1.Содержательная и математическая постановки задачи о назначениях. Венгерский метод решения задачи о назначениях.

В распоряжении работодателя находится n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения i-й работы j-м исполнителем составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц. Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы каждый исполнитель выполнял ровно одну работу, а общая стоимость работ была минимальной.

Введём управляемые переменные: $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ работу выполняет } j \text{ исполнитель}, \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Тогда: Общая стоимость выполнения всех работ $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Условие того, что j-й исполнитель выполняет одну работу $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$

Условие, что i-ю работу выполняет один исполнитель $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$

Матрица стоимостей $C = (cij)$, где $i, j = 1; n$. Матрица назначений $X = (xij)$, где $i, j = 1; n$.

Математическая постановка задачи о назначениях:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \quad , \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

2.Общая постановка задачи линейного программирования. Стандартная форма задачи линейного программирования. Основные допущения, принимаемые при исследовании задачи линейного программирования в стандартной форме. Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме.

Общая математическая постановка ЗЛП:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} b_i, \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

Говорят, что ЗЛП записана в ***стандартной форме***, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

1) Ранг матрицы A равен рангу блочной матрицы: $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|b)$. В соответствие с критерием Кронекера-Копелли, СЛАУ $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Если это условие не выполнено, то СЛАУ, входящая в систему ограничений $Ax = b$, несовместна – т.е. не имеет решений. В этом случае, множество допустимых решений ЗЛП пусто – оптимизировать нечего. **2) $\mathrm{rg}\, A = m$ – числу ограничений.** Если $\mathrm{rg}\, A < m$, то некоторые ограничения являются линейными комбинациями остальных – следовательно, их можно отбросить, не изменив множество допустимых решений. **3) Число переменных $n > m$.** Если $m = n$, то существует ровно одно единственное решение системы $Ax = b$. Следовательно, ЗЛП имеет не более 1 допустимого решения, а задача оптимизации вырождена.

3. Определение выпуклого множества и крайней точки выпуклого множества. Понятие выпуклой комбинации точек q1, ..., qk ∈ R n. Свойства выпуклой комбинации.

Отрезком, соединяющим две точки $x, y \in \mathbb{R}^n$, называется следующее множество точек:
$xy = \{t \in \mathbb{R}^n \colon\ t = \lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0;1]\}$
$\lambda = 0 \ \Rightarrow\ t(\lambda) = y$
$\lambda = 1 \ \Rightarrow\ t(\lambda) = x$
Множество $G \subseteq R^n$ называется ***<u>выпуклым</u>***, если вместе с любыми двумя своими точками x, y множество G целиком содержит соединяющий их отрезок. Т.е. $\forall\forall x, y \in G\ \ xy \subseteq G$.

Точка $x \in G$ выпуклого множества G называется ***<u>крайней точкой</u>*** этого множества G, если x не содержится ***строго внутри*** никакого отрезка, целиком лежащего в G.

Аффинной оболочкой (выпуклой комбинацией) точек q1, ..., qk ∈ R называется множество

$$\langle q1, ..., qk\rangle = \{t \in R^n : t = a1q1 + \ldots + anqn\}, a_i \geq 0, i = 1, n,\ \sum_1^n a_i = 1$$

1) Аффинная оболочка точек q1, ..., qk является наименьшим (по включению) выпуклым множеством, содержащим эти точки.
$$\{q_1, \ldots, q_k \in G\} \text{и} (G \text{ выпукло}) = \langle q_1, \ldots, q_k \rangle \subseteq G$$
2) Пусть
$$G \subseteq R^n \text{выпукло}, G \text{ ограничено}, G \text{ имеет набор крайних точек } q_1, \ldots, q_k$$
Тогда G является аффинной оболочкой своих крайних точек

4. Основные утверждения линейного программирования (формулировка). Доказать, что множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым.

*) Основные утверждения линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в виде стандартной форме

$$\begin{cases} f = cx \to max \\ Ax = b \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Обозначим $G = \{x\ \in R \colon Ax = b, x \geq 0\}$ – множество допустимых решений этой задачи.

