6.3.ТРЕХМЕРНОЕ ОТСЕЧЕНИЕ

При проведении отсечения необходимо определить форму отсекателя, по границам которого будет производиться отсечение. По аналогии с плоским случаем стандартным отсекателем в трехмерном пространстве будет являться прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис.6.3.1а). Как и в двумерном отсечении, здесь также можно использовать обобщенные коды концевых точек, предложенные Коэном и Сазерлендом. В трехмерном случае должен использоваться шестибитовый код. Самый младший (правый) бит считается первым. Единица в соответствующий бит заносится в следующих случаях:

- в первый бит, если точка находится левее отсекателя (левее левой грани);
- во второй бит, если точка находится правее отсекателя (правее правой грани);
- в третий бит, если точка находится ниже отсекателя (ниже нижней грани);
- в четвертый бит, если точка находится выше отсекателя (выше верхней грани);
- в пятый бит, если точка находится ближе отсекателя (перед передней гранью);
- в шестой бит, если точка находится дальше отсекателя (за дальней гранью).

Во всех остальных случаях в биты заносятся нули.

Наряду с прямоугольным параллелепипедом в качестве отсекателя используется также усеченная пирамида (рис.6.3.1б). Использование пирамиды связано с тем, что объекты, попадающие в поле видимости наблюдателя, располагаются в пределах конуса, вершина которого совпадает с глазом человека. Причем наблюдатель не видит предметов, расположенных на очень близком расстоянии и на большом расстоянии. Отсюда и получается конус видимости. Однако в практических случаях удобнее пользоваться усеченной пирамидой (пирамидой видимости), которая аппроксимирует конус.

Определение кодов концевых точек отрезка при использовании в качестве отсекателя усеченной пирамиды требует дополнительных рассуждений. В одном из методов пирамида преобразуется таким образом, что $X_л = -1$, $X_{пр}=1$, $Y_{нижн} = -1$, $Y_{верх}=1$, $Z_{ближ}=a$, $(0<a\le1)$, $Z_{даль}= -1$. Однако при этом существенно искажается форма отсекателя. В другом случае отрезок, соединяющий центр проекции с центром усеченной пирамиды, совмещается с осью Z правой системы координат (рис.6.3.2).

Уравнение прямой на плоскости XZ, несущей проекцию правой грани отсекателя, имеет вид:

$$\frac{X}{X_{äàëüï}} = \frac{Z_{öï} - Z}{Z_{öï} - Z_{äàëü}}$$

$X=AZ+B$,

где $A = -X_{даль}/(Z_{цп} -Z_{даль})$, $B= -A Z_{цп}$ $(A<0, B>0)$

Полученное уравнение правой грани пирамиды можно использовать для определения местоположения точки: справа, слева от плоскости или на самой плоскости. Для этого следует использовать пробную функцию $f_{пр}=X-AZ - B$. Если значение пробной функции отрицательно, то исследуемая точка лежит слева от отсекающей плоскости (по видимую сторону отсекающей плоскости), если значение функции - положительно, то точка лежит справа от плоскости, если значение функции равно нулю, то точка лежит на плоскости.

Для левой грани получим следующее уравнение

$$\frac{X}{-\ X_{\ddot{a}\grave{a}\ddot{e}\ddot{u}\ddot{e}}} = \frac{Z_{\ddot{o}\ddot{i}}\ -Z}{Z_{\ddot{o}\ddot{i}}\ -\ Z_{\ddot{a}\grave{a}\ddot{e}\ddot{u}}}$$

$X=CZ+D$,

где $C= X_{дальл}/(Z_{цп}-Z_{даль})$, $D= -CZ_{цп}$, $f_{пр} =X-CZ-D$ $(C>0, D<0)$.

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит справа от плоскости (по видимую сторону), отрицательно, если точка лежит слева от плоскости, равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Для верхней грани получим уравнение

$$\frac{Y}{Y_{дальв}} = \frac{Z_{цп} - Z}{Z_{цп} - Z_{даль}}$$

$Y=EZ+F$,

где $E= - Y_{дальв}/(Z_{цп}-Z_{даль})$, $F= - EZ_{цп}$, $f_{пр} = Y-EZ-F$, $(E<0, F>0)$.

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит выше плоскости (по невидимую сторону), отрицательно, если точка лежит ниже плоскости (по видимую сторону), равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Для нижней грани получим уравнение

$$\frac{Y}{-Y_{дальн}} = \frac{Z_{цп} - Z}{Z_{цп} - Z_{даль}}$$

$Y=GZ+H$,

где $G= Y_{дальн}/(Z_{цп}-Z_{даль})$, $H= - EZ_{цп}$, $f_{пр} = Y-GZ-H$, $(G>0, H<0)$.

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит выше плоскости (по невидимую сторону), отрицательно, если точка лежит ниже плоскости (по видимую сторону), равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Уравнение дальней грани $Z=Z_{даль}$, а пробная функция имеет вид $f_{пр} = Z- Z_{даль}$. Точка лежит ближе плоскости (по видимую сторону), если значение пробной функции положительно, точка лежит дальше плоскости (по невидимую сторону), если значение функции отрицательно, точка лежит на плоскости, если значение функции равно нулю.

