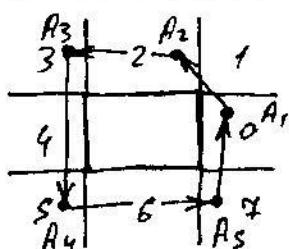


$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \Rightarrow \text{мн-к внешний}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pm 360^\circ m \Rightarrow \text{мн-к охватывающий}, \\ m - \text{кол-во охватов}.$$

Сумму  $\sum \alpha_i$  считать с учётом направления.

### Тест, основанный на октантах (внеш. или охват.)



$\Delta\alpha = (\text{номер октанта, в котором расп. конец вектора}) - (\text{номер октанта, в кот. расп. начало вектора}).$

$$\Delta\alpha > 4 \Rightarrow \Delta\alpha = \Delta\alpha - 8; \quad \Delta\alpha < -4 \Rightarrow \Delta\alpha = \Delta\alpha + 8$$

$\Delta\alpha = 4 \Rightarrow$  ребро мн-ка расщепляется ребром окна

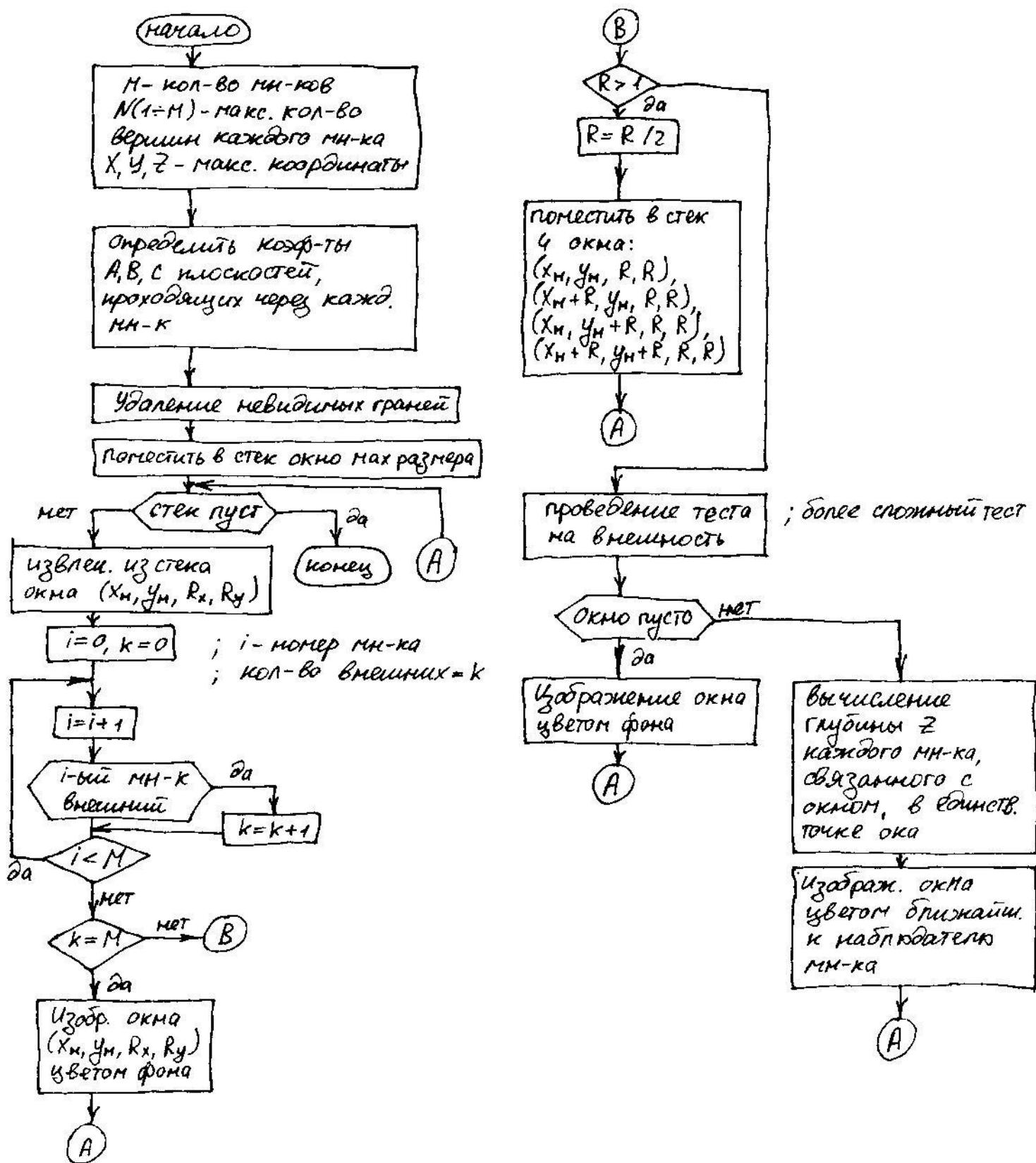
$$\sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \pm 8m \Rightarrow \text{мн-к охватывающий};$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = 0 \Rightarrow \text{мн-к внешний}.$$

$Ax + By + Cz + D = 0$  - уравнение плоскости, проходящей через мн-ка.

Если глубина окн. мн-ка во всех 4-х узлах окна больше глубин в мн-ка, то он впереди всех (ближе к набл.).

### Алгоритм Варнока



(#31) Алгоритм Вейпера-Азертонга удаления невидимых линий и поверхностей.

Вейпер и Азертонг попытались минимизировать кол-во шагов в алгоритме разбиения типа алгоритма Варнова путём разбиения окна вдоль границы мн-ка. Основой этого алгоритма послужил алгоритм отсечения мн-ков. Выходные данные — мн-ки.

Алгоритм:

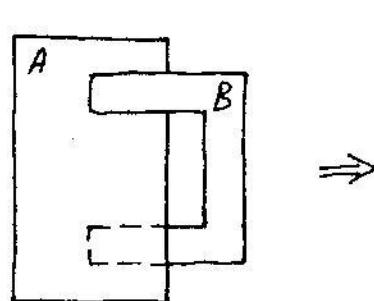
1. Предварительная сортировка по глубине (для формирования списка приближенных приоритетов).
2. Отсечение по границе ближайшего к наблюдателю мн-ка, называемое сортировкой мн-ков на плоскости. (В качестве отсекателя используется копия первого мн-ка из списка приближенных приоритетов). Отсекаться будут все мн-ки в этом списке, включая первый (в отсечении участвуют проекции мн-ков). Формируются 2 списка: внутренний (для каждого отсекаемого мн-ка та часть, которая оказывается внутри отсекателя) и внешний (для каждого мн-ка оставшаяся часть)).
3. Удаление мн-ков внутреннего списка, которые экранируются отсекателем.
4. Если глубина мн-ка из внутреннего списка больше, чем  $\epsilon_{min}$  отсекателя, то такой мн-к частично экранирует отсекатель. Тогда нужно рекурсивно подразделить плоскость  $(x, y)$ , используя мн-к, нарушивший порядок, в качестве отсекателя (для отсекателя нужно использовать копию исходного

мн-ка, а не остаток после предыдущего отсечения).  
Отсечение подлежат мн-ки из внутреннего списка.

