Аппроксимация функций

§1. Понятие об интерполировании и обратном интерполировании

На практике, в результате наблюдения за ходом развития некоторого процесса, приходится иметь дело с функциями, заданными таблично. То есть для некоторого конечного множества значений аргумента $x_0, x_1, ..., x_n$ получены значения функции $y_0, y_1, ..., y_n$. Характер же функциональной зависимости между x и y неизвестен, то есть неизвестно аналитическое задание функции $y = f(x)$. В то же время, необходимо в процессе решения некоторого класса задач, использовать значения функции $y = f(x)$ для промежуточных, то есть отличных от табличных, значений аргумента. В этом случае прибегают к ***приближению*** (как синоним используют термин ***интерполяция, аппроксимация) функции***. Под приближением будем понимать восстановление функции с заданной степенью точности по таблице ее значений.

Рассмотрим вначале более строго задачу интерполирования функции.

Пусть система функции $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = \overline{0,n})$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\{\varphi_i(x)\} \in C[a,b]$ $(i = \overline{0,n})$, то есть все они непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. Линейно независимы на этом отрезке, то есть линейная комбинация этих функций обращается в ноль, только случае равенства нулю всех $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$ её коэффициентов: $\alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ для $\forall x \in [a,b]$ $\Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0;$;
3. Функции $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = \overline{0,n})$ достаточно просто вычисляемые.

Линейная комбинация таких функций

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \quad (\alpha_k \in \mathbb{R})$$

называется ***обобщенным многочленом степени*** n.

<u>Постановка задачи.</u> Пусть $x_0, x_1, ..., x_n$ – различные точки из отрезка $[a,b]$ и известны значения $y_0, y_1, ..., y_n$ функции $y = f(x)$ в них. Требуется определить обобщенный многочлен $\Phi_n(x)$ таким образом, чтобы

$$\Phi_n(x_k) = y_k \quad (k = \overline{0,n}).$$

Если удается построить такой обобщенный многочлен, то он называется ***интерполяционным многочленом***, точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***узлами интерполирования***, а условия $\Phi_n(x_k) = y_k$ – ***условиями интерполирования по значениям функции***.

Прежде чем сформулировать условия существования такого обобщенного многочлена, введем еще одно понятие. Система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ называется ***чебышевской на отрезке*** $[a,b]$ если любой нетривиальный обобщенный многочлен $\Phi_n(x)$ (то есть не все коэффициенты α_k одновременно обращаются в ноль) имеет на отрезке $[a,b]$ не более n корней. Очевидно, что необходимым требованием того, чтобы система была чебышевской является линейная независимость этой системы функций на заданном отрезке. Хотя этого и недостаточно.

Введенное понятие весьма важно, так как ***для любой непрерывной на отрезке*** $[a,b]$ ***функции*** $y = f(x)$ ***и для любой системы узлов*** $x_0, x_1, ..., x_n$ ***существует и единственен интерполяционный многочлен*** $\Phi_n(x)$ ***тогда и только тогда, когда система функций*** $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ ***является чебышевской.***

Частные виды систем Чебышева:

1. Алгебраическая система
$$1, x, x^2, ..., x^n, ...;$$
2. Тригонометрическая система
$$1, \sin x. \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx, ...;$$
3. Экспоненциальная система
$$\left\{e^{\alpha_k x}\right\}_0^\infty \left(\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j; \alpha_0 = 0\right).$$

Процесс интерполирования по этим система называется, соответственно, ***алгебраическим, тригонометрическим и экспоненциальным интерполированием.***

Вопросы, возникающие при интерполировании:

- Каким образом по заданной табличной функции выбрать подходящую систему функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$;
- Если обозначить $R_n(x) = f(x) - \Phi_n(x)$ ***остаток интерполирования***, то какова будет оценка остатка интерполирования;
- Если есть возможность выбора системы узлов интерполирования, то каким образом выбрать эту систему, чтобы оценка остатка интерполирования была наименьшей.

Смежными вопросами при интерполировании по значениям функции являются:

- ***Обратное интерполирование.*** По заданному значению y^* найти значение аргумента x^* такое, чтобы $f(x^*) = y^*$;
- ***Экстраполяция.*** Интерполирование за пределы таблицы.

Помимо интерполирования по значениям функции существуют и другие способы приближения функции. В частности:

❖ ***Интерполирование с кратными узлами*** (***интерполирование Эрмита).*** В некоторых узлах наряду со значениями функции задаются значения производных до некоторого порядка;

❖ ***Сплайн интерполирование.*** Отрезок разбивается на подинтервалы интерполирования, а в точках сочленения подинтервалов выполняется сглаживание путем задания соответствующих производных;

❖ ***Приближение по методу наименьших квадратов.*** Коэффициенты обобщенного многочлена $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ выбираются из условия минимума функционала

$$\int_a^b \left(f(x) - \Phi_n(x) \right)^2 dx \xrightarrow[\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n]{} \min .$$

§2. Алгебраическое интерполирование

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений, где

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

x_i	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	…	y_n

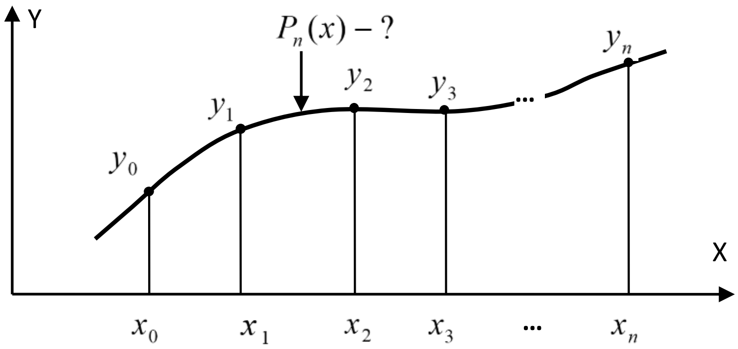
Требуется найти полином степени n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

который принимает в заданных точках x_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$ те же значения, что и функция $f(x)$, то есть такой, что выполняется условие

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = P_n(x)$, которая проходит через заданную систему точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1),...,(x_n, y_n)$ на плоскости.



Поскольку степень полинома является известной, то поиск полинома сводится к нахождению набора его коэффициентов $a_0, a_1,..., a_n$.

