(8) Понятие двойственной задачи. Сформулировать основные соотношения двойственности. Доказать, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

Опр. (V) из №7.

Говорят, что ЗлП записана в стандартной форме прямой задачи, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Опр. Задачей, двойственной к задаче (1), наз. задача:

$$\begin{cases} g(y) = b^T y \to \min \\ A^T y \geq c, \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

При этом (2) назыв. стандартной формой двойственной задачи.

Основные соотношения двойствен.:

Теорема 1

Задача, двойственная к двойствен., эквивалентна прямой задаче.

Док-во

1) Пусть прямая задача имеет вид

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

тогда двойственную к ней задачу можно записать в виде:

$$\begin{cases} g = b^T y \to \min \\ A^T y \geq c, \\ y \geq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

2) Для того, чтобы составить задачу, двойственную к задаче (*), её нужно записать в стандартной форме прямой задачи:

$$\begin{cases} -g = (-b)^T y \to \max \\ (-A^T) y \leq -c, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Задача, двойственная к полученной, принимает вид

$$\begin{cases} h = (-c)^T z \to \min \\ (-A^T)^T z \geq -b, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

и эквивалентна задаче

$$\begin{cases} -h = c^T z \to \max \\ A z \leq b, \\ z \geq 0, \end{cases}$$

которая после переобозначения $z \longleftrightarrow x$ совпадает с прямой задачей (1).

Теорема 2

Пусть: 1) X – допустимое решение прямой задачи (1)

2) Y – допустимое решение двойственной задачи (2),

тогда

$$f(x) = c^T x \leq b^T Y = g(Y).$$

Теорема 3

Пусть: 1) x^0 – доп. решение прямой задачи;

2) Y^0 – доп. решение двойственной задачи;

3) $f(x^0) = g(Y^0)$,

тогда:

1) x^0 – opt решение прямой задачи

2) Y^0 – opt решение двойственной задачи

Теорема 4

Пусть прямая задача имеет конечное оптимальное решение x^0, тогда:

1) двойственная задача имеет конечное opt решение y^0;
2) $f(x^0) = g(y^0)$.

Теорема 5 (условия дополняющей нежёсткости)

Пусть:

1) $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ – opt решение прямой задачи;
2) $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T$ – opt решение двойствен. задачи,

тогда справедливы соотношения:

$$y_i^0 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m};$$

$$x_j^0 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

называемые условиями дополняющей нежёсткости.

(7) Определение стандартной формы прямой задачи линейного программирования. Понятие двойственной задачи. Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартн. форме прямой задачи.

см. №8.

(V) Каждой задаче линейного програм. ставится в соответствие некоторая другая задача линейного программирования, которая назыв. двойственной. В этом контексте исходная задача называется прямой задачей.

<u>Теорема</u>

Любая ЗЛП может быть приведена к эквивалентной задаче, записанной в станд. форме прямой задачи.

Док-во

1) Если исходная задача является задачей минимизации, т.е.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min,$$

то рассмотрим функцию

$$f_1 = -f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \to max.$$

2) Если некоторое ограничение явл. неравенством вид „$\geq$", то есть имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,$$

то умножив обе его части на (-1), перейдём к эквивалентному нерав.:

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i.$$

3) Если некоторое ограничение имеет вид равенства, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

то заменим его парой эквивалентных ограничений-неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

или, это эквивалентно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i.$$

4) Если некоторая переменная x_j подчинена условию неположительности, т.е

$$x_j \leq 0,$$

то заменим её на переменную $x_j' = -x_j$. Тогда

$$x_j' \geq 0.$$

5) Если некоторая переменная x_j не ограничена в знаке, то представим её в виде разности двух неотриц. переменных:

$$\begin{cases} x_j = x_j' - x_j'', \\ x_j' \geq 0, \; x_j'' \geq 0. \end{cases}$$

⑥ Понятие базисного решения и базисного допустимого решения задачи линейного программирования. Каноническая форма задачи линейного программирования в случае, когда базисными являются m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.

