1.Содержательная и математическая постановки задачи о назначениях. Венгерский метод решения задачи о назначениях.

В распоряжении работодателя находится n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения i-й работы j-м исполнителем составляет $c_{ij} \ge 0$ единиц. Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы каждый исполнитель выполнял ровно одну работу, а общая стоимость работ была минимальной.

Введём управляемые переменные: $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ работу выполняет } j \text{ исполнитель,} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ Тогда: Общая стоимость выполнения всех работ $f = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ii} x_{ii}$

Условие того, что j-й исполнитель выполняет одну работу $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$ Условие, что i-ю работу выполняет один исполнитель $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$

Матрица стоимостей C = (cij), где i, j = 1; n. Матрица назначений X = (xij), где i, j = 1; n. Математическая постановка задачи о назначениях:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2.Общая постановка задачи линейного программирования.

Стандартная форма задачи линейного программирования. Основные допущения, принимаемые при исследовании задачи линейного программирования в стандартной форме. Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме.

Общая математическая постановка ЗЛП:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i, \quad i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Говорят, что ЗЛП записана в *стандартной форме*, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \end{cases}$$

- 1) Ранг матрицы A равен рангу блочной матрицы: $\mathbf{rg} A = \mathbf{rg}(A|b)$. В соответствие с критерием Кронекера-Копелли, СЛАУ Ax = b совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Если это условие не выполнено, то СЛАУ, входящая в систему ограничений Ax = b, несовместна т.е. не имеет решений. В этом случае, множество допустимых решений ЗЛП пусто оптимизировать нечего. 2) $\mathbf{rg} A = m$ числу ограничений. Если $\mathbf{rg} A < m$, то некоторые ограничения являются линейными комбинациями остальных следовательно, их можно отбросить, не изменив множество допустимых решений. 3) Число переменных n > m. Если m = n, то существует ровно одно единственное решение системы Ax = b. Следовательно, ЗЛП имеет не более 1 допустимого решения, а задача оптимизации вырождена.
- 3. Определение выпуклого множества и крайней точки выпуклого множества. Понятие выпуклой комбинации точек q1, ..., qk ∈ R n. Свойства выпуклой комбинации.

Отрезком, соединяющим две точки $x,y\in\mathbb{R}^n$, называется следующее множество точек: $xy=\{t\in\mathbb{R}^n\colon t=\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda\in[0;1]\}$ $\lambda=0 \Rightarrow t(\lambda)=y$

$$\lambda = 1 \implies t(\lambda) = x$$

Множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ называется <u>выпуклым</u>, если вместе с любыми двумя своими точками x, y множество G целиком содержит соединяющий их отрезок. Т.е. $\forall \forall x, y \in G$ $xy \subseteq G$.

Точка $x \in G$ выпуклого множества G называется $\underline{\kappa pa \check{u} h e \check{u}}$ того множества G, если x не содержится cmporo внутри никакого отрезка, целиком лежащего в G.

Аффинной оболочкой (выпуклой комбинацией) точек q1, ..., q $k \in R$ называется множество

$$<$$
q1, ..., qk> = $\{t \in R^n : t = a1q1+...+anqn\}, a_i \ge 0, i = 1, n, \sum_{i=1}^n a_i = 1$

1) Аффинная оболочка точек q1, ..., qk является наименьшим (по включению) выпуклым множеством, содержащим эти точки.

$$\{\mathbf q_1,\dots,q_k\in G\}$$
и $(G$ выпукло $)=< q_1,\dots,q_k>\subseteq G$

- 2) Пусть
- $G \subseteq R^n$ выпукло, G ограничено, G имеет набор крайних точек q_1, \dots, q_k Тогда G является аффинной оболочкой своих крайних точек
- 4. Основные утверждения линейного программирования (формулировка). Доказать, что множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым.
- *) Основные утверждения линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в виде стандартной форме

$$\begin{cases} f = cx \to max \\ Ax = b \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Обозначим $G = \{x \in R : Ax = b, x \ge 0\}$ – множество допустимых решений этой задачи.

Основное утверждение линейного программирования:

- 1) G выпуклое множество
- 2) Если G не пусто, то оно содержит БДР ЗЛП

- 3) БДР ЗЛП являются крайними множества
- 4) Крайние множества G являются БДР ЗЛП.
- 5) Пусть функция f принимает максимальное значение в некоторой точке G, тогда f принимает его значение по крайней мере в одной крайней точке G
- 6) Если функция f принимает максимальное значение в точка q1, ..., то f принимает его значение в любой точке их выпуклой комбинации {q1, ...}
- *) Доказать, что множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым.