Полученный полином $P_n(x)$ обычно используют для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ для значений аргумента x, отличных от узлов интерполяции. Процесс вычисления значений функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции, называется ***интерполированием функции*** $f(x)$. Замена функции $f(x)$ ее интерполяционным полиномом $P_n(x)$ может потребоваться не только тогда, когда известна лишь таблица ее значений (например, полученная в результате эксперимента), но и в том случае, когда аналитическое выражение для функции $f(x)$ известно, однако является слишком сложным и неудобным для дальнейших математических преобразований (интегрирования, дифференцирования).

§2.1 Определение коэффициентов интерполяционного полинома

Воспользовавшись выражением для искомого полинома $P_n(x)$ и условиями интерполирования, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Введя обозначения

$$S = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & .... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & .... & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & .... & x_n^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ..... \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ..... \\ a_n \end{pmatrix},$$

система уравнений принимает вид

$$SA = Y \ .$$

Столбец неизвестных коэффициентов A легко найти из соотношения

$$A = S^{-1} Y \ ,$$

где A^{-1} – обратная матрица.

Задача интерполяции в описанной выше постановке имеет единственное решение. Это означает, что не существует двух различных наборов коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$, удовлетворяющих условиям интерполирования. Поэтому искомые коэффициенты интерполяционного полинома определяются как решение системы линейных уравнений, имеющей единственное решение.

§2.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Известный французский математик Лагранж предложил способ построения интерполяционного полинома без предварительного вычисления коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$, то есть без построенной выше решения системы линейных алгебраических уравнений. Он предложил искать интерполяционный полином (в данном случае используем обозначение $L_n(x)$) в виде

$$L_n(x) = A_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) + A_1(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+\cdots+$$
$$+A_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)+\cdots+A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots$$
$$\cdots(x-x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n} A_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j).$$

Неизвестные коэффициенты A_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ определим из условия

$$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i\,.$$

Последовательно полагая $x = x_i$, $i=0,1,2,\dots,n$, получим:

$x = x_0$

$$A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n) = y_0,\ \Rightarrow\ A_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)};$$

$x = x_1$

$$A_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n) = y_1\ ,\ \Rightarrow\ A_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)};$$

……………………………………………………………………………

$x = x_i$

$$A_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n) = y_i\,.\ \Rightarrow$$

$$A_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)};$$

$x = x_n$

$$A_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) = y_n, \Rightarrow\ A_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\,.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов A_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ в выражение для многочлена $L_n(x)$, получим

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\ .$$

Полученный таким образом полином называется ***интерполяционным полиномом Лагранжа***. Следует отметить, что полином Лагранжа $L_n(x)$ представляет собой другую форму записи рассмотренного ранее полинома $P_n(x)$, что следует из единственности решения задачи интерполирования. Выражение для полинома Лагранжа $L_n(x)$ может быть легко преобразовано к виду $P_n(x)$ путем группировки коэффициентов при соответствующих степенях аргумента x.

Ведем следующие обозначения:

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}\,.$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в виде

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\cdot l_i(x),$$

Где многочлены $l_i(x)$ называют ***многочленами влияния или коэффициентами Лагранжа.*** Последняя форма записи многочлена Лагранжа, в силу ее компактности, позволяет рассмотреть особенности этого интерполяционного полинома. Его свойства зависят от двух факторов: от выбора узлов и от интерполируемой функции. В интерполяционной формуле эти два фактора разнесены, то есть многочлены влияния $l_i(x)$ зависят только от узлов, а значения y_i – только от функции. Поэтому, с вычислительной точки зрения, значения коэффициентов $l_i(x)$ можно вычислять один раз по заданной системе узлов и использовать их для всех функций $y=f(x)$. Это плюс интерполяционного многочлена Лагранжа. Недостатком же интерполяционного многочлена Лагранжа является то, что его образование связано с большой вычислительной работой. Если даже мы имеем интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам $x_0,x_1,...,x_n$, то это мало помогает при построении интерполяционного многочлена Лагранжа по значениям его в точках $x_0,x_1,...,x_n\,,x_{n+1}$. Это побуждает думать об усовершенствовании формулы с целью усовершенствования вычислительной процедуры.

Однако, если функция $y=f(x)$ задана таблично на отрезке $[x_0,x_n]$, то можно считать, что для $\forall x\in[x_0,x_n]$ имеем приближенное равенство $f(x)\approx L_n(x)$, то есть значения функции $y=f(x)$, аналитическая запись которой неизвестна, можно приближенно находить для $\forall x\in[x_0,x_n]$.

Если из каких-либо соображений (графических, физических…) известно, что функция на отрезке мало отличается от линейной, то удобно использовать линейное (либо кусочно-линейное) интерполирование

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,y_1\ .$$

Если $n=2$, приходим к квадратичному (либо кусочно-квадратичному) интерполированию

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Пример. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции

x_i	1	2	3
y_i	2	8	6

Положим сначала $n=1$

x_i	1	2
y_i	2	8

$$L_1(x) = y_0\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{y_0x_1+y_1x_0}{x_0-x_1} + \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x\,.$$

Обозначая $a_0 = \dfrac{y_1x_0-y_0x_1}{x_0-x_1}$ и $a_1 = \dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$, получаем

$$L_1(x) = a_0 + a_1x = -4+6x\,.$$

Положим $n=2$

x_i	1	2	3
y_i	2	8	6

Подставляя заданные значения, окончательно получим

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 2\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 8\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} =$$

$$= (x-2)(x-3) - 8(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2) = -4x^2+18x-12.$$

Ответ: Искомый интерполяционный полином имеет вид: $L_2(x) = -4x^2+18x-12$.

На практике часто сталкиваются со случаем равноотстоящих узлов интерполирования, то есть

$$x_1-x_0 = x_2-x_1 = \ldots = x_n-x_{n-1} = h\ .$$

При этом, если ввести обозначение $\dfrac{x-x_0}{h} = t$ (или $x = x_0+th$, t имеет смысл количества шагов до переменной x), то для многочленов влияния Лагранжа получим

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} =$$

$$= \frac{th(th-h)\cdots(th-(i-1)h)(th-(i+1)h)\cdots(th-nh)}{ih(i-1)h\cdots h(-h)\cdots(-(n-1)h)} =$$

$$= \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} = \left(-1\right)^{n-i}C_n^i\frac{1}{t-i}\cdot\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!},$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ – число сочетаний из n по i.