Опр. Базисным решением СЛАУ $Ax = b$ наз. то её частное решение, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных:

$$X^0 = X\Big|_{X_{НБ}=0} = \begin{bmatrix} A_Б^{-1}b - A_Б^{-1}A_{НБ}X_{НБ} \\ X_{НБ} \end{bmatrix}\Bigg|_{X_{НБ}=0} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_Б^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Опр. Базисное решение СЛАУ $Ax = b$, удовлетворяющее условию $X \geq 0$, наз. базисным допустимым решением ЗЛП.

Рассм. ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $b \geq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = m < n$,
где m, n — размеры м-цы A.

Будем предполагать, что текущий базис состоит из переменных $x_1, \dots, x_m$, причём соотв. базисное решение допустимо.

Введём след. обозначения:

$$A = \left[\underbrace{\boxed{a_1 \dots a_m}}_{A_Б} \; \underbrace{\boxed{a_{m+1} \dots a_n}}_{A_{НБ}} \right]$$

$$x = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_Б \\ x_{НБ} \end{matrix} \qquad c = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{matrix} c_Б \\ c_{НБ} \end{matrix}$$

С учётом этих обозначений задачу (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} f = c_Б^T x_Б + c_{НБ}^T x_{НБ} \to max \\ A_Б x_Б + A_{НБ} x_{НБ} = b \\ x_Б \geq 0, \; x_{НБ} \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_Б = A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ}$$

$$f = c_Б^T (A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ}) + c_{НБ}^T x_{НБ} =$$

$$= \underbrace{c_Б^T A_Б^{-1} b}_{f_0} + \underbrace{(c_{НБ}^T - c_Б^T A_Б^{-1} A_{НБ})}_{d^T = (d_{m+1}, \dots, d_n)} x_{НБ}$$

Введём ещё несколько обозначений:

$$f_0 = c_Б^T A_Б^{-1} b,$$

$$d^T = (c_{НБ}^T - c_Б^T A_Б^{-1} A_{НБ})$$

$$A_Б^{-1} b = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} A_{НБ} = \begin{bmatrix} \beta_{1,m+1} & \dots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m,m+1} & \dots & \beta_{m,n} \end{bmatrix}$$

С учётом этих обозначений задачу (2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} f = f_0 + d_{m+1} x_{m+1} + \dots + d_n x_n \to \max \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{1,m+1} \\ \vdots \\ \beta_{m,m+1} \end{bmatrix} x_{m+1} - \dots - \begin{bmatrix} \beta_{1,n} \\ \vdots \\ \beta_{m,n} \end{bmatrix} x_n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Опр. Задача (3) называется канонической формой ЗЛП, отвечающей текущему базису.

---

(5) Понятие базисного решения и баз. допустимого решения задачи линейн. программирования. Вычисление базисного решения и отвечающего ему значения целевой функции в случае, когда базисными выбраны m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.

см. №6.

Рассм. ЗЛП в станд. форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $b \geq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = m < n$, где m, n — соотв. число строк и столбцов матрицы A.

Будем считать, что m первых столбцов матрицы A явл. ЛНЗ:

$$A = \left[\underbrace{\boxed{a_1 \dots a_m}}_{A_Б} \; \underbrace{\boxed{a_{m+1} \dots a_n}}_{A_{НБ}} \right]$$

Т.к. m первых столбцов ЛНЗ, их можно выбрать в качестве базисных. Введём обозначения:

$$A_Б = [a_1 \dots a_m], \quad A_{НБ} = [a_{m+1} \dots a_n],$$

$$x_Б = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad x_{НБ} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

С учётом этих обозначений СЛАУ $Ax = b$ из задачи (1) м.б. записана в виде

$$A_Б x_Б + A_{НБ} x_{НБ} = b$$

Т.к. $A_Б$ - квадратная матр., столбцы кот. ЛНЗ, то $\det A_Б \neq 0 \Rightarrow \exists A_Б^{-1}$.

$$x_Б = A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ}. \qquad (2)$$

Общее решение СЛАУ из задачи (1) можно записать в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_Б \\ x_{НБ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ} \\ x_{НБ} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

---

(4) Основные утверждения линейного программирования. Доказать, что множество допустимых решений задачи линейного программирования явл. выпуклым.

Основные утверждения линейного программирования.

Рассмотрим ЗЛП в станд. форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $b \geq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = m < n$,
где m, n — размеры матрицы A.

