МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права

Ковалева Л.Ф.

Дискретная математика

Москва 2002

УДК – 519.1
ББК – 22.176
К – 56

Ковалева Л.Ф. Дискретная математика / Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. – М., 2002 г., 93 с.

Содержание

Введение **4**
1. Множества **5**
1.1. Операции над множествами. Мощность множеств. Отображение множеств 5
1.2. Отношения на множествах 18
2. Математическая логика **22**
2.1. Алгебра высказываний 22
2.2. Проблемы разрешимости. Нормальные формы 35
2.3. Исчисление высказываний 45
2.4. Логика предикатов 54
3. Теория графов **58**
3.1. Графы 58
3.2. Деревья 79
3.3. Экстремальные задачи на графах. 84
Литература **93**

Введение

Данное пособие рассчитано на читателя, впервые знакомящегося с курсом дискретной математики, основными понятиями Булевой алгебры и теории графов.

В пособии изложены основные понятия теории множеств и алгебры высказываний, простейшего основного раздела математической логики, сведения из теории графов, рассмотрены задачи по определению экстремальных путей на графе, что позволяет решить такие задачи экономического содержания, как построение самого дешевого нефтепровода, определение скорейшего времени завершения проекта и др.

В целом изложенный в пособии материал является одной из основ построения математических методов в экономике.

Данное пособие не претендует на исчерпывающую полноту и абсолютную строгость изложенного материала.

1. Множества

1.1. Операции над множествами. Мощность множеств. Отображение множеств

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством.

Объекты, объединенные одним общим свойством, называют элементами множества и обозначают a, b, c, ... x, y, z. Множества обозначают A, B, C, ... X, Y, Z. Запись $a \in A$ означает, что элемент "a" принадлежит множеству A, $b \notin A$ означает, что элемент "b" не принадлежит множеству A.

Множество, число элементов которого конечно, называют конечным и бесконечным в противном случае.

Конечные множества разделяются на счетные и несчетные. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется счетным и несчетным в противном случае. Так множество четных чисел - счетное, множество действительных чисел - несчетное.

Конечные и счетные множества называются дискретными множествами.

Дискретная математика - математика дискретных множеств.

Если каждый элемент множества A есть в месте с тем элемент множества B, то множество A называется частью, или подмножеством множества B и обозначается $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются равносильными и обозначаются A=B.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается V, $\varnothing$. Пустое множество считают конечным множеством и подмножеством любого множества.

Любое множество есть подмножество самого себя. Такое подмножество так же, как и пустое, называют несобственными подмножествами в отличии от всех других подмножеств, которые называют собственными.

Пример.

Пусть $A=\{a_1, a_2, a_3\}$. Подмножества $\{a_1, a_2, a_3\}$ и V - несобственные подмножества A. Собственные: $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$.

Число подмножеств любого конечного множества, содержащего “n” элементов, равно 2^n.

Множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании, называют универсальным и обозначают “U”.

На множествах определены следующие операции.

Объединением, или суммой множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

$$C=A\cup B=\{c_i : c_i\in A \text{ или } c_i\in B\}$$

Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

$$C=A\cap B=\{c_i : c_i\in A \text{ и } c_i\in B\}$$

Дополнением $\overline{A}$ множества A есть множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству U и не принадлежат A.

$$C=\overline{A}=\{c_i : c_i\in U \text{ и } c_i\notin A\}$$

Данные три основные операции обладают следующими свойствами.

$A\cup A=A$
$A\cap A=A$ } идемпотентность

$A\cup B=B\cup A$
$A\cap B=B\cap A$ } коммутативность

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ } ассоциативность

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ } дистрибутивность

$A\cup U=U$
$A\cap V=V$
$A\cap U=A$
$A\cup V=A$
$A\cup \overline{A}=U$
$A\cap \overline{A}=V$
$\overline{\overline{A}}=A$

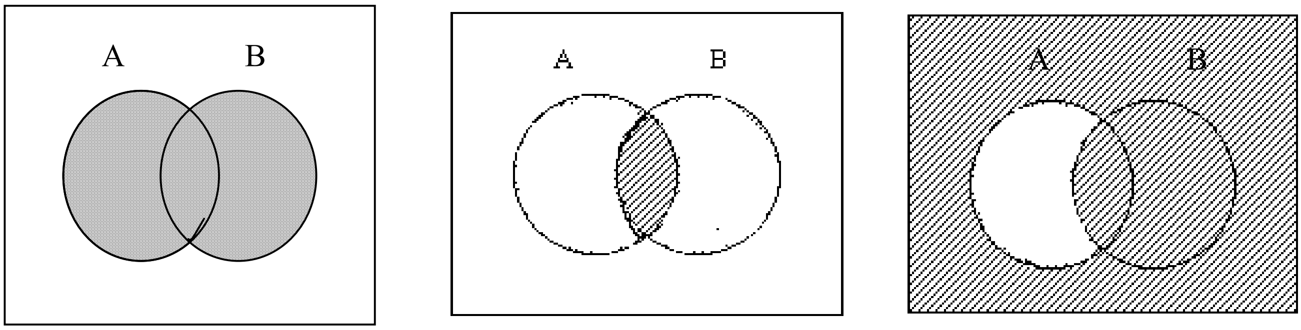
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ } законы де Моргана

$\overline{V}=U$
$\overline{U}=V$
$A\subset B$ равносильно $\overline{B}\subset\overline{A}$

Соотношения 1-20 обладают свойствами двойственности: если в одной из формул поменять местами $\cup$ и $\cap$, U и V, $\subset$ и $\supset$, то получим другую формулу из этого списка.

Порядок выполнения операций: дополнение (¯),
пересечение ($\cap$),
объединение($\cup$).

Названные операции и свойства к ним могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера-Венна (рис. 1.1.1).



$A \cup B$ A? B $\overline{A}$

Рис. 1.1.1

Абстрактная алгебраическая система подмножеств некоторого универсального множества с введенными для них операциями объединения, пересечения, дополнения, обладающая перечисленными выше свойствами, образует Булеву алгебру.

К операциям над множествами относятся также:

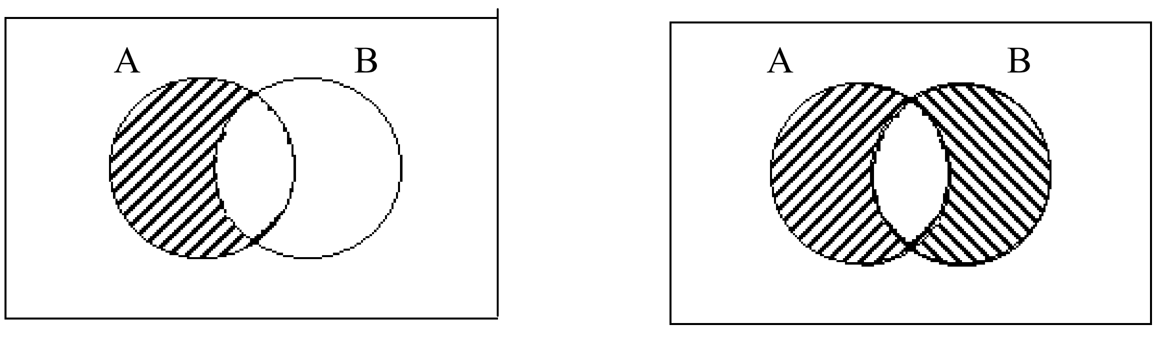
1. Разность множеств A\ B - множество, состоящее из элементов множества A и не принадлежащих множеству B.

$$C=A \setminus B=\{c_i : c_i \in A \text{ и } c_i \notin B\}$$

Очевидно, что справедлива формула $C=A \setminus B=A \cap \overline{B}$.

2. Симметрическая разность $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Эти операции можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 1.1.2).



$A \setminus B$ A ? B

Рис.1.1.2

Декартово (прямое) произведение множеств A и B: $A\times B=C$.

3. Декартовым произведением $A\times B$ является множество C всех упорядоченных пар $<a_i,b_j>$, где $a_i\in A$, $b_j\in B$, т.е.

$$C=A\times B=\{<a_i,b_j> : a_i\in A \text{ и } b_j\in B\}$$

Иллюстрацией декартова произведения множеств $A=\{a_1,a_2\}$и $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ является рис. 1.1.3.

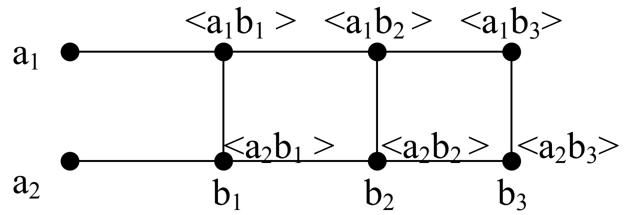


Рис. 1.1.3

В общем случае декартовым произведением множеств A_1, A_2, ... A_n называется множество

$$A_1\times A_2\times \ldots \times A_n=\{<a_1, a_2, \ldots a_n> : a_1\in A_1, a_2\in A_2 \ldots a_n\in A_n\}$$

Рассмотрим несколько упражнений, помогающих усвоить приведенные выше понятия.

Упражнение 1.1.1

Пусть заданы три числовых множества $A=\{2,3,4,10\}$, $B=\{1,2,10,12\}$, $C=\{1,9,10\}$. Требуется указать элементы множеств

а) $A\cap B\cup B\cap C=D$ б) $(A\cup C) \setminus (B\cap A)=E$

Множество "D" есть объединение двух множеств $A\cap B$ и $B\cap C$, что следует из порядка выполнения действий.

$A\cap B=\{2,10\}$, $B\cap C=\{1,10\}$ и $D=\{1,2,10\}$

Множество "E" есть разность между объединением $A\cup C$ и пересечением $B\cap A$.

$A\cup C=\{1,2,3,4,10,12\}$, $B\cap A=\{2,10\}$ и $E=\{1,3,4,12\}$

Упражнение 1.1.2

Пусть множество A состоит из точек M(x,y) плоскости, для которых $|x|\le 4$ и $|y|\le 4$, множество B - из точек плоскости, для которых $x^2+y^2\le 25$, C - из точек плоскости для которых $x>0$. Требуется изобразить множество $A\cap B\setminus C$.

Как следует из условия, множество A есть квадрат, B - круг, C - полуплоскость. Решение приведено на рис. 1.1.4.

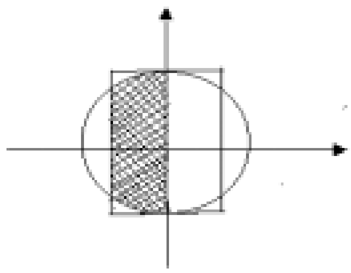


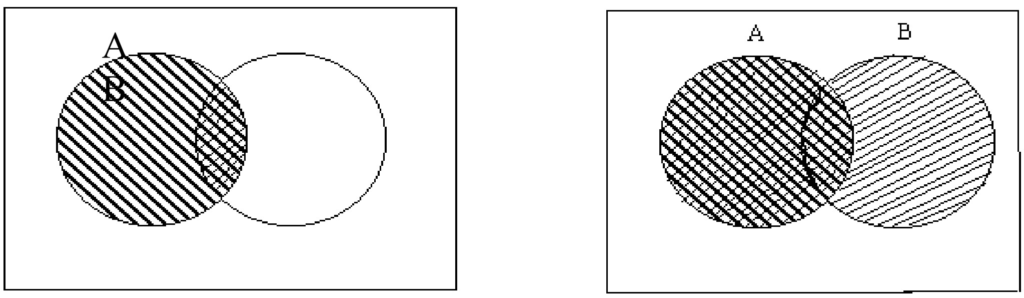
Рис. 1.1.4

A∩B - "обрезанный квадрат, обведенный на рисунке жирной линией.

A∩B\C - множество точек, полученное удалением из A∩B точек полуплоскости $x>0$. Результат изображен на рис. 1.1.4 штриховкой .

Упражнение 1.1.3

На диаграмме Эйлера-Венна убедиться в справедливости формул: A∪A∩B=A и (A∪B)∩A=A.



A∩B
A

A∪B
A

Рис. 1.1.5

Данные формулы называют формулами поглощения, т.к. A∩B⊂A в первой формуле и A⊂ A∪B во второй.

Формулы поглощения помогают в преобразованиях, упрощающих выражения, задающие некоторые множества.

Упражнение 1.1.4

Упростить выражение

$$S = \overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cup A \cap B \cap \overline{C}} \cap \overline{(A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C)}$$

В преобразованиях будем пользоваться списком свойств операций над множествами и формулами поглощения. Знак "∩" в записи формул часто опускают.

S представляет собой произведение двух дополнений. Преобразуем каждое из них. По закону де Моргана имеем

1) $S1 = \overline{\overline{A\overline{B}} \cup AB\overline{C}}$

Затем вновь ко второму сомножителю применяем закон де Моргана, а к первому- свойство $\overline{\overline{A}} = A$.

Получим $S1 = A\overline{B}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = A\overline{B}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) = A\overline{B}$.

Последний результат получен с использованием формулы поглощения:

$$\overline{B}(\overline{B} \cup (\overline{A} \cup C)) = \overline{B}$$

2) $S_2 = \overline{(A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C)} = \overline{(A \cup B \cup C) \cap \overline{(A\overline{C})}}$, так как дважды заменяем разность равносильной формулой $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Далее вновь применяем закон де Моргана:

$$S_2 = \overline{A \cup B \cup C)} \cup \overline{\overline{A\overline{C}}} = \overline{ABC} \cup A\overline{C}$$

Вынесем за скобки, используя дистрибутивный закон 7, $\overline{C}$.

$$S_2 = \overline{C}(\overline{A}\overline{B} \cup A)$$

К выражению, стоящему в скобках, применим дистрибутивный закон 8:

$$A \cup \overline{AB} = (A \cup \overline{A})(A \cup \overline{B}) = U(A \cup \overline{B}) = A \cup \overline{B}$$

Следовательно, $S_2 = \overline{C}(A \cup \overline{B})$

Итак, $S = S_1 \cap S_2 = A\overline{B}\overline{C}(A \cup \overline{B}) = A\overline{B}\overline{C}$, т.к. по формуле поглощения $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}}$.

Помимо формул поглощения в преобразованиях использовались формулы склеивания $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ и $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{AB} = \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}$, одна из которых была доказана в преобразованиях этого упражнения.

Упражнение 1.1.5

Доказать справедливость следующего равенства и проверить результат на диаграммах Эйлера-Венна.

$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

Заменяя разность равносильной формулой, легко приходим к результату:

1) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}} = \mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}$

2) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap \overline{AC} = AB(\overline{A} \cup \overline{C}) =$
$AB\overline{A} \cup AB\overline{C} = V \cup AB\overline{C} = AB\overline{C}$

(Использовали закон де Моргана, дистрибутивный закон №7, закон №14: $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{V}$, закон №10: $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} = \varnothing$, закон №12: $\mathrm{A} \cup \mathrm{V} = \mathrm{A}$.)

Иллюстрируем справедливость этого равенства на диаграммах Эйлера-Венна.

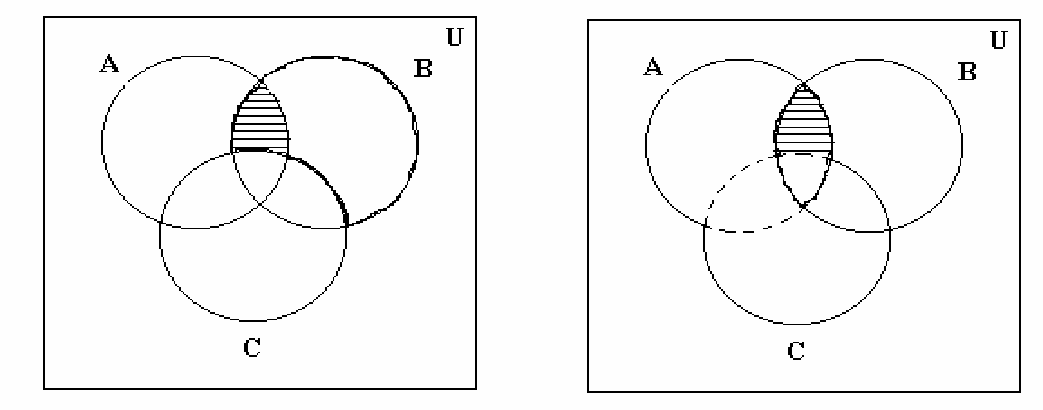


Рис. 1.1.6

Область B\C обведена жирной линией, а область $A \cap (B \setminus C)$ заштрихована

Область $A \cap B$ обведена жирной линией, $A \cap C$ - пунктиром, а область $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$ заштрихована .

Упражнение 1.1.6

Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором - 30 штук, а на третьем - 28. Причем на первом и втором станках обработано 5 деталей, на первом и третьем - 10 деталей, на втором и третьем - 8 деталей, на всех трех станках обработано три детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

В качестве универсального выберем множество всех деталей. Число его элементов равно 100. Пусть A - множество деталей, обработанных на первом станке, B - на втором, C - на третьем. Число элементов множества A обозначим n(A). Оно равно 42, т.е. n(A)=42. Аналогично, n(B)=30, n(C)=28. Обратимся к диаграмме (рис. 1.1.7).

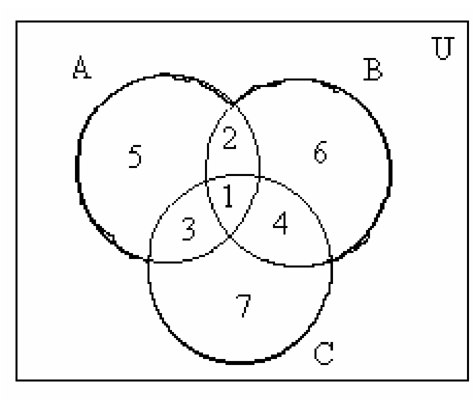


Рис. 1.1.7

Обведенное на чертеже жирной линией множество $A \cup B \cup C$ есть множество деталей, обработанных хотя бы на одном из станков. Оно разбито на 7 непересекающихся подмножеств, обозначенных на чертеже цифрами. Область 1 есть множество деталей, прошедших обработку на всех трех станках, т.е. множество $A \cap B \cap C$. По условию задачи $n(A \cap B \cap C)=3$. Множество деталей, обработанных на первом и втором станках, т.е. $A \cap B$, есть сумма областей, помеченных цифрами 1 и 2. Причем область 2 - множество деталей, обработанных только на первом и втором станках.

По условию задачи $n(A \cap B)=5$. Следовательно, число деталей, обработанных только на первом и втором станках, равно 5-3=2. Аналогично, число элементов множества, обозначенного цифрой 3, есть число деталей, прошедших обработку на первом и третьем станках, оно равно $n(A \cap C)$ - $n(A \cap B \cap C)$=10-3=7. Число деталей, прошедших обработку только на втором и третьем станках (область 4), равно $n(B \cap C)$ - $n(A \cap B \cap C)$=8-3=5.

Область, помеченная на чертеже цифрой 5, есть множество деталей, обработанных только на первом станке. Число элементов этого множества получим, если из числа всех обработанных на первом станке деталей вычесть число деталей, обработанных одновременно на первом и втором, а также на первом и третьем станках, в том числе и на всех трех станках, 42-(3+2+7)=30.

Аналогично можно определить число деталей, обработанных только на втором станке (область 6), 30-(3+2+5)=20, а также только на третьем (область 7) 28-(3+7+5)=13. Число всех обработанных деталей, т.е. $n(A \cup B \cup C)$, получим, если сложим число элементов всех областей с 1 по 7. Оно равно 80. Дополнением к нему является множество необработанных деталей $U \setminus A \cup B \cup C = \overline{A \cup B \cup C}$, $n(\overline{A \cup B \cup C})$=100-80=20.

Заметим, число элементов непересекающихся множеств A и B (т.е. множеств, для которых выполняется условие $A \cap B = V$) отличается от числа элементов пересекающихся множеств. Рассмотрим пример.

Упражнение 1.1.7

Лекции по экономике посещают 20 студентов, по математике - 30. Найти число студентов, посещающих лекции по экономике или математике, если 1) лекции проходят в одно и то же время, 2) лекции проходят в разные часы и 10 студентов слушают оба курса.

Очевидно, в первом случае имеем дело с непересекающимися множествами, т.к. студентов, посещающих оба курса, не существует, т.е.

$A \cap B = V$, если A - множество студентов, посещающих лекции по математике, B - по экономике. Следовательно $n(A \cap B)=0$, а $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)=20+30=50$.

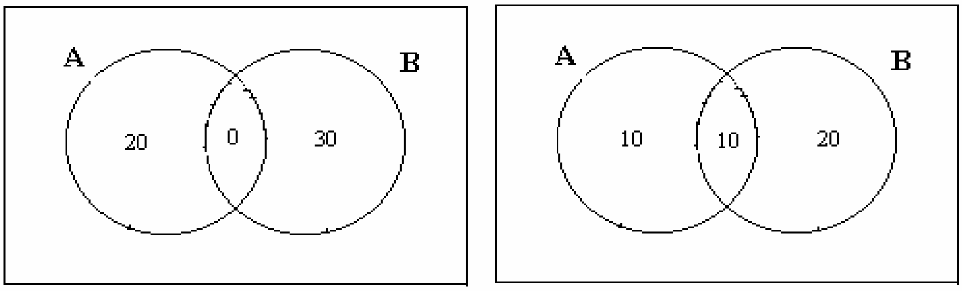


Рис.1.1.8

Во втором случае, число студентов, посещающих лекции только по математике, - 10, т.к. из 20 человек 10 слушают оба курса. Аналогично только экономику слушают 20 человек из общего числа студентов, равного 30.

