Методы вычислений

ДЗ

Коваленко Кирилл

ИУ7-12М

Вариант 9.

№1.

Составить двойственную задачу и решить её графически.

$$\begin{cases} x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max \\ x_1 - 4x_2 + 1{,}5x_4 \leq -1 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 \geq -4 \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1;4} \end{cases}$$

Приведём эту задачу к стандартной форме прямой задачи:

$$\begin{cases} f = x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max & \\ x_1 - 4x_2 + 1{,}5x_4 \leq -1 & (y_1) \\ -2x_1 - x_3 + 3x_4 \leq 4 & (y_2) \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1;4} & \end{cases} \quad (*)$$

Задача, двойственная к задаче (*):

$$\begin{cases} g = -y_1 + 4y_2 \to \min \\ y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ -4y_1 \geq -16 \\ -y_2 \geq -4 \\ 1{,}5\,y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1;2} \end{cases}$$

(1) $y_1 - 2y_2 = 1$

(2) $-4y_1 = -16$

$y_1 = 4$

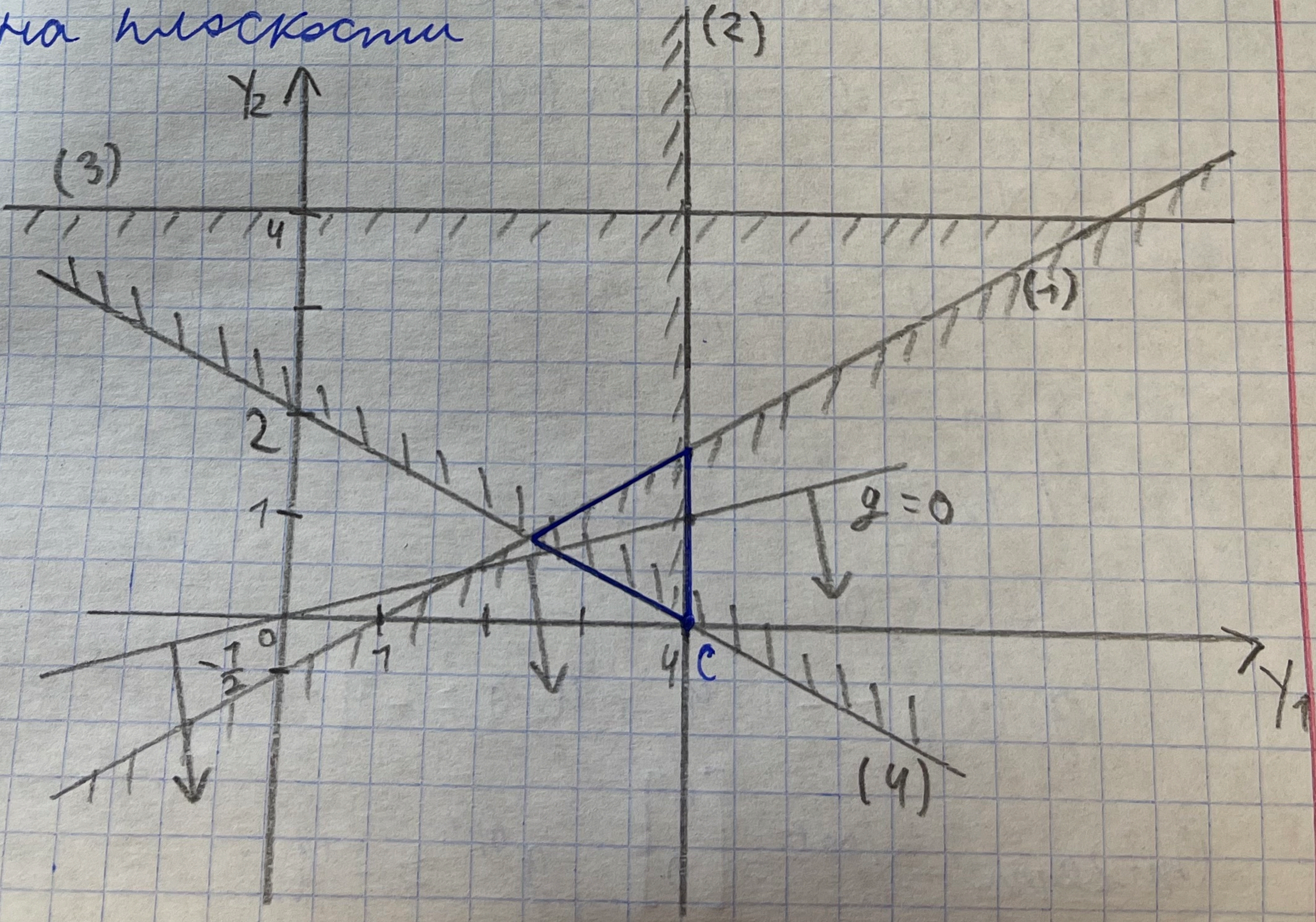
(3) $-y_2 = -4$

$y_2 = 4$

(4) $1{,}5\,y_1 + 3y_2 = 6$

$\frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{2} = 1$

Изобразим множество доп. решений на плоскости



Изобразим линию уровня целевой функции.

Для $g = 0$

$$-y_1 + 4y_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{4} y_1$$

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial y_1}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\vec{j} = -1 \cdot \vec{i} + 4\vec{j}$$

Перемещаем линию уровня $\parallel$-но себе в направлении против grad g, т.к. $g \to \min$.

В нашем примере

$$y^{opt} = C = (2) \cap (4)$$

$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ 1{,}5\,y_1 + 3y_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$C(4, 0)$$

$$g(C) = -1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = -4$$

