5.2. Геометрические объекты, применяемые для формирования моделей

Описание внешних геометрических форм 3D объекта - сложный процесс. В нем просматриваются следующие *подходы* к решению этой проблемы:

-использование методов *точного аналитического описания* ограничивающих контуров или поверхностей в *полярной* или *декартовой прямоугольной системе координат*;

-использование *приближенных методов интерполяции и аппроксимации*. Кривые и поверхности, получаемые таким образом, называются *аналитически неописываемыми* геометрическими объектами.

Во втором случае чаще всего используется параметрическое представление поверхностей и кривых, так как, во-первых, параметрическое представление дает возможность изучать неявные функции, когда переход к их явному (аналитическому) заданию без посредства параметров затруднителен, и, во-вторых, удается выражать многозначные функции посредством однозначных.

Но в обоих случаях любая задача машинной графики (двух- или трехмерной) сводится к определению точек в двумерном пространстве с последующим выделением некоторым способом отдельных точек для попарного соединения их прямыми линиями или для заполнения областей, очерченных такими линиями. То есть, задача фактически сводится к тому, как определить и использовать эти точки при формировании геометрической модели.

5.2.1. Геометрические объекты, описываемые аналитически.

Точка. Из аналитической геометрии известно, что любая точка пространства задается тройкой чисел *(x, y, z)* или радиус–вектором.

В однородных координатах она может быть представлена *вектором* следующим образом: $[P]=[x \quad y \quad z \quad 1]$.

Точка как результат пересечения трех плоскостей. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2, .\\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (определитель системы),}$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1\\ h_2 & b_2 & c_2\\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1\\ a_2 & h_2 & c_2\\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1\\ a_2 & b_2 & h_2\\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы не равен нулю $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

То есть три плоскости пересекаются в одной точке.

Прямая в пространстве. Зададим на прямой *L* точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и приложенный к ней *направляющий* ненулевой *вектор v=(a, b, c)≠0,* ($\overrightarrow{M_0M_1}=v$)

(рис. 5.2.1.). Тогда произвольная точка *M(x, y, z)* будет лежать на заданной прямой только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и v коллинеарны, то есть когда существует такое число t, что

$$\overrightarrow{M_0M} = vt.$$

Если $\overrightarrow{OM_0} = r_0$ и $\overrightarrow{OM} = r$ - радиус-векторы точек M_0 и M (соответственно), то вектор $\overrightarrow{M_0M} = r - r_0$ можно записать в виде:

$$r - r_0 = tv,$$

где t –некоторое число (скаляр). Если действительная переменная t пробегает интервал $(-\infty, \ \infty)$, то конец вектора $r = r_0 + tv$ пробегает всю прямую L.

Полученное уравнение определяет прямую, а каждая точка прямой определяется значением переменной t. Эта переменная называется *параметром,* а уравнение называется *векторным уравнением прямой в параметрической форме.*

Его можно переписать в виде трех уравнений для каждой из координат точки на прямой, если a, b, c – координаты вектора v:

$$x = x_0 + ta,$$

$$y = y_0 + tb,$$

$$z = z_0 + tc.$$

Исключив параметр t, получим уравнение прямой в каноническом виде:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

где a, b, c одновременно не равны нулю.

Прямая, проходящая через две заданные и точки M_1 и M_0 с радиус-векторами $r_1, \ r_0$ имеет параметрическое уравнение вида

$$r = (r_1 - r_0)t + r_0 = (1 - t)r_0 + tr_1).$$

Если выразить координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ через координаты точек, то получим:

$$a = x_1 - x_0, \ \ b = y_1 - y_0, \ \ c = z_1 - z_0.$$

И тогда прямая может быть представлена уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Прямая, как линия пересечения двух плоскостей (рис.5.2.2.). Прямая, представляющая собой пересечение двух плоскостей задается системой двух уравнений, задающих эти плоскости. Плоскости пересекаются по прямой, если их нормали неколлинеарны. В векторной форме их уравнениями будут

$$n(r - r_0) = 0, \ \ n_1(r - r_1) = 0.$$

Направляющий вектор линии пересечения ортогонален нормалям пересекающихся плоскостей. В качестве его можно взять векторное произведение $n \times n_1$.

Поэтому, если r_0– радиус-вектор какой-нибудь общей точки плоскостей $\alpha, \ \alpha_1$, то прямую их пересечения можно задать параметрическим уравнением

$$r = (n \times n_1)t + r_0.$$

Плоскость. Как известно из аналитической геометрии любая плоскость общего положения, проходящая *через три различные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, описывается уравнениями первой степени:

$$\left\{\begin{array}{c} a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \\ a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \\ a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)+c(z_3-z_1)=0 \end{array}\right\}.$$

Здесь (x, y, z) – произвольная точка лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Это же уравнение может быть представлено и в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Если задать плоскость α двумя неколлинеарными векторами m и n, приложенными к некоторой точке A с радиус-вектором r_0, лежащей в этой плоскости, и выразить произвольную точку плоскости X через ее радиус-вектор r, то можно получить *параметрическое* уравнение плоскости (рис.5.2.3.):

$$r = r_0 + tm + sn.$$

Из этого уравнения положение любой точки X плоскости определяется заданием упорядоченной пары действительных чисел (t, s), причем каждой такой паре соответствует некоторая точка плоскости α. Например, точка A отвечает паре (0,0).