Следовательно, лекции по математике или экономике слушают 40 человек или $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)- n(A \cap B)$. Графическое решение задачи приведено на рис. 1.1.8.

Эта формула - простейший вариант формулы включений и исключений, отвечающая на вопрос о сумме любого числа пересекающихся множеств $n(A_1 \cup A_2 \cup ... A_k)$. Так для k=3 получим

$$n(A \cup B \cup C)= n(A)+ n(B)+ n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

В качестве примера слушателям предлагается получить формулу для k=4.

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$, то говорят, что определено отображение f множества X во множество Y. Обозначают $y=f(x)$. Элемент y есть образ элемента x при данном отображении f, x - прообраз элемента y и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Частным случаем отображения множества X во множество Y является отображение множества X на множество Y. Отображение f множества X в Y является отображение множества X на Y, если каждому элементу $y \in Y$ был поставлен в соответствие какой-либо элемент $x \in X$ при данном отображении f. Такое соотношение называется сюръективным, т.е. если каждый элемент множества y имеет прообраз, то отображение f сюръективно.

Пусть $X=\{a, b, c, d\}$ $Y=\{2, 4, 6\}$. Зададим отображения f_1 и f_2 так:

$$f_1:\ \begin{array}{l} a\to 2\\ b\to 4\\ c\to 4\\ d\to 6 \end{array} \qquad f_2:\ \begin{array}{l} a\to 2\\ b\to 2\\ c\to 6\\ d\to 6 \end{array}$$

т.е.

$f_1(a)=\{2\}$	$f_1^{-1}(2)=\{a\}$	$f_2(a)=\{2\}$	$f_2^{-1}(2)=\{a,b\}$
$f_1(b)=\{4\}$	$f_1^{-1}(4)=\{b,c\}$	$f_2(b)=\{2\}$	$f_2^{-1}(4)=\{\varnothing\}$
$f_1(c)=\{4\}$	$f_1^{-1}(6)=\{d\}$	$f_2(c)=\{6\}$	$f_2^{-1}(6)=\{c,d\}$
$f_1(d)=\{6\}$		$f_2(d)=\{6\}$	

Отображение f_1 X в Y является сюръективным, т.е. отображением X на Y, т.к. каждый элемент множества Y имеет прообраз. Отображение f_2 несюръективно, элемент "4" не имеет прообраза.

Отображение X в Y называется инъективным, если для каждого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза. Приведенные выше отображения f_1 и f_2 не являются инъективными.

$$X=\{x_1, x_2, x_3\} \quad Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \quad f_3:\ \begin{array}{l} x_1\to y_1\\ x_2\to y_2\\ x_3\to y_4 \end{array}$$

Отображение f_3 - инъективно.

Если отображение f сюръективно и инъективно, оно называется биективным (взаимнооднозначное соответствие).

Очевидно, биективное отображение между конечными множествами X и Y возможно только в случае, когда число элементов этих множеств совпадает.

Примером биективного отображения для бесконечных множеств может служить отображение f, установленное между множеством натурального ряда чисел A={1, 2, 3, ... n, ...} и множеством четных положительных чисел B={2, 4, 6, ...} по типу $n \leftrightarrow 2n$.

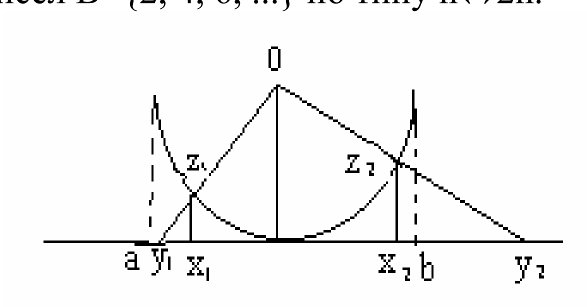


Рис.1.1.9

На рис. 1.1.9 показана возможность установления биективного отображения между множеством Z точек полуокружности и множеством

X точек открытого отрезка (a, b), а также между множеством Z и множеством Y точек прямой - множеством Y.

$z, z_1 \in Z$; Множества X, Y, Z - несчетные.

$x, x_1 \in X$;

$y, y_1 \in Y$.

Упражнение 1.1.8

Установить биективное отображение между множеством A={1, 6, 11, 16, 21, ...} и натуральным рядом чисел.

Очевидно, это можно сделать, поставив в соответствие элементу натурального ряда "n" $a_n=1+5(n-1)\in A$, т.е. $n\leftrightarrow 1+5(n-1)$.

Упражнение 1.1.9

Установить биективное отображение между множеством точек плоскости и множеством точек сферы, из которой выброшена одна точка.

Очевидно, это можно сделать геометрически (рис. 1.1.10):

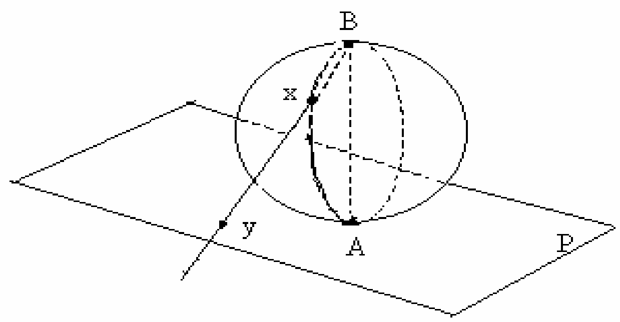


Рис. 1.1.10

Обозначим множество точек плоскости P, множество точек сферы - M, точка A выброшена из сферы, $x\in M$, $y\in P$.

Чтобы установить биективное отображение между M и P достаточно соединить точку B лучом с точкой "x" и получить соответствующую точку "y", или точку B соединить с точкой "y" и получить соответствующую точку "x", т.е. "x"$\leftrightarrow$"y".

Два множества называются количественно эквивалентными (или просто эквивалентными), если между ними можно установить биективное отображение.

Исходя из этого определения можно дать другую формулировку счетного множества: счетным называется множество, эквивалентное натуральному ряду чисел.

Очевидно, что справедливы следующие утверждения:

1. Конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.
2. Два множества, порознь эквивалентные третьему, эквивалентны между собой.
3. Все счетные множества эквивалентны между собой.
4. Всякое множество, эквивалентное счетному множеству, счетно.

О двух эквивалентных множествах говорят, что они имеют одинаковую мощность.

Мощность - это то общее, что есть у эквивалентных множеств. Что общего имеют эквивалентные множества? Общим для них является число элементов. Мощность конечного множества есть число его элементов. Для бесконечных множеств является аналогом количества его элементов.

Все счетные множества имеют мощность, равную мощности натурального ряда чисел. Мощность натурально ряда чисел обозначается $\aleph_0$ - алеф-нуль.

Мощность континуума обозначается готической буквой С. Между этими мощностями существует следующая связь: $C = 2^{\aleph_0}$.

Как сравниваются мощности?

Рассмотрим два множества А и В. Если между ними можно установить биективное отображение, то мощности данных множеств равны. Если между множеством А и частью множества В можно установить биективное отображение, а между Множеством В и частью А нельзя, то мощность множества А меньше мощности множества В.

Для конечных множеств это положительно очевидно. Для бесконечных множеств оно также справедливо.

Мощность натурального ряда чисел - меньшая среди мощностей всех бесконечных множеств. Следующая по величине - мощность континуума. Пытаясь найти множество, мощность которого была бы промежуточной между мощностями континуума и натурального ряда чисел, Георг Кантор, основатель теории множеств, сформулировал так называемую гипотезу континуума - предложение, отрицающее множество промежуточной мощности. Попытки доказать это предложение привели к серьезным теоретическим исследованиям, связанным с пересмотром оснований математики.

Множества наибольшей мощности не существует, т.к. мощность множества подмножеств исходного множества всегда больше мощности исходного множества.

Упражнение 1.1.10

Доказать, что если A\B эквивалентно B\A, то A и B эквивалентны (рис. 1.1.11).

Решение: $A=(A\backslash B)\cup A\cap B$

$B=(B\backslash A)\cup A\cap B$

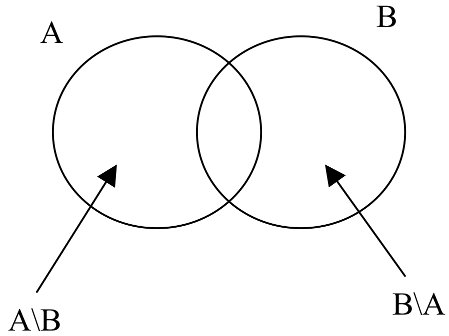


Рис. 1.1.11

Если (A\B) и (B\A) эквивалентны, то между элементами этих множеств существует биективное отображение. Элементы множества ($A\cap B$) поставим в соответствие самим себе. Следовательно, между элементами множеств A и B существует биективное отображение, т.е. A и B эквивалентны, т.е. мощности множеств A и B одинаковы.

Сформулируем некоторые основные теоремы, справедливые для счетных множеств.

Теорема 1.Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счетное множество.

Теорема 2. Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть счетное множество.

Теорема 3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема 4. Если M - несчетное множество, а $A\subset M$ есть конечное или счетное множество, то множества M и M\A эквивалентны.

Теорема 5. Присоединяя к некоторому бесконечному множеству M, счетному или несчетному, счетное или конечное множество A, получим множество $M\cup A$, эквивалентное множеству M.

Теорема 6. Всякое бесконечное множество M содержит часть $A\subset M$, эквивалентную всему множеству M.

Теорема 7. Множество всех пар натуральных чисел счетно. Под парой натуральных чисел понимают два натуральных числа, расположенных в определенном порядке.

Теорема 8. Множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 9. Множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счетного множества, есть счетное множество.

Теорема 10. Множество всех алгебраических чисел счетно.

Теорема 11. Множество континуума несчетно.

1.2. Отношения на множествах

Предложения "x - брат y", "x<y" выражают отношения между объектами некоторого множества.

Первое предложение свидетельствует, что два объекта "x" и "y" принадлежат общему классу - сыновья общих родителей. Второе предложение выражает относительный порядок в системе.

Об отношении можно говорить тогда, когда можно выделить множество объектов, на которых это отношение определено.

Приведенные примеры есть бинарные отношения (они выполняются для пары объектов). Тернарные отношения определены для трех объектов, n-арные - для n объектов.

Отношением A на множестве M называют подмножество A множества M×M. Если <x,y> входит в A, то обозначают xAy ($\langle x,y\rangle \in A$). Эта запись читается так: "x находится в отношении A с y".

Итак, отношением называется упорядоченная пара $\langle A,M\rangle$, где $A \subseteq M \times M$, M - множество, на котором определено отношение, A - множество пар, для которых это отношение определено. (Рассматриваем бинарные отношения).

Обратимся к примеру, Зададим отношение "x_i - победитель y_j" в шахматном турнире из пяти игроков x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, турнир игрался в один круг. Данные приведены в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	0
x_2	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0

$i^{\underline{ая}}$ строка соответствует элементу x_i, $j^{\underline{ый}}$ столбец элементу x_j, на их пересечении ставится 1, если отношение x_iAx_j выполнено, и 0, если нет. Так единица, стоящая на пересечении $4^{\underline{ой}}$ строки и $1^{\underline{го}}$ столбца соответствует тому, что игрок x_4 выиграл у игрока x_1, т.е. $\langle x_4Ax_1\rangle$.

Итак, на множестве $M(x_1, \ldots x_5)$ отношение "x_i - победитель y_j" задано матрицей

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если\_выполнено } x_iAx_j \\ 0, \textit{если\_не\_выполнено } x_iAx_j \end{cases}$$

Такая матрица полностью задает отношение A на множестве M. Прямое произведение M×M представлено двадцатью пятью элементами матрицы (табл. 1.2.1).

Если $a_{ij}\equiv 0 \quad (i, j = \overline{1,n})$, то имеем пустое отношение, т.е. такое, которое не выполнено ни для какой пары $x_i x_j$. Если $a_{ij}\equiv 1$, имеем полное отношение, т.е. отношение, выполненное для всех пар. Единичная матрица E задает диагональное отношение, отношение равенства: $<x_i A x_j>$, если xi=xj.

Зададим отношение другим способом, а именно: элементы множества изобразим точками, проведем стрелку от x_i к x_j, если выполнено $x_i A x_j$, получим фигуру - ориентированный граф (рис. 1.2.1).

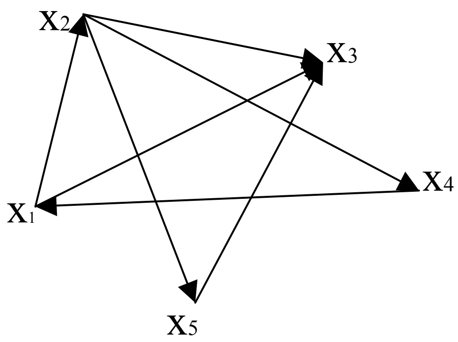


Рис. 1.2.1

Точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - вершины графа, направленные линии - ребра графа.

Элементы теории графов рассмотрим во второй части данного пособия.

Свойства отношений:

1) Отношение A рефлексивно, если оно выполнено между объектом и им самим, т.е. xAx.

Отношения "быть похожим", "быть знакомым" - рефлексивны. Отношение "быть братом" - нерефлексивно.

2) Если отношение A может выполняться лишь для несовпадающих объектов, то оно антирефлексивно, т.е. из xAy следует, что $x\neq y$.

3) Отношение A называется симметричным, если при выполнении xAy выполнено yAx.

Отношения "быть родственником", "быть похожим на" - симметричны.

4) Отношение A называется антисимметричным, если из двух отношений xAy и yAx хотя бы одно не выполнено. Так приведенный выше пример, отношение "x - победитель y" - антисимметрично.

Справедлива теорема: если отношение антисимметрично, то оно антирефлексивно.

5) Отношение называется транзитивным, если при выполнении xAy и yAz выполнено xAz.

Примером является отношение "быть больше (меньше)". Так, если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$.

6) Отношение A называется антисимметричным, если оба соотношения xAy и yAx выполняются только тогда, когда $x=y$.

Эквивалентность. Отношение эквивалентности определяется отображением множества X на множество Y и характеризуется разбиением множества X на классы.

Множество X разбито на классы, если его можно представить в виде суммы непересекающихся подмножеств:

$$X=X_1\cup X_2\cup \ldots \cup X_n,\text{ где } X_k<X\ (k=\overline{1,n})\text{ и } X_i\cap X_j=V\ (i\neq j)\ (i,j=\overline{1,n}).$$

Так множество X учащихся десятых классов некоторой школы разбивается на два класса: X_1 - учащиеся $10^{\underline{А}}$ класса, X_2 - учащиеся $10^{\underline{Б}}$ класса. $X=X_1\cup X_2$ и $X_1\cap X_2=V$, т.к. нет учеников, обучающихся одновременно и в $10^{\underline{А}}$ и в $10^{\underline{Б}}$ классе.

Два элемента множества X эквивалентны, если они принадлежат одному и тому же классу.

Каждая пара учащихся $10^{\underline{А}}$ класса - эквивалентные элементы множества X_1 (также, как и пара $10^{\underline{Б}}$ - X_2).

Разбивая множество X на классы, мы осуществили сюръективное отображение множества всех учащихся X на множество Y, состоящее из двух элементов $y_1=10^{\underline{А}}$, $y_2=10^{\underline{Б}}$. Причем $f^{-1}(y_1)=X_1$, $f^{-1}(y_2)=X_2$.

Другой пример - составление каталога по алфавиту. Множество всех книг в библиотеке X разбивается на конечное число классов - количество букв алфавита Y. Книги, начинающиеся с одной и той же буквы, принадлежат одному классу и между любой парой таких книг существует отношение эквивалентности.

В то же время составляется каталог по алфавиту, мы осуществляем сюръективное отображение множества всех книг в библиотеке X на множество букв алфавита Y.

Отношение эквивалентности - рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эти свойства являются необходимыми и достаточными условиями разбиения множества на классы.

Отношение A на множестве M называется ***толерантностью***, если оно рефлексивно и симметрично.

Так отношение "быть знакомым" соответствует определению толерантности.

Отношение А на множестве X называется ***отношением порядка***, если оно транзитивно и антирефлексивно.

Отношение порядка характеризует соотношение объектов друг к другу по старшинству, по важности, оно не является симметричным. Отношение $x<y$ на множестве действительных чисел - есть пример отношения порядка.

Множество, на котором задано отношение порядка, называется упорядоченным множеством. Понятие конечного упорядоченного множества совпадает с понятием конечной последовательности, состоящей из различных элементов. Простейшими примерами бесконечных упорядоченных множеств, является множество всех целых чисел, множество рациональных чисел.

Замети, что одно и то же множество можно упорядочить многими различными способами. Так, например, натуральные числа можно упорядочить "естественным образом": 1, 2, 3, 4, ... Это же множество можно упорядочить так, что отдельно нечетные и отдельно четные числа расположены в порядке возрастания, а все нечетные числа считать предшествующими четным, т.е. 1, 3, 5, ... 2, 4, 6,

Биективное отображение “f” упорядоченном множестве X на упорядоченное множество Y, называют соответствием подобия или подобным соответствием, если оно сохраняет порядок.

Два упорядоченных множества называются подобными, или имеющими один и тот же порядковый тип, если одно из них можно подобно отобразить на другое. Так, два конечных упорядоченных множеств X и Y, состоящих из одного и того же числа элементов, подобны между собой. Указанные выше биективное отображение между всей числовой прямой и интервалом (a,b) является соответствием подобия и указанные множества подобны (рис. 1.1.9).

Заметим, что подобные множества имеют одну ту же мощность.

Упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если каждое его непустое подмножество содержит первый элемент. Так, все конечные упорядоченные множества - вполне упорядочены. Примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел.

2. Математическая логика

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений.

2.1. Алгебра высказываний

Простейшую из формальных логических теорий называют алгеброй высказываний. Из высказываний состоит любое логическое рассуждение. Высказывание - предложение, относительно которого можно утверждать, истинно оно или ложно. Так, предложение "5>1", "13 делится на 5" - высказывания. Но "Который час?", "Да здравствует математика!" - не являются высказываниями в связи с данным определением. Если высказывание истинно (ложно) в любой логической ситуации, то оно называется тождественно истинным (ложным), или логической константой, обозначаемой соответственно И(Л). Высказывания, истинные в одних логических ситуациях и ложные в других, называются переменными высказываниями. Все приведенные выше высказывания представляют собой так называемые элементарные высказывания.

Логические операции

Обозначим элементарные высказывания латинскими буквами A, B, C, ... , X, Y, Z ...

Конъюнкция. Обозначается $A \wedge B$ (A&B, AB), читается: A и B. Получили сложное высказывание, составленное из двух элементарных. Значение истинности или ложности высказывания, являющегося конъюнкцией двух элементарных высказываний A и B, задается следующей истинностной таблицей:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Все рассматриваемые в дальнейшем логические связи будут задавать с помощью аналогичных истинностных таблиц.

Чаще пользуются более удобным обозначением: "И" - 1, "Л" - 0. В этих обозначениях истинностная таблица конъюнкции будет иметь вид

Таблица 2.1.1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Итак, конъюнкция двух элементарных множеств истинна тогда и только тогда, когда оба элементарных высказывания истинны.

Дизъюнкция. Обозначается $A \vee B$, читается: А или В. При этом разделительный смысл союза "или" исключается. Истинностная таблица дизъюнкции имеет вид:

Таблица 2.1.2

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкция двух элементарных высказываний является ложным высказыванием тогда и только тогда, когда оба высказывания, ее составляющие, ложны.

Отрицание. Единственная логическая операция, относящаяся к одному высказыванию, - унарная, в отличии от остальных - бинарных. Обозначается: $\overline{A}$ (>A, ~A), читается: не А. Истинностная таблица имеет вид:

Таблица 2.1.3

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Импликация. Обозначается $A \to B$ ($A \subset B$), читается: если А, то В. При этом А называют посылкой, В - следствием. Импликация задается следующей истинностной таблицей:

Таблица 2.1.4

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка А истинна, а следствие В - ложь.

Двойная импликация. Обозначается $A \leftrightarrow B$ ($A \sim B$), читается: А тогда и только тогда, когда В. Задается следующей истинностной таблицей:

Таблица 2.1.5

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Двойная импликация является истинностным высказыванием тогда и только тогда, когда высказывания А и В, ее составляющие, принимают одинаковое значение истинности или ложности.

Приведем пример Пусть А и В - элементарные высказывания: А - "Этот четырехугольник - параллелограмм", В - "Этот четырехугольник - ромб". Образуем из этих двух элементарных высказываний сложные, используя перечисленные логические связки.

Сложное высказывание $A \wedge B$, очевидно, читается так: "Этот четырехугольник есть параллелограмм и ромб". Значения истинности и ложности этого высказывания определяется таблицей 2.1.1. Это высказывание считают истинным в том и только в том случае, когда оба высказывания А и В - истинны.

Дизъюнкция указанных высказываний $A \vee B$ читается: "Этот четырехугольник есть параллелограмм или ромб". Значение истинности и ложности этого высказывания определяется таблицей 2.1.2. Очевидно, для импликации и двойной импликации получим соответственно $A \rightarrow B$: "Если этот четырехугольник есть параллелограмм, то он - ромб"; $A \leftrightarrow B$ "Этот четырехугольник есть параллелограмм тогда и только тогда, когда он - ромб". Значение истинности или ложности этих высказываний определяется таблицами 2.1.4 и 2.1.5. Отрицание к А, т.е. $\overline{A}$, есть высказывание: "Неверно, что этот четырехугольник есть параллелограмм" или "Этот четырехугольник не параллелограмм".