Итак,

$$L_n(x) = L_n\left(x_0 + th\right) == \left(-1\right)^n \cdot \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^i \frac{C_n^i}{t-i} \cdot y_i.$$

В последнем выражении коэффициенты, стоящие перед y_i

$$\left(-1\right)^{n-i} C_n^i \cdot \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{\left(t-i\right)n!}$$

не зависят ни от функции $y = f(x)$, ни от шага h таблицы. Их можно табулировать и использовать в самых различных случаях. Такие таблицы составлены и известны под названием ***таблиц коэффициентов Лагранжа.***

Погрешность, возникающая при замене функции $f(x)$ ее интерполяционным полиномом Лагранжа, определяется выражением $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$, где $R_n(x)$ называется остаточным членом. Доказано, что если узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $\left[a,b\right]$, и функция $f(x)$ – $(n+1)$–раз дифференцируема на этом отрезке, то

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|, \quad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

§2.3. Интерполяционный полином Ньютона

Интерполяционный полином Лагранжа, который можно построить при любом расположении узлов интерполирования, имеет один существенный недостаток. Если понадобится увеличить число узлов (при этом увеличится степень многочлена), все коэффициенты многочлена Лагранжа придется вычислять заново, так как каждый из них зависит от всех узлов интерполирования. Интерполяционный полином Ньютона лишен такого недостатка. Коэффициенты полинома Ньютона выражаются через разностные отношения различных порядков. Рассмотрим процесс построения такого многочлена подробнее.

Пусть задана функция $y = f(x)$; $y_k = f(x_k)$ – ее значения в точках x_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$. Рассмотрим первую разделенную разность

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \qquad ,$$

из которой выражаем

$$f(x) = y_0 + (x - x_0) f(x, x_0).$$

Вторая разделенная разность равна

$$f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1},$$

откуда следует, что

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1),$$

и поэтому

$$f(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x, x_0, x_1) \ .$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$f(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x, x_0, x_1) + ...$$
$$... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1}) f(x, x_0, x_1, ..., x_{i-1}) + ...$$
$$... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) f(x, x_0, x_1, ..., x_n).$$

Обозначим

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + ...$$
$$... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1}) f(x_0, x_1, ..., x_{i-1}) + ...$$
$$... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}).$$

Тогда $f(x)$ примет более компактный вид:

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) f(x, x_0, x_1, ..., x_n).$$

Полагая в формуле $x = x_k, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$, получаем, что

$$y_k = f(x_k) = P_n(x_k), \quad (k = 0, 1, 2, ..., n).$$

Следовательно, многочлен вида $P_n(x)$ – интерполяционный многочлен для функции $y = f(x)$, построенный по $(n+1)$ узлам $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

Многочлен $P_n(x)$ называется ***интерполяционным многочленом Ньютона***. Подставим $P_n(x)$ в общую интерполяционную формулу и получим формулу вида:

$$f(x) \approx y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + ...$$
$$... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, x_2, ..., x_n).$$

Эта формула называется ***интерполяционной формулой Ньютона***. Абсолютная погрешность метода по формуле Ньютона определяется равенством:

$$\alpha(x) = \alpha(ht + x_n) = \frac{M_{n+1} h^{n+1} \left[t(t-1)(t-2)...(t-n) \right]}{(n+1)!}.$$

Где M_{n+1} выражается по формуле $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Замечание. Так как k-й член полинома Ньютона зависит только от k первых узлов интерполяции и от значений функций в этих узлах, то добавление новых узлов вызывает в формуле лишь добавление новых слагаемых без изменения первоначальных. Этот момент является преимуществом многочлена Ньютона по сравнению с многочленом Лагранжа.

Замечание. В силу единственности интерполяционного многочлена n-й степени интерполяционный многочлен Ньютона перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный полином Лагранжа и наоборот.

Пример. Построить интерполяционный полином Ньютона для функции

x_i	2	4	5

y_i	1	15	28

В данном случае $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

$y_0 = 1$, $y_1 = 15$, $y_2 = 28$.

Вычислим промежуточные разделенные разности:

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 7, \quad f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 13,$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = 2.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона вычисляем по формуле

$$f(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_2, x_1, x_0) .$$

Подставляя найденные выражения в формулу, получим искомый многочлен Ньютона.

$$P_2(x) = 1 + (x-2)\,7 + (x-2)(x-4)\,2,$$

то есть

$$P_n(x) = 2x^2 - 5x + 3.$$

Ответ: искомый интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = 2x^2 - 5x + 3.$$

Рассмотрим далее случай, когда функция задана таблично в равноотстоящих узлах $x_0, x_1, ..., x_n$ с шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n}$ ($x_k = x_0 + kh$). ***Конечными разностями первого порядка от функции*** $y = f(x)$ называются следующие величины

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 , \Delta y_1 = y_2 - y_1 , ..., \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} .$$

Конечные разности от разностей первого порядка называют ***конечными разностями второго порядка***

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 , \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 , ..., \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

Аналогичным образом определяются последующие конечные разности. Для простоты вычисления конечные разности можно записывать таблицей

....					
x_{i-4}	y_{i-4}				
		Δy_{i-4}			
x_{i-3}	y_{i-3}		$\Delta^2 y_{i-4}$		
		Δy_{i-3}		$\Delta^3 y_{i-4}$	
x_{i-2}	y_{i-2}		$\Delta^2 y_{i-3}$		$\Delta^4 y_{i-4}$
		Δy_{i-2}		$\Delta^3 y_{i-3}$	
x_{i-1}	y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2}$		$\Delta^4 y_{i-3}$

		Δy_{i-1}		$\Delta^3 y_{i-2}$	
x_i	y_i		$\Delta^2 y_{i-1}$		$\Delta^4 y_{i-2}$
		Δy_i		$\Delta^3 y_{i-1}$	
x_{i+1}	y_{i+1}		$\Delta^2 y_i$		$\Delta^4 y_{i-1}$
		Δy_{i+1}		$\Delta^3 y_i$	
x_{i+2}	y_{i+2}		$\Delta^2 y_{i+1}$		$\Delta^4 y_i$
		Δy_{i+2}		$\Delta^3 y_{i+1}$	
x_{i+3}	y_{i+3}		$\Delta^2 y_{i+2}$		
		Δy_{i+3}			
x_{i+4}	y_{i+4}				
…………...					

Рассмотрим далее задачу построения интерполяционного многочлена по значениям функции. Будем искать многочлен в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Коэффициенты A_k найдем из выполнения условия интерполирования $P_n(x_k) = y_k$:

$x = x_0 \Rightarrow P_n(x_0) = y_0 \Rightarrow A_0 = y_0$;

$x = x_1 \Rightarrow P_n(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow A_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$ …..