5. По окончании отсечения или рекурсивного подразбиения изображаются мн-ки из внутреннего списка (те, которые остались после удаления всех экранируемых на каждом шаге мн-ков — остаются только отсекающие мн-ки).

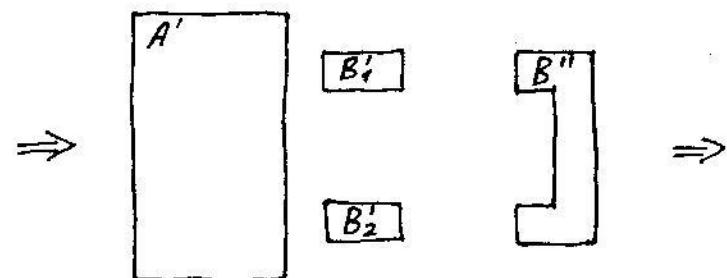
6. Работа продолжается с внешним списком (шаги 1-5).

Пример



(внутр.)

(внешн.)

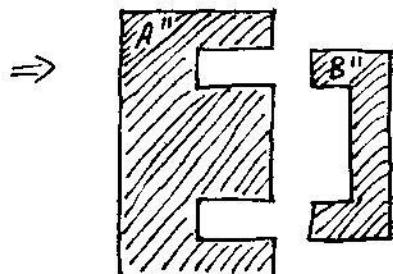


$$z_{\max} A > z_{\max} B$$

$$z_{\max} B'_1 > z_{\min} A'$$

внешн.  
(внешн.)

(внутр.)



$A'_1$

$B'_3$

$A'_2$

$B'_4$

$$z_{\max} A'_1 < z_{\min} B'_3$$

$$z_{\min} A'_2 > z_{\max} B'_4$$

Если мн-ки пересекаются, то для корректной работы этого алгоритма нужно способом одного мн-ка разбить другой на две части.

### #32 Алгоритм, использующий Z-буфер.

Один из простейших алгоритмов удаления невидимых поверхностей.

Буфер кадра используется для запоминания атрибутов (интенсивности) каждого пикселя в пространстве изображения.

Z-буфер - это отдельный буфер глубины, используемый для запоминания координаты Z каждого видимого пикселя в пространстве изображения.

#### Достоинства:

1. Простота.

Сцены могут быть любой сложности.

2. Элементы сцены не нужно сортировать, т.к. их можно заносить в буфер в любом порядке. Поэтому экономится вычислительное время.

#### Недостатки:

1. Большой объём памяти.

Буфер кадра  $512 \times 512 \times 24$  бит требует в комбинации с Z-буфером размера  $512 \times 512 \times 20$  бит около 1,5 Мб памяти.

2. Трудоёмкость и высокая стоимость устранения листионного эффекта.

3. Трудоёмкость реализации эффектов прозрачности и пресвечивания.

#### Вычисление Z:

Уравнение плоскости:  $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = -\frac{Ax + By + D}{C} \text{ для } C \neq 0 \text{ и } z = 0 \text{ для } C = 0.$$

Для сканирующей строки: ( $y = \text{const}$ )  $z_2 - z_1 = \frac{-Ax_2}{C} + \frac{-Ax_1}{C} = -\frac{A}{C}x_2 - Ax_1 \Rightarrow z_2 - z_1 = \frac{A}{C}x_1 - \frac{A}{C}x_2 = -\frac{A}{C}(x_2 - x_1)$

### Алгоритм:

1. Заполнить буфер кадра фоновым цветом.
2. Заполнить Z-буфер минимальным значением глубины.
3. Преобразовать каждый ми-к в растровую форму в произвольном порядке:
  - a) Для каждой точки экрана, покрывающей ми-ком вычислить значение  $Z(x,y)$ ;
  - b) Если  $Z(x,y) > Z_{\text{буф}}(x,y) \Rightarrow Z_{\text{буф}}(x,y) = Z(x,y)$ ,  
цвет  $(x,y) = \text{цвет текущего ми-ка}$ .

### Замечание:

Этот алгоритм можно применять для построения сечений поверхностей:

$(Z(x,y) > Z_{\text{буф}}(x,y) \text{ и } Z(x,y) \leq Z_{\text{сечения}})$  - условие.

$Z_{\text{сечения}}$  - глубина сечущей плоскости. Эффект заключается в том, что остаются только такие элементы поверхности, которые лежат на самом сечении или позади него.

(#33) Алгоритм, использующий список приоритетов.

В основе алгоритма лежит способ изображения сцены от дальних объектов к ближним.

Алгоритм:

1. Отсортировать мн-ки сцены в порядке возрастания:  
 $Z_{\min}(A) < Z_{\min}(B) < \dots < Z_{\min}(P) < Z_{\min}(Q)$ .
2. Построить самый дальний мн-к, если он не экранирует другие мн-ки (если  $Z_{\max}(A) < Z_{\min}(B)$ ).
3. Проверить, экранирует ли мн-к Р мн-к Q при  $Z_{\max}(P) > Z_{\min}(Q)$ :
  - a) Верно ли, что прямоугольные объемлющие оболочки P и Q не перекрываются по X?
  - b) Верно ли, что прямоугольные объемлющие оболочки P и Q не перекрываются по Y?
  - c) Верно ли, что P целиком лежит по ту сторону плоскости, несущей Q, которая расположена дальше от точки наблюдения?
  - d) Верно ли, что Q целиком лежит по ту сторону плоскости, несущей P, которая расположена ближе к точке наблюдения?
  - e) Верно ли, что проекции P и Q не перекрываются?

Как только какой-либо тест даёт положительный ответ, Р заносится в буфер кадра (Р не экранирует Q). Если все ответы отрицательны, то Р и Q меняются местами в списке, позиция Q поменяется. Тесты нужно повторить с новым списком.

Если сделана попытка вновь переставить Q, значит, обнаружена ситуация циклического экранирования.

В этом случае Р разрезается плоскостью, несущей Q, исходный мн-к Р удаляется из списка, а его части заносятся в список. Тесты нужно повторить с новым списком.

Замечание:

Проверку для пунктов 3.в и 3.г можно проводить с помощью пробной ф-ции:

$$f_{\text{пр}}(x, y, z) = Ax + By + Cz + D, \text{ где } A, B, C - \text{коэф-ты}$$

пробной плоскости U.

В  $f_{\text{пр}}$  подставляются координаты вершин используемого мн-ка W.

Если знаки  $f_{\text{пр}}$  для всех вершин W совпадают и положительны или равны нулю, то мн-к W находится с дальней (невидимой) стороны от ~~обеих~~ плоскости U.

Если знаки  $f_{\text{пр}}$  для всех вершин W совпадают и неположительны, то мн-к W расположен с ближней (видимой) стороны от плоскости U.

#34 Алгоритм построчного сканирования, использующий Z-буфер. Интервальные методы построчного сканирования.