Пользуясь указанными логическими связками, их истинностными таблицами, можно построить сколь угодно сложное высказывание и найти его истинностную таблицу.

Заметим, что число строк истинностной таблицы, очевидно, равно 2^n, где n - число строк равно 4 (таблицы 2.1.1 – 2.1.5).

Упражнение 2.1.1

Построим истинностную таблицу сложного высказывания:

$$S = (A \rightarrow B) \wedge C \vee \overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$$

Очевидно, истинностная таблица будет содержать $2^3 = 8$ строк. Скобки применяются, если нарушаются естественный порядок операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, двойная импликация. Скобки (A→B) указывают на то, что сначала нужно выполнить импликацию, затем найти (A→B)∧C. Скобки в выражении $\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$ можно опустить. Заключительной операцией в построении истинностной таблицы для S будет дизъюнкция двух высказываний: (A→B)∧C и $\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$.

Таблица 2.1.6

A	B	C	A→B	(A→B)∧C	$\overline{C}$	$A \leftrightarrow \overline{C}$	$\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$	
1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1

Итак, формула S задает высказывание которое истинно на следующих наборах значений элементарных высказываний:

A=1 B=1 C=1 (все три элементарных высказывания истинны)
A=1 B=0 C=1 (A, C - истинны, B - ложно)
A=0 B=1 C=1 (A - ложно, B и C - истинны)
A=0 B=1 C=0 (B - истинно, A и C - ложны)
A=0 B=0 C=1 (C - истинно, A и B - ложно)
A=0 B=0 C=0 (все три высказывания ложны).

Формулы алгебры высказываний

Будем пользоваться следующими символами A, B, C, ... , X, Y, Z ...

– переменные высказывания, 0, 1, И, Л - const, ∧, ∨, →, ↔,
– символы соответствующих логических операций.

Дадим определение формулы алгебры высказываний:

1) отдельно стоящая буква A, B, C, ... , X, Y, Z ... - формула.
2) если A, B - формулы, то формулами являются и ($\overline{A}$), ($\overline{B}$), (A∧B), (A∨B), (A→B), (A↔B).
3) Других формул нет.

Очевидно, сложное высказывание выше разобранного примера задано формулой S.

Две формулы алгебры высказываний называются равносильными, если на всех одинаковых наборах значений составляющих переменных высказываний они принимают одинаковые значения 1 или 0.

Упражнение 2.1.2

Следующие высказывания могут быть интерпритированы как составные. Указать элементарные высказывания их составляющие, написать формулы данных высказываний и построить истинностные таблицы. Указать, какие из высказываний равносильны.

S_1: X неверно сделал расчет или если Y считал задачу правильно, то и Z сделал это без ошибок.

S_2: Если X правильно просчитал задачу, то либо Y ошибся, либо Z сделал ее верно.

S_3: Либо X неверно просчитал задачу, либо Y решил ее верно в том и только в том случае, если Z решил ее верно.

Очевидно, данные сложные высказывания составлены из следующих элементарных.

A: X правильно просчитал задачу

B: Y правильно просчитал задачу

C: Z правильно просчитал задачу

Используя основные логические связки, запишем формулы данных высказываний.

$$S_1 = \overline{A} \vee (B \to C) \quad S_2 = A \to (\overline{B} \vee C) \quad S_3 = \overline{A} \vee (B \leftrightarrow C)$$

Составим истинностные таблицы данных высказываний:

Таблица 2.1.7

A	B	C	$B \to C$	S_1	$\overline{B} \vee C$	S_2	$B \leftrightarrow C$	S_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Из таблицы 2.1.7 видно, что высказывания S_1 и S_2 равносильны: $S_1=S_2$.

Приведем список основных равносильных формул алгебры высказываний:

$$\left.\begin{array}{l} A\vee A=A \\ A\wedge A=A \end{array}\right\}\ \text{идемпотентность}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\vee B=B\vee A \\ A\wedge B=B\wedge A \end{array}\right\}\ \text{коммутативность}$$

$$\left.\begin{array}{l} (A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C) \\ (A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C) \end{array}\right\}\ \text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \\ A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C) \end{array}\right\}\ \text{дистрибутивность}$$

$A\vee И=И$

$A\wedge Л=Л$

$A\wedge И=A$

$A\vee Л=A$

$A\vee\overline{A}=И$ закон исключенного третьего

$A\wedge\overline{A}=Л$

$\overline{\overline{A}}=A$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B} \\ \overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B} \end{array}\right\}\ \text{законы де Моргана}$$

$\overline{Л}=И$

$\overline{И}=Л$

Отметим, что операции импликации и двойной импликации можно заменить дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, используя следующие равносильные формулы:

$$A\rightarrow B=\overline{A}\vee B$$

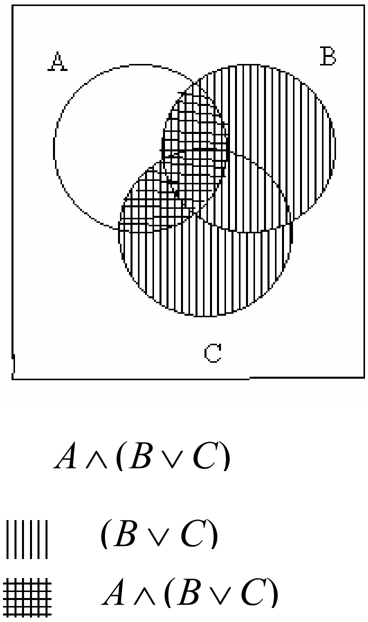
$$A\leftrightarrow B=(\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee\overline{B})$$

$$A\leftrightarrow B=AB\vee\overline{A}\,\overline{B}$$

Рассмотрим множество всех логически возможных случаев, множество всех возможных логических ситуаций для высказываний, связанных с некоторой проблемой, - некоторое универсальное множество. Поставим в соответствие каждому переменному высказыванию некоторое подмножество универсального множества логических возможностей и назовем его множеством истинности данного высказывания. Множество истинности данного высказывания содержит в качестве своих элементов все те логически возможные случаи, когда данное высказывание является истинным.

Высказыванию, истинному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 1 или И, будет соответствовать универсальное множество. Высказыванию, ложному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 0 или Л, будет соответствовать пустое множество. Тогда дизъюнкции двух высказываний будет соответствовать объединение (сумма) их множеств истинности, конъюнкции - пересечение их множеств истинности, а отрицанию к высказыванию - дополнение к множеству истинности данного высказывания. Учитывая это и сравнивая список основных равносильных формул алгебра высказываний со списком свойств основных операций над множествами, убеждаемся в том, что операции алгебры высказываний образуют Булеву алгебру.

Заметим следующее: для того, чтобы убедиться в равносильности двух формул, можно построить их истинностные таблицы и убедиться в их совпадении. Равносильность формул можно установить также, убедившись в совпадении множеств истинности рассматриваемых высказываний. Так в справедливости закона дистрибутивности №7 можно убедиться, изобразив на диаграммах Эйлера-Венна множества истинности левой и правой части равенства (рис. 2.1.1).



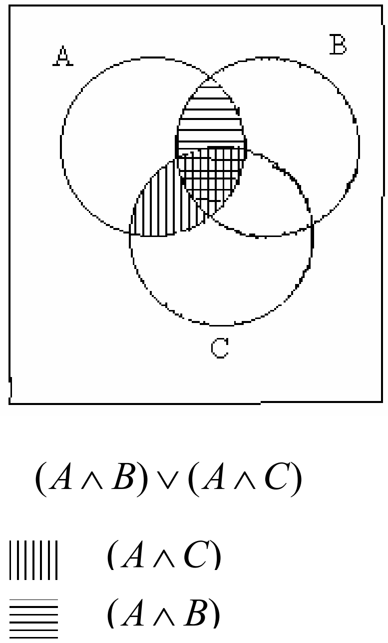


Рис. 2.1.1.

Установить равносильность формул можно также путем их преобразования. Так заменяя импликацию равносильной ей формулой получим равносильность формул S_1 и S_2 упражнения 2.1.2:

$$S_1 = \overline{A} \vee (B \to C) = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$$

Рассмотрим некоторые упражнения на данную тему.

Упражнение 2.1.3

Указать множество наборов, удовлетворяющих уравнению

$$S=(xy \to yz) \vee x \vee y \vee z=0.$$

Решение получим построив истинностную таблицу данной формулы. Убеждаемся в том, что на всех $8^{\underline{ми}}$ наборах истинности и ложности данных высказываний x, y, z формула принимает значение 1, т.е. наборов , где бы S принимала значение 0 нет, формула S≡1, т.е. тождественно истинна, т.е. наборов где бы S=0 нет.

К тому же результату можно прийти, преобразовав S и используя список основных равносильных формул:

$$S=(xy\rightarrow yz)\vee x\vee y\vee z=(\overline{xy}\vee yz)\vee x\vee y\vee z=\bar{x}\vee\bar{y}\vee yz\vee x\vee y\vee z\equiv 1$$

т.к. а) $\bar{x}\vee x\equiv 1$ (или $\bar{y}\vee y\equiv 1$)

б) $1\vee A\equiv 1$, где $A=\bar{y}\vee yz\vee y\vee z$

Упражнение 2.1.4

Проверить равносильность двух формул $\alpha=(x\rightarrow\bar{y})\rightarrow(\bar{z}\rightarrow x)$ и $\beta=(y\rightarrow\bar{x})\rightarrow(\bar{x}\rightarrow z)$.

Преобразуем формулы, заменив импликацию равносильной формулой.

$$\alpha=(x\rightarrow\bar{y})\rightarrow(\bar{z}\rightarrow x)=(\bar{x}\vee\bar{y})\rightarrow(\bar{\bar{z}}\vee x)=\overline{\bar{\bar{x}}\vee\bar{\bar{y}}}\vee z\vee x=\bar{x}\bar{y}\vee z\vee x=xy\vee x\vee z$$

$$\beta=(y\rightarrow\bar{x})\rightarrow(\bar{x}\rightarrow z)=(\bar{y}\vee\bar{x})\rightarrow(\bar{\bar{x}}\vee z)=\overline{\bar{\bar{x}}\vee\bar{\bar{y}}}\vee x\vee z=xy\vee x\vee z$$

Очевидно, $\alpha=\beta$.

Упражнение 2.1.5

При составлении расписания на понедельник преподаватели просили, чтобы уроки проходили в следующем порядке:

1) математика первым или третьим уроком;
2) история - первым или вторым;
3) литература - вторым или третьим.

Можно ли удовлетворить просьбы всех трех преподавателей и каким образом, если это возможно?

Введем следующие элементарные высказывания:

A - математика - I$^{\underline{ый}}$ урок
B - математика - III$^{\underline{ий}}$ урок
C - история - II$^{\underline{ой}}$ урок
D - история - I$^{\underline{ый}}$ урок
E - литература - II$^{\underline{ой}}$ урок
F - литература - III$^{\underline{ий}}$ урок

Просьбы всех преподавателей выражены высказываниями $S_1=A\vee B$, $S_2=C\vee D$, $S_3=E\vee D$.

Высказывание, удовлетворяющее просьбы всех трех преподавателей, очевидно, есть конъюнкция S_1, S_2, S_3, т.е. $S=S_1\wedge S_2\wedge S_3$ и оно должно быть истинным, т.е. S=1. Применим дистрибутивный закон №7 в преобразованиях S:

$$S=(A\vee B)(C\vee D)(E\vee F)=(AC\vee BC\vee AD\vee BD)(E\vee F)$$

В данном случае конъюнкция AD=0, т.к. первым уроком математика и история одновременно быть не могут.

$$S=ACE\vee BCE\vee BDE\vee ACF\vee BCF\vee BDF$$

Очевидно ACE=0, т.к. CE=0: второй урок не может быть одновременно уроком истории и литературы. Аналогично: BCE=0, BCF=0, BDF=0, т.е. $S = BDE \vee ACF = 1$.

Дизъюнкция истинна, если одно из слагаемых истинно: BDE=1; ACF=1.

Конъюнкция высказываний истинна, если истинны все входящие в нее сомножители. В результате получаем два возможных варианта ответа:

1) BDE=1, т.е. история - I$^{\underline{ый}}$ урок,
   литература - II$^{\underline{ой}}$ урок,
   математика - III$^{\underline{ий}}$ урок.
2) ACF=1, т.е. математика - I$^{\underline{ый}}$ урок
   история - II$^{\underline{ой}}$ урок,
   литература - III$^{\underline{ий}}$ урок.

Варианты импликации

В математике весьма важными являются понятия: "необходимое условие", "достаточное условие", которые могут быть записаны с помощью связи импликации.

"А достаточное условие для В", очевидно выражается формулой: $A \to B$, а "А необходимое условие для В" - формулой $B \to A$, которую называют конверсией импликации. В конверсии импликации посылка А и заключение В меняются местами.

Достаточное условие может быть выражено формулой, равносильной формуле $A \to B$, а именно $\overline{B} \to \overline{A}$, называемой контроппозицией, а необходимое условие - формулой $\overline{A} \to \overline{B} = B \to A$, называемой конверсией контроппозиции. В рассуждениях эти равносильные формулы заменяют друг друга. Кроме того, "А достаточно для В" может быть выражено в виде "А только, если В", (не путать с "А если и только если В"), т.к. это означает: "Если не В, то не А", т.е.

$$\overline{B} \to \overline{A} \qquad = A \to B$$

Итак, получим:

"А достаточно для В": $A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$, "А только, если В";

"А необходимо для В": $B \to A = \overline{A} \to \overline{B}$.

Очевидно, необходимое и достаточное условие выражается двойной импликацией $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})$

Упражнение 2.1.6

Написать формулы следующих высказываний.
S_1: дифференцируемая функция непрерывна;
S_2: функция дифференцируема только в случае ее непрерывности;
S_3: функция непрерывна только в случае ее дифференцируемости;
S_4: дифференцируемость функции есть необходимое условие ее непрерывности;
S_5: дифференцируемость функции есть достаточное условие ее непрерывности;
S_6: дифференцируемость функции есть необходимое и достаточное условие ее непрерывности.

Введем в качестве элементарных имен высказывания: A - данная функция дифференцируема, B - данная функция непрерывна.

Очевидно: S_1=A→B; S_2: "A только, если B", т.е. "Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$", т.е. $\overline{B} \to \overline{A}$=A→B; S_3: "B только, если A", т.е. $\overline{A} \to \overline{B} = B \to A$; S_4=B→A; S_5=A→B; S_6=A↔B.

Итак, высказывания S_1, S_2, S_5 выражают достаточность A для B, а высказывания S_3, S_4 - необходимость.

Функции алгебры высказываний

Основным понятием математической логики является понятие логической функции. Пусть областью определения аргумента является множество, состоящее из двух элементов, условно обозначаемых 1, 0. Если множество значений функции также состоит из двух элементов 1, 0, то такая функция называется логической функцией. В частности, элементом логической функции могут быть переменные высказывания, тогда сама функция также представляет собой некоторое высказывание, значение которого зависит от аргументов.

Пусть логическая функция зависит от n аргументов. Различных наборов значений истинности и ложности аргументов существует 2^n (строки истинностной таблицы). Зададимся вопросом, сколько существует различных логических функций, зависящих от n аргументов, т.е. сколько существует различных столбцов в истинностной таблице, содержащей 2^n строк. Так как каждой из 2^n строк может быть поставлено в соответствие одно из двух значений 1 или 0, то всего столбцов существует 2^{2n}. Итак, число логических функций, зависящих от n аргументов N=2^{2n}, - конечное число. Различных формул алгебры высказываний, включающих в себя n переменных, существует бесчисленное множество. Оно разбивается на конечное число классов равносильных между собой формул.

Сформируем определение логической функции. Пусть M - множество функций $f(x_1, \ldots x_n)$, переменные которых x_i $(i = \overline{1, n})$

определены на множестве E_2 (1,0), для которых $f(\alpha_1, \dots \alpha_n) \in E_2$, если $\alpha_i \in E_2$. Функции из множества М есть функции алгебры логики, или Булевы функции.

Среди переменных логической функции есть существенные переменные и фиктивные. Функция $f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если найдутся два набора

$$\sigma=(\sigma_1, \dots \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots \sigma_n) \text{ и}$$

$$\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \dots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots \sigma_n)$$

такие, что $f(\sigma) \neq f(\tilde{\sigma})$. В этом случае переменная x_i является существенной переменной и фиктивной в противном случае.

Если переменная x_i - фиктивная, то функцию $f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n)$ можно свести к равной ей функции $g(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$ от $(n-1)^{ой}$ переменной. Для этого нужно в таблице функции f вычеркнуть все строки, где $x_i=1$ (или $x_i=0$) и столбец, соответствующий переменной x_i.

Упражнение 2.1.7

Функция $f(x_1\ x_2)$ задана таблицей 2.1.8. Содержит ли $f(x_1\ x_2)$ фиктивные переменные? Если да, требуется свести функцию "f" к равной ей функции "g" от одной переменной.

x_1	x_2	f
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 2.1.8

Проверим переменную x_1. Для этого сравниваем наборы переменных x_1, x_2, где x_1 принимает различные значения, а значения x_2 не меняются. Первая пара наборов - первая и третья строки данной таблицы, т.е. $\sigma_1=(1,1)$ $\tilde{\sigma}_1=(0,1)$ приводят к результату $f(1,1)=0$, $f(0,1)=1$, т.е. нашли пару наборов, где при перемене значений исследуемой переменной x_1 и сохранении остальных переменных (в данном случае одна переменная x_2) значение функции f меняется; $f(\sigma_1) \neq f(\tilde{\sigma}_1)$, т.е. x_1 - существенная переменная.

При исследовании x_2 поступаем аналогично:

1) $\sigma_1=(1,1)$ $\tilde{\sigma}_1=(1,0)$ $f(\sigma_1)=f(\tilde{\sigma}_1)$
2) $\sigma_2=(0,1)$ $\tilde{\sigma}_2=(0,0)$ $f(\sigma_2)=f(\tilde{\sigma}_2)$

т.е. x_2 - фиктивная переменная.

x_1	g
1	1
0	0

Вычеркиваем в табл. 3.8 первую и третью строки: (1,1) (0,1), где $x_1=1$ (или вторую и четвертую: (1,0) (0,0), где $x_1=0$) и столбец, соответствующий фиктивной переменной x_2, получим $g(x_1)= f(x_1\ x_2)$.

Упражнение 2.1.8

Построить логическую функцию по формуле

$$S = (x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2}$$

Какие из переменных являются существенными?

Построив истинностную таблицу формулы S, получим функцию, соответствующую данной формуле (табл. 2.1.9).

Таблица 2.1.9

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$	$x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$	$\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	f
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

При различных значениях истинности и ложности переменной x_3 и фиксированных значениях переменных x_1 и x_2 значения функции одинаковы. Следовательно, x_3 - фиктивная переменная. Существенными являются переменные x_1 и x_2. Сравнивая вторую и четвертые строки табл. 3.9, обнаруживаем, что при одинаковых значениях истинности переменных x_1=1 x_3=0 и разных значениях x_2 (1,0). Значения функции разные, т.е. f(1,1,0) f(1,0,0), следовательно, x_2 - существенная переменная. Сравнивая четвертую и восьмую строки таблицы получим f(1,0,0)≠f(0,0,0), т.е. x_1 - существенная переменная.

В том , что x_3 - фиктивная переменная можно убедиться преобразованием формулы S.

$$S = (x_2 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2} = (\underset{\sim}{\overline{x_2}} \vee x_1 \vee \underset{\sim}{x_2} \vee \overline{x_3})x_1\overline{x_2} =$$

$$= 1 \cdot x_1\overline{x_2} = x_1\overline{x_2}$$

x_1	x_2	g
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Таблица 2.1.10

Этой формуле соответствует функция g, получаемая из f удалением фиктивной переменной x_3 (табл. 2.1.10).

Выпишем все функции от двух переменных. Очевидно их будет 2^{2^2} =16 (табл. 2.1.11).

Таблица 2.1.11

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Очевидно, введенные ранее связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ есть соответственно функции f_8, f_{14}, f_{11}, f_9. В качестве связок используются и другие функции, в частности

F_7 - штрих Шеффера $x_1 | x_2$,

F_1 - знак Лукашевича $x_1 \downarrow x_2$,

F_6 - разделительная дизъюнкция $x_1 \underline{\vee} x_2$, соответствующая разделительному союзу "или".

Полные системы связок

Система связок логики высказываний называется полной. если всякая формула логики высказываний равносильна некоторой формуле, содержащей лишь связки этой системы.

Используя формулы, равносильные импликации и двойной импликации, получим, что дизъюнкция, конъюнкция, отрицание образуют полную систему связок. Используя закон де Моргана, приходим к тому, что ($\vee$-), ($\wedge$-) - полные системы связок.

В самом деле из трех связок $\vee$, $\wedge$, $\overline{\ }$ можно исключить дизъюнкцию: $A \vee B = \overline{A} \wedge \overline{B}$ или конъюнкцию: $A \wedge B = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Более того, любую формулу алгебры высказываний можно записать одной связкой - штрихом Шеффера, что и предлагается сделать читателю.