Выберем 2 точки x и y \in G. Если G выпуклое множество, то есть $\forall \mu \in [0;1] \ t = \mu x + (1-\mu)y, t \in G$. Покажем, что

$$At = A(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$$= \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay$$

$$\begin{vmatrix} Ax = b \\ Ay = b \end{vmatrix}$$

$$= \lambda b + (1 - \lambda)b$$

$$= b$$

Также покажем, что t удовлетворяет ограничению неотрицательности СЛАУ. $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$, $t_j = \lambda x_j + (1-\lambda)y_j$. $x_j, y_j \geq 0$, $\lambda \in (0;1)$. Следовательно, оба слагаемых ≥ 0 , а следовательно, $t_i \geq 0$.

- 5. Понятия базисного решения и базисного допустимого решения задачи линейного программирования. Вычисление базисного решения и отвечающего ему значения целевой функции в случае, когда базисными выбраны m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.
- *) Понятия базисного решения

Рассмотрим СЛАУ Ax = b из ЗЛП (1)в стандартной форме $\begin{cases} f = c^T x \to max, \\ Ax = b \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases}$ (rank(A) = rank(A|b) = m < n, где m, n – размеры матрицы A.

Базисное решение ЗЛП – частное решение СЛАУ Ax = b из системы ограничений этой ЗЛП, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных $x_{HB} = 0$, $x^0 = x|_{x_{HB} = 0} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$. Если базисное решение $x_B \ge 0$, то оно называется базисным допустимым решением ЗЛП.

*) Вычисление базисного решения и отвечающего ему значения целевой функции в случае, когда базисными выбраны m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.

Будем считать, что m первых столбцов матрицы A является линейно не зависимыми

$$A = [\underbrace{a_1, \dots, a_m}_{A_{\mathsf{B}}}, \underbrace{a_{m+1}, a_n}_{A_{\mathsf{H}\mathsf{B}}}],$$

Так как m первых столбцов ЛНЗ, их можно выбрать в качестве базисных. Обозначим

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \dots a_m}_{A_{\mathbb{B}}} \underbrace{a_{m+1} \dots a_n}_{A_{\mathbb{H}\mathbb{B}}} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} X_{\mathbb{B}}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} C_{\mathbb{B}}$$

С учётом этих обозначений СЛАУ Ax = b из задача (1) может быть написана в виде $Ax = b \iff A_{B}X_{B} + A_{HB}X_{HB} = b$

Так как $A_{\rm B}$ квадратная матрица, столбцы ЛНЗ, то det $(A_{\rm B})! = 0 \Longrightarrow \exists A_{\rm B}^{-1}$

$$x_{\rm B} = A_{\rm B}^{-1}b - A_{\rm B}^{-1}A_{\rm HB}x_{\rm HB}$$
 (2)

Общее решение СЛАУ из задачи (1) можно записать в виде

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\rm B} \\ \mathbf{x}_{\rm HB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\rm B}^{-1}b - \mathbf{A}_{\rm B}^{-1}A_{\rm HB}\mathbf{x}_{\rm HB} \\ \mathbf{x}_{\rm HB} \end{bmatrix}$$
$$f = C_{\rm B}^T\mathbf{x}_{\rm B} + C_{\rm HB}^T\mathbf{x}_{\rm HB} = C_{\rm B}^T\mathbf{A}_{\rm B}^{-1}b - C_{\rm B}^T\mathbf{A}_{\rm B}^{-1}A_{\rm HB}\mathbf{x}_{\rm HB} + C_{\rm HB}^T\mathbf{x}_{\rm HB}$$

6. Понятия базисного решения и базисного допустимого решения задачи линейного программирования. Каноническая форма задачи линейного программирования в случае, когда базисными являются т первых столбцов матрицы А системы ограничений задачи

*) Понятия базисного решения

Рассмотрим СЛАУ Ax = b из ЗЛП в стандартной форме $\begin{cases} f = c^T x \to max, \\ Ax = b \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases}$ (rank(A) = rank(A|b) = m < n, где m, n — размеры матрицы A.

Базисное решение ЗЛП – частное решение СЛАУ Ax = b из системы ограничений этой ЗЛП, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных $x_{HB} = 0$, $x^0 = x|_{xH6=0} = [{A_B^{-1}b \atop 0}]$. Если базисное решение $x_B \ge 0$, то оно называется базисным допустимым решением ЗЛП.