Основное утверждение линейного программирования:

1) G – выпуклое множество
2) Если G не пусто, то оно содержит БДР ЗЛП

3) БДР ЗЛП являются крайними множества
4) Крайние множества G являются БДР ЗЛП.
5) Пусть функция f принимает максимальное значение в некоторой точке G, тогда f принимает его значение по крайней мере в одной крайней точке G
6) Если функция f принимает максимальное значение в точка q1, …, то f принимает его значение в любой точке их выпуклой комбинации {q1, …}

*) Доказать, что множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым.

Выберем 2 точки x и y ∈ G. Если G выпуклое множество, то есть $\forall \mu \in [0;1]\ t = \mu x + (1-\mu)y, t \in G$. Покажем, что

$$\begin{aligned} At &= A(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &= \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \\ &\quad \begin{vmatrix} Ax = b \\ Ay = b \end{vmatrix} \\ &= \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= b \end{aligned}$$

Также покажем, что t удовлетворяет ограничению неотрицательности СЛАУ. $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}, t_j = \lambda x_j + (1-\lambda)y_j$. $x_j, y_j \geq 0,\ \lambda \in (0;1)$. Следовательно, оба слагаемых ≥ 0, а следовательно, $t_j \geq 0$.

5. Понятия базисного решения и базисного допустимого решения задачи линейного программирования. Вычисление базисного решения и отвечающего ему значения целевой функции в случае, когда базисными выбраны m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.

*) Понятия базисного решения

Рассмотрим СЛАУ Ax = b из ЗЛП (1)в стандартной форме $\begin{cases} f = c^T x \to max, \\ Ax = b \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$ (rank(A) = rank(A|b) = m < n, где m, n – размеры матрицы A.

Базисное решение ЗЛП – частное решение СЛАУ Ax = b из системы ограничений этой ЗЛП, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных $x_{НБ} = 0$, $x^0 = x|_{xнб = 0} = [\begin{matrix} A_Б^{-1}b \\ 0 \end{matrix}]$. Если базисное решение $x_Б \geq 0$, то оно называется базисным допустимым решением ЗЛП.

*) Вычисление базисного решения и отвечающего ему значения целевой функции в случае, когда базисными выбраны m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи.

Будем считать, что m первых столбцов матрицы A является линейно не зависимыми

$$A = [\underbrace{a_1, \dots, a_m}_{A_Б}, \underbrace{a_{m+1}, a_n}_{A_{НБ}}],$$

Так как m первых столбцов ЛНЗ, их можно выбрать в качестве базисных. Обозначим

$$A = [\underbrace{a_1 \dots a_m}_{A_Б} \underbrace{a_{m+1} \dots a_n}_{A_{НБ}}], \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} X_Б \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} X_{НБ} \end{matrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} C_Б \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} C_{НБ} \end{matrix}$$

С учётом этих обозначений СЛАУ Ax = b из задача (1) может быть написана в виде $Ax = b \Leftrightarrow A_Б X_Б + A_{НБ} X_{НБ} = b$

Так как $A_Б$ квадратная матрица, столбцы ЛНЗ, то det ($A_Б$)! =0 => $\exists A_Б^{-1}$

$$x_Б = A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ} \ (2)$$

Общее решение СЛАУ из задачи (1) можно записать в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_Б \\ x_{НБ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ} \\ x_{НБ} \end{bmatrix}$$

$$f = C_Б^T x_Б + C_{НБ}^T x_{НБ} = C_Б^T A_Б^{-1} b - C_Б^T A_Б^{-1} A_{НБ} x_{НБ} + C_{НБ}^T x_{НБ}$$

6. Понятия базисного решения и базисного допустимого решения задачи линейного программирования. Каноническая форма задачи линейного программирования в случае, когда базисными являются m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи

*) Понятия базисного решения

Рассмотрим СЛАУ Ax = b из ЗЛП в стандартной форме $\begin{cases} f = c^T x \to max, \\ Ax = b \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$ (rank(A) = rank(A|b) = m < n, где m, n – размеры матрицы A.