В *матричной форме* уравнение $ax + by + cz + d = 0$ произвольной плоскости в пространстве имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} [P]^T = 0,$$

где $[P]^T$ представляет собой плоскость.

Поэтому любой выпуклый многогранник можно представить в виде матрицы, состоящей из коэффициентов уравнений плоскостей

$$[V] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{bmatrix},$$

где каждый столбец содержит коэффициенты плоскости (грани).

Другие фигуры, ограниченные криволинейными поверхностями, или имеющие невыпуклые формы, можно привести к этому случаю путем аппроксимации или разбиением на выпуклые части.

Поверхности второго порядка. *Поверхность второго порядка* определяется общим уравнением второй степени (с тремя неизвестными (x,y,z):

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов *A, B, C, D, E, F* не равен нулю.

Или в матричном виде:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \; P \; \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T ,$$

где

$$P = \begin{bmatrix} A & D & F & G \\ D & B & E & H \\ F & E & C & J \\ G & H & J & K \end{bmatrix}.$$

В зависимости от значений коэффициентов этим уравнением могут быть описаны различные типы поверхностей второго порядка: *эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды,* и в их числе – поверхности вращения: *сфера, конус, цилиндр*. За исключением эллипсоида и сферы все поверхности второго порядка не замкнуты. Поэтому при образовании объемной модели эти поверхности следует ограничивать линиями или другими поверхностями.

Каждая поверхность второго порядка описывается своей системой уравнений. Приведем некоторые из них.

Эллипсоид, заданный каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a,b,c – полуоси эллипсоида, может быть также представлен параметрически в виде:

$$x = a \;\; \cos\theta \sin\varphi, \;\; 0 \le \theta \le 2\pi,$$
$$y = b \;\; \sin\theta \;\; \sin\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$z = c \;\; \cos\varphi,$$

где θ – долгота, φ – широта.

Нормаль к поверхности *эллипсоида* определяется по формуле:

$$N = i \;\; bc \;\; \cos\theta \;\; \cos\varphi + j \;\; ca \;\; \sin\theta \;\; \cos\varphi + k \;\; ab \;\; \sin\varphi,$$

где i, j, k – орты, направленные соответственно по осям Ox, Oy, Oz.

В случае, когда какие-нибудь две оси одинаковы, то эллипсоид будет являться поверхностью вращения. Например, при $a=b$ осью вращения будет Oz. Если $a=b=c$, то эллипсоид обращается в *сферу*.

Если по оси поверхности вращения направить ось Oz прямоугольной системы координат $Oxyz$, то *параметрические уравнения поверхности вращения* можно записать в следующем виде:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = u,$$

где $f(u)$ – функция, определяющая форму меридиана, а v – угол поворота плоскости меридиана.

Общее уравнение второй степени

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

представляет *сферу* только при следующих условиях:

$$A=B=C, \qquad D=0, \qquad E=0, F=0,$$
$$G^2+H^2+J^2-4AK>0.$$

При этих условиях

$$a=-\frac{G}{2A},\ \ b=-\frac{H}{2A},\ \ c=-\frac{J}{2A},\ \ R^2=\frac{G^2+H^2+J^2-4AK}{4A^2}.$$

Сфера радиуса R и с центром в начале координат описывается уравнением второй степени:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Если центр сферы не совпадает с началом, то сфера может быть представлена следующим уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

где *a, b, c* – координаты центра сферы в некоторой точке *C(a, b, c).*

Круговой конус (рис.5.2.4.) с вершиной в начале координат определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

В векторной форме уравнение кругового конуса имеет вид:

$$x\cdot a_0=|x|\ \cos\alpha,\ \ |\mathrm{a}_0|=1.$$

Уравнение *цилиндрической* (рис.5.2.5.) поверхности в векторной форме имеет вид:

$$|x|^2-(x\cdot a_0)^2=R^2,\ \ |a_0|=1,$$

где R – радиус цилиндра*;* x – радиус-вектор любой точки на боковой поверхности цилиндра; a_0 - единичный вектор в направлении оси вращения.

Поверхности вращения общего вида (рис.5.2.6.). Поверхность, которая получается путем вращения плоской кривой (образующей) вокруг оси, называется поверхностью вращения.

Поверхность вращения можно задать параметрическими уравнениями

$$x=f(u)\ \cos v,\ \ y=f(u)\ \sin v,\ \ z=u,$$

где *f(u)* – функция, определяющая форму образующей *C*, *v* – угол поворота.

Или в общем виде:

$$r(u,v)=r_0+ua_0+f(u)(\cos v\cdot e_1+\sin v\cdot e_2),$$

где a_0 – единичный вектор в направлении оси вращения, r_0 – радиус-вектор некоторой точки, лежащей на оси вращения.

Линейчатые поверхности (рис.5.2.7.). Поверхность, образуемая перемещением по определенному закону прямолинейной образующей по пространственной кривой (*направляющей*), называется линейчатой поверхностью.

Поверхность строится следующим образом. В каждой точке пространственной кривой *p(u)* (*направляющей*) задается непрерывная вектор-функция *g(u) (образующая*). Тогда линейчатая поверхность описывается уравнением

$$r(u,v)=p(u)+vg(u),$$

где *v* – параметр вдоль образующей. В частном случае, если *g(u)* – единичный вектор, то *v* приобретает смысл расстояния вдоль образующей.