Будем использовать обозначение

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

для мн-ва допустимых решений рассматриваемой задачи.

<u>Теорема 1</u>

G — выпукло.

<u>Док-во</u>:

1) В соответствии с определением выпуклого мн-ва достаточно доказать, что если $\{x, y \in G\}$, то

$$\left\{\begin{array}{l}\text{любая точка } t = \lambda x + (1-\lambda) y, \\ \text{где } \lambda \in [0,1], \text{ принадл. } G\end{array}\right\}$$

2) Пусть $t = \lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in [0,1]$.

Тогда:

а) $At = A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x \in G \Rightarrow Ax = b, \\ y \in G \Rightarrow Ay = b \end{array} \right\} = \lambda b + (1-\lambda) b = b,$$

т.е. t удовл. СЛАУ $Ax = b$.

б) Пусть t_j, x_j, y_j — j-е компоненты векторов t, x, y соответственно.

Тогда

$$t_j = \overset{\geq 0}{\lambda}\,\overset{\geq 0}{x_j} + \overset{\geq 0}{(1-\lambda)}\,\overset{\geq 0}{y_j} \Rightarrow t_j \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \geq 0 \text{ и } 1-\lambda \geq 0; \\ x, y \in G \Rightarrow x_j, y_j \geq 0 \end{array} \right\}$$

т.о. $t \geq 0$

3) а), б) $\Rightarrow t \in G$

Теорема 2

Если $G \neq \varnothing$, то G сод-т БДР.

Теорема 3

Любое БДР ЗЛП (1) явл. крайней точкой мн-ва G

Теорема 4

Любая крайняя точка мн-ва G допустим. решений задачи (1) явл. БДР этой задачи.

Теорема 5

1) Если f принимает некот. значение f_0 в точках $q_1, \dots, q_k \in G$, то f принимает это значение во всех точках аффин. оболочки $\langle q_1, \dots, q_k \rangle$.

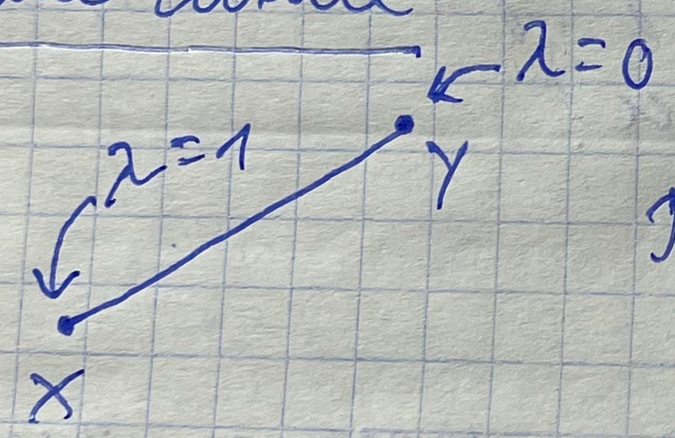
2) Если f принимает максим. значение в некот. точке мн-ва G, то f принимает это значение хотя бы в одной крайней точке мн-ва G.

③ Определение выпуклого множества и крайней точки выпуклого множества. Понятие выпуклой комбинации точек $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$. Свойства выпуклой комбинац.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$.

<u>Опр.</u>: Отрезком xy наз. мн-во точек $t \in \mathbb{R}^n$, которые можно представить в виде $t = \lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in [0, 1]$

<u>Замечание</u>



При $\lambda = 0$ $t(\lambda) = y$,
$\lambda = 1$ $t(\lambda) = x$.

<u>Опр.</u>

Мн-во $G \subseteq \mathbb{R}^n$ наз. выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками G целиком содержит соединяющий их отрезок, т.е.

$$(\forall\forall x, y \in G)(xy \subseteq G).$$

Опр. Точка $z \in G$ выпуклого мн-ва G наз. крайней, если она не явл. внутренней точкой никакого отрезка, целиком лежащего в G.

Опр.