Базисное решение ЗЛП – частное решение СЛАУ Ax = b из системы ограничений этой ЗЛП, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных $x_{НБ} = 0$, $x^0 = x|_{xнб = 0} = \begin{bmatrix} A_Б^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$. Если базисное решение $x_Б \geq 0$, то оно называется базисным допустимым решением ЗЛП.

*) Каноническая форма задачи линейного программирования в случае, когда базисными являются m первых столбцов матрицы A системы ограничений задачи

Будем считать, что известно некоторое БДР, которое отвечает m первым столбцам матрицы A. Обозначим:

$$A = [\underbrace{a_1 \dots a_m}_{A_Б} \underbrace{a_{m+1} \dots a_n}_{A_{НБ}}], \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}}\right\} X_Б \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}}\right\} X_{НБ} \end{matrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{matrix}}\right\} C_Б \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{matrix}}\right\} C_{НБ} \end{matrix}$$

$$Ax = b \iff A_Б X_Б + A_{НБ} X_{НБ} = b$$

Выразим базисные переменные через небазисные: $X_Б = A_Б^{-1} b - A_Б^{-1} A_{НБ} X_{НБ}$.

Тогда значение функции f

$$\begin{aligned} f &= C_Б^T X_Б + C_{НБ}^T X_{НБ} \\ &\qquad |\text{подставляя } X_Б| \\ &= C_Б^T A_Б^{-1} b - C_Б^T A_Б^{-1} A_{НБ} X_{НБ} + C_{НБ}^T X_{НБ} \\ &= \underbrace{C_Б^T A_Б^{-1} b}_{f_0} + \underbrace{(C_{НБ}^T - C_Б^T A_Б^{-1} A_{НБ})}_{[d_{m+1}, \dots, d_n]} X_{НБ} \end{aligned}$$

Тогда мы можем представить ЗЛП в следующем виде:

$$\begin{cases} f = f_0 + d_{m+1} x_{m+1} + \dots + d_n x_n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \propto_1 \\ \vdots \\ \propto_m \end{bmatrix} - x_{m+1} t_{m+1}^{\downarrow} - \dots - x_n t_n^{\downarrow}, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \begin{bmatrix} \propto_1 \\ \vdots \\ \propto_m \end{bmatrix} = A_Б^{-1} b \\ [t_{m+1}^{\downarrow}, \dots, t_n^{\downarrow}] = A_Б^{-1} A_{НБ} \end{matrix}$$

Данную систему называют канонической формой ЗЛП, отвечающей выбранному базису. В ней базисные переменные выражены через небазисные, а выражение для целевой функции содержит только небазисные переменные.

7. Определение стандартной формы прямой задачи линейного программирования. Понятие двойственной задачи. Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме прямой задачи.

*) Определение стандартной формы прямой ЗЛП

Говорят, что ЗЛП записана в стандартной форме прямой задачи, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leq b, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

*) Понятие двойственной задачи:

Задачей, двойственной к задаче (1), называется задача:

$$\begin{cases} g(Y) = b^T Y \to min \\ A^T Y \geq C, \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

При этом (2) называется стандартной формой двойственной задачи.

*) Показать, что любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме прямой задачи.

Любая ЗЛП может быть приведена к эквивалентной задаче, записанной в стандартной форме прямой задачи.

Доказательство

1) Если исходная задача является задачей минимизации, т. е.

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min,$$

то рассмотрим функцию

$$f_1 = -f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \to max.$$

2) Если некоторое ограничение является неравенством вида «≥», то есть имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,$$

то умножив обе его части на (-1), перейдем к эквивалентному неравенству:

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i.$$

3) Если некоторое ограничение имеет вид равенства, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

то заменим его парней эквивалентных ограничений неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

или эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \le -b_i$$

4) Если некоторая переменная x_i подчинена условию неположительности, т. е. $x_i \le 0$, то заменим её на переменную $x_i' = -x_i$. Тогда $x_i' \ge 0$.