Ответ: $y^{opt} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g^{opt} = -4$.

№2.

Решить исходную задачу с использов. симплекс-таблицу.

$$\begin{cases} x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max \\ x_1 - 4x_2 + 1{,}5x_4 \le -1 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 \geqslant -4 \\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1;4} \end{cases}$$

Приведём ЗЛП к стандартной форме

$$\begin{cases} f = x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max \\ -x_1 + 4x_2 - 1{,}5x_4 \geqslant 1 \\ -2x_1 - x_3 + 3x_4 \le 4 \\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1;4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max \\ -x_1 + 4x_2 - 1{,}5x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_3 + 3x_4 + x_6 = 4 \\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1;6} \end{cases}$$

Добавим искусственную переменную в первом ограничении. Поэтому вспомогательная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} \omega = -y_1 \to \max \\ -x_1 + 4x_2 - 1{,}5x_4 - x_5 + y_1 = 1 \\ -2x_1 - x_3 + 3x_4 + x_6 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1;6} \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Начальный базис будет состоять из переменных y_1, x_6.

Выразим ω через небаз. перемен.:

$$y_1 = 1 + x_1 - 4x_2 + 1{,}5x_4 + x_5$$

$$\omega = -y_1 = -1 - x_1 + 4x_2 - 1{,}5x_4 - x_5$$

Итер.	Баз.	Знач.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	
1	y_1	1	−1	$\boxed{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	1/4, y_1 из баз.
	x_6	4	−2	0	−1	3	0	1	0	
	−f	0	1	−16	−4	6	0	0	0	
	−ω	1	−1	4	0	$-\frac{3}{2}$	−1	0	0	x_2 в баз.
2	x_2	1/4	$-\frac{1}{4}$	1	0	−3/8	−1/4	0	1/4	
	x_6	4	−2	0	−1	3	0	1	0	
	−f	4	−3	0	−4	0	−4	0	4	f^{opt}
	−ω	0	0	0	0	0	0	0	−1	ω^{opt}

Вспомогательная и основная задачи решились за одну итерацию.