Алгоритмы Варнока, Z-буфера и строящего список приоритетов обрабатывают элементы сцены или мн-ки в порядке, который не связан с процессом визуализации. Алгоритмы построчного сканирования обрабатывают сцену в порядке прохождения сканирующей строки.

Алгоритм:

1. Подготовка информации:

- Для каждого мн-ка определить самую верхнюю сканирующую строку, которую он пересекает.
- Замести мн-к в группу  $U$ , соответствующую этой сканирующей строке.
- Заполнить для каждого мн-ка:

$\Delta U$  - число скан. строк, пересекающих этот мн-к;  
список рёбер этого мн-ка;  
коэф-ты A, B, C, D уравнения плоскости мн-ка;  
визуальные атрибуты мн-ка.

2. Решение задачи удаления невидимых поверхностей:

- Инициализировать буфер кадра дисплея.

2.2) Для каждой сканирующей строки:

- Инициализировать буфер кадра размером с одну скан. строку, заполнив его фоновым значением,
- Инициализировать Z-буфер размером с одну скан. строку значением  $Z_{min}$ .
- Проверить необходимость добавления в список активных мн-ков (SAM) новых мн-ков.

- 2) Если было добавление ми-ка в САМ, то добавить в САР соотв. рёбра новых ми-ков.
- 3) Если произведено удаление какого-либо элемента из пары рёбер САР, то проверить необходимость удаления всего ми-ка из САМ. Если ми-к остаётся, то проверить необходимость удаления другого ребра из этой пары — если его удалять не нужно, то дополнить пару (добавив недостающее левое или правое ребро).

2.3) В САР должна храниться следующая инф-ция:

$x_n$  — пересечение левого ребра пары с текущ. скан. строкой;  
 $\Delta x_n$  — приращение  $x_n$  в интервале между соседними скан. строками;

$\Delta y_n$  — число скан. строк, пересекаемых левым ребром;

$x_n; \Delta x_n; \Delta y_n;$

$\Delta z_x = -\frac{A}{C}$  для  $C \neq 0$  ( $\Delta z_x = 0$  для  $C=0$ ) — приращение по  $Z$  в бывш. скан. строке;

$\Delta z_y = -\frac{B}{C}$  для  $C \neq 0$  ( $\Delta z_y = 0$  для  $C=0$ ) — приращение по  $Z$  в интервале между соседними скан. строками.

2.4) Для каждой пары рёбер ми-ка из САР выполнить:

- а) Извлечь эту пару из САР;
- б) Инициализировать  $Z$  со значением  $z_n$ ;
- в) Для каждого пикселя  $x_n \leq x \leq x_n$  вычислить  $Z(x, y=\text{const})$ :

$$z_1 = z_n, \dots, z_k = z_{k-1} + \Delta z_x;$$

- г) Если  $Z(x, y=\text{const}) > Z_{\text{буф}}(x, y=\text{const})$ , то  $Z_{\text{буф}} = Z$  и ещё занести атрибуты ми-ка в буфер кадра;

2.5) Записать буфер кадра скан. строки в буфер кадра дисплея.

2.6) Скорректировать САР:

- $\Delta Y_n = \Delta Y_1 - 1$  и  $\Delta Y_0 = \Delta Y_n - 1$ ;
  - $X_n = X_1 + \Delta X_1$  и  $X_0 = X_n + \Delta X_n$ ;
  - $Z_n = Z_1 + \Delta Z_x \cdot \Delta X + \Delta Z_y$ ;
- 2) Если  $\Delta Y_1 < 0$  или  $\Delta Y_n < 0$ , то удалить соотв. ребро из списка, пометив положение обоих рёбер в списке и породивший их мн-к.

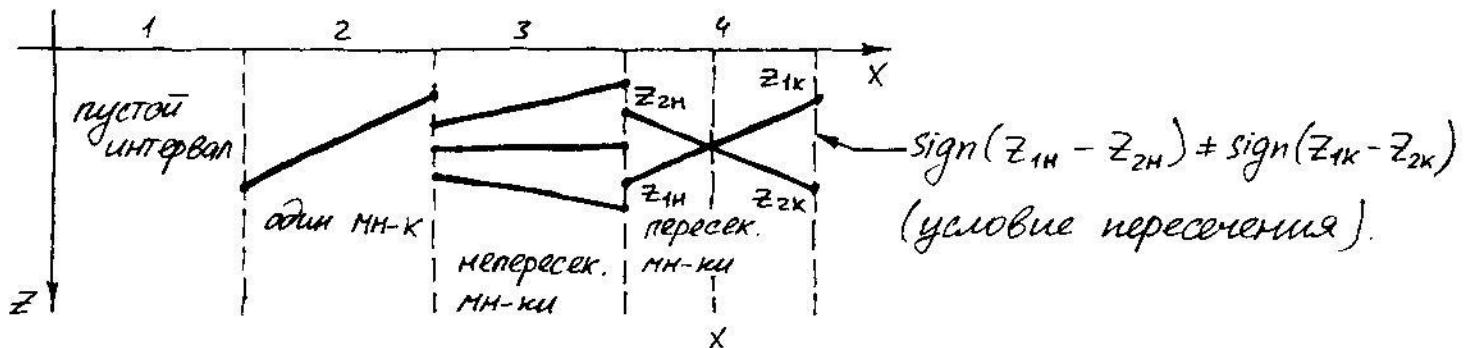
2.7) Скорректировать САМ:

- $\Delta Y = \Delta Y - 1$ ;
- Если  $\Delta Y < 0$ , то удалить мн-к из САМ.

### Интервальные методы построчного сканирования

В алгоритме построчного сканирования с использованием Z-буфера ширина мн-ка варьируется для каждого пикселя на скан. строке. Кол-во вычислений можно сократить, если использовать понятие интервалов.

Решение задачи удаления невидимых поверхностей сводится к выбору видимых отрезков в каждом из интервалов, полученных путём деления скан. строки проекциями точек пересечения рёбер.



- 1) Изобразить фон.
- 2) Изобразить атрибуты мн-ка, соответствующие этому отрезку.
- 3) Изобразить атрибуты мн-ка, соответствующие отрезку с MAX Z.
- 4)  $\text{sign}(Z_{1H} - Z_{2H}) \neq \text{sign}(Z_{1K} - Z_{2K}) \Rightarrow$  разбить интервал точкой пересечения "пересек." на части для новых частей

#3S Основные этапы алгоритма Робертса  
и их содержание

① Подготовка исходных данных:

- a) сформировать списки граней и рёбер для каждого тела исходя из списка вершин;
- б) вычислить коэф-ты ур-ий пл-тей, проходящих через грани;
- в) сформировать матрицу тела;
- г) проверить матрицу на корректность её составления (взять произвольную точку внутри тела);
- д) умножить вектор координат внутр. точки на матрицу тела, в полученном векторе найти отриц. компоненты, умножить соответствующ. столбцы матрицы на -1;
- е) если после формирования матр. происходит преобразование тела, то нужно эту матрицу слева умножить на обратную матрицу преобразований;
- \*ж) вычислить  $X_{min}, X_{max}, Y_{min}, Y_{max}, Z_{min}, Z_{max}$ .