5) Если некоторая переменная x_i не ограничена в знаке, то представим её в виде разности двух неотрицательных переменных.

$$\begin{cases} x_j = x_j' - x_j'', \\ x_j' \geq 0, \; x_j'' \geq 0. \end{cases}$$

8. Понятие двойственной задачи. Сформулировать основные соотношения двойственности. Доказать, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

*) Понятие двойственной задачи:

Говорят, что ЗЛП записана в стандартной форме прямой задачи, если она имеет вид:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \le b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Задачей, двойственной к задаче (1), называется задача:

$$\begin{cases} g(y) = b^T y \to min \\ A^T y \geq c, \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

При этом (2) называется стандартной формой двойственной задачи.

*) Основные соотношения двойственности.

1) Задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

2) Пусть: x^0 – допустимое решение прямой задачи.

y^0 – допустимое решение двойственной задачи.

Тогда $f(x^0) \le g(y^0)$.

3) Пусть: x^0 – допустимое решение прямой задачи.

y^0 – допустимое решение двойственной задачи.

$f(x^0) = g(y^0)$

Тогда x^0 – орт решение прямой задачи.

y^0 – орт решение двойственной задачи.

4) Пусть прямая задача имеет конечное оптимальное решение x^0, тогда

+) двойственная задача имеет конечное оптимальное решение y^0;

+) $f(x^0) = g(y^0)$

5) Условие дополняющей нежёсткости

Пусть $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - орт решение прямой задачи.

$y^0 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - орт решение двойственной задачи.

Тогда справедливы соотношения

$$y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 - b_i\right) = 0, \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0 - c_j\right) = 0, \quad j=\overline{1,n},$$

называемые условиями дополняющей нежесткости

*) Доказать, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \le b, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geqslant c, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Прямая задача Двойственная

Задача (**) в стандартной форме прямой задачи:

$$\begin{cases} -g = (-b)^T y \to max \\ (-A^T) y \le -c, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача, двойственная к полученной, принимает вид

$$\begin{cases} h = (-c)^T z \to min \\ (-A^T)^T z \geqslant -b, \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

И эквивалентна задаче

$$\begin{cases} -h = c^T z \to max \\ Az \leq b, \\ z \geq 0, \end{cases}$$

После переобозначения z -> x, задача совпадает с прямой задачей (*)

*) Доказать неравенство для значений целевых функций прямой и двойственной задач и следствие из него.

Прямая задача	Двойственная
$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$

Т.к. x_0 – допустимое решение, то $Ax_0 \leq b$.

Умножим обе части неравенства слева на $(y^0)^T$, причем этот вектор неотрицателен.

$$(y^0)^T A x^0 \leq (y^0)^T b$$

Если мы транспонируем обе части, то получим $((y^0)^T A x^0)^T \leq ((y^0)^T b)^T$

Т.к. транспонирование произведения матриц есть произведение транспонированных в обратном порядке, то $\Rightarrow (x^0)^T A^T y^0 \leq b^T y^0$ $(*)$

y_0 – допустимое решение двойственной задачи, следовательно $A^T y^0 \geq c$

В этом неравенстве умножим обе части слева на $(x^0)^T \geq 0$: $(x^0)^T A^T y^0 \geq (x^0)^T c$ $(**)$

Наконец, из * и ** получаем: $(x^0)^T c \leq (x^0)^T A^T y^0 \leq b^T y^0 \;\; \Rightarrow \;\; \underbrace{(x^0)^T c}_{=f(x^0)} \leq \underbrace{b^T y^0}_{=g(y^0)}$

Т.е., $f(x0) \leq g(y0)$

<u>Следствие</u>: если целевая функция прямой задачи не ограничена сверху на множестве допустимых решений, то двойственная задача существует, но не имеет допустимых решений.