*) Каноническая форма задачи линейного программирования в случае, когда базисными являются m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи

Будем считать, что известно некоторое БДР, которое отвечает т первым столбцам матрицы А. Обозначим:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \dots a_m}_{A_{\text{B}}} \underbrace{a_{m+1} \dots a_n}_{A_{\text{HB}}} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} X_{\text{B}}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} C_{\text{B}}$$

$$Ax = b \iff A_{\text{C}} X_{\text{F}} + A_{\text{MC}} X_{\text{MC}} = b$$

Выразим базисные переменные через небазисные: $X_{\rm B} = A_{\rm B}^{-1}b - A_{\rm B}^{-1}A_{\rm HB}X_{\rm HB}$. Тогда значение функции f

$$f = C_{\rm B}^T X_{\rm B} + C_{\rm HB}^T X_{\rm HB}$$
|подставляя $X_{\rm B}$ |
$$= C_{\rm B}^T A_{\rm B}^{-1} b - C_{\rm B}^T A_{\rm B}^{-1} A_{\rm HB} X_{\rm HB} + C_{\rm HB}^T X_{\rm HB}$$

$$= \underbrace{C_{\rm B}^T A_{\rm B}^{-1} b}_{f_0} + \underbrace{\left(C_{\rm HB}^T - C_{\rm B}^T A_{\rm B}^{-1} A_{\rm HB}\right)}_{[d_{m+1}, \dots, d_n]} X_{\rm HB}$$

Тогда мы можем представить ЗЛП в следующем виде:

$$\begin{cases} f = f_0 + d_{m+1}x_{m+1} + \dots + d_nx_n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} - x_{m+1}t_{m+1}^{\downarrow} - \dots - x_nt_n^{\downarrow}, & \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = A_{\mathbb{B}}^{-1}b \\ \vdots \\ x_i \ge 0, & i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} t_{m+1}^{\downarrow}, \dots, t_n^{\downarrow} \end{bmatrix} = A_{\mathbb{B}}^{-1}A_{\mathbb{H}\mathbb{B}}$$

Данную систему называют канонической формой ЗЛП, отвечающей выбранному базису. В ней базисные переменные выражены через небазисные, а выражение для целевой функции содержит только небазисные переменные.

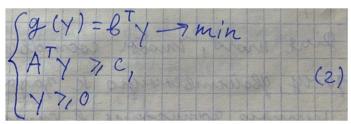
- 7. Определение стандартной формы прямой задачи линейного программирования. Понятие двойственной задачи. Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме прямой задачи.
- *) Определение стандартной формы прямой ЗЛП

Говорят, что ЗЛП записана в стандартной форме прямой задачи, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = c^{T} \times \rightarrow max \\ A \times \leq \theta, \\ \times 7, 0. \end{cases}$$
 (1)

*) Понятие двойственной задачи:

Задачей, двойственной к задаче (1), называется задача:



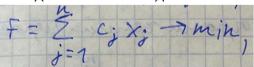
При этом (2) называется стандартной формой двойственной задачи.

*) Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме прямой задачи.

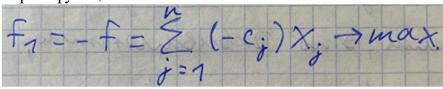
Любая ЗЛП может быть приведена к эквивалентной задаче, записанной в стандартной форме прямой задачи.

Доказательство

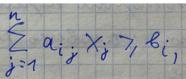
1) Если исходная задача является задачей минимизации, т. е.



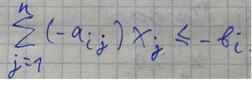
то рассмотрим функцию



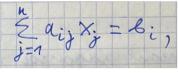
2) Если некоторое ограничение является неравенством вида «≥», то есть имеет вид



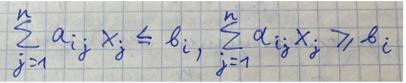
то умножив обе его части на (-1), перейдем к эквивалентному неравенству:



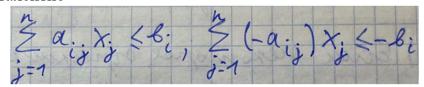
3) Если некоторое ограничение имеет вид равенства, т. е. имеет вид



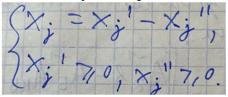
то заменим его парней эквивалентных ограничений неравенств



или эквивалентно

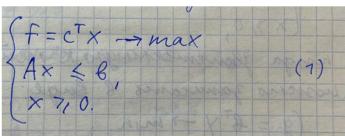


- 4) Если некоторая переменная x_i подчинена условию неположительности, т. е. $x_i \leq 0$, то заменим её на переменную x_i '=- x_i . Тогда x_i ' ≥ 0 .
- 5) Если некоторая переменная x_i не ограничена в знаке, то представим её в виде разности двух неотрицательных переменных.