② Удаление невидимых плоскостей:

- а) определить положение наблюдателя (обычно он находится в  $+\infty$  и смотрит в сторону нач. коорд.);
- б) вектор взгляда наблюдателя умножить на матр. тела, в полученнем векторе отриц. компоненты соответствуют невидимым граням;
- в) удалить невидимые грани;
- г) в случае одного тела работа всего алгоритма заканчивается.

③ Удаление невидимых рёбер или их частей, экранируемых другими телами сцены:

а) упорядочить тела по возрастанию  $Z_{\max}$ ;

Тело, ~~относительное~~ которое подвергается проверке на видимость пробным ~~телом~~ объектом, а тело, относительно которого проверяется пробный объект, на видимость пробным телом.

б)  $(X_{\max T} < X_{\min ob}) \vee (X_{\min T} > X_{\max ob}) \vee (Y_{\max T} < Y_{\min ob}) \vee (Y_{\min T} > Y_{\max ob}) \Rightarrow$  экранирование отсутствует; протыкание невозможно, если  $Z_{\max ob} < Z_{\min T}$ , а иначе оно может быть;

в)  $(X_{\max ob} > X_{\min T}) \vee (X_{\min ob} < X_{\max T}) \Rightarrow$  протыкание снизу возможно;  $(Y_{\max ob} > Y_{\min T}) \vee (Y_{\min ob} < Y_{\max T}) \Rightarrow$  протыкание сверху возможно;

г) сформировать  $[g], [S], [d]$ ; воспользоваться  $[P], [q], [w]$ ; проверить полную видимость, составив сетку:

$$h_j = p_j + t q_j + \alpha w_j > 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \alpha;$$

д) составить все возможные пары, найти решения всей системы, выбрать  $t_{\max min}$  и  $t_{\min max}$ ; найти точки протыкания;

е) определить видимые участки рёбер и сохранить для последующего анализа;

④ Определение невидимых участков новых рёбер, получаемых при протыкании тел:

а) сформировать все возможные рёбра, связывающие все точки протыкания для пар тел, связанных отношением протыкания;

б) проверить экранирование рёбер телами, кот. их породили;

в) оставшиеся видимые участки проверить на экранирование другими телами;

г) выделизировать оставшиеся рёбра.

#36) Алгоритм определения видимых поверхностей путём трассировки лучей.

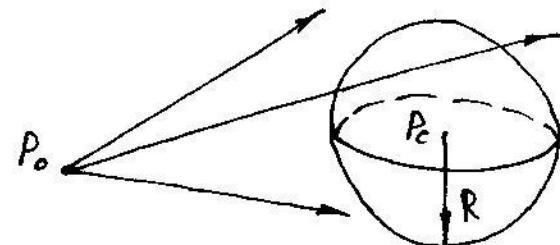
Наблюдатель видит объект посредством испускаемого неким источником света, который падает на поверхность объекта и затем как-то доходит до наблюдателя. В алгоритме отслеживаются лучи в обратном направлении: от наблюдателя к объекту.

Тест со сферической оболочкой:

$(x_1, y_1, z_1)$  — координаты очередного пикселя.

Уравнение луча:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t = z_0 + ct \end{cases}$$



Минимальное расстояние  $l$  от луча до  $P_o$ :

$$l^2 = (x_0 + at - x_c)^2 + (y_0 + bt - y_c)^2 + (z_0 + ct - z_c)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (l^2) = 2(a(x_0 + at - x_c) + b(y_0 + bt - y_c) + c(z_0 + ct - z_c))$$

$$t_{min} = - (a(x_0 - x_c) + b(y_0 - y_c) + c(z_0 - z_c)) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}$$

$l^2(t_{min}) > R^2 \Rightarrow$  пересечения с оболочкой нет.

Тест с прямоугольной оболочкой (труднее):

Применить преобразование, которое совместит луч с осью  $Z$ :

$(x'^{\min} < 0) \wedge (x'^{\max} > 0) \wedge (y'^{\min} < 0) \wedge (y'^{\max} > 0) \Rightarrow$  пересечение есть.

Упрощение вычисления пересечения:

$$Q(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + b_1 yz + b_2 xz + b_3 xy + c_1 x + c_2 y + c_3 z + d = 0$$

Применить преобразование, которое совместит луч с осью  $Z$ :

$$x = 0, y = 0, z = (-2c'_3 \pm \sqrt{c'^2_3 - 4a'_3 d}) \cdot (2a'_3)^{-1}$$

$(c'^2_3 - 4a'_3 d) < 0 \Rightarrow$  пересечения нет.

Для получения т. пересечения в исходной СК применить обратное преобразование для  $(x, y, z)$ .

## Алгоритм:

### 1. Подготовка данных:

Создать список объектов и для каждого запомнить:

- коэф-ты уравнений поверхностей;
- сферич. оболочку и прямоугл. оболочку.

### 2. Для каждого луча выполнить:

2.1) Для каждого тела выполнить тест со сферич. оболочкой.

Пересечение луча и оболочки есть  $\Rightarrow$  тело в список (CAT).

2.2) CAT пуст  $\Rightarrow$  изобразить данный пикセル цветом фона.

CAT не пуст  $\Rightarrow$  найти, запомнить преобразование, которое совместит луч с осью Z.

### 2.3) Для каждого объекта из CAT выполнить:

2.3.1) Выполнить тест с прямоугл. оболочкой тела.

2.3.2) Пересечения луча и оболочки нет  $\Rightarrow$  перейти к фр. объекту.

Пересечение луча и оболочки есть  $\Rightarrow$  преобразовать тело, используя запомненное преобразование; найти в новой СК пересечение с лучом; Если пересечение есть  $\Rightarrow$  в список (СП).

### 2.4) Вывод:

2.4.1) СП пуст  $\Rightarrow$  изобразить данный пикセル цветом фона.

2.4.2) СП не пуст  $\Rightarrow$  найти пересечение с MAX Z.

2.4.3) Освещение не используется  $\Rightarrow$  изобразить данный пикセル цветом поверхности, соответствующей этому пересечению.

2.4.4) Освещение используется  $\Rightarrow$  выполнить для точки пересечения преобразование, обратное запомненному; вычислить интенсивность для данного пикселя в полученной точке.

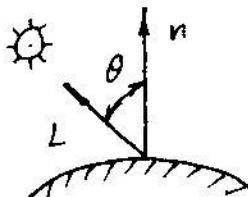
#37 Физические и психологические факторы, учитываемые при создании реалистичных изображений.  
Простая модель освещения.

При построении реалистичного изображения необходимо:

- 1) Учитывать оптические свойства поверхности.
- 2) Воспроизводить рисунок на поверхности.
- 3) Воспроизводить неровности.
- 4) Учитывать, что поверхности отбрасывают тени.
- 5) Учитывать восприятие окружающего мира человеком.

Простая модель освещения

Оражённый от объекта свет может быть диффузным и зеркальным.