Набор таких связок как отрицание и двойная импликация - неполон, также как и $\{\vee, \rightarrow\}$ $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Упражнение 2.1.9

Проиллюстрировать полноту связок ($\vee$, $\overline{\ }$) на примерах:

$$S_1 = x\overline{y} \vee (y \rightarrow x) \quad S_2 = x \leftrightarrow y \vee z$$

Очевидно, в данных формулах нужно заменить все связки, кроме ($\vee$, $\overline{\ }$).

а) Преобразуем S_1:

$$S_1 = x\bar{y} \vee (y \to x) = x\bar{y} \vee \bar{y} \vee x$$

Применяя формулу поглощения получим

$$x\bar{y} \vee x = x, \text{ т.е. } S_1 = x \vee \bar{y}.$$

б) $S_2 = x \leftrightarrow y \vee z = x(y \vee z) \vee \bar{x}\overline{(y \vee z)}$, где $\overline{x(y \vee z)} = \overline{\bar{x} \vee \overline{y \vee z}}$ по закону де Моргана, так же как и

$$\bar{x}\overline{(y \vee z)} = \overline{x \vee y \vee z}, \text{ т.е.}$$

Формула S_2 стала более громоздкой, но представлена только двумя связками: $\vee$, $\overline{}$.

2.2. Проблемы разрешимости. Нормальные формы

Логические отношения

Рассмотрим взаимоотношения двух высказываний P и Q:

1. ***Отношение следствия.*** Говорят, что из P следует Q, а если Q истинно всякий раз, когда истинно P; Q называют следствием P.

Пусть P и Q - сложные высказывания, составленные из элементарных высказываний A, B следующим образом $Q=A\to B$, $P=A\leftrightarrow B$.

Таблица 2.2.1

A	B	$A\to B=Q$	$A\leftrightarrow B=P$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

В этом примере из Q не следует P, так как в третьей строке таблицы 4.1 Q принимает значение 1, в то время как P=0. Но из P следует Q, так как Q принимает значение 1 в первой и четвертой строках таблицы, т. е. тогда, когда истинно P.

Между отношением следствия и импликацией существует тесная связь. Но следует помнить, что это не одно и то же. Импликация -

сложное высказывание, составленное из двух данных, а следствие - отношение между двумя высказываниями.

Таблица 2.2.2

P	Q	P→Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Когда импликация выражает отношение следствия? Q есть следствие P лишь при условии, что логическая возможность, соответствующая второй строке истинностной таблице 2.2.2 импликации, не должна иметь место. А в этом случае истинностная таблица импликации содержит одни единицы. Заметим, что высказывания, связанные импликацией, при отсутствии смысловой связи могут звучать парадоксально. В самом деле, высказывание “Если я не приду на лекцию, то река впадает в Белое море” звучит парадоксально. Между посылкой и заключением в этих случаях не существует отношения следствия.

Упражнение 2.2.1

Между какими парами высказывании, приведенных ниже, существует отношение следствия?

S_1: Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она - касательная к окружности.

S_2: Прямая есть касательная к окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.

S_3: Если прямая перпендикулярна к радиусу окружности, но не проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она не является касательной к окружности.

S_4: Если прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, но не является касательной, то прямая не перпендикулярна к радиусу окружности.

Введем элементарные высказывания:

A: Прямая перпендикулярна к радиусу окружности.

B: Прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.

C: Прямая - касательная к окружности.

Запишем формулы приведенных высказываний.

$S_1=AB\to C$ $\qquad$ $S_3=A\overline{B}\to\overline{C}$

$S_2=C\leftrightarrow AB$ $\qquad$ $S_4=B\overline{C}\to\overline{A}$

Построим истинностные таблицы этих высказываний, получим:

Таблица 2.2.3

A	B	C	S_1	S_2	S_3	S_4	$S_2 \to S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Из высказывания S_2 следует S_1 и S_4, т. к. при истинностных значениях “1” в первой, четвертой, шестой и восьмой строках высказывания S_2 те же значения “1” имеем в указанных строках высказываний S_1 и S_4 и импликации $S_2 \to S_1$, $S_2 \to S_4$ становятся тождественно истинными высказываниями $S_2 \to S_1 \equiv 1$, $S_2 \to S_4 \equiv 1$.

Особое место занимает пара высказываний S_1 и S_4. Каждая из них следует из другого: из S_1 следует S_4 и из S_4 следует S_1. В этом случае говорят, что высказывания S_1 и S_4 эквивалентны.

2. ***Отношение эквивалентности.***

Если истинностная таблица двойной импликации $P \to Q$ (табл. 2.2.4.) содержит только ”1”, т. е. исключаются логические возможности, соответствующие второй и третьей строкам, значения истинности P и Q одинаковы. В этом случае говорят, что P и Q эквивалентны.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица 2.2.4

Таким образом, эквивалентные высказывания задаются равносильными формулами. В упражнение 2.2.7 высказывания S_1 и S_4 эквивалентны.

3. ***Несовместимость.***

Два высказывания называются несовместимыми, если не существует логической возможности, при которой оба высказывания были бы одновременно истинными, т. е. при истинном значении одного из них другое обязательно ложно.

Это понятие распространяется на любое число высказываний.

Чтобы установить совместимость высказываний, нужно построить их истинностные таблицы. Если найдется хотя бы одна строка, в которой все высказывания принимают значения “истинно”, данные высказывания будут совместимы, в противном случае - нет.

Все высказывания упражнения 2.2.1 совместимы. Примером несовместимых высказываний является пара: некоторое высказывание P и его отрицание.

Проверка правильности рассуждений

Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение считается правильным только в том случае, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия. Если P_1, P_2, ... , P_n - посылки, а Q - заключение, то рассуждение правильно, если между высказыванием $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ и Q установлено отношение следствия. В этом случае импликация $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ должна быть тождественно истинным высказыванием (тавтологией).

Правильность рассуждения можно установить, построив истинностную таблицу высказывания $S= P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

При большом числе посылок установить тот факт, что является тавтологией, удобнее с помощью преобразований высказывания к равносильной ему формуле, являющейся тавтологией.

Метод “от противного” заключается в предположении, что заключение ложно, и установление того факта, что при этом конъюнкция $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ - ложна (что имеет место в том случае, если хотя бы одна из посылок P_i ($i=\overline{1,n}$) принимает значение “ложно”). Если это выполняется, то рассуждение верно, в противном случае - нет. Таким образом, в случае правильного рассуждения мы убеждаемся в том, что импликация $S= P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q \equiv 1$, т. к. отсутствует логическая возможность, соответствующая $P= P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n=1$, $Q=0$, где импликация $P \to Q$ принимает значение ложно.

Упражнение 2.2.2

“Если функция непрерывна на данном интервале и имеет разные знаки на его концах, то внутри интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала. но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна”.

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят их следующих элементарных высказываний:

A - “функция непрерывна на данном интервале”,

B - “функция имеет разные знаки на концах интервала”

C - “функция обращается в нуль внутри данного интервала”.

Используя эти обозначения, запишем посылки и заключение в виде формул:

$A \wedge B \to C$ (1-я посылка P_1)

$\overline{C} \wedge B$ (2-я посылка P_2)

A (заключение Q)

Если импликация $(A \wedge B \to C) \wedge (\overline{C} \wedge B) \to \overline{A} = P \to Q$ тождественно истинна, то рассуждение верно. Для проверки правильности рассуждения строим истинностную таблицу:

A	B	C	AB	AB→C	$\overline{C}$	$\overline{C}$B	$P_1 \wedge P_2$	$\overline{A}$	$P_1 \wedge P_2 \to Q$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно. Проведем проверку правильности этого рассуждения методом от противного. Предположим, что заключение Q ложно. Покажем, что в этом случае конъюнкция посылок $P_1 \wedge P_2$ ложна, т. е. $P \to Q$ тождественно истинна.

В самом деле, если $Q=\overline{A}$ ложно, то A истинно. Пусть $P_2=\overline{C}B$ истина, тогда B - истинно, $\overline{C}$ - истинно т. е. C - ложно, но в этом случае посылка принимает значение ложно, так как $P_1=AB \to C$ принимает значение ложно, так как AB=1, а C=0, что и требовалось проверить.

Правильность данного рассуждения можно проверить, преобразовав формулу $P_1 \wedge P_2$ к некоторой равносильной ей формуле, которая задает заведомо тождественно истинное высказывание.

Это сделаем после ознакомления с так называемыми совершенными нормальными формами формул алгебры высказываний.

Нормальные формы формул алгебры высказываний

Если в какой - либо логической ситуации данная формула принимает значение “истинно”, она называется выполнимой. К классу выполнимых формул относятся такие формулы, множество истинности которых не пусто. В противном случае формула называется невыполнимой.

Установить тот факт, что данная формула является выполнимой, можно с помощью истинностных таблиц. Нужно построить истинностную таблицу данной формулы и убедиться в том, что она содержит не одни нули. В противном случае формула является невыполнимой, тождественно ложной.

При большом числе переменных истинностные таблицы громоздки. Установить тип формулы (невыполнима - тождественно ложна, выполнима – тавтология или переменное высказывание, принимающее в одних ситуациях значение “истинно”, в других - “ложно”) удобнее с помощью так называемых нормальных форм.

Определение 1. Элементарным произведением (или основной конъюнкцией) называется конъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Определение 2. Элементарной суммой (или основной дизъюнкцией) называется дизъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Элементарная конъюнкция “k” и элементарная дизъюнкция “d” над множеством переменных $x^n = \{x_{i_1},\dots x_{i_r}\}$ могут быть записаны формулами:

$$k = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge x_{i_2}^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\delta_r}$$

$$d = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge x_{i_2}^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\delta_r},$$

где $i_k \in \{1,2, \dots n\}$ для всех $k = \overline{1,r}$

$\delta_k \in \{0,1\}$, причем $x_{i_k}^0 = \overline{x}_{i_k}$ и $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$

Пусть сложное высказывание состоит из $4^{\underline{x}}$ элементарных, обозначенных соответственно A, B, C, D. Элементарные дизъюнкции и элементарные конъюнкции могут быть составлены соответственно и $k = \overline{1,4}$ элементарных высказываний.

Так имеем $K_1 = A\overline{B}D$, $K_2 = \overline{A}BC\overline{D}$, $K_3 = \overline{A}\,\overline{B}$ - некоторые из элементарных конъюнкций, соответственно $d_1 = \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$, $d_2 = A \vee \overline{B} \vee C$ - некоторые из элементарных дизъюнкций. В дальнейшем будем пользоваться большими латинскими буквами для обозначения переменных.

Теорема 1. Элементарное произведение является тождественно ложным тогда и только тогда, когда оно содержит пару сомножителей, один из которых является элементарным высказыванием, а другой - его отрицанием.

Теорема 2. Элементарная сумма является тождественно истинной тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно является элементарным высказыванием, а другое - его отрицанием.

Так, элементарная сумма $A \vee B \vee C \vee \overline{B}$ тождественно истинна, элементарное произведение $ABC\overline{B}$ тождественно ложно.

Определение 3. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных произведений, называется дизъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается ДНФ.

Пример: $ABC \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$.

<u>Определение 4.</u> Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией элементарных произведений, называется конъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается КНФ.

Пример: $(B \vee \overline{C} \vee \overline{A})(A \vee B)B$.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Для этого нужно:

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными - конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \to B = \overline{A} \vee B$,

$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B}) = AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$.

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям типа $\overline{A \wedge B}$ или $\overline{A \vee B}$, знаками отрицания, относящимся к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

3. Избавиться от знаков двойного отрицания на основании равенства $\overline{\overline{A}} = A$.

4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности.

Упражнение 2.2.3

Пусть $S = (A \to B) \leftrightarrow (\overline{A} \to \overline{B})$. Построим КНФ для этой формулы.

1) избавимся от знаков импликации, получим:

$(\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B})$;

2) избавимся от знака двойной импликации:

$((\overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}))((\overline{A} \vee B)\overline{(\overline{\overline{A}} \vee \overline{B})})$;

3) избавимся от знака отрицания, относящегося к выражениям, состоящим более чем из одной переменной:

$((\overline{\overline{A}}\,\overline{B}) \vee (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}))((\overline{A} \vee B)(\overline{\overline{\overline{A}}}\,\overline{\overline{B}}))$;

4) избавимся от двойных и тройных отрицаний:

$((A\overline{B}) \vee (A \vee \overline{B}))(\overline{A} \vee B) \vee (\overline{A}B))$;

5) применим законы дистрибутивности:

$A\overline{B} \vee (A \vee \overline{B}) = (A \vee \overline{B} \vee A)(A \vee \overline{B} \vee \overline{B})$,

$(\overline{A} \vee B) \vee \overline{A}B = (\overline{A} \vee B \vee \overline{A})(\overline{A} \vee B \vee B)$.

Получим S=$(A \vee \overline{B} \vee A)(A \vee \overline{B} \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B \vee \overline{A})(\overline{A} \vee B \vee B)$. Это КНФ для данной формулы S.

Используя свойства A∨A=A и AA=A, упростим КНФ для S:

S=$(A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B)$.

Теорема 3. Формула алгебры высказываний является тождественно истинной тогда и только тогда, когда каждый множитель ее КНФ содержит пару слагаемых, одно из которых является элементарным высказыванием, а другое - его отрицанием.

Теорема 4. Формула алгебры высказываний является тождественно ложной тогда и только тогда, когда каждое слагаемое (т. е. каждое элементарное произведение) ее ДНФ содержит пару сомножителей, один из которых есть элементарное высказывание, другой - его отрицание.

Теоремы 3,4 позволяют решить вопрос о выполнимости любой формулы алгебры высказываний.

Нужно построить для этой формулы ее ДНФ или ее КНФ. Если построена ДНФ и оказывается, что она удовлетворяет условиям теоремы 4, то формула является невыполнимой. Можно построить КНФ для отрицания исходной формулы. Если окажется, что она удовлетворяет условиям теоремы 3, то исходная формула невыполнима, т. к. ее отрицание тождественно истинно. В остальных случаях формулы являются выполнимыми.

Упражнение 2.2.4

Установить тип формулы S=$(A \vee B) \to (B \to C)$.

Определим КНФ для отрицания S:

$$\overline{S} = \overline{(A \vee B) \to (B \to C)} = \overline{\overline{(A \vee B)} \vee (\overline{B} \vee C)} = \overline{\overline{A}\,\overline{B} \vee (\overline{B} \vee C)} =$$

$$= \overline{(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{B} \vee \overline{B} \vee C)} = \overline{(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{B} \vee C)}\,.$$

КНФ для $\overline{S}$ не удовлетворяет условию теоремы 3, следовательно, S – выполнима, то есть $S \not\equiv 0$, так как $\overline{S} \not\equiv 1$.

Обратимся к вопросу о правильности рассуждений. Чтобы убедиться в том, что рассуждение верно, нужно либо преобразовать импликацию S= $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to Q$ к КНФ и удостовериться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 3, либо $\overline{S}$ преобразовать к ДНФ и убедиться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 4.

В упражнении 4.2. $S = (A \wedge B \to C) \wedge (\overline{C} \wedge B) \to \overline{A}$. Преобразуем S к виду КНФ.

$$S=(\overline{AB}\vee C)\overline{C}B\rightarrow A=(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)\overline{C}B\vee\overline{A}=$$

$$=(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)\vee\overline{\overline{C}}\vee\overline{B}\vee\overline{A}=AB\overline{C}\vee C\vee\overline{B}\vee\overline{A}=$$

$$=(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\vee A)(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\vee B)(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\vee\overline{C})$$

Конъюнктивная нормальная форма удовлетворяет условиям теоремы 3, каждый сомножитель есть тождественно истинное высказывание, а также и их произведение, что и требовалось получить.

Совершенные нормальные формы

Определение 5. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СДНФ) называется ее ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1. Она не содержит двух одинаковых слагаемых.
2. Ни одно слагаемое не содержит одновременно двух одинаковых сомножителей.
3. Ни одно слагаемое не содержит одновременно некоторого высказывания и его отрицания.
4. Каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя либо переменное высказывание, либо его отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Это определение является конструктивным, т.е. позволяет для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к ДНФ, построить ее СДНФ.

Упражнение 2.2.5

$$S=AB\vee\overline{A}B\overline{B}\vee ACC\vee A\overline{B}C\vee AB.$$

Задана ДНФ. Приведем ее к СДНФ.

1. Первое и последние слагаемые одинаковы. На основании свойства операции дизъюнкции $A\vee A=A$ одно из одинаковых слагаемых можно отбросить.

2. ACC=AC.
3. $AB\overline{B}=0$.

Получим $S=AB\vee AC\vee A\overline{B}C$.

Теперь выполнили условия 1 - 3. Чтобы выполнить условие 4, поступим следующим образом:

$$AB=AB\cdot 1=AB(C\vee\overline{C})=ABC\vee AB\overline{C};$$

$$AC=AC\cdot 1=AC(B\vee\overline{B})=ABC\vee A\overline{B}C.$$

Следовательно, $S=ABC\vee AB\overline{C}\vee ABC\vee A\overline{B}C\vee A\overline{B}C$.

Теперь условие 4 выполнено, но появились одинаковые слагаемые. Исключив их получим:

$$S = ABC \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B}C.$$

Определение 6. Совершенной конъюнктивной нормальной формой данной формулы алгебры высказываний (СКНФ) называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. Она не содержит двух одинаковых сомножителей.
2. Ни один из сомножителей не содержит одновременно двух одинаковых слагаемых.
3. Ни один из сомножителей не содержит одновременно некоторого высказывания и его отрицания.
4. Каждый сомножитель СКНФ содержит в качестве слагаемого либо переменное высказывание, либо его отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Определение СКНФ также является конструктивным.

Упражнение 2.2.6

Дана КНФ: $S = (A \vee B)(A \vee \overline{A} \vee B \vee C)(A \vee B \vee B)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.

Построить СКНФ.

1. $A \vee B \vee B = A \vee B$.
2. $(A \vee B)(A \vee B) = A \vee B$.
3. $A \vee \overline{A} \vee B \vee C \equiv 1$, следовательно, $S = (A \vee B)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.
4. $A \vee B = A \vee B \vee \varnothing = A \vee B \vee C\overline{C} = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})$.

Следовательно, $S = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$,

Из определений и теорем 3, 4 следует, что тождественно истинная формула не имеет СКНФ, а тождественно ложная - СДНФ.

Каждая не тождественно истинная и не тождественно ложная формула имеет единственную СКНФ и СДНФ.

Совершенные нормальные формы могут быть применены для установления равносильности двух заданных формул алгебры высказываний. Для этого нужно обе формулы привести к СКНФ или СДНФ и убедить в их совпадении. Например, формулы

$$S_1 = A \to \overline{(B \to \overline{(\overline{B} \to C)})} \text{ и } S_2 = A \to B \text{ равносильны:}$$

$$S_1 = S_2 = (\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}).$$

Полной элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, удовлетворяющая свойствам 2, 3, 4 определения 5. Аналогично, полной элементарной суммой называется элементарная дизъюнкция, удовлетворяющая свойствам 2, 3,4 определения 6.

Поэтому совершенные нормальные формы можно определить так:

Определение 7. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой некоторой формулы алгебры высказываний называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией различных полных элементарных конъюнкций.

Определение 8. Совершенной конъюнктивной нормальной формой некоторой формулы алгебры высказываний называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией различных полных элементарных дизъюнкций.

Каждая полная элементарная конъюнкция на одном наборе значений переменных высказываний, ее составляющих, обращается в 1: переменное высказывание, входящее без знака отрицания, принимает значение 1, а со знаком отрицания - 0. Этот набор значений элементарных составляющих называется единицей данной полной элементарной конъюнкции. Так единицей полной элементарной конъюнкции $A\overline{B}C$ является (1, 0,1).

Аналогично. Каждая полная элементарная дизъюнкция на одном наборе значений переменных высказываний, ее составляющих, обращается в 0: переменное высказывание, входящее без знака отрицания, принимает значение 0, а со знаком отрицания - 1. Этот набор значений элементарных составляющих называется нулем данной полной элементарной дизъюнкции. Так нулем полной элементарной дизъюнкции $\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$ является (1, 1,0).

Эти сведения непосредственно используются в следующем разделе данного учебного пособия.

2.3. Исчисление высказываний

Построение формулы алгебры высказываний по заданной логической функции

Рассмотрим задачу, обратную той, о которой шла речь в разделах III, IV - построение функции для некоторой формулы алгебры высказываний. Задана некоторая функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, нужно построить для нее формулу S. Задача эта неоднозначна, существует множество равносильных между собой формул, соответствующих этой функции. Будем строить совершенную нормальную форму. При этом учтем, что полная элементарная дизъюнкция имеет единственный ноль, а полная элементарная конъюнкция - единственную единицу. Решение задачи рассмотрим на примере.

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Таблица 2.3.1

Пусть задана некоторая функция трех аргументов f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,1,0)=1. Это значит, что на наборах (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0) функция принимает значение 1, а на остальных наборах - 0.

Построим S в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы. Так как S не тождественно ложна, это можно сделать. СДНФ состоит из стольких слагаемых, сколько единиц содержит функция. Первому значению 1 соответствует слагаемое xyz, принимающее значение 1 при x=1, y=1, z=1. Второму значению 1 соответствует слагаемое $x\bar{y}\bar{z}$, принимающее значение 1 при x=1, y=0, z=0. Аналогично третье слагаемое, соответствующее 1, стоящей в шестой строке таблицы f есть $\bar{x}y\bar{z}$. Следовательно, $S = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$. Итак:

1) Совершенная дизъюнктивная нормальная форма содержит столько слагаемых, сколько единиц имеет функция.