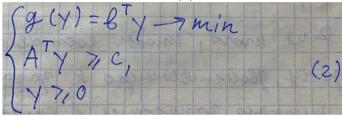


- 8. Понятие двойственной задачи. Сформулировать основные соотношения двойственности. Доказать, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.
- *) Понятие двойственной задачи:

Говорят, что ЗЛП записана в стандартной форме прямой задачи, если она имеет вид:



Задачей, двойственной к задаче (1), называется задача:



При этом (2) называется стандартной формой двойственной задачи.

- *) Основные соотношения двойственности.
- 1) Задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.
- 2) Пусть: x^0 допустимое решение прямой задачи. y^0 допустимое решение двойственной задачи. Тогда $f(x^0) \leq g(y^0)$.
- 3) Пусть: x^0 допустимое решение прямой задачи.

$$y^0$$
 – допустимое решение двойственной задачи.

$$f(x^0) = g(y^0)$$

Тогда x^0 – орт решение прямой задачи.

 y^0 – орт решение двойственной задачи.

- 4) Пусть прямая задача имеет конечное оптимальное решение x^0 , тогда
 - +) двойственная задача имеет конечное оптимальное решение y^0 ;

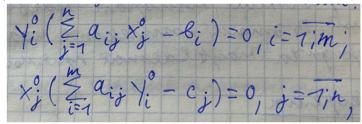
+)
$$f(x^0) = g(y^0)$$

5) Условие дополняющей нежёсткости

Пусть
$$\mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}_1, \, \mathbf{x}_2, \, ..., \, \mathbf{x}_n)$$
 - орт решение прямой задачи.

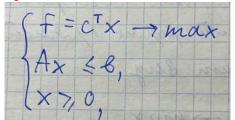
$$y^0 = (y_1, y_2, ..., y_n)$$
 - орт решение двойственной задачи.

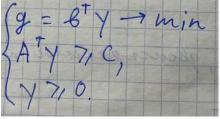
Тогда справедливы соотношения



называемые условиями дополняющей нежесткости

*) Доказать, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

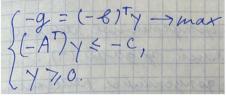




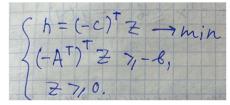
Прямая задача

Двойственная

Задача (**) в стандартной форме прямой задачи:



Задача, двойственная к полученной, принимает вид



И эквивалентна задаче

$$\begin{cases} -h = c^T Z \rightarrow max \\ A Z \leq 6, \\ Z 7/0, \end{cases}$$

После переобозначения z -> x, задача совпадает с прямой задачей (*)

*) Доказать неравенство для значений целевых функций прямой и двойственной задач и следствие из него.

Прямая задача Двойственная
$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Т.к. x_0 – допустимое решение, то $Ax_0 \le b$.

Умножим обе части неравенства слева на $(y^0)^T$, причем этот вектор неотрицателен.

$$(y^0)^T A x^0 \le (y^0)^T b$$

Если мы транспонируем обе части, то получим $((y^0)^T A x^0)^T \le ((y^0)^T b)^T$

Т.к. транспонирование произведения матриц есть произведение транспонированных в обратном порядке, то $\Rightarrow (x^0)^T A^T y^0 \le b^T y^0$ (*)

 y_0 — допустимое решение двойственной задачи, следовательно $A^Ty^0 \ge c$ В этом неравенстве умножим обе части слева на $(x^0)^T \ge 0$: $(x^0)^T A^T y^0 \ge (x^0)^T c$ (**) Наконец, из * и ** получаем: $(x^0)^T c \le (x^0)^T A^T y^0 \le b^T y^0$ $\Rightarrow \underbrace{(x^0)^T c}_{=f(x^0)} \le \underbrace{b^T y^0}_{=g(y^0)}$

T.e.,
$$f(x0) \le g(y0)$$

<u>Следствие</u>: если целевая функция прямой задачи не ограничена сверху на множестве допустимых решений, то двойственная задача существует, но не имеет допустимых решений.