Уравнение ближней грани $Z=Z_{бл}$, а пробная функция имеет вид $f_{пр} = Z- Z_{бл}$. Точка лежит ближе плоскости (по невидимую сторону), если значение пробной функции положительно, точка лежит дальше плоскости (по видимую сторону), если значение функции отрицательно, точка лежит на плоскости, если значение функции равно нулю.

При вычислении кодов концевых точек отрезков следует соблюдать осторожность, так как можно получить некорректный результат, если точки лежат за центром проекции. Это связано с тем, что левая, правая, нижняя, верхняя грани пересекаются в точке центра проекции. Поэтому существуют точки, лежащие одновременно левее левой и правее правой граней, выше верхней и ниже нижней граней.

Некоторые из ранее рассмотренных двумерных алгоритмов отсечения без труда можно обобщить для трехмерного случая. В частности, легко адаптировать для трехмерного случая алгоритм разбиения отрезка средней точкой. Для этого следует изменить размерности массивов, в которых хранятся коды концов отрезка (T1 и T2) (вместо четырех значений они должны хранить шесть значений), а также массива, хранящего координаты граней отсекателя и центра проекции. Вычисление кодов концов отрезка ведется в соответствии с приведенными формулами, а при вычислении координат точек следует учитывать также третью координату.

Также легко обобщается на трехмерный случай и алгоритм Кируса-Бека. Отсекатель в этом случае может представлять собой произвольный выпуклый объем. Координаты точек и векторов должны иметь три компоненты в соответствии с количеством измерений. В качестве точек, лежащих на грани отсекателя, удобно выбирать точки, лежащие на концах главной диагонали. Для отсекателя - параллелепипеда легко определяются и внутренние нормали. Не вызывает больших трудностей выбор пробных точек и вычисление нормалей и в случае с усеченной пирамидой. В качестве пробных точек также удобно выбирать вершины пирамиды, в которых сходятся три грани пирамиды. Определение нормалей к ближней и дальней граням очевидно, а определение нормалей к остальным четырем граням возможно на основании вычисления векторного произведения векторов, построенных на ребрах граней, начинающихся в одной из вершин грани.

Алгоритм Кируса-Бека предполагает использование в качестве отсекателя выпуклого многогранника, поэтому необходимо уметь определять факт выпуклости многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА, ВЫЧИСЛЕНИЕ НУТРЕННИХ НОРМАЛЕЙ К ЕГО ГРАНЯМ, РАЗРЕЗАНИЕ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Ранее рассмотренный алгоритм определения выпуклости плоских многоугольников можно распространить на трехмерные многогранники (рис.6.3.3). В трехмерном случае алгоритм будет выглядеть следующим образом:

1. Перенести тело таким образом, чтобы одна из вершин грани оказалась в начале координат.
2. Повернуть тело вокруг начала координат так, чтобы одно из двух смежных выбранной вершине ребер грани совпало с одной из координатных осей.
3. Повернуть тело вокруг выбранной оси координат так, чтобы выбранная грань легла на координатную плоскость.
4. Для всех вершин тела, не принадлежащих выбранной грани, определить знаки координаты, которая перпендикулярна этой грани.
5. Провести анализ полученных знаков, руководствуясь следующим правилом:
   - если знаки для всех вершин совпадают или равны нулю, то тело является выпуклым относительно выбранной грани; если тело выпукло относительно всех своих граней, то оно является в целом выпуклым, в противном случае оно невыпукло;
   - если знаки для всех вершин не совпадают, то тело невыпукло относительно очередной грани, следовательно, оно невыпукло в целом;
   - если для всех вершин значения координаты, перпендикулярной выбранной грани, равны нулю, то тело вырождено, т.е. это плоский многоугольник.
6. Вектор внутренней нормали к выбранной грани, заданный в преобразованной системе координат, имеет все нулевые компоненты, кроме той, которая перпендикулярна рассматриваемой грани. Знак этой

компоненты для грани, относительно которой тело выпукло, совпадает с ранее найденным в п.4 знаком.

Для определения значения внутренней нормали в исходной системе координат необходимо применить к ней обратное преобразование поворотов.

7. Если тело оказалось невыпуклым относительно рассматриваемой грани, то его следует разрезать плоскостью, несущей выбранную грань.
8. Для каждого из вновь полученных тел повторить описанную процедуру до тех пор, пока все тела не станут выпуклыми.

Перечисленные здесь действия необходимо выполнить для каждой грани тела.

Алгоритм определения выпуклости тела и разрезания невыпуклого тела на выпуклые части используется в процедуре отсечения отрезков невыпуклыми телами. Подход здесь такой же, как и в двумерном случае. Результат достигается путем выполнения внутренних и внешних отсечений. При отсечении невыпуклым телом оно дополняется до выпуклого тела и проводится внутреннее отсечение отрезка полученным телом. Затем проводится внешнее отсечение телом, дополняющим исходное до выпуклого. Полученный результат и является отсечением отрезка невыпуклым телом.