2) Эти единицы соответствуют тем наборам переменных, при которых каждое слагаемое (элементарная конъюнкция) обращается в единицу, т.е. переменным, входящим в элементарную конъюнкцию без знака отрицания, соответствует значение 1, а со знаком отрицания - 0.

Чтобы написать СКНФ по заданной функции, нужно выбрать все значения 0, встречающиеся в ней, и рассмотреть наборы значений переменных, отвечающие этим нулям. В заданном примере таблица содержит пять нулей. Первому значению 0 отвечает сомножитель $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$, обращающийся в 0 при x=1, y=1, z=0. Второму - $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ при x=1, y=0, z=1 и т.д. В результате получим

$$S = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$$

Итак:

1. СДНФ содержит столько сомножителей, сколько нулей имеет истинностная таблица.

2. Эти нули соответствуют тем наборам переменных, при которых каждый сомножитель (каждая элементарная сумма) обращается в 0, т.е. переменным, входящим в элементарную сумму без знака отрицания, соответствует значение 0, а со знаком отрицания - 1.

Заметим, что используя список основных равносильных формул, полученные выражения для S упрощают, если это возможно.

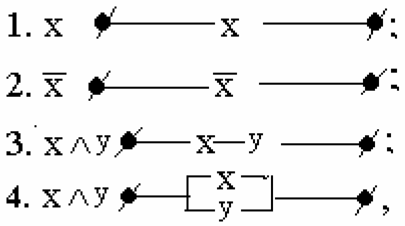
Моделирование алгебры высказываний с помощью релейно-контактных схем

Релейно-контактная схема представляет собой устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока. Контакты могут быть размыкающими и замыкающими. Каждый контакт подключен к некоторому реле. Когда реле находится под током, все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие - разомкнуты.

Каждому реле можно поставить в соответствие значение 1, если оно находится под током, и 0, если нет. Все замыкающие контакты, подключенные к реле x, будем обозначать x_1, ... x_n, а размыкающие - $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, …, $\overline{x_k}$.

Всей схеме также можно поставить одно из двух значений 1, если схема проводит ток, и 0, если не проводит. Это значение есть функция переменных x_i, $\overline{x_i}$, т.е. логическая функция. Эту функцию называют функцией проводимости электрической цепи.

Всякая формула алгебры высказываний может быть реализована некоторой релейно-контактной схемой, имеющей соответствующую функцию проводимости. И наоборот, для некоторой схемы можно указать ее функцию проводимости, логическую функцию, а затем построить для нее некоторую формулу алгебры высказываний. При этом основные логические связки моделируются следующими элементарными схемами:



т.е. дизъюнкция моделируется параллельным соединением проводников, конъюнкция - последовательным.

Упражнение 2.3.1

Построить функцию проводимости следующей схемы:

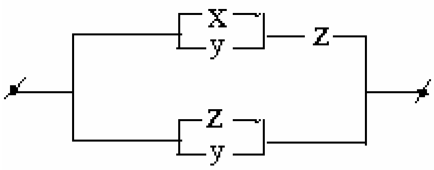


Рис. 2.3.1

Таблица 2.3.2

Функция проводимости для такой схемы задается, очевидно, следующей таблицей:

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

По данной логической функции построим формулу - СКНФ:

$$S = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee z)$$

Упростим это выражение: $S = (y \vee z) \vee (\overline{x} \wedge x) = y \vee z$.

Построим более простую схему, имеющую ту же функцию проводимости, что и исходная:

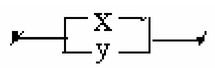


Рис. 2.3.2

Чтобы упростить релейно-контактную схему, не обязательно строить ее функцию проводимости. Можно написать соответствующую данной схеме формулу и упростить. Затем построить схему электрической цепи, моделирующую эту упрощенную формулу. Так, для электрической цепи, приведенной в данном примере,

$$S = (x \vee y)z \vee z \vee y = y \vee z .$$

Упражнение 2.3.2

Построить наиболее простую релейно-контактную схему по заданной функции проводимости f(x,y,z): f(0,1,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0.

Строим СКНФ: $S = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)$, т.к. эти сомножители обращаются в "0" на указанных наборах функции: (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1).

Далее упрощаем формулу S:

$$S = ((\overline{x} \vee \overline{y}) \vee z\overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z) = (\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee \overline{y} \vee z) = \overline{y} \vee \overline{x}(x \vee z) = \overline{y} \vee \overline{x}z$$

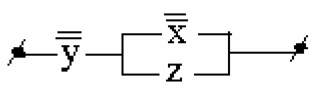


Рис. 2.3.3

Исчисление высказываний. Символы, формулы, аксиомы исчисления высказываний

Рассмотрим формальную аксиоматическую систему, в некотором смысле адекватную алгебре высказываний. Назовем эту систему исчислением высказываний.

Чтобы построить исчисление, нужно определить алфавит исчисления, понятие формулы, класс формул, называемых аксиомами, правила вывода данного исчисления.

Символы исчисления высказываний состоят из знаков трех категорий:

Большие латинские буквы A, B, C, ... X, Y, Z, ..., которые назовем переменными высказываниями.

Символы операций исчисления $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\overline{}$ (знак конъюнкции, дизъюнкции, следования и отрицания).

Скобки ( ).

Других символов система исчисления высказываний не содержит.

Формулой в исчислении высказываний является некоторая последовательность символов. Но не всякая последовательность символов есть формула. Например, последовательности $A\rightarrow B\vee(C\rightarrow)$ и $(A\wedge B)$ не являются формулами. Определение формулы в исчислении высказываний задается следующим образом:

1. Всякое переменное высказывание есть формула.
2. Если α, β есть формулы, то выражения вида $(\alpha\wedge\beta)$, $(\overline{\alpha})$, $(\overline{\beta})$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ также являются формулами.

Зададим в исчислении высказываний класс исходных истинных формул-аксиом.

I. 1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$;

2. $(A\rightarrow (B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$;

II. 1. $A\wedge B\rightarrow A$;

2. $A\wedge B\rightarrow B$;

3. $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$;

III. 1. $A\rightarrow A\vee B$;

2. $B\rightarrow A\vee B$;

3. $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)(A\vee B\rightarrow C))$.

IV. 1. $(A\rightarrow B)\rightarrow(\overline{B}\rightarrow\overline{A})$;

2. $A\rightarrow\overline{\overline{A}}$;

3. $\overline{\overline{A}}\rightarrow A$.

Правила вывода позволяют из данной системы аксиом получать другие истинные формулы исчисления высказываний. Назовем формулу исчисления высказываний ложной, если ее отрицание истинно. Будем обозначать истинные формулы буквой R, ложные - F.

К основным правилам вывода относятся два:

1) Правило заключения.

Если α и $(\alpha\to\beta)$ - истинные формулы, то β также истинна. Это предложение можно записать в виде

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

2) Правило подстановки

Пусть некоторая формула α содержит переменное высказывание A. Тогда, заменив высказывание A всюду, где оно встречается, любой формулой β, получим истинную формулу. Это предложение записывается в виде $\dfrac{\alpha}{S_A^\beta(\alpha)}$

Формула называется выводимой в исчислении высказываний, если ее можно получить, применяя правила вывода к аксиомам исчисления высказываний. Утверждение, что формула β выводима, записывают так:

$$\vdash \beta$$

Процесс получения формул из аксиом исчисления высказываний называется формальным выводом. Формальный вывод состоит из указания того, какие правила, в каком порядке и к каким формулам применяется для выведения данной формулы.

Упражнение 2.3.3

Докажем, что выводима формула $A\to A$, т.е. $A\to A$.

1. Запишем аксиому 2 из группы I.

$$(A\to (B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C);$$

2. Применим к ней правило подстановки S_C^A, т.е.

$$\underbrace{(A\to(B\to A))}_{\alpha}\to\underbrace{((A\to B)\to(A\to A)}_{\beta}$$

3. Заметим, что α есть истинная формула, как аксиома из группы I, т.е. имеем истинные формулы α и $\alpha\to\beta$. Применим правило заключения $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$ и получим $(A\to B)\to(A\to A)$.

4. Применим правило подстановки к полученной формуле, заменив высказывание B на $\bar{\bar{A}}$:

$$S_B^{\bar{\bar{A}}} \qquad \underbrace{(A\to\bar{\bar{A}})}_{\alpha_1}\to\underbrace{(A\to A)}_{\beta_1}.$$

5. Но α_1, есть аксиома 2 из группы IV. Применим к полученной формуле правило заключения $\frac{\alpha_1, \alpha_1 \to \beta_1}{\beta_1}$, т.е. $\mid$ -A→A.

Говорят, что формула β выводима из формул α_1, α_2, ..., α_n, если формулу β можно вывести путем правила заключения, приняв за исходные формулы α_1, α_2, ..., α_n и все истинные в исчислении высказываний формулы. Выводимость формулы β из формул α_1, α_2, ..., α_n записывают в виде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\beta$.

Теорема дедукции

Если формула β выводима из формул α_1, α_2, ..., α_n, то выводимой является формула $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (...(\alpha_n \to \beta)...))$, т.е.

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \beta}{(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (...(\alpha_n \to \beta)...)))}.$$

Теорема дедукции дает возможность установить выводимость различных формул исчисления высказываний более простым путем, чем непосредственный вывод этих формул из аксиом с помощью правил вывода. С помощью теоремы дедукции выводятся основные правила исчисления высказываний:

1. Правило силлогизма. Если формулы $(\alpha \to \beta)$ и $(\beta \to \gamma)$ истинны, то формула $(\alpha \to \gamma)$, т.е. $\frac{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)}{(\alpha \to \gamma)}$;
2. Правило перестановки посылок. Если формула $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ истинна, то истинной является формула $(\beta \to (\alpha \to \gamma))$, т.е. $\frac{(\alpha \to (\beta \to \gamma))}{(\beta \to (\alpha \to \gamma))}$;
3. Правило соединения посылок. Если истинной является формула $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$, то истинной будет формула $(\alpha \wedge \beta \to \gamma)$, т.е. $\frac{(\alpha \to (\beta \to \gamma))}{(\alpha \wedge \beta \to \gamma)}$.

Проблемы непротиворечивости, полноты, независимости аксиом исчисления высказываний

Используем алгебру высказываний как некоторую модель исчисления высказываний. Формулы исчисления высказываний будем трактовать как формулы алгебры высказываний. Для этого все буквы, входящие в алфавит исчисления высказываний, будем считать переменными высказываниями в содержательном смысле, т.е. переменными, принимающими значения И и Л. Символы алфавита $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\overline{}$, будем понимать как логические связки алгебры высказываний.

При этом справедлива следующая *теорема*.

Все аксиомы исчисления высказываний есть тождественно истинные формулы алгебра высказываний. Все формулы, выводимые из аксиом исчисления высказываний, есть тождественно истинные формулы алгебры высказываний.

Доказательство первой части теоремы можно провести непосредственной проверкой.

В справедливости второй части теоремы можно убедиться, доказав, что, применяя правило заключения и правило подстановки к тождественно истинной формуле алгебры высказываний, получаем тождественно истинную формулу. Итак, всякая выводимая в исчислении высказываний формула есть тождественно истинная формула алгебры высказываний.

При рассмотрении любой формальной логической системы, в том числе исчисления высказываний, возникает три проблемы: непротиворечивость, полнота, независимость системы аксиом исчисления.

Логическое исчисление считается непротиворечивым, если в нем не выводимы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Проблема не противоречивости состоит в том, что следует выяснить, является данное исчисление непротиворечивым.

Если в исчислении можно вывести некоторую формулу α и ее отрицание $\overline{\alpha}$, то такое исчисление будет противоречивым. Если логическое исчисление противоречиво, в нем будет выводима любая формула. Такое исчисление не представляет ценности, т.к. оно не способно отображать в себе различие между истиной и ложью.

Для доказательства непротиворечивости логического исчисления достаточно найти в нем хотя бы одну невыводимую формулу. В исчислении высказываний проблема непротиворечивости решается так.

Теорема I. Исчисление высказываний непротиворечиво.
Справедливость этого утверждения следует из предыдущей теоремы. В самом деле, пусть α - некоторая выводимая в исчислении высказываний формула. Следовательно, она тождественно истинна, если ее рассматривать как содержательную формулу алгебры высказываний. Тогда $\overline{\alpha}$ - тождественно ложна, т.е. не выводима при всех значениях входящих в нее переменных. Следовательно, α и $\overline{\alpha}$ не могут быть вместе выводимыми в исчислении высказываний.

Итак, любая выводимая формула в исчислении высказываний является тождественно истинной, если эту формулу исчисления высказываний рассматривать как содержательную формулу алгебры высказываний. Возникает обратная задача.

Будет ли любая тождественно истинная формула алгебры высказываний выводима из аксиом исчисления высказываний.

Эта задача представляет собой проблему полноты исчисления высказываний в широком смысле.

Для любой логической системы определение полноты в широком смысле слова можно сформулировать следующим образом: логическое исчисление называется полным, если всякую истинную в содержательном смысле формулу можно вывести по правилам исчисления из аксиом исчисления.

Для исчисления высказываний проблема полноты решается положительно.

Теорема II. Система исчисления высказываний является полной.

Не менее важным является определение полноты логической системы в узком смысле слова. Логическое исчисление называется полным в узком смысле слова, если добавление к системе аксиом некоторой невыводимой в этом исчислении формулы делают исчисление противоречивым. Исчисление высказываний является полным также в узком смысле слова.

Для любой логической системы возникает проблема независимости аксиом данного исчисления. Зададимся вопросом, можно ли какую-либо аксиому исчисления вывести из остальных аксиом с помощью правил вывода данной системы. Если это возможно, то аксиому, выводимую из других аксиом, можно вычеркнуть из списка аксиом данного исчисления. Аксиома, невыводимая из остальных аксиом, называется независимой из этих аксиом. Система аксиом, в которой ни одна аксиома не выводима из остальных, называется независимой системой аксиом.

Эта проблема для исчислений решается положительно.

Теорема III. Система аксиом исчисления высказываний независима.

Проблема независимости системы аксиом логического исчисления является весьма важной математической проблемой, приводящей иногда к вопросу о замене какой-либо аксиомы ее отрицанием. В качестве примера можно привести вопрос о независимости пятого постулата Евклида в системе аксиом геометрии, вопрос о независимости аксиомы Цермело в системе аксиом теории множеств. Вопросы эти имели большое значение в развитии математики.

2.4. Логика предикатов

Для определения понятия предиката рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

1. Пусть N – множество натуральных чисел, и буквой P обозначено свойство натурального числа быть простым. Если x представляет собой произвольный элемент из N, тогда выражение "натуральное число x является простым", которое можно записать в виде P(x), уже не является высказыванием, т.к. значение истинности данного утверждения зависит от x. По существу P(x) означает переменное (неопределенное) высказывание, которое становится определенным, когда x заменено определенным элементом из N. Например, P(3) = 1, P(4) = 0. Иначе говоря, P(x) представляет собой функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую только два значения: 0 и 1.
2. Пусть Z – множество целых чисел и P – свойство пары чисел иметь одинаковый знак. Тогда P(x,y) будет означать: "целые числа x и y имеют одинаковый знак". Это неопределенное высказывание становится определенным, если x и y заменить конкретными числами. Например, P(2,3)=1, P(-1,5)=0. Неопределенное высказывание P(x,y) представляет собой функцию двух переменных.
3. Пусть A и B – множество точек, C – множество прямых на евклидовой плоскости, а P(a,b,c) обозначает: "прямая c проходит через точки a и b". В этом примере мы имеем дело с функцией трех переменных, причем a и b принимают значения из множества точек, а c принимает значения из множества прямых евклидовой плоскости.

Определение 1. **Предикатом называется функция, отображающая множество произвольной природы во множество (0,1), или (ложно, истинно).**

Обратимся теперь к определению предиката в общем случае.

Определение 2. Пусть $N=\{N_1,N_2,N_3,\ldots,N_n\}$ – конечный набор множеств. Всякая функция $P(X_1,\ldots,X_n)$, ставящая в соответствие каждому набору из n элементов $\{a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_i \in N_i$, какой-либо из элементов булевой алгебры (0,1) называется **n-местным предикатом** на N. Множество N_i называется **предметной областью** для переменной x_i. Переменные $x_1,\ldots,x_n$ называются **предметными переменными**. Некоторые из множества N_i могут совпадать.

Если при отображении P образом набора $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ является единица, то записывают.

$$P(a_1,\ldots,a_n)=1$$

и говорят, что значение предиката P для набора $(a_1,\ldots,a_n)$ является истинным. Если же образом $(a_1,\ldots,a_n)$ является нуль, то записывают

$$P(a_1,\ldots,a_n)=0$$

И говорят, что значение предиката P для набора $(a_1,\dots,a_n)$ является ложным.

n-местный предикат при n=1 называется **унарным**, при n=2 – **бинарным** и при n=3 **тернарным**. Для общности введем еще понятие 0-местного предиката, а именно, **0-местным предикатом** называется любе истинное или ложное высказывание.

Поскольку предикаты принимают значения из (0,1), то над ними можно производить все логические операции, рассматриваемые нами в алгебре высказываний (-, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), сохраняя за ними те же определения. Кроме операций алгебры высказываний, мы будем употреблять еще две новые операции, которые связаны с особенностями предикатов и выражают собой утверждения всеобщности и существования.

Кванторы.

Пусть P(x) – одноместный предикат, заданный на некотором множестве M. Если переменная x обозначает любой элемент из множества M, то P(x) является **неопределенным высказыванием**.

Операция $\forall$ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание $\forall x P(x)$, которое читается так: "для любого x имеет место P(x)" и по определению является истинным тогда и только тогда, когда P(x) истинно для любого элемента $x \in M$. Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию $\forall x P(x)$ называется **операцией навешивания квантора общности** по предметному переменному x.

Операция $\exists$ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание $\exists x P(x)$, которое читается так: "существует такое x, что имеет место P(x)" и по определению является истинным тогда и только тогда, когда P(x) истинно хотя бы для одного элемента $x \in M$. Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию $\exists x P(x)$ называется **операцией навешивания квантора существования** по предметному переменному x.

В первом случае мы говорим, что предметная переменная x связана в предикате P(x) **квантором всеобщности**, во втором случае – **квантором существования**.

Определим операции навешивания квантора для общего случая n-местного предиката $P(x_1,\dots,x_n)$. Операции навешивания кванторов $\forall$ и $\exists$ по переменному x_1 (в общем случае по переменному xi, где $I=\overline{1,n}$) ставит в соответствие предикату $P(X_1,\dots,x_n)$ (n-1) – местные предикаты

$$\forall x_1 P(x_{1,\dots,} x_n) \text{ и } \exists x_1 P(x_{1,\dots,} x_n)$$

соответственно.

Истинностные значения этих предикатов определяются для фиксированных наборов значений предметных переменных $x_2,\ldots,x_n$ следующим образом:

$$\forall x_1 P(x_1, a_2 \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, если\_для\_любого\_a_i \in M_i\_имеет\_место\_P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1; \\ 0, если\_существует\_a_i \in M_i\_такое,\_что\_P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\exists x_1 P(x_1, a_2 \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, если\_существует\_такое\_a_i \in M_i,\_что\_P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1; \\ 0, если\_для\_люього\_a_i \in M_i\_имеет\_место\_P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \end{cases}$$

В общем случае, если $k<n$, операция навешивания квантора можно повторить k раз. Тогда переменные $x_1,\ldots,x_k$ в таком предикате будут связанными, а переменные $x_{k+1},\ldots,x_n$ – свободными. При $k=n$ предикат становится высказыванием.

Примеры.

Рассмотрим предикат $Д(x_1,x_2)$ – “число x_1 делится на число x_2”, определенный на множестве натуральных чисел. Тогда операция навешивания кванторов приводит к следующим утверждениям:

1. $\forall x_1 Д(x_1, x_2)$ – “для любого x_1 имеет место $Д(x_1,x_2)$”, т.е. всякое x_1 делится на x_2. Этот предикат принимает значение истины только для $X_2=1$.
2. $\exists x_1\ Д(x_1, x_2)$ – “существует x_1, которое делится на x_2”. Этот предикат принимает значение истины для любого значения x_2.
3. $\forall x_1 \forall x_2 Д(x_1, x_2)$ – “для всякого x_1 и для всякого x_2 имеет место делимость x_1 на x_2. Это высказывание является ложным.
4. $\exists x_1 \forall x_2 Д(x_1, x_2)$ – “существует x_1, которое делится на всякое x_2” – ложное высказывание.
5. $\forall x_2 \exists x_1 Д(x_1, x_2)$ – “для всякого x_2 существует x_1 такое, что x_1 делится на x_2” – истинное высказывание.

Кванторы как обобщение логических связок.

Пусть предметная область переменной x предикатов P(x,y) конечна: $(x_1,x_2,\ldots,x_K)$. Тогда $\forall x P(x,y)$ означает: P(x1,y) – истинно и т.д., т.е.

$\forall x P(x,y) = P(x_1,y) \wedge P(x_2,y) \wedge \ldots \wedge P(x_K,y)$.

Аналогично $\exists x P(x,y)$ является сокращением дизъюнкции:

$\exists x P(x,y) = P(x_1,y) \vee P(x_2,y) \vee \ldots \vee P(x_K,y)$.