Диффузное отражение света происходит, когда свет как бы проникает под поверхность объекта, поглощается, а затем вновь испускается. Диффузно отраженный свет рассеивается равномерно по всем направлениям, значит, положение наблюдателя не имеет значения.

$$I = I_l \cdot k_d \cdot \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$I$  - интенсивность отраженного света;  $I_l$  - интенсивность точечного источника;  $k_d$  - коэф-т диффузного отражения ( $0 \leq k_d \leq 1$ );  $\theta$  - угол между направлением света и нормалью к поверхности.  $k_d$  зависит от материала и длины волны света, но в простых моделях освещения считается постоянным.

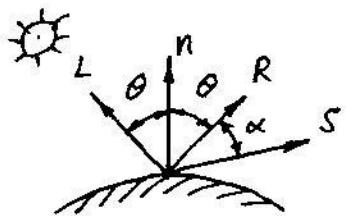
На объекты реальных сцен падает ещё и рассеянный свет:

$$I = I_a \cdot k_a + I_l \cdot k_d \cdot \cos\theta$$

$I_a$  - интенсивность рассеянного света;  $k_a$  - коэф-т диффузного отражения рассеянного света ( $0 \leq k_a \leq 1$ ).

Опытным путём:  $I = I_a \cdot k_a + I_l \cdot k_d \cdot \cos\theta / (d + K)$

$d$  - расстояние от центра проекции до объекта;  $K$  - константа.



Интенсивность зеркального отражения  
света зависит от угла падения; длины  
волн и падающего света; свойств вещества.

Зеркальное отражение света является направленным. Угол отражения от идеальной отражающей поверхности (зеркала) равен углу падения, в любом другом положении наблюдатель не видит зеркально отраженного света. Это означает, что  $\alpha = 0$  и  $\vec{S} = \vec{R}$  ( $S$  - вектор наблюдения,  $R$  - вектор отражения).

Благодаря зеркальному отражению на блестящих предметах появляются блики. У гладких поверхностей распределение зеркального отраженного света узкое или сформуированное, у шероховатых - более широкое.

В простых моделях освещения пользуются формулой:

$$I_s = I_l \cdot w(i, \lambda) \cdot \cos^n \alpha$$

$I_s$  - интенсивность отраженного зеркального света;

$w(i, \lambda)$  - привал отражения, представляющая отношение зеркально отраженного света к наблюдателю, как функцию <sup>угла</sup> падения  $i$  и длины  $\lambda$ ;  $n$  - степень, аппроксимирующая пространственное распределение зеркально отраженного света.

$w(i, \lambda)$  - сложная ф-ция  $\Rightarrow$  заменяется константой  $k_s$ .

Ф-ция закраски, примененная для расчёта интенсивности  
или тона точек объекта или пикселов изображения:

$$I = I_a k_a + \frac{I_l}{d+K} (k_d \cdot \cos \theta + k_s \cdot \cos^n \alpha)$$

$$I = I_a k_a + \sum I_{lj} (k_d \cdot \cos \theta_j + k_s \cdot \cos^{n_j} \alpha_j) / (d+K) - \text{для многих источников}$$

$$\cos \theta = \frac{\hat{n} \cdot \hat{L}}{|\hat{n}| \cdot |\hat{L}|} = \hat{n} \cdot \hat{L} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{\hat{R} \cdot \hat{S}}{|\hat{R}| \cdot |\hat{S}|} = \hat{R} \cdot \hat{S}$$

$$I = I_a \cdot k_a + \frac{I_l}{K+d} (k_d \cdot (\hat{n} \cdot \hat{L}) + k_s \cdot (\hat{R} \cdot \hat{S})^n)$$

#38 Метод Гуро закраски поверхностей  
(получение сплаженного изображения).

Методы закраски:

- 1) простая (на граних резкий переход оттенков);
- 2) по Гуро (сплаживание на основе интерполяции интенсивности);
- 3) по Фонту (сплаживание на основе интерполяции нормалей).

Одногранной закраской можно пользоваться при выполнении трёх условий:

- 1) источник света находится в бесконечности  $\Rightarrow \bar{n} \cdot \bar{I} = \text{const}$ ;
- 2) наблюдатель находится в бесконечности  $\Rightarrow \bar{r} \cdot \bar{s} = \text{const}$ ;
- 3) заштрихованный мн-к является реально существующим мн-ком, а не результатом аппроксимации поверхностей.

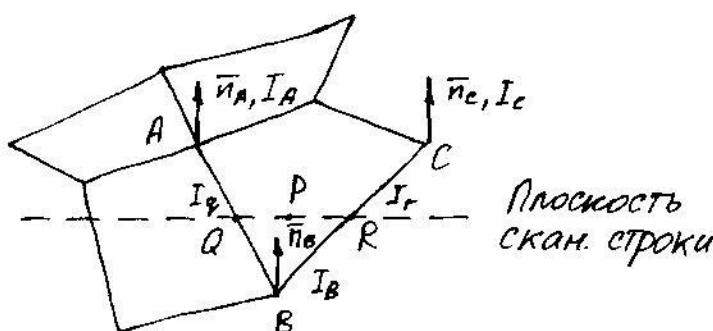
Билинейная интерполяция интенсивностей - это определение значений ф-ции в точке, лежащей внутри какого-то интервала.

Экстраполация - для точки вне интервала.

Метод Гуро

Если при построении полигональной поверхности для каждой грани используется одна нормаль, то модель освещения создает изображение, состоящее из отдельных мн-ков.

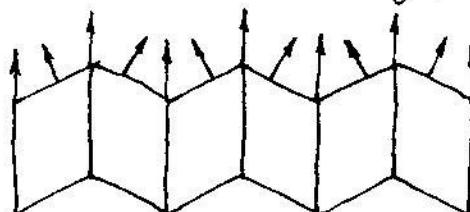
Методом Гуро можно получить сплаженное изображение.



1. Вычисление векторов нормалей к каждой грани.
2. Вычисление векторов нормалей к каждой грани <sup>вершины</sup> (путём усреднения нормалей к граням).
3. Вычисление интенсивностей в вершинах граней.
4. Интерполяция интенсивности вдоль рёбер граней:  
 $I_q = u I_A + (1-u) I_B, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad u = \frac{AQ}{AB};$   
 $I_r = w I_B + (1-w) I_C, \quad 0 \leq w \leq 1, \quad w = \frac{BR}{BC}.$
5. Линейная интерполяция интенсивности вдоль скан. строки:  
 $I_p = t I_q + (1-t) I_r, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad t = \frac{QP}{QR}.$

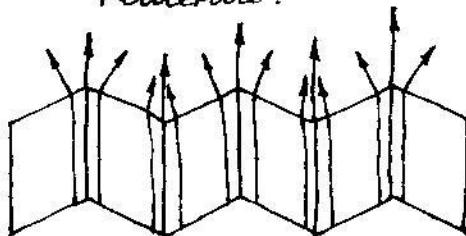
Закраска по Гуро хорошо сочетается с диффузными отражением. Данный метод интерполяции обеспечивает лишь непрерывность значений интенсивности вдоль границ мн-ков, но не обеспечивает непрерывности изменения интенсивности. Значит, возможно проявление полос Маха.