Продолжая этот процесс далее, получим, что $A_n = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$. Подставляя полученные значения коэффициентов в многочлен, имеем

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Полученная формула называется ***первой интерполяционной формулой Ньютона***. Ее следует применять для приближенного вычисления значений функции $y = f(x)$ не совпадающих с узлами интерполирования и находящихся ближе к узлу x_0 нежели к узлу x_n.

Если ввести замену $x = x_0 + th$, то $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Несложно убедиться, что

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

и интерполяционная формула Ньютона может быть переписана в виде

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t - 1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t - 1)(t - 2)\cdots(t - n + 1).$$

Очевидно, что переменная t – это число шагов h от x_0 до значения x.

Если интерполяционный многочлен искать в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_n)+A_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+A_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1),$$

То, проделав вышеприведённую процедуру, окончательно получим

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования назад, или вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Если обе интерполяционные формулы Ньютона построены на одних и тех же равноотстоящих узлах, то они тождественно равны между собой, то есть отличаются лишь формой записи.

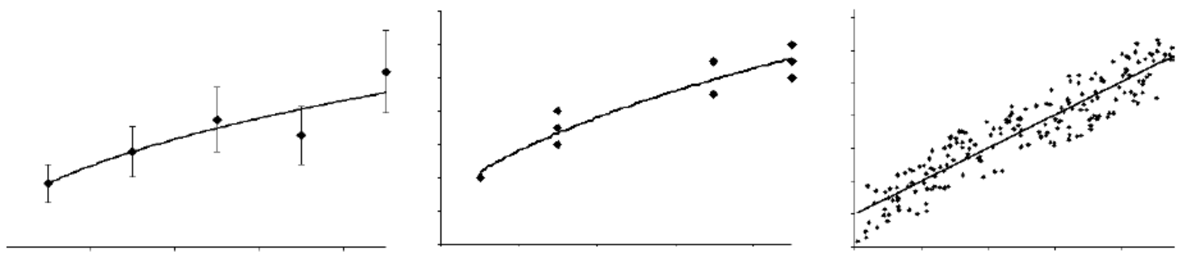
§3. Метод наименьших квадратов. Определение параметров эмпирической зависимости.

§3.1. Постановка задачи

В результате наблюдений за ходом развития некоторого процесса получен ряд значений для *x* и *y*, которые можно свести в виде таблицы.

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2		y_n

Характер функциональной зависимости между *x* и *y* неизвестен, то есть неизвестно аналитическое выражение для исследуемой функции $y=f(x)$. Так как табличные значения функции получены из эксперимента, то они определены приближенно с некоторой случайной или систематической ошибкой. Наличие погрешностей делает нецелесообразным подбор такой эмпирической функции $y=\varphi(x)$, которая бы точно описывала все экспериментальные данные, то есть график ее проходил бы через точки (x_i,y_i), $i=\overline{1,n}$. В этом случае предпочтительно подобрать такую аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, которая бы «сглаживала» случайные погрешности измерений. Задача аппроксимации (сглаживания) функции может ставиться, не только когда исходные данные содержат погрешности, но и когда экспериментальные данные содержат повторы или очень большое количество точек. Если нанести результаты наблюдений на плоскость, то будем иметь следующие рисунки.



В этих случаях задача интерполирования по значениям функции не имеет смысла или невозможна. Предположим, что из графических (после нанесения на плоскость точек таблично заданной функции), физических или каких-либо других соображений определили класс аппроксимирующих функций, то есть предположили, что x и y связаны некоторой функциональной зависимостью вида

$$y=\varphi\left(x,a_0,a_1,...,a_k\right),$$

где входящие в формулу параметры $a_0,a_1,...,a_k$ неизвестны и подлежат определению. Для задачи аппроксимации сглаживанием критерий близости аппроксимирующей функции $y=\varphi\left(x,a_0,a_1,...,a_k\right)$ к исходным данным $\left(x_i,y_i\right)$ рассматривается как минимальное отклонение значений в заданных точках. Количественно отклонение может быть оценено различными способами. Наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому необходимо минимизировать сумму квадратов отклонений:

$$S\left(a_0,a_1,...,a_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi\left(x_i,a_0,a_1,...,a_k\right)-y_i\right]^2\to\min,$$

где $\left(x_i,y_i\right)$ – значения табличных данных, а n – их число; $a_0,a_1,...,a_k$ – неизвестные параметры. Задача сводится к нахождению экстремума функции параметров $S\left(a_0,a_1,...,a_k\right)$.

Таким образом задача построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ по экспериментальным данным состоит из двух этапов:

1. определение вида аппроксимирующей функции $\varphi(x)$, то есть выбора класса функций, к которому принадлежит аппроксимирующая функция (линейная, квадратичная, степенная, показательная и так далее);
2. определения параметров $a_0,a_1,...,a_k$ аппроксимирующей функции $\varphi\left(x\right)=\varphi\left(x,a_0,a_1,...,a_k\right)$ выбранного вида, доставляющих минимум среднеквадратического отклонения аппроксимирующей функции от исходной.

§3.2. Определение вида аппроксимирующей функции

Проанализируем более подробно этапы построения сглаживающей функции. Что касается первого, определения вида аппроксимирующей функции, то не существует стандартных методов, которые образовали бы строгую теоретическую базу для выбора той или иной аппроксимирующей функции $\varphi(x)$. Можно лишь дать несколько общих рекомендаций.

1. ***При подборе аппроксимирующей функции*** $y=\varphi(x)$ ***следует учитывать характер расположения экспериментальных точек*** $\left(x_i,y_i\right)$, $i=\overline{1,n}$ ***на точечной диаграмме***.

Пусть на точечной диаграмме точки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ располагаются вдоль некоторой линии, например вдоль прямой. Тогда в качестве аппроксимирующей функции рекомендуется выбрать линейную функцию $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$, зависящую от двух параметров a_0 и a_1.

Если расположение точек (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ на точечной диаграмме напоминает параболу, то в качестве аппроксимирующей функции рекомендуется выбрать $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, где a_0, a_1, a_2 – параметры аппроксимирующей функции.

Обычно при визуальном (или «зрительном») анализе расположения экспериментальных точек на точечной диаграмме пользуются образцами известных кривых. Если характер расположения точек напоминает одну из кривых некоторого семейства (показательных, степенных, логарифмических и других функций), аппроксимирующую функцию выбирают из этого семейства.