Это показывает, что кванторы суть другая форма конъюнкции и дизъюнкции.

Отрицание кванторных предикатов.

Два предиката будем считать равносильными, если их значения истинности совпадают при всех значениях входящих в них свободных переменных. При этом имеется в виду, что свободные переменные в одном предикате не являются связанными в другом.

Справедливы следующие равносильности, относящиеся к отрицаниям кванторных предикатов:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}, \overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}.$$

Действительно, в первой из них левая часть читается: неверно, что для каждого x предикат P(x) истинен; правая – существует x, для которого P(x) ложен. Ясно, что эти два утверждения имеют один и тот же смысл. Аналогичным рассуждением убеждаемся в справедливости второй равносильности.

Таким образом, знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.

Очевидно, что все равносильности, имеющие место в алгебре высказываний, переносятся и на алгебру предикатов.

<u>Пример.</u>

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))} = \overline{\exists x(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y))} = \forall x\overline{(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y))} = \forall x(A(x) \wedge \overline{\forall y B(y)}) =$$
$$= \forall x(A(x) \wedge \exists y \overline{B(y)})$$

Формулы, в которых из операций алгебры высказываний имеются только операции -, $\wedge$, $\vee$, а знаки отрицания относятся только к элементарным предикатам, называются **приведенными формулами**.

3. Теория графов

3.1. Графы

Бинарное отношение на конечном множестве X есть ориентированный конечный граф (**орграф**) $R \subseteq X^2$. Таким образом, всякий орграф определяется множествами:

$X=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ – множеством вершин графа и множеством упорядоченных пар (кортежей)

$R=\{<x_i,x_j>|x_iRx_j\}$ – множеством дуг графа.

Общепринято обозначать орграфы в виде

G(X,U), где

X – множество вершин орграфа;

U – множество дуг орграфа, или в виде

G(x, гх), где

$ГX = \{Гx_1,Гx_2,\ldots,Гx_n\}$ – множество образов элементов множества X, т.е. отображение X в X, понимая термин отображения как точечно-множественное отображение.

Наряду с орграфами в приложениях рассматриваются неориентированные графы. **Неориентированный граф** является частным случаем орграфа, в котором для каждой дуги $<X_j,X_i>$, т.е. бинарное отношение R обладает свойством симметрии. Если, кроме того, бинарное отношение R обладает свойством рефлексивности, то соответствующий ему ориентированный граф есть орграф-толерантность, содержащий дуги типа петля $<X_j,X_i>$ для всех вершин графа.

При геометрической реализации неориентированного графа вместо двух дуг $<X_i,X_j>$ и <Xj,Xi>, соединяющих вершины X_i и X_j, употребляется одно ребро (X_i,X_j), не имеющее ориентации. На рис. 3.1.1 приведены геометрические реализации орграфов (слева) и их неориентированных аналогов – неориентированных графов (справа). G(X,U), если $X' \subseteq X$; $U' \subseteq U$, т.е. подграф G' получим из графа G, если уберем какое-либо число вершин или ребер (дуг).

Две вершины графа называются смежными, если они соединены с началом другой.

Дуги называются смежными, если конец одной из них совпадает с началом другой.

Некоторая последовательности смежных дуг называется **путем**, а последовательность смежных ребер называется **цепью**.

Замкнутый путь называется контуром, а замкнутая цепь – циклом.

Сформулированные определения удобно представить в виде следующей таблицы:

Ориентированный граф	Неориентированный граф
Дуга	Ребро
Путь	Цепь
Контур	Цикл

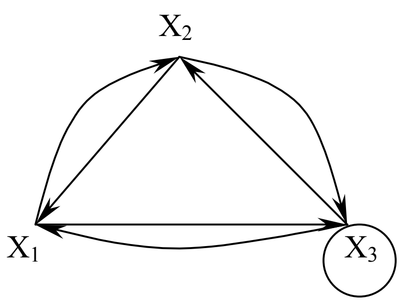
Рассмотрим еще некоторые определения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть (цепь) называется элементарным, если он проходит через вершины графа по одному разу.

Путь (цепь) называется **простым**, если он проходит через дуги графа по одному разу. В противном случае путь (цепь) называется составным. Аналогично определяются и простые контуры и циклы.

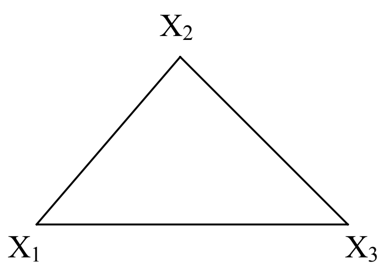
Цепь (цикл) называется **гамильтоновой**, если она проходит через все вершины графа по одному разу, т.е. элементарная цепь, проходящая через все вершины графа, есть гамильтонова цепь.

Цепь (цикл) называется **эйлеровой**, если она проходит через все ребра по одному разу, т.е. простая цепь (цикл), содержащая все ребра графа есть эйлерова цепь (цикл).

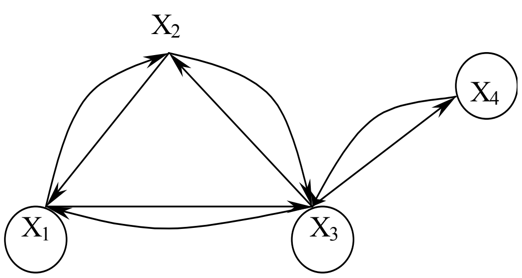
Аналогично определяются гамильтоновы и эйлеровы путь и контуры.



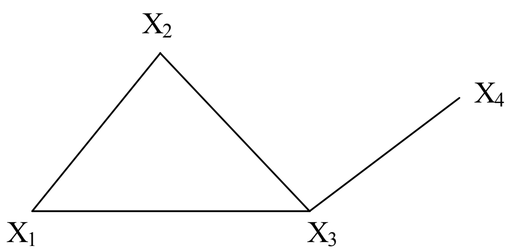
Симметричный граф



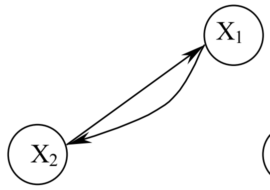
Неориентированный граф



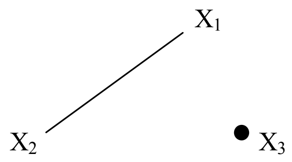
Граф-толерантность



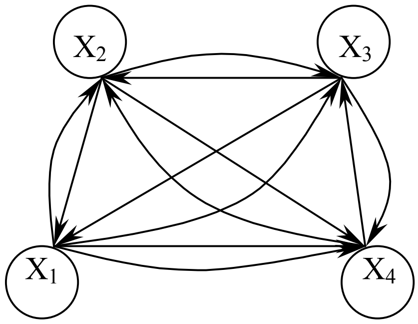
Неориентированный граф



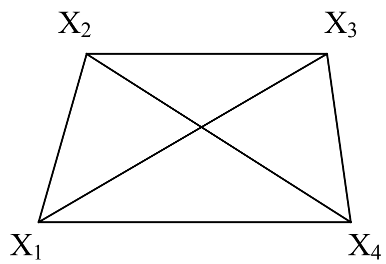
Граф-толерантность



Неориентированный граф



Граф-декартово произведение
(с полным насыщением)



Неориентированный полный граф

Рис. 3.1.1

Степень вершины графа. Число ребер графа.

Вершина X_i называется инцидентной дуге (ребру) графа, если она является началом или концом этой дуги (ребра).

Степенью вершины графа называют число дуг (ребер), инцидентных данной вершине. Степень обозначается $P(X_i)$.

Для ориентированного графа различают полустепень захода P^+ - число дуг, входящих в данную вершину, и полустепень исхода P^- - число дуг, выходящих из данной вершины. Степень вершины ориентированного графа составит сумма полустепеней исхода и захода.

$$P(X_i)= P^+(X_i)+P^-(X_i)$$

Если для некоторой вершины ориентированного графа полустепень захода некоторой вершины $P^+=0$ и при этом полустепень исхода $P^-\neq0$, то вершина называется **входом графа**.

Если для некоторой вершины ориентированного графа $P^-=0$, а $P^+\neq0$, то вершина называется **выходом графа**.

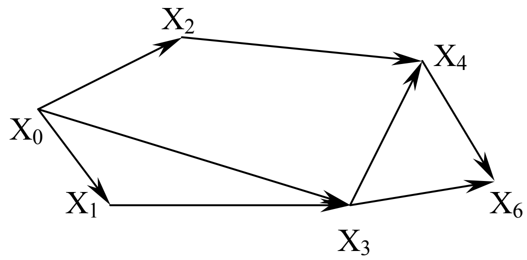


Рис. 3.1.2

Граф, изображенный на рис. 3.1.2, имеет один вход – вершину X_0 ($P^-(X_0)$=3 и один выход – вершину X_5 ($P^+(X_5)$=2).

Число ребер графа N связано со степенями его вершин следующим соотношением:

$$N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P(X_i),$$

где n – число вершин графа. Отсюда следует справедливость следующих утверждений:

1) Сумма степеней вершин любого графа четна;
2) Для любого графа число вершин, имеющих нечетные степени, четно;
3) Для однородного графа, т.е. графа, все степени вершин которого одинаковы и равны r, N= $\frac{1}{2}nr$;
4) Для полного графа, т.е. графа, в котором каждая пара вершин соединена ребром или дугой, $P(X_i)$=n-1, а N= $\frac{1}{2} - n(n-1)$.

Некоторой противоположностью полному графу является нуль-граф, не имеющий ребер или дуг и состоящий из изолированных вершин. Очевидно, степени верши нуль-графа равны 0.

Связность

Граф называется **связным**, если множество его вершин нельзя разбить на два или более подмножеств так, чтобы ни одна вершины одного подмножества не отображалась в вершину другого. В противном случае граф называется **несвязным**. Число подмножеств всех вершин графа, называется числом компонент связности для несвязного графа.

Существует другое определение связности графа. Граф называется связным, если две любые его вершины можно соединить цепью. Граф (рис. 3.1.3) является несвязным с двумя компонентами.

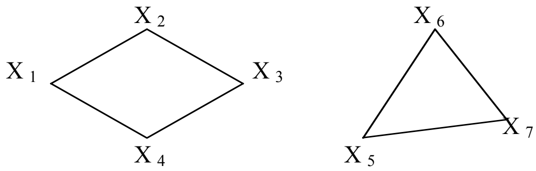


Рис. 3.1.3.

Ребро графа называется перешейком, или связующей линией, если его удаление приводит к тому, что граф становится несвязным. На рис. 3.1.4 изображены три связных неориентированных графа, причем граф 1 не имеет ни одного перешейка, 2 содержит один перешеек (отмечен жирной линией), граф 3 целиком состоит из одних перешейков. Такой граф (3) называется **деревом**.

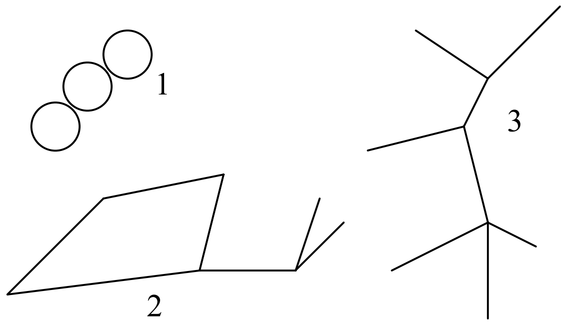


Рис. 3.1.4.

Эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.
Теорема Эйлера

Рассмотрим задачу о кенигсбергских мостах, сформулированную Эйлером. Река Прегель делит г. Кенигсберг на четыре части: A, B, C, D, соединенные между собой семью мостами (рис. 3.1.5).

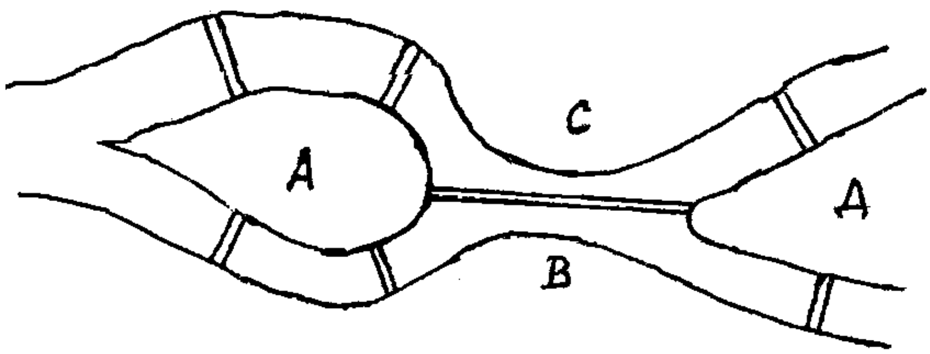


Рис. 3.1.5

Требуется определить, можно ли, выйдя из какой-либо части города, пройти по всем мостам по одному разу и вернуться в исходную часть города. Решая эту задачу, Эйлер доказал теоремы, позволяющие установить, для каких графов существуют эйлеровы циклы и цепи.

Теорема 1. Чтобы неориентированный граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы он был связан, и все вершины графа имели четные степени.

Для существования эйлерова контура на ориентированном графе необходимым и достаточным условием являются связность графа и равенство полустепеней захода и исхода в каждой вершине. Очевидно, что степени вершин графа четны.

Граф, соответствующей задаче Эйлера о кенигсбергских мостах, не удовлетворяет теореме 1. Он не содержит эйлерова цикла.

Теорема 2. Неориентированный граф содержит эйлерову цепь, соединяющую вершины A и B в том и только в том случае, если граф связен, и только эти вершины A и B являются вершинами с нечетными степенями, а степени всех остальных вершин четны.

Алгоритм построения эйлерова цикла состоит в следующем:

1. Выходим из произвольной вершины X_0, каждое пройденное ребро зачерчиваем.
2. Никогда не идем по такому ребру, которое в рассматриваемый момент является перешейком, а также не выбираем ребра, идущего в X_0, пока есть другие возможности.

Задача об определении гамильтоновых линий в общем виде не решена. Для каждого графа она решается отдельно. Получены некоторые необходимые, некоторые достаточные условия существования гамильтоновых графов, т.е. графов, содержащих гамильтонов цикл. К полученным результатам относится теорема Кенига: в полном графе (т.е. в графе, любая пара вершин которого соединена хотя бы в одном направлении) всегда существует гамильтонов путь.

К числу задач, требующих определения гамильтонова цикла, относится задача о коммивояжере. Бродячий торговец, предлагая товар, посещает ряд городов, причем каждый город он посещает единственный раз, после чего вновь возвращается в исходный пункт. Требуется определить кратчайший путь коммивояжера, если расстояния между городами заданы. Города можно представить как вершины связного неориентированного графа, в котором каждый паре вершин x_ix_j приписывается расстояние $l(x_i,x_j)$. Эта задача имеет ряд важных приложений в экономике, к ней, в частности, сводится задача о наиболее эффектном использовании подвижного состава оборудования. Решается задача методами динамического программирования.

Изоморфизм графов.

Два графа называются **изоморфными**, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность, т.е. два графа G(x,u) и G'(x',u') изоморфны, если существует такое взаимно однозначное соответствие φ

$X \xleftrightarrow{\varphi} X', U \xleftrightarrow{\varphi} U'$, что если $x_j \xleftrightarrow{\varphi} x_j', x_i \xleftrightarrow{\varphi} x_i'$, то

$(x_i, x_j) \xleftrightarrow{\varphi} (x_i', x_j')$,

где $x_i, x_j \in X; x_i', x_j' \in X'; (x_i, x_j) \in U; (x_i', x_j') \in U'$

Изоморфные графы несут одну и ту же информацию, поэтому они могут рассматриваться как один граф. Графы различаются с точностью до изоморфизма.

Планарность. Плоские графы.

Говорят, что граф укладывается на поверхности S, если его можно нарисовать на S так, что никакие два его ребра не пересекаются в точках, не являющихся вершинами графа.

Граф называется **планарным**, если его можно уложить на плоскости. **Плоский граф** – граф, уложенный на плоскости.

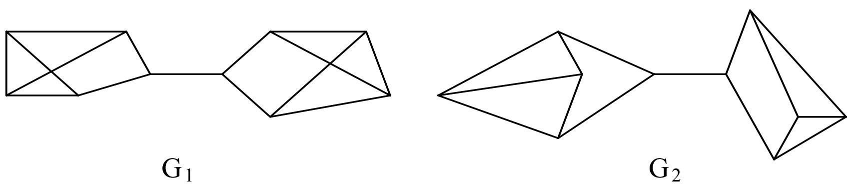


Рис. 3.1.6.

Граф G1 (рис. 3.1.6) планарен, он изоморфен плоскому графу G2. Исследование планарности графов составляет одну из задач этой теории. Изучение планарных графов было начато Эйлером. Опираясь на результаты, полученные Эйлером, можно доказать, что графы K1, K2, K3 (рис. 3.1.7) не являются планарными. Заметим, что графы K1, K3 изоморфны.

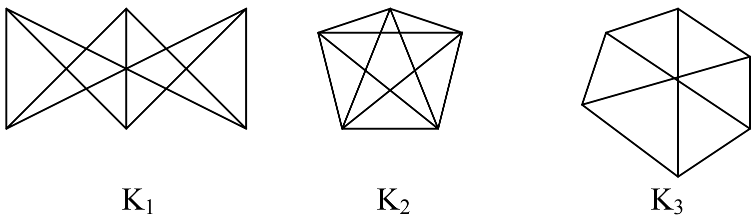


Рис. 3.1.7.

Графы, изоморфные указанным графам, также не являются планарными.

Отыскание общего критерия планарности графов составляло одну из труднейших задач теории графов. Решение было найдено Понтрягиным и независимо от него Куратовским. Чтобы сформулировать эти результаты, необходимо познакомиться с определением гомеоморфизма. Но прежде сформулируем следующие определения.

Говорят, что граф G'(x',u') получен из графа G(x,u) операцией подразделения ребра $(x_i,x_j)\in u$, если $x'=x\cup a$, $u'=u[(x_{i,}x_j)\cup(x,.a)\cup(a,x_j)]$

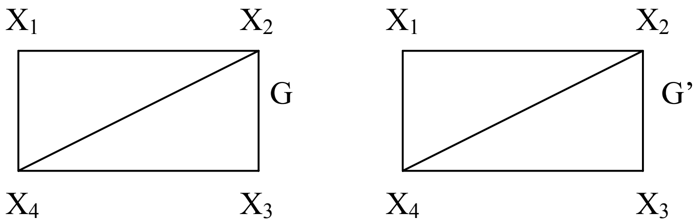


Рис. 3.1.8.

Два графа G1,G2 называются гомеоморфными, если существует такой граф G', который может быть получен как из графа G1, так и из G2 операцией подразделения ребра конечное число раз. Или: графы G1 и G2 гомеоморфны, если существуют изоморфные подразбиения G1' и G2', изображенные на рис. 3.1.9, гомеоморфны.

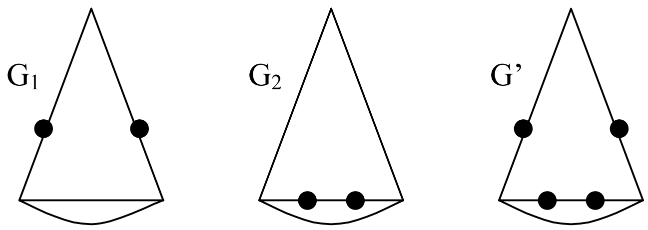


Рис. 3.1.9

Граф G' может быть получен из графов G1 и G2 операцией подразделения ребра, проведенной дважды.

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графам K1 или K2 (рис.3.1.7).

Вслед за этим классическим результатом были предложены другие критерии планарности.

Числа, характеризующие граф.

Цикломатическим числом графа называется число υ=N-n+p, где N- число ребер графа, n – число его вершин, P – число компонент связности. Для связного графа υ=N-n+1.

Теорема. Цикломатическое число графа равно наибольшему количеству независимых циклов.

Понятие независимых циклу состоит в следующем. Поставим в соответствие циклу μ графа G некоторый вектор. Для этого придадим каждому ребру графа произвольную ориентацию. Если цикл μ проходит через ребро u_k в направлении его ориентации r_k раз и в противоположном направлении S_k раз, то полагаем $c^k=r_k-S_k$. Вектор $\overline{\mu}=(c^1,c^2,\ldots,c^K,\ldots,c^N)$ m-мерного пространства называют **вектором-циклом**, соответствующим циклу μ. Циклы μ_1, μ_2,… называют **независимыми**, если соответствующие им векторы $\overline{\mu_1}$, $\overline{\mu_2}$,… линейно независимы.

Следствием названной теоремы являются следующие утверждения:

1. Связаный граф G не имеет циклов тогда и только тогда, когда υ=0. Такой граф есть дерево (различные определения графа-дерева будут рассмотрены в специальном разделе ниже).
2. Связный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда υ=1.

Цикломатическое число связного графа можно определить как число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал деревом.

Пример.

Цикломатическое число графа, изображенного на рис.3.1.10 равно 3.

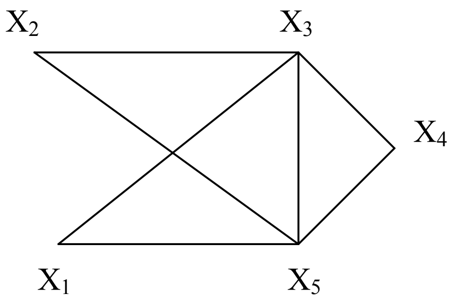


Рис. 3.1.10.