Аффинной оболочкой (выпуклой комбинацией) точек $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$ наз. мн-во

$$\langle q_1, \dots, q_k \rangle = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : t = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \text{ где } \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Теорема 1

Аффинная оболочка точек $q_1, \dots, q_k$ явл. наименьшим (по включению) выпуклым множеством, содержащим эти точки, т.е.

$$(q_1, \dots, q_k \in G) \wedge (G\text{-выпукло}) \Rightarrow \langle q_1, \dots, q_k \rangle \subseteq G.$$

Теорема 2

Пусть 1) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпукло,

2) G ограничено,

3) G имеет конечный набор крайних точек $q_1, \dots, q_k$,

тогда: G явл. аффинной оболочкой своих крайних точек, т.е.

$$G = \langle q_1, \dots, q_k \rangle.$$

---

② Общая постановка задачи линейного програм. Стандартная форма задачи лин. програм. Основные допущения, принят. при исследовании задачи линейного программирования в стандартной форме. Показать, что любая задача линейн. програм. может быть приведена к стандартной форме.

Опр.

Говорят, что ЗЛП записана в общ. форме, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i, \; i = \overline{1;m} \end{cases}$$

Опр.

Говорят, что ЗЛП записана в станд. форме, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, \; i = \overline{1;m} \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

где $b_i \ge 0, \; i = \overline{1,m}$

Введём обозначч:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

С учётом этих обозначч. ЗЛП в станд. форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to \max \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где $b \geq 0$

Замеч.

В дальнейшем всегда будем предполагать:

1) $rg\,A = rg(A|b)$

2) $rg\,A = m$ (m - число огранич., т.е. число строк матр. A)

3) $m < n$ (m - число огранич., n - число переменных)

Теорема

Для любой ЗЛП можно записать эквив. ей ЗЛП в станд. форме.

Док-во

1) Если

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

то рассмотрим:

$$f_1 = -f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \to \max$$

2) Если некоторое ограничение имеет вид равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

где $b_i < 0$, то рассм. эквив. ограничч.:

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j = -b_i$$

3) Если некоторое ограничч. имеет вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b,$$

то введём дополн. перем. $x_{n+1} \geq 0$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i, \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

4) Если некотор. ограничч. имеет вид неравв.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,$$

то рассм. дополн. перем. $x_{n+1} \geq 0$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i, \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

5) Если некотор. перем. x_j подчинена услов. неположит., т.е. $x_j \leq 0$, то введём новую переменную:

$$x_j' = -x_j \geq 0$$

6) Если некотор. перем. x_j не огран. в знаке, то представим её в виде разности неотр. перем.:

$$\begin{cases} x_j = x_j' - x_j'' \\ x_j', x_j'' \geq 0 \end{cases}$$

---

(7) Содержат. и матем. постановки задачи о назначениях. Венгерский метод решения задач о назнач.

см. теорию к лаб. работе № 1.

1 Теоретическая часть

Цель работы: изучение венгерского метода решения задачи о назначениях.

Задание:

1. Реализовать венгерский метод решения задачи о назначениях в виде программы на ЭВМ.

2. Провести решение задачи с матрицей стоимостей, заданной в индивидуальном варианте, рассмотрев два случая:

   — задача о назначениях является задачей минимизации,

   — задача о назначениях является задачей максимизации.

1.1 Содержательная и математическая постановки задачи о назаначениях

Содержательная постановка: имеется n работ и n испытателей; стоимость выполнения i-ой работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geqslant 0$ единиц. Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы

— каждый исполнитель выполнял 1 работу;

— каждую работу выполнял только 1 исполнитель;

— общая стоимость выполнения всех работ была min.

Введем управляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ую работу выполняет } j\text{-ый работник,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$
$$i, j = \overline{1; n}. \tag{1.1}$$

Из переменных x_{ij}, $i, j = \overline{1; n}$, составим

$$X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1;n}}, \tag{1.2}$$

которую назовем матрицей назначений.

Стоимости выполнения работ также записываем в матрицу

$$C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1;n}}, \tag{1.3}$$

называемой матрицей стоимостей.