1. Основные аппроксимационные кривые

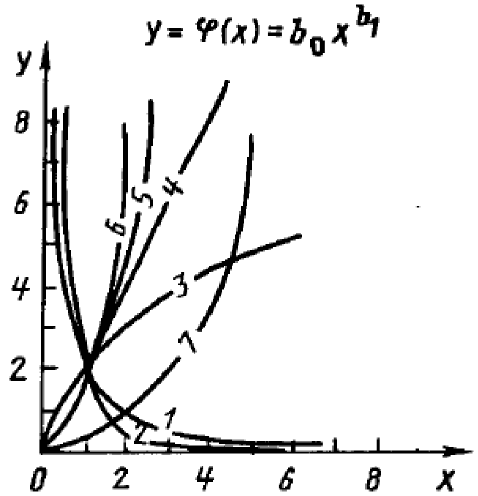


Рис. 1. 1 — $y = 2x^{-2}$, 2 — $y = 2x^{-1}$, 3 — $y = 2x^{0,5}$, 4 — $y = 2x$, 5 — $y = 2x^{1,5}$, 6 — $y = 2x^2$, 7 — $y = 0{,}2x^2$.

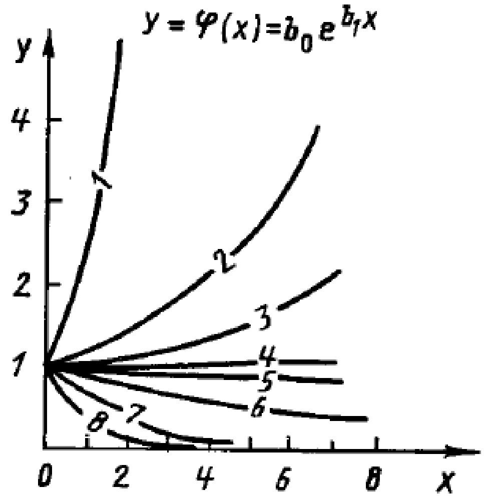


Рис. 2. 1 — $y = e^x$, 2 — $y = e^{0,2x}$, 3 — $y = e^{0,1x}$, 4 — $y = e^{0,01x}$, 5 — $y = e^{-0,01x}$, 6 — $y = e^{-0,1x}$, 7 — $y = e^{-0,25x}$, 8 — $y = e^{-0,5x}$.

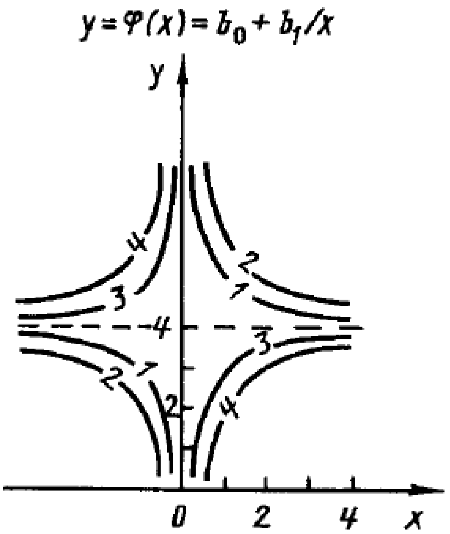


Рис. 3. $1 - y = 4 + 1/x$, $2 - y = 4 + 2/x$, $3 - y = 4 - 1/x$, $4 - y = 4 - 2/x$.

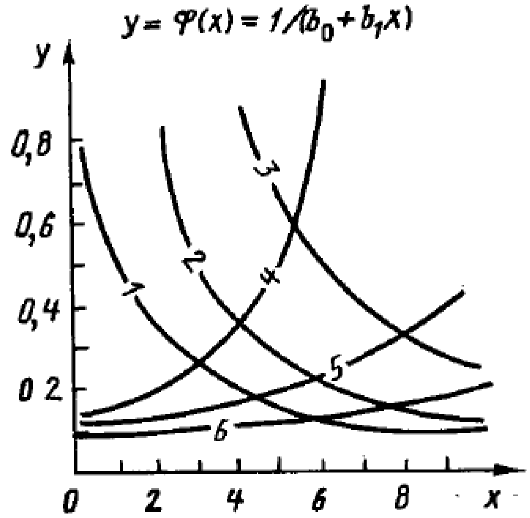


Рис. 4. $1 - y = 1/(x + 1)$, $2 - y = 1/(x - 1)$, $3 - y = 1/(0{,}5x - 1)$, $4 - y = 1/(7 - x)$, $5 - y = 1/(8 - 0{,}6x)$, $6 - y = 1/(10 - 0{,}5x)$.

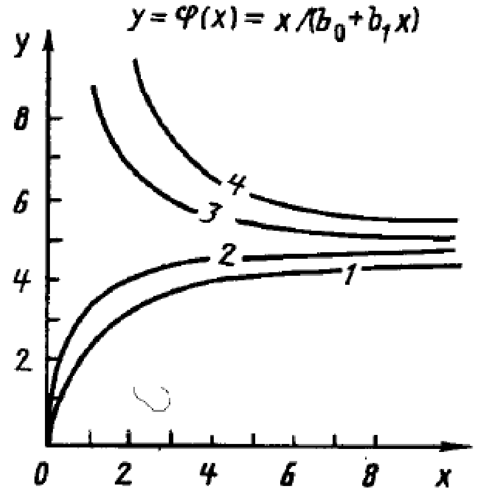


Рис. 5. $1 - y = x/(0{,}2 + 0{,}2x)$, $2 - y = x/(0{,}1x + 0{,}2x)$, $3 - y = x/(-0{,}1 + 0{,}2x)$, $4 - y = x/(-0{,}2 + 0{,}2x)$.

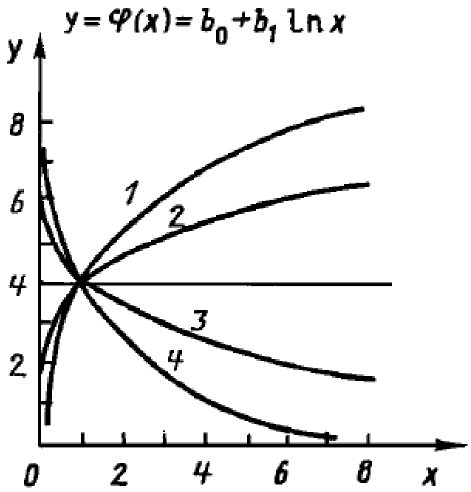


Рис. 6. $1 - y = 4 + 2\ln x$, $2 - y = 4 + \ln x$, $3 - y = 4 - \ln x$, $4 - y = 4 - 2\ln x$.