Недостаток: усреднение нормалей.



Поверхность закрашивается с одной интенсивностью. Будет выглядеть плоской.

Решение:



Если нужно сохранить острый переход, то не делается усреднение.

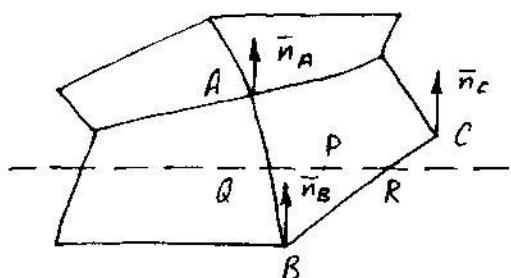
Если нужно, чтобы ребро сгладилось, вводят дополнительные мн-ки.

Инкрементальное вычисление вдоль скан. строки:

$$I_{P_2} = t_2 I_q + (1-t_2) I_r \quad \text{и} \quad I_{P_1} = t_1 I_q + (1-t_1) I_r \Rightarrow \\ \Rightarrow I_{P_2} = I_{P_1} + (I_q - I_r)(t_2 - t_1) = I_{P_1} + \Delta I \cdot \Delta t.$$

#39 Закраска Ромга (улучшение аппроксимации кривизны поверхностей).

Закраска Ромга требует больших вычислительных затрат, однако она позволяет решить многие проблемы метода Гуро. При закраске Гуро вдоль скан. строки интерполируется значение интенсивности, а при закраске Ромга — вектор нормали. Затем он используется в модели освещения для вычисления интенсивности. При этом достигается лучшая локальная аппроксимация кривизны поверхности. Изображение выходит более реалистичным. В частности, правдоподобнее выглядят зеркальные блики.



Трудность метода: (при создании кинокадра) закраска может значительно меняться от кадра к кадру (правило закраски зависит от ориентации объекта).

1. Вычисление векторов нормалей к каждой грани.
2. Вычисление векторов нормалей к каждой вершине грани.
3. Интерполяция векторов нормалей вдоль рёбер грани:
 
$$n_q = u \cdot n_A + (1-u) \cdot n_B, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad u = \frac{AQ}{AB};$$

$$n_r = w \cdot n_B + (1-w) \cdot n_C, \quad 0 \leq w \leq 1; \quad w = \frac{BR}{BC}.$$
4. Линейная интерполяция векторов нормалей вдоль скан. строки:
 
$$n_p = t \cdot n_q + (1-t) \cdot n_r, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad t = \frac{QP}{QR}.$$
5. Вычисление интенсивности в очередной точке скан. строки.

Инкрементальное вычисление вдоль скан. строки:

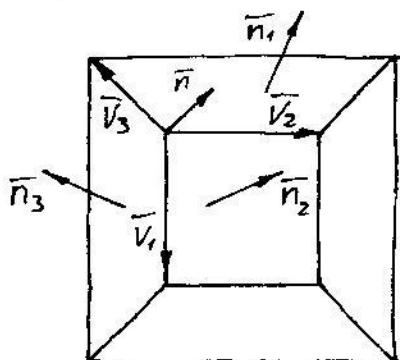
$$\bar{n}_{P_2} = \bar{n}_{P_1} + (\bar{n}_q - \bar{n}_r)(t_2 - t_1) = \bar{n}_{P_1} + \Delta \bar{n} \cdot \Delta t.$$

$$t_2 - t_1 = \frac{QP_2}{QR} - \frac{QP_1}{QR} = \frac{\Delta QR}{QR} = \frac{1}{QR} \Rightarrow \bar{n}_{P_2} = \bar{n}_{P_1} + \frac{\Delta \bar{n}}{RQ}$$

**#40) Определение нормали к поверхности и вектора отражения в алгоритмах построения реалистических изображений.**

Определение нормали

Нормаль к поверхности представляет её локальную кривизну, а следовательно, и направление зеркального отражения.



$$1) \bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3$$

$$\bar{n} = (a_1 + a_2 + a_3)\bar{i} + (b_1 + b_2 + b_3)\bar{j} + (c_1 + c_2 + c_3)\bar{k}$$

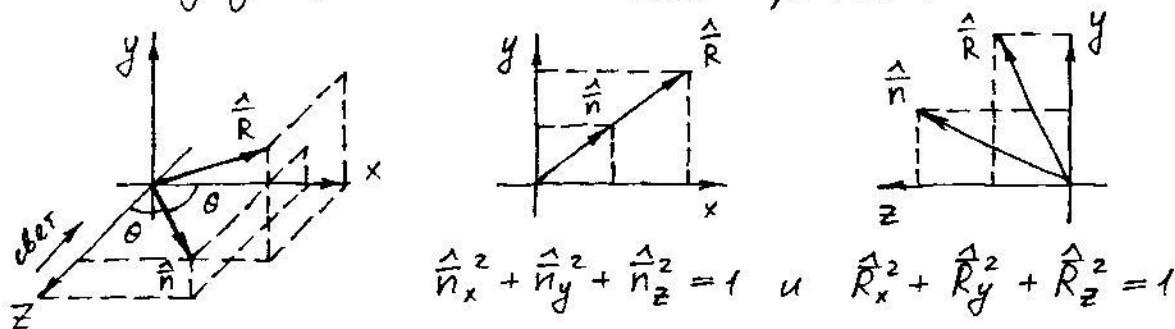
$$2) \bar{n} = \bar{V}_1 \times \bar{V}_2 + \bar{V}_2 \times \bar{V}_3 + \bar{V}_3 \times \bar{V}_1$$

Определение вектора отражения

1 способ (модель освещения с одним источником света)

Это случай, когда свет падает вдоль оси  $\bar{z}$ .

Перенесём начало координат в точку поверхности. Тогда проекции нормали и вектора отражения на плоскость  $XOY$  будут лежать на одной прямой.



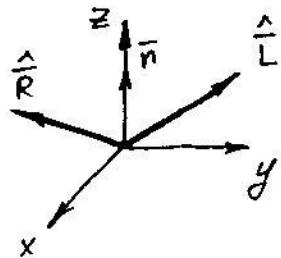
$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\hat{n}_x}{\hat{n}_y} \quad \text{and} \quad \hat{n}_z = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad \hat{R}_z = \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\hat{n}_z^2 - 1$$

$$\frac{\hat{R}_x^2}{\hat{R}_y^2} = \frac{\hat{n}_x^2}{\hat{n}_y^2} \quad \text{and} \quad \hat{R}_x^2 + \hat{R}_y^2 = 1 - \hat{R}_z^2 \Rightarrow \frac{\hat{R}_x^2}{\hat{R}_y^2} \left( \frac{\hat{R}_x^2}{\hat{R}_y^2} + 1 \right) = 1 - (2\hat{n}_z^2 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{R}_x^2 \left( 1 + \frac{\hat{R}_y^2}{\hat{R}_x^2} \right) = 1 - 4\hat{n}_z^4 + 4\hat{n}_z^2 - 1 \Rightarrow \hat{R}_x^2 \left( 1 + \frac{\hat{n}_y^2}{\hat{n}_x^2} \right) = 4\hat{n}_z^2 \left( 1 - \hat{n}_z^2 \right) = \frac{\hat{R}_x^2}{\hat{n}_x^2} \left( 1 - \hat{n}_z^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{R}_x = 2\hat{n}_x \cdot \hat{n}_z \Rightarrow \hat{R}_y = 2\hat{n}_y \cdot \hat{n}_z$$