Ответ: $x^{opt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f^{opt} = -4.$

№3

Решить двойственную задачу с использованием симплекс-таблицы.

$$\begin{cases} x_1 - 16x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to max \\ x_1 - 4x_2 + 1{,}5x_4 \leq -1 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 \geq -4 \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1;4} \end{cases}$$

Двойственная задача из 1 номера:

$$\begin{cases} g = -y_1 + 4y_2 \to min \\ y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ -y_1 \geq -4 \\ -y_2 \geq -4 \\ 1{,}5y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ y_i \geq 0, \; i = \overline{1;2} \end{cases}$$

Приведём эту задачу к станд. форме ЗЛП, одновременно сформулировав вспомогательную задачу для построения начальн. БДП.

$$\begin{cases} g_1 = -g = y_1 - 4y_2 \to max \\ y_1 - 2y_2 - y_3 + z_1 = 1 \\ y_1 + y_4 = 4 \\ y_2 + y_5 = 4 \\ 1{,}5y_1 + 3y_2 - y_6 + z_2 = 6 \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1;6} \\ z_j \geq 0,\ j = \overline{1;2} \end{cases}$$

начальн. базис будет состоять из z_1, z_2, y_4, y_5.

Целевая функция вспомогательной задачи:

$$\omega = -z_1 - z_2 = \left\{\begin{array}{l} \text{из 1-ого} \\ \text{и 4-ого} \\ \text{огранич.} \end{array}\right\} =$$

$$= -1 + y_1 - 2y_2 - y_3 - 6 + 1{,}5y_1 + 3y_2 - y_6 =$$

$$= -7 + \frac{5}{2}y_1 + y_2 - y_3 - y_6$$

№3 (продолжение)

Решим полученную задачу с использов. симплекс-метода.

Итер	Баз	Знач	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Z_1	Z_2	
1	Z_1	1	$\boxed{1}$	-2	-1	0	0	0	1	0	$\frac{1}{1}$ - min Z_1 из баз.
	Z_2	6	$\frac{3}{2}$	3	0	0	0	-1	0	1	$\frac{12}{3}$
	Y_4	4	1	0	0	1	0	0	0	0	$\frac{4}{1}$
	Y_5	4	0	1	0	0	1	0	0	0	
	$-g_1$	0	1	-4	0	0	0	0	0	0	
	$-\omega$	7	$\frac{5}{2}$	1	-1	0	0	-1	0	0	Y_1 в баз.
2	Y_1	1	1	-2	-1	0	0	0	1	0	
	Z_2	$\frac{9}{2}$	0	$\boxed{6}$	$\frac{3}{2}$	0	0	-1	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{12}$ - min Z_2 из баз.
	Y_4	3	0	2	1	1	0	0	-1	0	$\frac{3}{2}$
	Y_5	4	0	1	0	0	1	0	0	0	$\frac{4}{1}$
	$-g_1$	-1	0	-2	1	0	0	0	-1	0	
	$-\omega$	$\frac{9}{2}$	0	6	$\frac{3}{2}$	0	0	-1	$-\frac{5}{2}$	0	Y_2 в баз.
3	Y_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
	Y_2	$\frac{3}{4}$	0	1	$\boxed{\frac{1}{4}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\underline{3}$ Y_2 из баз.
	Y_4	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	3
	Y_5	$\frac{13}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	
	$-g_1$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	y_3 в баз.
	$-\omega$	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	ω^{opt}

Итер	Баз	Знач.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
4	y_1	4	1	2	0	0	0	0
	y_3	3	0	4	1	0	0	$-2/3$
	y_4	0	0	-2	0	1	0	$2/3$
	y_5	4	0	1	0	0	1	$-1/2$
	$-g_1$	-4	0	-6	0	0	0	$2/3$

$g_1^{opt} = 4 \Rightarrow g^{opt} = -g_1^{opt} = -4$

Ответ: $Y^{opt} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g^{opt} = -4$.

№4.

Сравнить найденное решения.

1) $f^{opt} = g^{opt} = -4$.

2) Если известно решение одной из задач, например, прямой, то opt решение другой задачи можно найти по формуле

$$Y_{opt} = (A_Б^{-1})^T c_Б.$$

При этом комплекс $-(A_Б^{-1})^T c_Б$ образует коэффициенты целевой функции, стоящие при дополнительных переменных в opt симплекс-таблице прямой задачи.

Совершенно аналогично, коэфф-ты при дополнительных переменных в строке для целевой функции в opt симплекс-таблице двойственной задачи составляют вектор $-X^T_{opt}$.

3) Таким образом, зная решение одной из задач, можно автоматически получить решение другой.