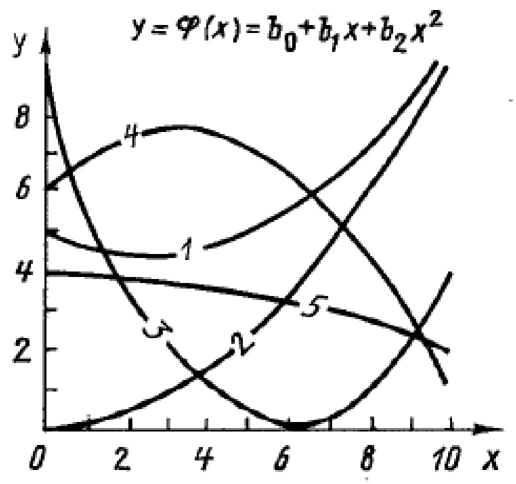


Рис. 7. $1 - y = 5 - 0{,}5x + 0{,}1x^2$, $2 - y = 0{,}1x^2$, $3 - y = 9 - 3x + 0{,}25x^2$, $4 - y = 6 + x - 0{,}15x^2$, $5 - y = 4 - 0{,}1x - 0{,}01x^2$.

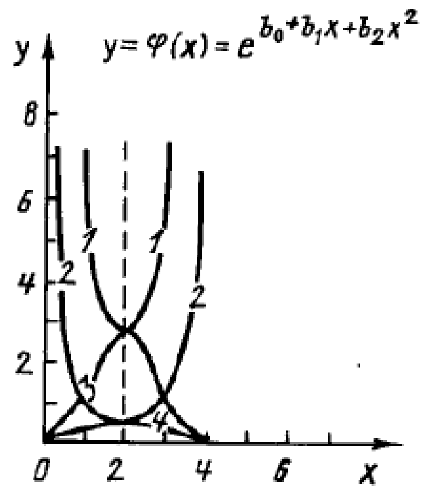


Рис. 8. $1 - y = e^{x^2-4x+3}$, $2 - y = e^{x^2-4x+5}$, $3 - y = e^{-x2+4x-3}$, $4 - y = e^{-x^2+4x-5}$.

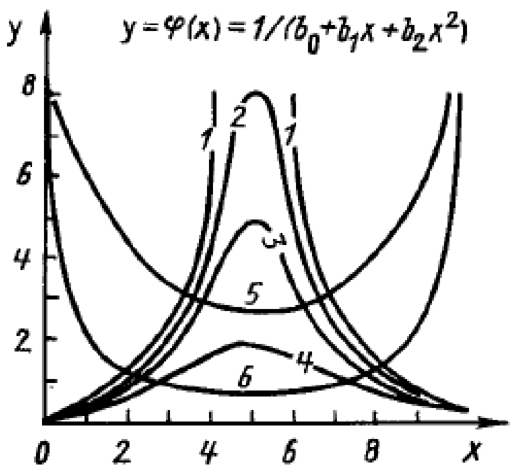


Рис. 9. $1 - y = 1/(0{,}1x^2 - x + 2{,}5)$, $2 - y = 1/(0{,}1x^2 - x + 2{,}62)$, $3 - y = 1/(0{,}1x^2 - x + 2{,}7)$, $4 - y = 1/(0{,}1x^2 - x + 3)$; $5 - y = 1/(0{,}01x^2 + 0{,}1x + 0{,}1)$, $6 - y = 1/(-0\ 04x^2 + 0{,}4x + 1)$.

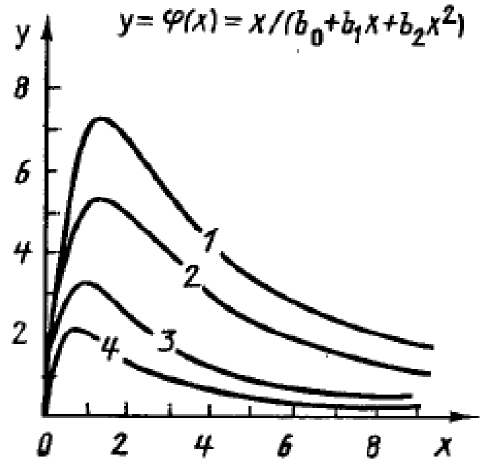


Рис. 10. $1 - y = x/(0{,}2 - 0{,}1x + 0{,}07x^2)$, $2 - y = x/(0{,}2 - 0{,}1x + 0{,}1x^2)$, $3 - y = x/(0{,}2 - 0{,}1x + 0{,}2x^2)$, $4 - y = x/(0{,}2 - 0{,}1x + 0{,}4x^2)$.

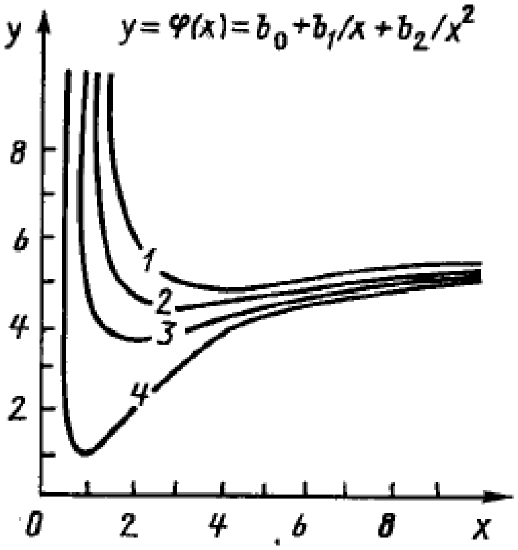


Рис. 11. $1 - y = 6 - 10x^{-1} + 5x^{-2}$, $2 - y = 6 - 10x^{-1} + 10x^{-2}$, $3 - y = 6 - 10x^{-1} + 15x^{-2}$, $4 - y = 6 - 10x^{-1} + 20x^{-2}$.