Число внутренней устойчивости графа. Пусть задан некоторый граф G(X,ГX). Рассмотрим такое подмножество его вершин $S \subseteq X$, в котором две любые точки являются несмежными. Такое подмножество S называется внутренне устойчивым. Другими словами $S \subseteq X$ является внутренне устойчивым, если $\Gamma S \cap S=0$.

Обозначим |S| - мощность множества S. Пусть F – множество всех внутренне устойчивых множеств. Числом внутренней устойчивости графа G называется

$$\alpha(G)=\max_{S \in F}|S|.$$

Отыскание $\alpha(G)$ нужно начинать с максимального числа вершин и, постепенно увеличивая его, проверять, образуют ли выбранные вершины внутренне устойчивое множество.

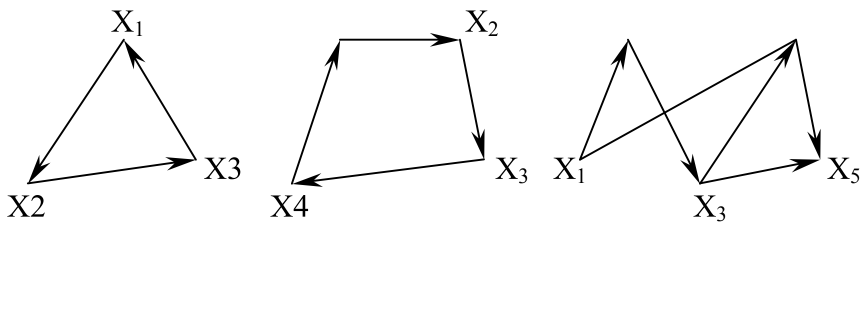


Рис. 3.1.11.

Для графов, изображенных на рис. 3.1.11, имеем следующие $\alpha(G1)=1$, любая пара вершин G1 является смежной. Граф G2 имеет два внутренне устойчивых множества $S1=\{x_1,x_3\}$, $S2=\{x_4,x_2\}$, $|S1|=|S2|=2$. Следовательно, $\alpha(G2)=2$. Граф G3 содержит внутренне устойчивые множества $S1=\{x_1,x_5\}$, $S2=\{x_1,x_3\}$, $S3=\{x_1,x_4\}$, $S4=\{x_2,x_5\}$,$S5=\{x_2,x_4\}$.

Но если к любому из этих множеств добавить какую-либо вершину, не содержащуюся в нем, подмножество перестанет быть внутренне устойчивым $\alpha(G3)=2$.

Число внешней устойчивости графа. Пусть задан некоторый граф G(X,ГX). Подмножество его вершин $T\subseteq X$ есть внешне устойчивое множество, если для каждой точки $x\in(X/T)$ выполнено условие

$$\Gamma X\cap T\neq 0.$$

Обозначим |T| - мощность множества T. Пусть Ф – множество всех внутренне устойчивых множеств. Числом внешней устойчивости графа G называется

$$\beta(G)=\min_{T\subseteq\Phi}|T|.$$

При подсчете числа внешней устойчивости следует начинать с максимального числа вершин графа, затем уменьшать его, проверяя, образуют ли выбранные вершины внешне устойчивое множество.

Пример.

Определим число внешней устойчивости для графов, изображенных на рис.3.1.11. Любая пара вершин графа G1 образует внешне устойчивое множество, т.е. $\beta(G1)=2$. Граф G2 содержит два внешне устойчивых множества $T1=\{x_1,x_3\}$, $T2=\{x_2,x_4\}$ с минимальным числом элементов, т.е. $\beta(G1)=2$. Для графа G2 внешне устойчивое множество минимальной мощности есть $T=\{x_2,x_4\}$, т.е. $\beta(G3)=2$.

К определению числа внешней устойчивости графа сводится задача о часовых. На посту расставлены часовые, охраняющие n объектов, причем один и тот же часовой может наблюдать за несколькими объектами. Нужно выяснить, каково минимальное число часовых, необходимых для наблюдения за всеми объектами. Граф, изображенный на рис.3.1.12, соответствует следующей задаче: 9 вершин графа – охраняемые объекты (n=9), ребра характеризуют возможность просматривания объектов часовыми. Так, например, часовой у объекта X_1 может одновременно наблюдать за объектами X_2,X_3,X_4,X_6,X_9, часовой у объекта X_2 – за объектами X_1,X_3,X_7,X_8 и т.д. Для данного графа число внешней устойчивости X_4,X_8. Достаточно двух часовых, расположенных в точках X_4 и X_8, для охраны всех объектов.

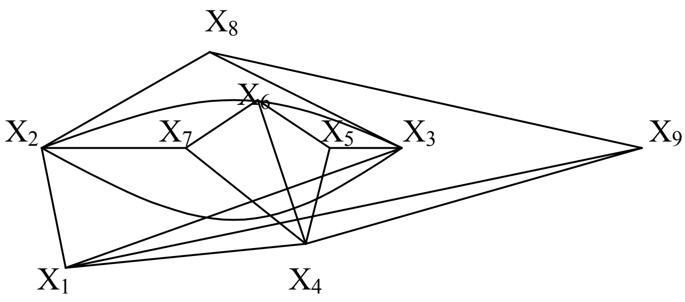


Рис. 3.1.12.

Ядро графа. Если множество вершин графа G(X,ГX) содержит подмножество $L \subseteq X$ как внутренне, так и внешне устойчиво, то такое подмножество L называется **ядром графа**.

Обозначим |L| мощность множества L. Эта величина удовлетворяет неравенству $\alpha(G) \geq |L| \geq \beta(G)$.

Пример.

Граф G1 (рис.3.1.11) не имеет ядра; граф G2 имеет два ядра {x1,x3}, {x2,x4}; граф G3 имеет одно ядро {x2,x4}.

Хроматическое число графа. Предположим, что каждая вершина графа G окрашена в какой-либо цвет так, что никакие две смежные вершины не окрашены одинаково. Если при этом потребовалось К красок, то граф называется хроматическим порядка К. Минимальное число К, при котором граф остается хроматическим, называется хроматическим числом и обозначается γ. Для графа G, изображенного на рис.3.1.13, хроматическое число $\gamma(G)=3$.

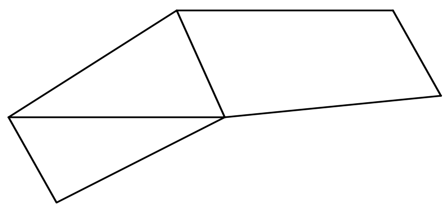


Рис. 3.1.13.

Теорема. Для каждого графа F выполняется неравенство $n \leq \alpha(G)\gamma(G)$, где n=|X| мощность множества X, $\alpha(G)$ – число внутренней устойчивости, $\gamma(G)$ – хроматическое число графа.

Доказательство. Все множество вершин графа можно разбить на γ внутренне устойчивых множеств, состоящих из точек одинакового цвета. Пусть внутренне устойчивые множества содержат $m_1,\ldots,m_\gamma$

вершин. $m_i \le \alpha(G)$, т.к. $\alpha(G)$ по определению есть максимальное число вершин внутренне устойчивых множеств. Но $n=m_1+m_2+\ldots+m_\gamma$, следовательно, $n \le \alpha(G)\gamma(G)$.

Задача о раскраске геометрической карты связана с определением хроматического числа графа. Любую географическую карту можно изобразить в виде графа G(X,ГX), где вершинами являются страны, а ребрами связаны страны, граничащие между собой. Такой граф является плоским. Гипотеза о четырех красках состоит в утверждении того, что граф, соответствующий любой географической карте, имеет хроматическое число не больше 4. Долгое время это предположение оставалось недоказанным, несмотря на широкий интерес математиков к этой проблеме. Благодаря созданию современных ЭВМ решение этой проблемы стало возможным, что и было проделано американскими математиками К.Аппелем и В.Хакеном. Задача была решена путем сведения ее к некоторым частным вопросам чисто арифметического характера, требующим большого числа вычислений, которые были бы не под силу человек, не вооруженному современной вычислительной техникой.

Операции над графами. Объединение графов.

Объединением графов $G1(X_1,\Gamma_1 X_1)$ и $G2(X_2,\Gamma_2 X_2)$ называется такой граф G(X,ГX), у которого множество вершин есть сумма множеств вершин объединяемых графов $X=X_1 \cup X_2$, а отображение есть сумма отображений объединяемых графов $\Gamma X=\Gamma_1 X_1 \cup \Gamma_2 X_2$. обозначает: $G=G1 \cup G2$.

Пример. Заданы графы G1 и G2:

$$G_1 : X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \qquad G_2 : X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$\Gamma_1 X_1 : \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \qquad \Gamma_2 X_2 : \Gamma_2 x_1 = \{x_3\}$$

$$\Gamma_1 x_2 = \{x_3\} \qquad \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\}$$

$$\Gamma_1 x_3 = 0 \qquad \Gamma_2 x_3 = \{x_3\}$$

$$\Gamma_1 x_4 = \{x_3\}$$

Требуется определить $G(X,\Gamma X)=G1 \cup G2$.

$$G : X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\Gamma X : \Gamma x_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$\Gamma x_2 = \{x_1, x_3\}$$

$\Gamma x_3 = \{x_3\}$

$\Gamma x_4 = \{x_3\}$

Геометрическая реализация складываемых графов и графа-суммы имеет следующий вид:

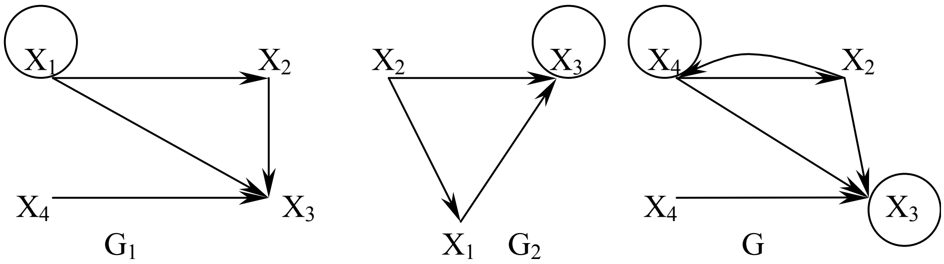


Рис. 3.1.14

Граф-сумма содержит все вершины и дуги, встречающиеся хотя бы в одном из двух складываемых графов.

Пересечение (произведение) графов.

Пересечением графов $G1(X_1,\Gamma_1 X_1)$ и $G2(X_2,\Gamma_2 X_2)$ называется такой граф $G(X,\Gamma X)$, у которого множество вершин есть пересечение множеств вершин графов $X=X_1 \cap X_2$, а отображение есть пересечение отображений перемножаемых графов $\Gamma X=\Gamma_1 X_1 \cap \Gamma_2 X_2$.

Пример.

Пересечение графов G1 и G2 предыдущего примера есть граф $G(X,\Gamma X)$:

$G : X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$\Gamma X : \Gamma x_1 = \{x_3\}$

$\Gamma x_2 = \{x_3\}$

$\Gamma x_3 = 0$

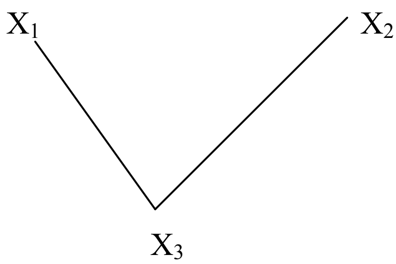


Рис. 3.1.15.

Граф-пересечение содержит вершины и дуги, являющиеся общими у перемножаемых графов.

Прямое произведение графов.

<u>Прямым (декартовым) произведением графов</u> $G1(X_1,\Gamma_1 X_1)$ и $G2(X_2,\Gamma_2 X_2)$ называется граф $G(x,гx)$, для которого $X=X_1*X_2$ и $\Gamma X=\Gamma_1 X_1*\Gamma_2 X_2$.

<u>Пример.</u>

Найти декартово произведение графов G1 и G2:

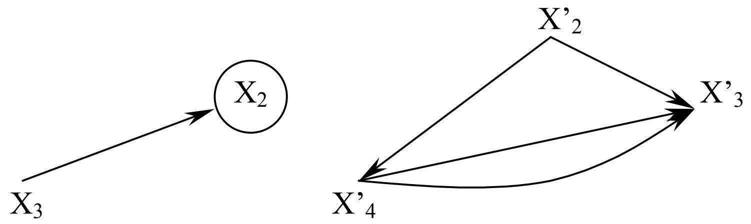


Рис. 3.1.16.

$$G_1 : X_1 = \{x_1, x_2\}$$

$$\Gamma_1 X_1 : \Gamma_1 x_1 = \{x_2\}$$

$$\Gamma_1 x_2 = \{x_2\}$$

$$G_2 : X_2 = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$$

$$\Gamma_2 X_2 : \Gamma_2 x'_1 = \{x'_3\}$$

$$\Gamma_2 x'_2 = \{x'_1, x'_3\}$$

$$\Gamma_2 x'_3 = \{x'_1\}$$

$$G = G_1 \times G_2$$

$$G(X, \Gamma X) : X = \{\{x_1, x'_1\}, \{x_1, x'_2\}, \{x_1, x'_3\}, \{x_2, x'_1\}, \{x_2, x'_2\}, \{x_2, x'_3\}\}$$

Обозначим каждую получившуюся вершину через $y_i, i = \overline{1,6}$, тогда

$$X = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$$

$$\Gamma X : \Gamma y_1 = \{y_6\}$$

$$\Gamma y_2 = \{y_4, y_6\}$$

$$\Gamma y_3 = \{y_4\}$$

$$\Gamma y_4 = \{y_6\}$$

$$\Gamma y_5 = \{y_4, y_6\}$$

$$\Gamma y_6 = \{y_4\}$$

Геометрическая реализация графа G имеет вид (рис.3.1.17):

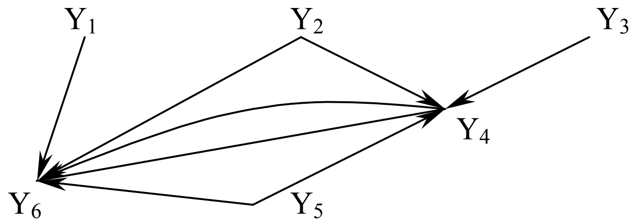


Рис. 3.1.17.

Матрицы для графов.

Матрицей смежности данного графа G(X,ГX) называется квадратная матрица порядка n, где n – мощность множества X, элемент которой определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} K,\_\text{если}\_\text{из}\_\text{вершины}\_Xi\_\text{в}\_Xj\_\text{выходит}\_k\_\text{дуг} \\ 0,\_\text{если}\_\text{вершины}\_Xi\_\text{и}\_Xj\_\text{несмежны.} \end{cases}$$

Для графа, две вершины которого соединены не более чем одной дугой одного направления, матрица смежности состоит из единиц и нулей (K=1). В дальнейшем будем рассматривать только такие графы.

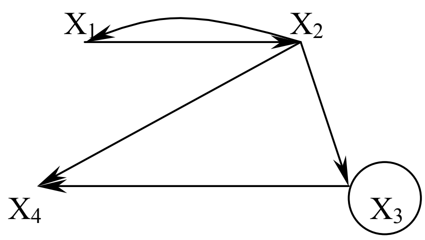


Рис. 3.1.18.

Пример.

Граф, изображенный на рис.3.1.18, имеет следующую матрицу смежности:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Полустепень исхода вершины x_i равна числу единиц, стоящих в i-й строке. Полустепень захода равна числу единиц, стоящих в i-м столбце. Найдя сумму полустепеней i-й вершины, можем определить ее степень по матрице смежности. Так,

$$P(x_2)=P^{+}+P^{-}=1+3=4$$

Единицы, стоящие на главной диагонали матрицы смежности, соответствуют петлям при данной вершине.

Изолированной вершине соответствуют строка и столбец, состоящие из нулей.

Число единиц в матрице смежности равно числу дуг графа.

Транспонированной матрице смежности соответствует граф с противоположной ориентацией.

Матрица смежности полностью задает ориентированный граф. Любая квадратная матрица, состоящая из единиц и нулей, может быть рассмотрена как матрица смежности, задающая некоторый граф G.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

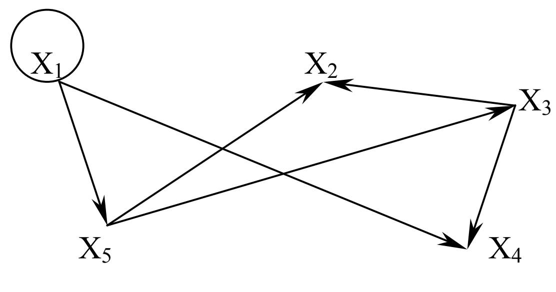


Рис. 3.1.19

Так, матрице M и соответствует граф, изображенный на рис.3.1.19.

<u>Операции над графами с помощью матриц смежности.</u> Если следует найти объединение или пересечение графов, заданных их матрицами смежности, можно выполнить эти операции, не прибегая к аналитической записи графа или его геометрической реализации.

Пример.

Напишем матрицы смежности A и B графов G1 и G2 (рис.3.1.14), над которыми произведем операции сложения и умножения

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

а также матрицы смежности C и D для графа, являющихся их объединением (рис. 3.1.15)

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Рассмотренный пример иллюстрирует то обстоятельство, что матрица смежности для графа суммы есть булева сумма матриц смежности складываемых графов: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, причем 0+0=0; 0+1=1; 1+0=1; 1+1=1.

Матрица смежности для графа-пересечения может быть получена поэлементным умножением $d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, причем 0*1=0; 1*0=0; 0*0=0; 1*1=1, т.е. матрица смежности графа-пересечения содержит единицы только в качестве тех элементов, которые равны единицам в обеих матрицах смежности перемножаемых графов.

Матрица инциденций.

Матрицей инциденций ориентированного графа G(x,u) называется прямоугольная матрица порядка [n * m], где n – мощность множества x, m – мощность множества u, каждый элемент которого a_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } x_i \text{ – начало дуги } u_i\\-1, & \text{если } x_i \text{ – конец дуги } u_i\\0, & \text{если } x_i \text{ – не инцидентна дуге } u_i\end{cases}$$

Пример.

Напишем матрицу инциденций для графа, изображенного на рис.3.1.20.

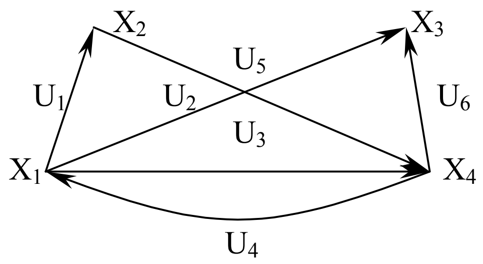


Рис.3.1.20.

Для этого пронумеруем дуги: $u_1,u_2,\ldots,u_6$, матрица инциденций будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрицы достижимостей и контрадостижимостей.

Пусть задан граф $G(X,\Gamma(X))$. Говорят, что вершина $x_j \in X$ достижима из вершины $x_i \in X$, если существует по крайней мере один путь из x_i в x_j. Пусть $R(x_i)$ – множество вершин, достижимых из вершин x_i графа G. Так как каждая вершина графа достижима из себя самой с помощью пути длины нуль, то первым элементом достижимого множества $R(x_i)$ является вершина x_i. Множество вершин x_j, достижимых из x_i с использованием путей длины единица, есть множество $\Gamma(x_i)$. Множество $\Gamma(\Gamma(x_i))=\Gamma^2(x_i)$ состоит из вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины два и, аналогично, $\Gamma^p(x)$ является множеством вершин, которые достижимы из x_i с помощью путей длины p. Так как вершина графа G, достижимая из вершины x_i должна быть достижима с использованием путей длины нуль, или единица, или два,…, или p, то множество $R(x_i)$ вершин, достижимых из x_i, можно представить в следующем виде:

$$R(x_i)=\{x_i\}\cup\Gamma(x_i)\cup\Gamma^2(x_i)\cup\ldots\cup\Gamma^p(x_i). \quad (3.1.1)$$

Для того чтобы получить достижимое множество $R(x_i)$, необходимо в выражении (5.1) последовательно выполнять слева направо операции объединения до тех пор, пока мощность “текущего” множества не перестанет увеличиваться при очередной операции объединения. Это означает, что последующие операции объединения не будут давать новых элементов “текущему” множеству, которое и определяет множество R(x_i). Матрицей достижимостей R= (r_{ij}) называется квадратная матрица порядка n (n – число вершин графа), элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in R(x_i), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример.

Для графа G (рис.3.1.21) построить матрицу достижимостей

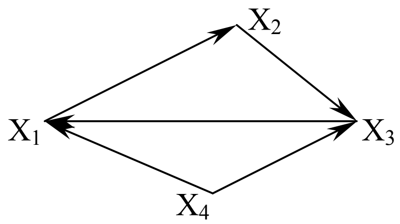


Рис. 3.1.21.

Решение.

На основании выражения (3.1.1) находим множества достижимостей $R(x_i), i = 1,2,3,4$:

$$R(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$R(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$R(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$R(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_1\} \cup \{x_3, x_2\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Следовательно, матрица достижимостей имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицей контрадостижимостей (обратных достижимостей) Q=(q_{ij}) называется квадратная матрица порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Q(x_i), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $Q(x_i)$ – множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достигнуть вершину x_i.