Тогда:

1. Стоимость выполнения работ:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{1.4}$$

2. Условие того, что i-ую работу выполнит один работник:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1;n}. \tag{1.5}$$

3. Условие того, что j-ый работник выполнит одну работу:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1;n}. \tag{1.6}$$

Таким образом приходим к **математической постановке**:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1;n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1;n}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\},\ i, j = \overline{1;n}. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2 Исходные данные конкретного варианта

Вариант **9**:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 8 & 3 & 8 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

1.3 Краткое описание венгерского метода

Схема венгерского метода решения задачи о назначениях представлена на рисунках 1.1–1.2.

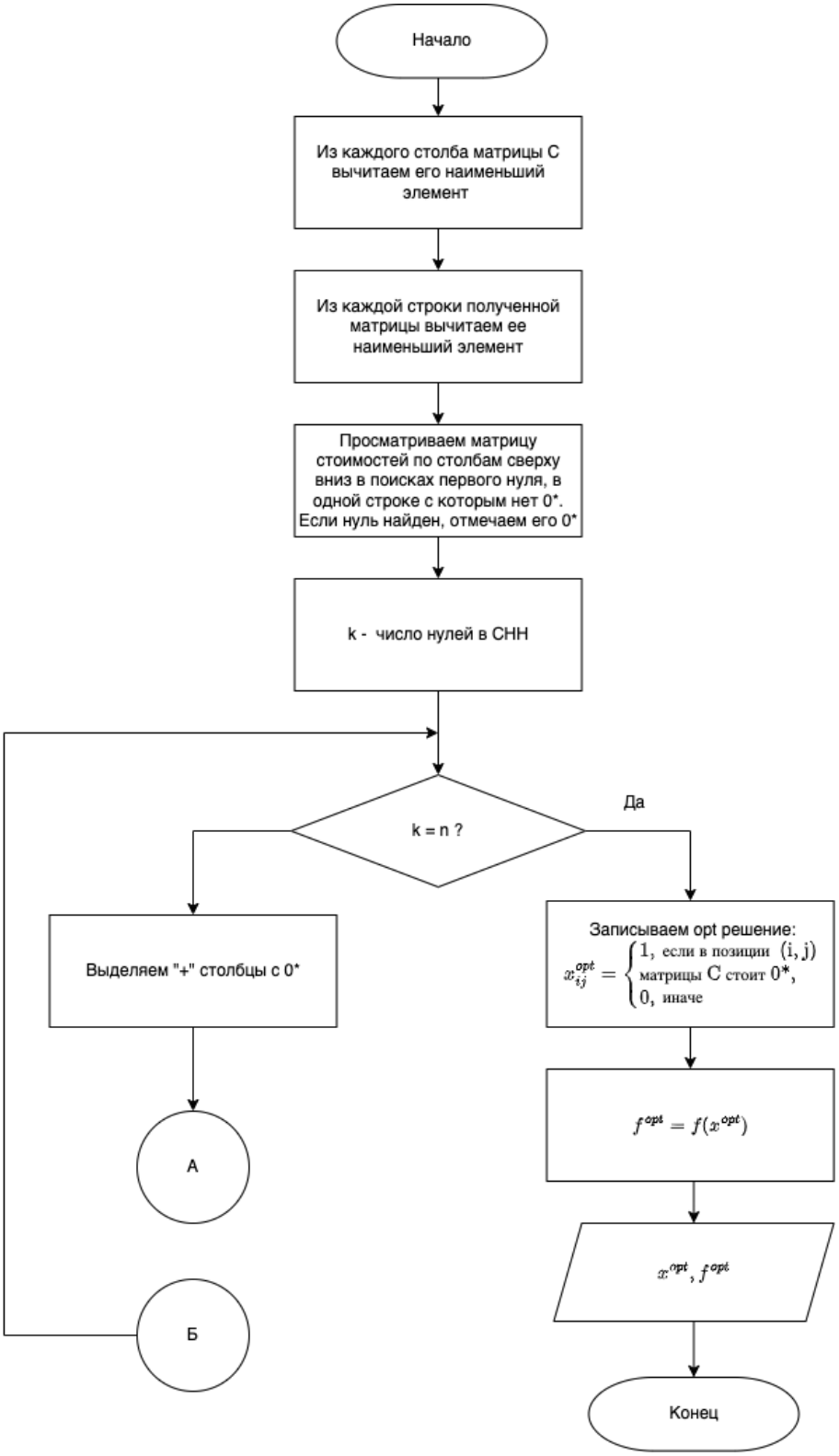


Рисунок 1.1 – Схема венгерского метода решения задачи о назначениях (часть 1)