## 2 способ (совмещение вектора нормали с осью Z)



В изменённой СК:  
 $\hat{L}_z = \hat{R}_z$  и  $\hat{L}_x = -\hat{R}_x$  и  $\hat{L}_y = -\hat{R}_y$

## 3 способ

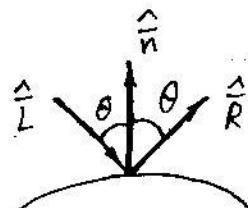
Условие того, что единичная нормаль, единичный вектор наблюдения и единичный вектор отражения лежат в одной плоскости, записывается так:

$$\hat{n} \times \hat{L} = \hat{R} \times \hat{n}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \hat{n}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \end{vmatrix} = \bar{i}(\hat{n}_y \hat{L}_z - \hat{n}_z \hat{L}_y) + \bar{j}(\hat{n}_z \hat{L}_x - \hat{L}_z \hat{n}_x) + \bar{k}(\hat{n}_x \hat{L}_y - \hat{L}_x \hat{n}_y)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \hat{R}_x & \hat{R}_y & \hat{R}_z \\ \hat{R}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z \end{vmatrix} = \bar{i}(\hat{R}_y \hat{n}_z - \hat{R}_z \hat{n}_y) + \bar{j}(\hat{R}_z \hat{n}_x - \hat{R}_x \hat{n}_z) + \bar{k}(\hat{R}_x \hat{n}_y - \hat{R}_y \hat{n}_x)$$

$$\begin{cases} -n_z R_y + n_y R_z = n_z L_y - n_y L_z \\ n_z R_x - n_x R_z = n_x L_z - n_z L_x \\ -n_y R_x + n_x R_y = n_y L_x - n_x L_y \end{cases}$$



$$\cos \theta = (\hat{L}, \hat{n}) = (\hat{n}, \hat{R}) \quad \text{и} \quad \hat{R} = \alpha \hat{L} + \beta \hat{n}$$

$$(1) \quad \hat{n} \cdot (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n}) = \cos \theta \Rightarrow \alpha \hat{n} \cdot \hat{L} + \beta = \cos \theta \Rightarrow \beta = \cos \theta + \alpha \cos \theta = (1+\alpha) \cos \theta$$

$$(2) \quad (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n})^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta \hat{L} \cdot \hat{n} + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \theta + \beta^2 = 1$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \theta + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha) \cos^2 \theta + (1+\alpha)^2 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha^2(1 - \cos^2 \theta) = (1 - \cos^2 \theta) \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2 \cos \theta = -2 \hat{L} \cdot \hat{n}$$

## (#41) Построение теней. Учёт теней в алгоритмах удаления невидимых поверхностей.

Если положение наблюдателя и источника света совпадают, то тени не видно, но они появляются, когда наблюдатель перемещается в любую другую точку.

Тень состоит из 2 частей:

- 1) Полная тень - это центральная, тёмная, резко очерченная часть.
- 2) Полутень - окружающая полную тень более светлая часть.

Собственная тень - объект препятствует попаданию тени на некоторые свои грани.

Проекционная тень - один объект препятствует попаданию света на другой.

Процесс построения тени:

- 1) Удалить невидимые поверхности для положения каждого источника;
- 2) Удалить невидимые поверхности для положения наблюдателя.

Построение собственной тени:

Удаление нелицевых граней, если точку наблюдения совместить с источником света (алгоритм Робергса).

Построение проекционной тени:

Построить проекции всех нелицевых граней на арену, если точку наблюдения совместить с источником света. Точки пересечения проецирующей грани со всеми другими плоскостями образуют мн-ки, которые помечают, как теневые мн-ки и заносят в список.

## Интервальный алгоритм построчного сканирования:

1. Для каждого источника и мн-ка определить собств. тени и проекц. тени. Они записываются в виде двойной матрицы: строки - мн-ки, отбрасывающие тень, столбцы - затеняющие мн-ки.
2. Обработка сцены относительно положения наблюдателя:
  - 2.1) Определить видимые отрезки на интервале.
  - 2.2) С помощью списка теневых мн-ков определить, падает ли тень на мн-к, который создает видим. отрезок на данном интервале:
    - нет теневых мн-ков  $\Rightarrow$  изобразить видим. отрезок;
    - есть теневые мн-ки, но они не пересекают и не покрывают данный интервал  $\Rightarrow$  изобразить видим. отрезок;
    - интервал полностью покрывается хотя бы одним мн-ком  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  интенсивность изображаемого отрезка определяется с учетом интенсивностей этих мн-ков и самого отрезка;
    - хотя бы один теневой мн-к частично покрывает интервал  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  рекурсивно разделять интервал и работать с подинтервалами.

## Алгоритм, использующий z-буфер:

1. Строится сцена, где точка наблюдения совпадает с источником. Запоминать значения  $z$  в отдельном теневом  $z$ -буфере.
2. Строится сцена из точки наблюдателя. При обработке каждой поверхности глубина каждого пикселя сравнивается с глубиной  $z$  буф. Если  $z(x,y) > z_{\text{бум}}(x,y) \Rightarrow x, y, z$  из виду наблюдателя линейно преобразуются в  $x', y', z'$  на виду из источника:  
 $z' \geq z_{\text{тен.бум.}}(x',y') \Rightarrow x, y$  - в буфер кадра;
3.  $z' < z_{\text{тен.бум.}}(x',y') \Rightarrow (x, y, z)$  в тени и изображается согласно соответствующему правилу расчёта интенсивности с учётом затенения; ~~затем можно использовать~~.

$$z_{\text{бум.}} = z(x, y).$$

#42 Учёт прозрачности в модели освещения.

Учёт прозрачности в алгоритмах удаления невидимых поверхностей.

Чтобы включить преломление в модель освещения, нужно при построении видимых поверхностей учитывать не только падающий, но и отражённый и пропущенный свет. Эффективнее всего это выполняется с помощью шаблонной модели освещения в сочетании с алгоритмом трассировки лучей для выделения видимых поверхностей.

Обычно рассматриваются только зеркально отражённые и пропущенные лучи, т.к. диффузное отражение от просвечивающих поверхностей порождает бесконечное кол-во беспорядочно ориентированных лучей.

Формула расчёта интенсивности для прозрачных тел:

$$I = k_a \cdot I_a + k_d \cdot I_d + k_s \cdot I_s + k_t \cdot I_t,$$

где индексы  $a, d, s, t$  обозначают рассеянный, диффузный, зеркальный и пропущенный свет.