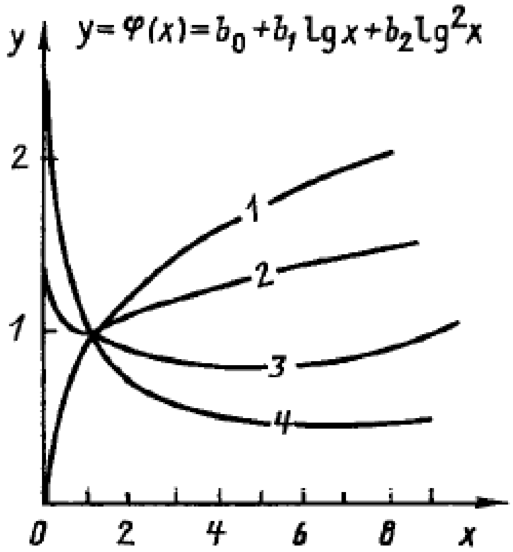


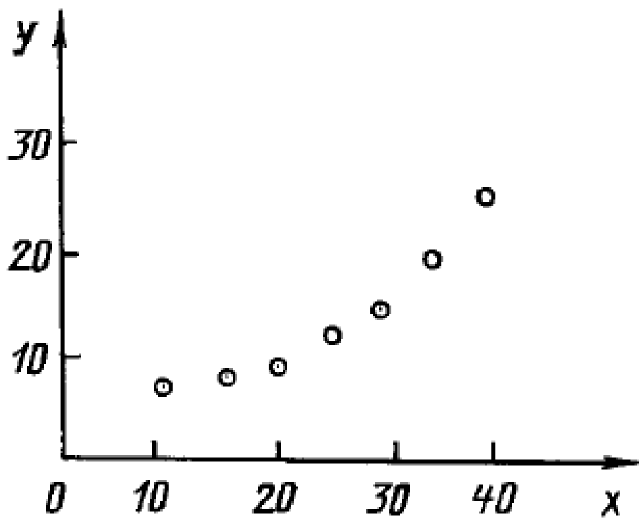
Рис. 12. $1 - y = 1 + \lg x + 0{,}1\lg^2 x$, $2 - y = 1 + 0{,}2\lg x + 0{,}3\lg^2 x$, $3 - y = 1 - \lg x + \lg^2 x$, $4 - y = 1 - \lg x + 0{,}5\lg x$.

Пример. При исследовании зависимости длины тормозного пути y (в *м*) от скорости движения x (в *км/ч*) получены следующие экспериментальные данные

x	10	15	20	25	30	35	40
y	7,5	8,8	9,8	12,5	15	20	27

Указать вид аппроксимирующей функции.

Решение. С учетом характера расположения точек на точечной диаграмме



в качестве аппроксимирующей может быть выбрана одна из следующих функций: параболическая $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, степенная $\varphi(x) = a_0 x^{a_1}$ или показательная $\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x}$. Таким образом, можно подобрать достаточно много кривых, проходящих вблизи экспериментальных точек, то есть вопрос, какую именно из них следует выбрать в качестве аппроксимирующей, решается неоднозначно.

2. ***При выборе аппроксимирующей функции*** $y = \varphi(x)$ ***рекомендуется, если это возможно, провести ее линеаризацию, то есть сделать такую замену переменных, которая сводила бы нелинейную функцию*** $y = \varphi(x)$ ***к линейной.***

Предположим, что замена переменных $t = t(x)$, $z = z(y)$ приводит нелинейную функцию $y = \varphi(x)$ к линейной. Если в системе координат Otz построить точечную диаграмму (t_i, z_i), $i = \overline{1, n}$ (где $t_i = t(x_i)$, $z_i = z(y_i)$), то точки должны располагаться вдоль прямой линии. В противном случае не рекомендуется выбирать $\varphi(x)$ из рассматриваемого класса функций. В таблице указаны замены переменных, приводящие нелинейные функции к линейным либо квадратичным.

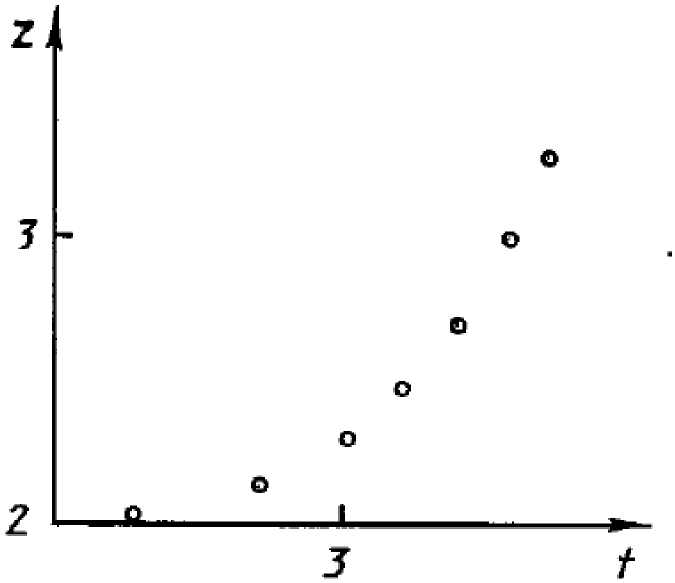
Исходная функция	Функция, полученная в результате замены переменной	Замена переменных
$y = a_0 x^{a_1}$	$z = a + a_1 t$	$z = lny$, $t = \ln x$
$y = a_0 e^{a_1 x}$	$z = a + a_1 t$	$z = lny$, $t = x$
$y = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$	$z = a_0 + a_1 t$	$z = y$, $t = \dfrac{1}{x}$
$y = \dfrac{1}{a_0 + a_1 x}$	$z = a_0 + a_1 t$	$z = \dfrac{1}{y}$, $t = x$
$y = \dfrac{x}{a_0 + a_1 x}$	$z = a_0 + a_1 t$	$z = \dfrac{x}{y}$, $t = x$
$y = a_0 + a_1 \ln x$	$z = a_0 + a_1 t$	$z = y$, $t = \ln x$
$y = e^{a_0 + a_1 x + a_2 x}$	$z = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$z = lny$, $t = x$
$y = \dfrac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$	$z = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$z = \dfrac{1}{y}$, $t = x$

$y=\dfrac{x}{a_0+a_1x+a_2x^2}$	$z=a_0+a_1t+a_2t^2$	$z=\dfrac{x}{y},\ t=x$
$y=a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}$	$z=a_0+a_1t+a_2t^2$	$z=y,\ t=\dfrac{1}{x}$

