6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе рассмотренные ранее методы двумерных преобразований распространяются на изображения трехмерных объектов. Матрица преобразований в трехмерном пространстве в однородных координатах будет иметь размерность 4*4. Координаты точки (X, Y, Z) заменяются четверткой (WX, WY, WZ,W), W≠0. Каждая точка пространства может быть задана четверкой одновременно не равных нулю чисел, эта четверка определена однозначно до общего множителя. Такой подход позволяет в матричной форме описать операции преобразования.

Любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции переносов, масштабирований, поворотов. Поэтому опишем только эти преобразования.

ПЕРЕНОС

Перенос в трехмерном пространстве является простым расширением двумерного. Матрица преобразования имеет следующий вид (аналогичный 2.5.4):

$$M_{\text{пер}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ DX & DY & DZ & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.1)$$

Воспользовавшись матрицей (6.2.1), получим следующие значения новых координат точки объекта визуализации: X1=X+DX; Y1=Y+DY; Z1=Z+DZ.

Результат переноса при различных значениях DX и DY рассматривался в разделе 2.5., положительные значения DZ приводят к удалению точки от наблюдателя в глубь экрана, при отрицательных - точка приближается к наблюдателю.

Задавая одни и те же значения DX, DY, DZ для всех точек рисунка и повторяя многократно перенос, получим движение рисунка по экрану без изменения формы изображаемого объекта. Если же значения DX, DY, DZ не совпадают для всех точек, то движение будет происходить с изменением начальной формы.

При движении объекта вдоль оси Z необходимо использовать при его изображении уравнение перспективы, поэтому при отрицательных значениях DZ объект, приближаясь к наблюдателю, увеличивается в размерах, при положительных значениях, удаляясь, уменьшается в размерах.

МАСШТАБИРОВАНИЕ

Матрица преобразования при масштабировании аналогична матрице для двумерного масштабирования:

$$M_{мас}=\begin{pmatrix} KX & 0 & 0 & 0 \\ 0 & KY & 0 & 0 \\ 0 & 0 & KZ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.2)$$

При использовании этой матрицы центр масштабирования располагается в начале координат. Если в качестве центра масштабирования выбрана точка с координатами ($X_м$, $Y_м$, $Z_м$), то новые координаты промасштабированной точки определяются из выражения :

$$\begin{aligned} X1&=X*KX+(1-KX)*X_м \\ Y1&=Y*KY+(1-KY)*Y_м \\ Z1&= Z*KZ+(1-KZ)*Z_м \end{aligned} \qquad (6.2.3)$$

где (X,Y,Z) - координаты исходной точки, (X1,Y1,Z1) - координаты промасштабированной точки, KX, KY, KZ - коэффициенты масштабирования вдоль координатных осей. Можно также воспользоваться матрицей масштабирования, но предварительно следует перенести тело и центр масштабирования так, чтобы центр масштабирования оказался в начале координат.

Коэффициенты масштабирования могут принимать любые значения. Как и ранее, значение коэффициента, большее 1, приводит к увеличению размеров изображения объекта, меньшее 1 - к уменьшению. При KX=KY=KZ происходит равномерное изменение размеров изображения. При отрицательных значениях коэффициентов масштабирования происходит симметричное отображение масштабируемого объекта относительно соответствующей координатной плоскости. При KX= -1, KY=0, KZ=0 происходит отображение относительно плоскости YOZ (или ей параллельной); при KX=0, KY= -1, KZ=0 происходит отображение относительно плоскости XOZ (или ей параллельной); при KX=0, KY=0, KZ= -1 происходит отображение относительно плоскости XOY. Часто такой частный случай масштабирования называют отражения.

ПОВОРОТ

Двумерный поворот, описываемый с помощью (2.5.7.) или (2.5.8.), в трехмерном пространстве является по сути трехмерным поворотом вокруг оси Z или ей параллельной, проходящей через центр вращения (X_c,Y_c). При таком повороте не затрагиваются значения координаты Z для всех точек изображения.

Матрица поворота вокруг оси Z имеет вид, аналогичный (2.5.8.):

$$M_{повz}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.4.)$$

Матрица (6.2.4.) получена в предположении, что наблюдатель находится в начале системы координат и смотрит вдоль положительной полуоси Z. Если же наблюдатель смотрит с конца положительной полуоси (это положение использовалось при определении системы координат), то матрица будет иметь вид:

$$M_{повz}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.5.)$$

Единичный вектор X[1 0 0 1] в результате поворота на 90° станет единичным вектором Y[0 1 0 1]. Проверим это.

$$[1\ 0\ 0\ 1]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [0\ 1\ 0\ 1],$$

что и подтверждает соглашение о правосторонней системе координат.