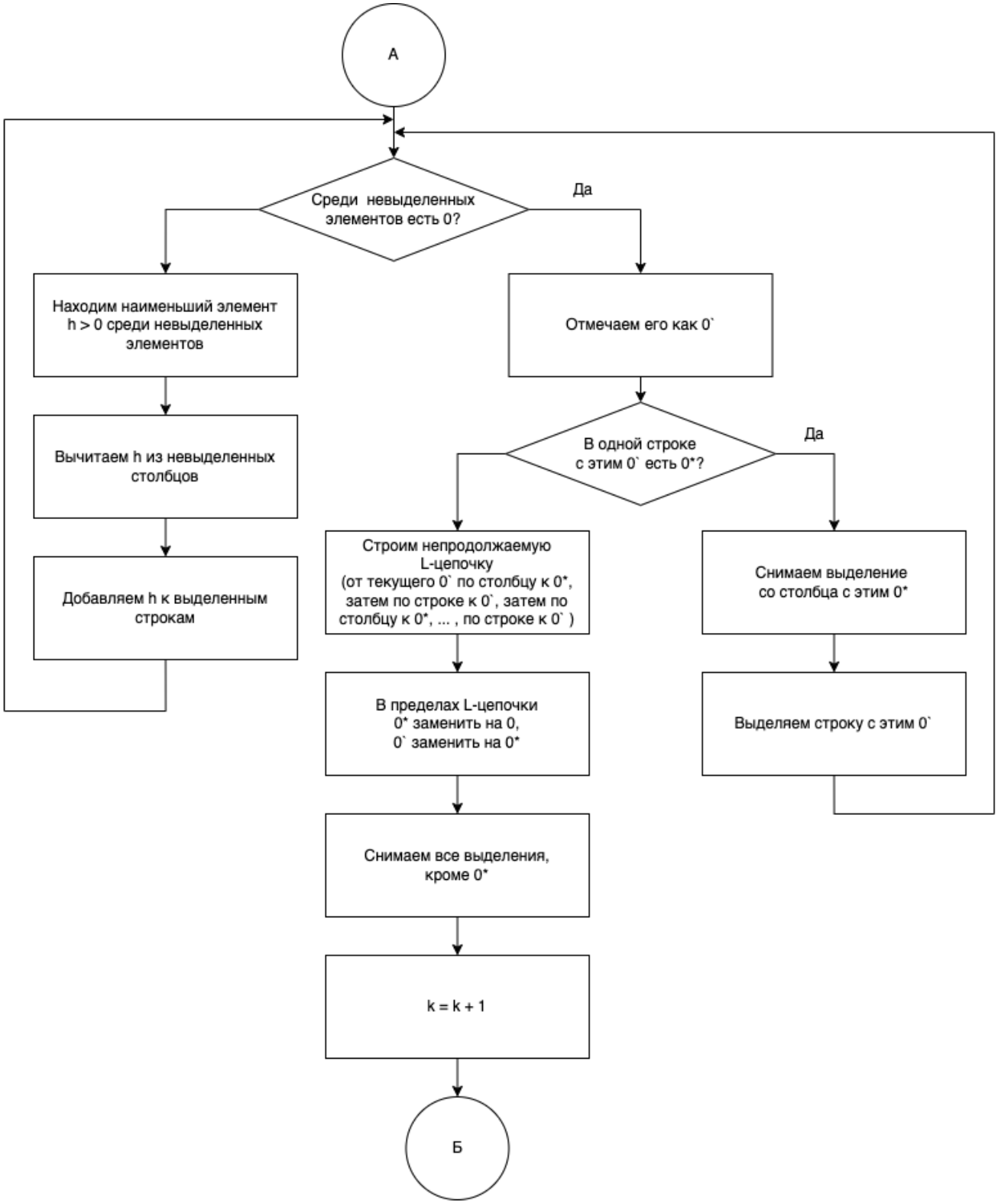


Рисунок 1.2 – Схема венгерского метода решения задачи о назначениях (часть 2)