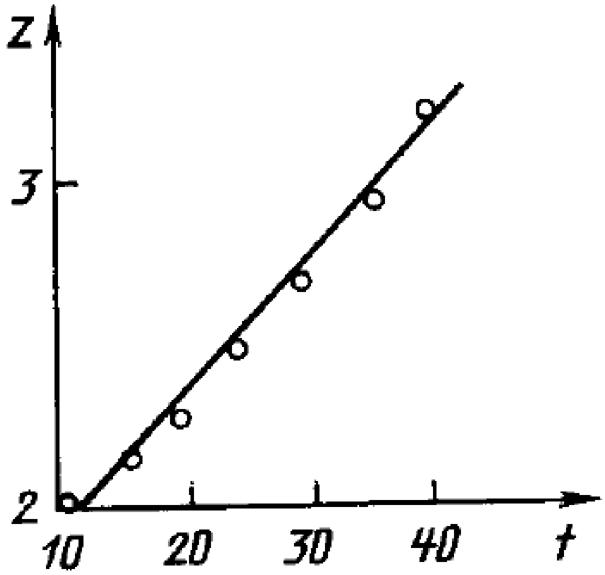
С помощью метода линеаризации проверим, можно ли в качестве аппроксимирующей функции в условиях рассмотренного примера взять степенную $\varphi(x)=a_0x^{a_1}$ или экспоненциальную $\varphi(x)=a_0e^{a_1x}$ функции. Сделаем замену переменных $z=\ln y$, $t=\ln x$. Получим следующую таблицу экспериментальных данных.

$t=\ln x$	2,30	2,71	3,00	3,22	3,40	3,56	3,59
$z=\ln y$	2,01	2,17	2,28	2,53	2,71	3,00	3,30

Характер расположения точек (t_i,z_i), $i=\overline{1,7}$ на точечной диаграмме – нелинейный. Следовательно, выбирать степенную функцию в качестве аппроксимирующей нецелесообразно.



Сделав замену переменных $z=lny$, $t=x$ и взяв в качестве аппроксимирующей экспоненциальную функцию $y=a_0e^{a_1x}$ построенная точечная диаграмма в системе координат Otz увидим, что точки (t_i,z_i) «вытянуты» вдоль прямой линии.



Поэтому можно принять $y = a_0 e^{a_1 x}$ в качестве аппроксимирующей линии.

3. ***При подборе аппроксимирующей функции следует по возможности сочетать графические методы (характер расположения точек на точечной диаграмме) с логически-профессиональным анализом.***

В рассмотренном выше примере остановились на двух возможных аппроксимирующих функциях: параболической и экспоненциальной. Несложные рассуждения профессионально-логического характера позволяют оставить выбор на параболической функции. Длина тормозного пути зависит от нескольких факторов: скорости автомобиля, времени реакции на сигнал об остановке и состояния тормозной системы автомобиля. Автомобиль успеет пройти $a_1 x$ *км* до момента включения тормозов и еще $a_2 x^2$ *км* после его начала, так как расстояние пройденное до остановки с момента торможения, пропорционально квадрату скорости.

Помимо сформулированных выше рассуждений по поводу выбора вида аппроксимирующей функции, имеет смысл придерживаться еще некоторых советов:

- в случае исследования осциллирующих гармонических процессов привлекать аппарат тригонометрических функций;
- для простоты второго этапа построения аппроксимирующей функции $y = \varphi(x, a_0, a_1, ..., a_k)$ желательно, чтобы функция была линейна относительно параметров $a_0, a_1, ..., a_k$;
- при подборе аппроксимирующих функций рекомендуется использовать многочлены степени не выше третьей.

После завершения первого этапа, переходим ко второму: определению параметров $a_0, a_1, ..., a_k$ аппроксимирующих функций $y = \varphi(x, a_0, a_1, ..., a_k)$ выбранного класса.

§3.3. Определение параметров аппроксимирующих функций по методу наименьших квадратов

Пусть вид аппроксимирующей функции $y=\varphi\left(x,a_0,a_1,...,a_k\right)$ известен. Подбор параметров $a_0,a_1,...,a_k$ этой функции по методу наименьших квадратов производится таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от ординат аппроксимирующей функции была минимальной, то есть

$$S=S\left(a_0,a_1,...,a_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi\left(x_i,a_0,a_1,...,a_k\right)-y_i\right]^2\to\min$$

Очевидно, что сумма квадратов есть величина неотрицательная, поэтому она всегда принимает наименьшее значение. Задача определения тех значений параметров $a_0,a_1,...,a_k$ при которых функция $S\left(a_0,a_1,...,a_k\right)$ достигает минимума, сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a_0}=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial S}{\partial a_n}=0.\end{cases}$$

В общем случае это система нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров. Решая ее, находим значения $a_0,a_1,...,a_k$, которые и дают минимум искомого функционала. Наиболее просто обстоит дело в случае аппроксимирующей функции линейной относительно параметров a_i. Рассмотрим методику определения параметров некоторых аппроксимирующих функций.

Определение параметров линейной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов.

Пусть экспериментальные точки $\left(x_i,y_i\right)$, $i=\overline{1,n}$ располагаются на точечной диаграмме вдоль прямой линии. Выберем в качестве аппроксимирующей линейную функцию: $\varphi(x)=a_0+a_1x$. Подберем ее параметры a_0 и a_1 таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений значений y_i, $i=\overline{1,n}$, зарегистрированных в результате эксперимента, от ординат аппроксимирующей функции $\varphi(x)=a_0+a_1x$ была минимальной:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i\right]^2\to\min .$$

Это функция двух переменных a_0 и a_1. Для нахождения ее минимума необходимо приравнять к нулю частные производные этой функции по a_0 и a_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i\right](-1) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i\right](-x_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Решая последнюю систему двух линейных уравнений относительно a_0 и a_1, находим

$$a_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Определение параметров квадратичной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов.

Пусть расположение экспериментальных точек (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ на точечной диаграмме напоминает участок параболы. Тогда в качестве аппроксимирующей функции возьмем параболу $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Подберем ее параметры a_0, a_1, a_2 таким образом, чтобы сумма, чтобы сумма квадратов отклонений фунуции y от аппроксимирующей функции $\varphi(x)$

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x^2\right]^2 \to \min$$

была минимальной.

Приравнивая частные производные $S'_{a_0}, S'_{a_1}, S'_{a_2}$ к нулю, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-1) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-x_i) = 0, \Leftrightarrow \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-x_i^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим искомые параметры a_0, a_1, a_2 параболической аппроксимирующей функции $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

В случае зависимости не являющейся полиномиальной, такого рода красивых формул получить не представляется возможным.