Если ось вращения проходит через точку с координатами (X_c,Y_c), то координаты преобразованной точки определяются по формуле

$$X1=X_c+(X-X_c)*\cos\theta-(Y-Y_c)*\sin\theta$$
$$Y1=Y_c+(X-X_c)*\sin\theta+(Y-Y_c)*\cos\theta \qquad (6.2.6)$$

При вращении вокруг оси X матрица преобразования будет иметь следующий вид:

$$M_{повx}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.7.)$$

Здесь предполагалось, что наблюдатель смотрит с конца положительной полуоси X, и поворот производится против часовой стрелки. Если же ось вращения параллельна оси X и проходит через точку с координатами (Y_c,Z_c), то новые координаты для точки (Y,Z) определяются по формуле:

$$Y1=Y_c+(Y-Y_c)*\cos\theta-(Z-Z_c)*\sin\theta$$
$$Z1=Z_c+(Z-Z_c)*\cos\theta+(Y-Y_c)*\sin\theta \qquad (6.2.8.)$$

Координата X не изменяет своего значения. Для использования матрицы поворота следует сначала произвести перенос таким образом, чтобы центр поворота совпал с началом координат, провести преобразование поворота, а затем произвести обратный перенос. Это связано с тем, что при использовании матрицы поворота предполагается, что центр поворота находится в начале координат.

Матрица поворота вокруг оси Y будет иметь вид:

$$M_{повy}=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.9.)$$

Если же ось вращения параллельна оси Y и проходит через точку (X_c,Z_c), то новые координаты для точки (X,Z) определяются по формулам:

$$X1=X_c+(X-X_c)*\cos\theta+(Z-Z_c)*\sin\theta$$

$$Z1=Z_c+(Z-Z_c)*\cos\theta-(X-X_c)*\sin\theta \qquad (6.2.10.)$$

Координата Y при повороте вокруг оси Y (или ей параллельной) не изменяется.

Если совершается произвольная последовательность поворотов вокруг осей X,Y,Z, то матрица преобразования будет иметь следующий вид:

$$M_{пов}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.11.)$$

Вращение вокруг оси, параллельной оси Z, лишь меняет ориентацию постоянно обращенной к наблюдателю поверхности. Вращение вокруг оси, параллельной оси Y, дает возможность увидеть разные стороны предмета. Вращение вокруг оси, параллельной оси X, дает возможность увидеть верхнюю, нижнюю поверхности предмета.

Чтобы увидеть предмет с произвольного направления, необходимо выполнить комбинированное преобразование изображения, состоящее из нескольких операций вращения.

Рассмотрим получение матрицы поворота на угол θ вокруг прямой L, проходящей через точку A(a, b, c) и имеющей направляющий вектор (k, l, m). Предположим, что этот вектор является единичным, т.е. $k^2 + l^2 + m^2 =1$.

Сначала следует осуществить перенос прямой L на вектор (-a, -b, -c), это приведет к тому, что прямая пройдет через начало координат. Матрица переноса будет иметь следующий вид:

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

На втором шаге необходимо совместить ось вращения L с осью Z путем поворота вокруг оси абсцисс и оси ординат. Первый поворот выполняется вокруг оси абсцисс на угол φ, который подлежит определению. Прямая, являющаяся ортогональной проекций на плоскость X=0 исходной прямой, имеет направляющий вектор (0, l, m), отсюда получается, что cosφ=m/d, sinφ=l/d, где d=$\sqrt{l^2+m^2}$. Матрица поворота будет иметь следующий вид:

$$M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m/d & l/d & 0 \\ 0 & -l/d & m/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При выполнении этого преобразования координаты исходного направляющего вектора (k, l, m) изменяются. В результате пересчета получим:

(k, l, m, 1) M_2 =(k, 0, d, 1). Второй поворот выполняется вокруг оси ординат на угол -ψ, определяемый соотношениями cosψ=d, sinψ= k. Матрица поворота в этом случае имеет вид:

$$M_3=\begin{pmatrix} d & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На третьем шаге выполняется поворот прямой L на заданный угол θ. Матрица поворота имеет следующий вид:

$$M_4=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На четвертом шаге выполняется обратный поворот вокруг оси ординат на угол ψ, вокруг оси абсцисс на угол -φ и обратный перенос на вектор (a, b, c). Перемножая матрицы преобразований в порядке выполнения операций, получим следующую итоговую матрицу преобразования:

$$M=M_1M_2M_3M_4M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}$$