Пропускание:

1) Зеркальное (направленное) – свойственно прозрачным телам (стекло). Если смотреть на объект сквозь такое вен-во, то за исключением контурных линий криволинейных поверхностей искажения происходить не будет.

Нелинейная аппроксимация коэф-та прозрачности:

$$t = t_{\min} + (t_{\max} - t_{\min}) \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{\hat{n}_z} \right)^p \right)$$

$t_{\min}$  и  $t_{\max}$  – миним. и макс. прозрачность объекта;

$\hat{n}_z$  –  $z$ -составляющая единичной нормали к поверхности;

$p$  – коэф-т степени прозрачности;

$t$  – прозрачность пикселя или точки объекта.

2) Диффузное (рассеянное) – вещества кажутся полупрозрачными или матовыми.

Простое пропускание света можно встроить в любой алгоритм удаления невидимых ~~матовых~~ поверхностей кроме алгоритма с Z-буфером.

Прозрачные поверхности исключаются и если видимая грани прозрачна, то в буфер кадра записывается линейная комбинация двух ближайших поверхностей:

$$I = t I_1 + (1-t) I_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$I_1$  – видимая поверхность;  $I_2$  – поверхность за ней.

Алгоритм, использующий Z-буфер:

1. Для каждого мн-ка:

1.1) Если мн-к прозрачен  $\Rightarrow$  внести его в список прозрач. мн-ков.

1.2) Если мн-к непрозрачен и  $Z > Z_{\text{буф}}$ , то записать его в буфер кадра для непрозрачных мн-ков и скорректировать  $Z_{\text{буф}}$ .

2. Для каждого мн-ка из списка прозрачных мн-ков:

2.1) Если  $Z \geq Z_{\text{буф}}$ , то прибавить его коэф-т прозрачности к значению, содержащемуся в буфере весовых коэф-тов прозрачности; прибавить его интенсивность к значению, содержащемуся в буфере интенсивности прозрачности по правилу:

$$I_{\text{вн}} = I_{\text{вн}} \cdot t_{\text{вн}} + I_{\text{с}} \cdot t_{\text{с}} \quad (\text{вн} - \text{новое значение}, \text{вн} - \text{старое}, \text{с} - \text{для мн-ка}).$$

Таким образом, получается взвешенная сумма интенсивностей всех прозрачных мн-ков, находящихся перед непрозрачным).

Объединим буфера интенсивности для прозрач. и непрозрач. мн-ков:

$$I_{\text{fb}} = t_{\text{вн}} \cdot I_{\text{вн}} + (1-t_{\text{вн}}) \cdot I_{\text{fbвн}}$$

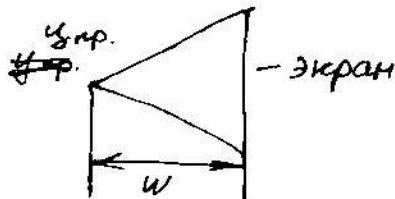
$I_{\text{fb}}$  – окончательная интенсивность в буфере кадра для непрозрачных мн-ков;

$I_{\text{fbвн}}$  – старое значение интенсивности в этом буфере.

#43) Преобразование на плоскости. Вывод  
расчетных соотношений. Матрицы преобразований.

Однородные координаты:  $(x \ y \ w)$

$$X = \frac{x}{w}, \quad Y = \frac{y}{w}$$



Преобразования на пл-ти:

$$(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$$

$$x_1 = Ax + By + C$$

$$y_1 = Dx + Ey + F$$

$$(x_1 \ y_1 \ 1) = (x \ y \ 1) M_{np}$$

$$M_{np} = \begin{pmatrix} A & D & 0 \\ B & E & 0 \\ C & F & 1 \end{pmatrix}; \quad (x_2 \ y_2 \ 1) = (x_1 \ y_1 \ 1) \cdot M_2 = (x \ y \ 1) \cdot M_1 \cdot M_2 = (x \ y \ 1) \cdot M_{\Sigma}$$

Линейное преобразование: пл-ть не вырожд. в прямую, а прямая не вырождается в точку; сохраняется параллельность плоскостей и существует обратн. преобразования ( $\det M \neq 0$ ).

Любое преобразование может быть представлено в виде трёх:

1) Перенос

$dx, dy$  - 2 параметра.

$$x_1 = x + dx$$

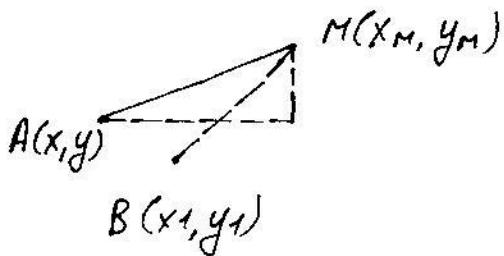
$$y_1 = y + dy$$

$$M_{пер} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$

## Масштабирование

$x_m, y_m, k_x, k_y$  — 4 пары.

$k_x \neq k_y$  — неоднородное масштабир.



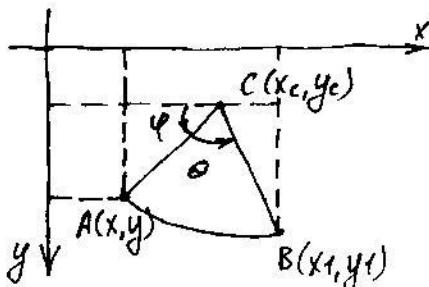
$$x_1 - x_m = k_x (x - x_m)$$

$$\begin{cases} x_1 = k_x \cdot x + (1 - k_x) \cdot x_m \\ y_1 = k_y \cdot y + (1 - k_y) \cdot y_m \end{cases}$$

$M_{масшт} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$  — в матр. форме можно описать масштабир.  
только относительно центра координат.

## Поворот

$x_c, y_c, \theta$



$$M_{повор} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M_{повор} = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c + R \cos(180^\circ - (\varphi + \theta)) = x_c - R \cos(\varphi + \theta) = \\ &= x_c - R \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta = \\ &= x_c - (x_c - x) \cos\theta + (y - y_c) \sin\theta = \\ &= x_c + (x - x_c) \cos\theta + (y - y_c) \sin\theta \\ y_1 &= y_c + R \sin(180^\circ - (\varphi + \theta)) = y_c + R \sin(\varphi + \theta) = \\ &= y_c + R \sin\varphi \cos\theta + R \cos\varphi \sin\theta = \\ &= y_c + (y - y_c) \cos\theta + (x_c - x) \sin\theta = \\ &= y_c + (y - y_c) \cos\theta - (x - x_c) \sin\theta \end{aligned}$$

Коммутативны:

| $M_1$            | $M_2$   |
|------------------|---------|
| перенос          | перенос |
| Масшт.           | Масшт.  |
| Поворот          | Поворот |
| Масшт (одн. ося) | Поворот |

Перенос и поворот коммутативны:

$$M_{перпер} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx_1 + dx_2 & dy_1 + dy_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{поворповор} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Масштабирование коммутативно:

$$M_{масмас} = \begin{pmatrix} k_{x1} \cdot k_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y1} \cdot k_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$