Контрадостижимое множество $Q(x_i)$ строится на основании следующего выражения:

$Q(x_i)=\{x_i\}\cup\Gamma^{-1}(x_i)\cup\Gamma^{-2}(x_i)\cup\ldots\cup\Gamma^{-p}(x_i)$. (3.1.2)

где $\Gamma^{-1}(x_i)$ – множество вершин, из которых достижима вершина x_i с использованием пути длины единица; $\Gamma^{-2}(x_i)=\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(x_i))$ – множество вершин, из которых достижима вершина x_i с использованием пути длины два и т.д.

<u>Пример.</u>

Для графа G (рис.3.1.21) построить матрицу контрадостижимостей.

<u>Решение.</u>

На основании выражения (3.1.2) находим множества контрадостижимостей $Q(x_i)$,i=1,2,3,4:

$$Q(x_1)=\{x_1\}\cup\{x_4,x_3\}\cup\{x_2,x_4\}\cup\{x_1\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$$

$$Q(x_2)=\{x_2\}\cup\{x_1\}\cup\{x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_4\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$$

$$Q(x_3)=\{x_3\}\cup\{x_2,x_4\}\cup\{x_1\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$$

$$Q(x_4)=\{x_4\}.$$

Следовательно, матрица контрадостижимостей имеет вид:

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Из определения матриц R и Q следует, что i-й столбец матрицы R совпадает с i-й строкой матрицы Q. Поэтому $Q=R^T$, где T – знак транспонирования.

Так как $R(x_i)$ является множеством вершин, достижимых из x_i, а $Q(x_j)$ – множеством вершин, из которых достижима вершина x_j, то $R(x_i)\cap Q(x_j)$ является множеством таких вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере одному пути, идущему от x_i к x_j. Эти вершины называются существенными (неотъемлемыми) относительно двух концевых вершин x_i и x_j. Эти вершины называются существенными (неотъемлемыми) относительно двух концевых вершин x_i и x_j. Все остальные вершины $x_k\notin R(x_i)\cap Q(x_j)$ называются несущественными (избыточными), так как их удаление не влияет на пути от x_i к x_j.

3.2. Деревья

Основные определения и теоремы.

Неориентированный граф с числом вершин n>1 называется **деревом**, если он связен и не содержит циклов.

Следующая теорема характеризует свойства деревьев, каждое из которых может служить определением дерева.

Теорема 1.Для графа G, имеющего n вершин (n>1), равносильны следующие свойства:

1. G связен и не содержит циклов;
2. G не содержит циклов и имеет (n-1) ребро;
3. G связен и имеет (n-1) ребро
4. G не содержит циклов, но добавление ребра между любыми его вершинами приводит к образованию цикла;
5. G связен, и все его ребра являются перешейками;
6. Всякая пара вершин G соединена только одной цепью.

Доказательство этой теоремы можно провести, показав цепочку следствий 1→2→3→4→5→6→1.

Доказательство. Если граф G связен и не имеет циклов, то цикломатическое число ν=N-n+1=0, откуда N=n-1, т.е. G не содержит циклов и имеет (n-1) ребро (1→2).

Если G не имеет циклов, то ν=0, причем N=n-1, т.е. ν=N-n+P=0, откуда получаем P=1, т.е. G связен и имеет (n-1) ребро (2→3).

Если G связен и имеет (n-1) ребро, то ν=N-n+1, N=n-1. Отсюда ν=0, т.е. G не содержит циклов. Если добавить одно ребро, получим связной граф G' с числом ребер N'=n. Цикломатическое число этого графа ν'=n-n+1=1, т.е. G' содержит один цикл(3→4).

Если G не содержит циклов, но добавление одного ребра ведет к образованию цикла, то G связен так как в противном случае в графе G должны существовать две вершины X_i и X_j , не соединенные никакой цепью и такие, что добавление ребра(X_i X_j) не привело бы к образованию цикла. Все ребра графа являются перешейками, т.к. удаление любого из них приводит к графу G', для которого ν'=N-n+P=0, причем N'=N-1. так как G связен и не содержит циклов, ν'=N-n+1=0, откуда N=n-1, N'=n-2 и, следовательно, P=2.т.е. G' не является связным (4→5).

Если G связен, то всякая пара его вершин соединена цепью. В силу того, что все ребра G являются перешейками, существует единственная цепь, соединяющая любую пару вершин X_i, X_j , т.к. в противном случае удаление ребра (X_i X_j) не нарушило бы связности графа G (5→6).

Если всякая пара вершин G соединена цепью, то G связен. Так как такая цепь единственная, G не содержит циклов: если бы G содержал циклы, то в нем нашлась бы пара вершин X_i, X_j , соединенная более чем одной цепью (6→1), что и требовалось доказать.

Ориентированное дерево называется **прадеревом**.

Несвязный граф, компонентами связности которого являются деревья, называется **лесом**.

В дальнейшем понадобится следующее определение: подграф G'(X',U') содержащий все вершины графа G(X,U), называется **частичным графом**.

Теорема 2. Граф G(X,U) тогда и только тогда содержит частичный граф, являющийся деревом, когда он связен.

Доказательство. Если граф G содержит частичный подграф-дерево, то, очевидно, он связен, т.к. на основе свойства 6 предыдущей теоремы каждая пара его вершин может быть соединена цепью.

Предположим теперь, что граф связен. Докажем, что он содержит частичный граф-дерево.

Если граф G не содержит циклов, то он сам является деревом по определению. Предположим, что G содержит цикл μ. Вычеркнем из μ любое ребро. Получившийся частичный граф G_1 ,будет связным, т.к. удаление из цикла любого ребра не нарушает связности графа. Если G_1 – дерево, доказательство закончено. Если G_1 содержит циклы, то удаляем ребро любого из них и получаем подграф G_2 . Если G_2 не имеет циклов, то он есть дерево и доказательство закончено. Если G_2 содержит циклы, то удаляем ребро одного из них, и.т.д.

Через несколько шагов получим связной граф без циклов, т.е. дерево, являющееся подграфом исходного графа G.

Постановка задачи.

Предположим, что имеется n городов, которые нужно соединить нефтепроводом (электролинией, газопроводом). Стоимость строительства нефтепровода между городами X_i, X_j задана. Как построить самый дешевый нефтепровод, связывающий все города?

Построим граф, вершинами которого обозначены города, а ребрами возможные нефтепроводы между ними. Каждому ребру графа (X_i, X_j) поставим в соответствие число $l(X_i, X_j) \geq 0$, равное стоимости строительства нефтепровода на участке (X_i, X_j). Задача строительства самого дешевого нефтепровода сводится к следующей задаче на графе. Задан конечный неориентированный связной граф G(X,U) каждому ребру которого $(X_i,X_j)=U$ поставлено в соответствие число $l(U)\geq 0$, называемое длинной ребра. Требуется найти такой частичный граф-дерево графа G (частичное дерево), общая длина ребер которого минимальна. Решение этой задачи может быть получено с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм Краскала

Алгоритм построения кратчайшего дерева для графа G(X,U) состоит в следующем:

1. Выбираем самое короткое ребро графа U_1 , затем ребро U_2, затем самое короткое из оставшихся;
2. Из оставшихся ребер выбираем самое короткое ребро U_3 так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами;
3. Продолжаем эту процедуру. На k-м к выбранным ребрам $U_{1,\ldots,}U_{к-1}$ добавляем самое короткое ребро из оставшихся $|U|$-(к-1) ребер так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами;
4. При k=n-1 процесс заканчивается. Получим граф без циклов с (n-1)-м ребром. На основании теоремы 1 (пункт 2) построенный граф есть дерево, обозначим его T(n-1).

Докажем, что построенное по этому графу дерево T(n-1) кратчайшее.

1.Сначала предположим что G – полный граф, и длины всех его ребер различны. Для доказательства воспользуемся методом от противного. Предположим, что построенное T(n-1) дерево не кратчайшее и имеется отличное от него кратчайшее дерево T. В этом существует две возможности:

а) T и T(n-1) не имеют общих ребер. Присоединим к дереву T ребро U_1Є T(n-1). В этом случае согласно пункту 4 теоремы 1 в получившемся графе имеется цикл, одним из ребер которого является U_1. Выбросим из этого цикла любое ребро $U'\neq U_1$.В результате этой операции получим частичное дерево T', которое отличается от T одним ребром: u' заманено U_1. Но $l(U_1)<l(U')$, т.к. U_1 – кратчайшее ребро. Следовательно, $l(T')<l(T)$ т.е. T не кратчайшее дерево;

б) T и T(n-1) имеют общие ребра U_1 , U_2 ,…, U(k-1). Пусть $U_к$ есть первое ребро, принадлежащее T(n-1), но не принадлежащее T.

Рассмотрим граф, который получится присоединением к дереву T ребра $U_к$, т.е. $T \cup \{U_k\}$. В соответствии с пунктом 4 теоремы 1 в нем есть цикл μ, причем μ содержит ребро U’, не принадлежащее T(n-1), т.к. в противном случае дерево T(n-1) содержало бы цикл, что противоречит определению дерева.

Удалив из цикла μ ребро U’, получим дерево $T' = \{T \cup \{U_k\} / \{U'\}\}$, отличающееся от T одним ребром: U' заменено на U_k. Но $l(U_k)<l(U')$, т.к. в противном случае на k-м шаге при построении дерева T(n-1) в него включили бы ребро U’. Следовательно, $l(T')<l(T)$, т.е. T – не кратчайшее дерево.

2. Пусть G(X,U)- неполный граф, но его ребра имеют разную длину. Пусть l(U)=L –сумма длин всех ребер графа G. Присоединим к G столько новых ребер, сколько требуется для получения полного графа. Припишем каждому вновь построенному ребру длину l_j>L.

В полученном полном графе построим кратчайшее дерево T(n-1).

На основании теоремы 2 в графе G есть кратчайшее дерево, длина которого не превосходит L. Частичное дерево графа G будет являться частичным деревом для построенного полного графа. Поэтому ни одно новое ребро в кратчайшее дерево входить не может. Следовательно, для построения кратчайшего частичного дерева в графе G можно пользоваться алгоритмом Краскала.

3. Предположим теперь, что некоторые ребра графа G(X,U) имеют одинаковую длину. Пусть Δ – минимальная ненулевая разность длин ребер. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{\Delta}{2N}$, где N=│U│. Пусть $l_1,\ldots,l_m$ – все значения длин ребер графа; k_j принимают значение l_j. Занумеруем ребра графа в порядке увеличения длины. Затем изменим длину ребра графа следующим образом: $\bar{l}(U_i) = l(U_i) + (i-1)\varepsilon$. В получившемся графе длины всех ребер различны. Выберем с помощью алгоритмов Краскала кратчайшее частичное дерево. Проведенное изменение длин ребер графа обладает тем свойством, что если в исходном графе $l(U_1) < l(U_2)$, то и в графе с ребрами измененной длины $\bar{l}(U_1) < \bar{l}(U_2)$. Следовательно, кратчайшее частичное дерево в новом графе будет кратчайшим и в старом.

В графе, где некоторые ребра имеют одинаковую длину, кратчайшее частичное дерево может не быть однозначно определенным.

Пример

Требуется построить газопровод, соединяющий 10 городов (рис.3.2.1.). Возможные соединения городов обозначены ребрами, длины которых $l(X_i,X_j)$, представляющие собой стоимость строительства газопровода на участке (X_i,X_j), заданы и обозначены на графе. Как построить самый дешевый газопровод?

Задача сводится к отысканию частичного дерева заданного графа, общая длина ребер которого минимальна. Воспользуемся алгоритмом Краскала.

Частичное дерево должно содержать (n-1) ребер, т.е. 9. общее число ребер исходного графа $N = \frac{1}{2}\sum P(x_i)$.

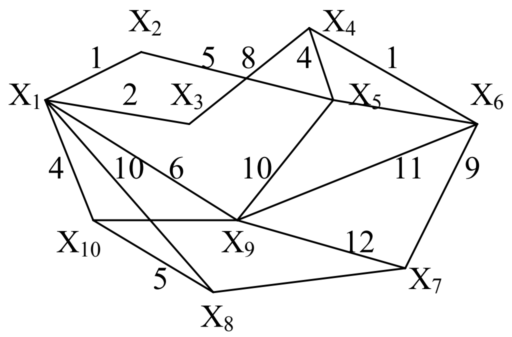


Рис. 3.2.1

Заданные длины ребер удобно поместить в следующую симметрическую таблицу, в которой достаточно заполнить один из углов – верхний или нижний по отношению к главной диагонали (рис.3.2.2). На пересечении строки X_i и столбца X_j стоит число, равное длине дуги (X_i,X_j), т.е. l(X_i,X_j). Число заполненных клеток равно числу ребер графа. Следуя алгоритму, выбираем самые короткие ребра U_1=(X_1,X_2), U_2=(X_4,X_6), l(U_1)=l(U_2)=1.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1										
X_2	~~1~~									
X_3	~~2~~									
X_4			8							
X_5		~~5~~		~~4~~						
X_6				~~1~~	8					
X_7						~~9~~				
X_8							15			
X_9					10	11	12			
X_{10}	~~4~~							~~5~~	~~3~~	

Рис. 3.2.2.

Отметим это, зачеркнув выбранные числа в таблице и пометив выбранные ребра на графе жирной чертой. Наименьшее из оставшихся чисел в таблице есть 2, т.е. длина дуги (X_1,X_3). Выбираем в качестве U_3 ребро (X_1,X_3), т.к. оно не образует цикла с выбранными ребрами. Вновь делаем отметку в таблице и на графе и т.д. Получим в результате U_4=(X_9,X_{10}), U_5=(X_1,X_{10}), U_6=(X_4,X_5), U_8=(X_8,X_{10}), U_7=(X_2,X_5), U_9=(X_7,X_6).

Длина последнего выбранного ребра равна 9, т.к. ребра графа с меньшими длинами 6,7,8 не могут являться ребрами дерева. Сумма длин ребер построенного дерева L=34. Стоимость строительства самого дешевого газопровода по исходным данным составляет 34 денежные единицы.

3.3. Экстремальные задачи на графах.

Задача о кротчайшим пути между двумя вершинами ориентированного графа и ее экономическая интерпретация.

Постановка задачи

Постановка задачи состоит в следующем. Задан конечный ориентированный граф G(X,ГX), или G(X,U). Каждой дуге графа "u" поставлено в соответствие некоторое число $l(u) \geq 0$, называемое длинной дуги "u". Длинной пути μ называется сумма длин дуг, составляющих данный путь.

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u).$$

Требуется для двух фиксированных вершин x_o и x_n графа G(X,U) найти самый короткий соединяющий их путь.

К данной задаче может быть сведена следующая задача экономического содержания. Задана сеть дорог соединяющих пункты x_i $(i=0,1,\ldots,n)$. Найти путь, соединяющий пункты x_o и x_n, по которому можно доставить груз в кратчайшее время. При этом время доставки груза из пункта x_i в x_j $(i,j \in 0,\ldots,n)$ задано и равно $l(u_{ij})=l(x_i,x_j) \geq 0$.

Если под длинной дуги $l(x_i,x_j)$ понимать стоимость перевозки груза из пункта x_i в x_j, то содержание задачи составит определение такого пути из пункта x_i в x_j, на котором затраты на транспортировку были бы минимальными.

Пример.

Имеем 6 пунктов X $(X_0,\ldots,X_6)$. Сеть дорог, связывающих эти пункты, изображена на графе (рис.3.3.1).

Время доставки груза из i-го пункта в j-й, т.е. $l(x_i,x_j)$, задано и изображено числом в кружке, записанным рядом с дугой (x_i,x_j). Так, $l(x_0,x_1)=2$, $l(x_0,x_2)=4$, $l(x_0,x_3)=5$, $l(x_1,x_4)=3$ и т.д.

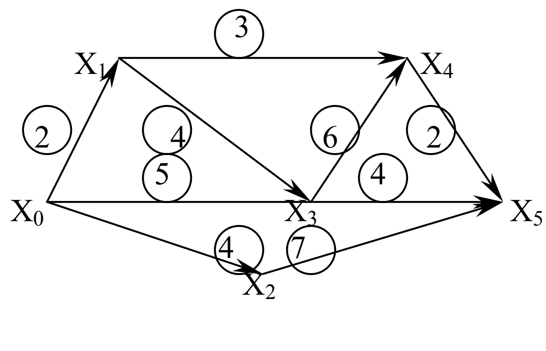


Рис. 3.3.1.

Требуется определить путь, по которому из пункта x_0 в пункт x_5 можно доставить груз в кратчайшие время, и само кратчайшее время доставки.

Итак, задача о кратчайшем пути между двумя фиксированными вершинами ориентированного графа предполагает, во-первых, определение длины кратчайшего пути, во-вторых, определение самого кратчайшего пути.

Алгоритм.

Алгоритм решения этой задачи позволяют определить кратчайший путь и его длину за конечное число шагов. Каждая вершина графа получает некоторую числовую метку на первом шаге. Затем метки, вообще говоря, могут меняться, становясь на некотором шаге постоянным числом. Установившаяся метка данной вершины есть кратчайшее расстояние от этой вершины до вершины x_0. Если пути, соединяющего x_0 и x_n, не существует, будем считать длину кратчайшего пути между этими вершинами равной $+\infty$.

Алгоритм состоит в последовательном выполнении следующих операций:

1. На первом шаге ставим следующие метки: для вершины x_0 $\lambda_0=0$, для любой другой вершины x_i $\lambda_j=+\infty$ (i=1,…,n);
2. Ищем на графе такую дугу (x_i,x_j), для которой $\lambda_j-\lambda_i>l(x_i,x_j)$. Причем разность $\infty-\infty$ считаем равной 0. Если такая дуга найдется, меняем метку вершины x_j на $\lambda_j=\lambda_i+l(x_i,x_j)$. Если такой дуги не найдется, то пути, соединяющего x_0 с x_n, не существует, т.к. из x_0 ни в какую другую вершину графа не идет ни одна дуга.;
3. Повторяем процедуру пункта 2 до тех пор, пока метки вершин не перестанут меняться.

Установившиеся метки обозначим λ^*_i (I=1,2,…,n). При этом может быть два случая:

1) $\lambda^*_n=+\infty$.

Это значит, что пути, соединяющего x_0 и x_n, не существует. Длина кратчайшего пути равно $+\infty$.

2) λ^*_n – конечное число.

Оно равно кратчайшему расстоянию между вершинами x_0 и x_n.

Кратчайший путь получаем следующим образом. Ищем вершину x_{p1} такую, что $\lambda_n-\lambda_{p1}=l(x_{p1},x_n)$, затем x_{p2}, для которой $\lambda_{p2}-\lambda_{p1}=l(x_{p2},x_{p1})$ и т.д. до тех пор, пока не придем в вершину $x_{p(k+1)}=x_0$. Путь, проходящий через отмеченные вершины $x_0, x_{pk}, x_{p(k-1)}, ..., x_{p2}, x_{p1}, x_n$, является кратчайшим.

Как следует из построения и правил изменения меток, метки вершины x_i (i=1,…,n) могут меняться конечное число раз (метка вершин x_0 $\lambda_0=0$ не меняется), т.к. конечная метка всякой вершины равна длине некоторого пути из x_0 в данную вершину x_i.

Из построения следует, что отмеченный путь μ ($x_0, x_{pk}, x_{p(k-1)}, ..., x_{p2}, x_{p1}, x_n$) – есть кратчайший путь. В самом деле, пусть существует другой путь $\overline{\mu}$ из вершины x_0 в x_n, проходящий через вершины $x_0, x_1, x_2, …, x_r, x_n$. Из построения следует, что

$$\lambda x_n^* - \lambda y_r^* \le l(y_r, x_n)$$
$$\lambda y_r^* - \lambda y_{r-1}^* \le l(y_{r-1}, y_r)$$
$$...$$
$$\lambda y_1^* - \lambda x_0^* \le l(x_0, y_1)$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $\lambda x^*_0=0$, получим $l(\mu) = \lambda^* x_n \le l(y_r, x_n) + l(y_{r-1}, y_r) + ... + l(x_0, y_1) = l(\overline{\mu})$, т.е. $l(\mu) \le l(\overline{\mu})$. Заметим, что решение задачи может не быть однозначным, т.е. существует несколько путей минимальной длины из вершины x_0 в x_n.

Рассмотренный алгоритм известен в литературе как алгоритм Форда.

Решение данной задачи можно ускорить, сократив число шагов, если пользоваться формулой

$$\lambda_j = \min_i \{\lambda_i + l(x_i, x_j)\}. \quad (3.3.1)$$

Задача об отыскании кратчайшего пути между двумя вершинами ориентированного графа может быть решена методами целочисленного программирования. Решение по приведенному алгоритму является более простым.

Обратимся к приведенному выше примеру. Определим кратчайший путь, соединяющий пункты x_0 и x_5. При этом будем пользоваться формулой (3.3.1)

Для вершины x_0 полагаем $\lambda_0=0$. Для всех остальных вершин $\lambda_i=+\infty$ (i=1…,5). Затем ищем дугу, для которой $\lambda_j-\lambda_0>l(x_0,x_j)$. Начнем с вершины x_1.

$\lambda_1-\lambda_0=\infty>l(x_0,x_1)=2$.

Следовательно меняем метку вершины x1 на

$\lambda'_1=\lambda_0+l(x_o,x_1)=2$

Аналогично определяем метку вершины X2

$\lambda'_2=\lambda_0+l(x_o,x_1)=2$

Чтобы найти изменившуюся метку вершины X_3, следует воспользоваться формулой (6.1), т.к. в вершину X_3 направлены две дуги, идущие из двух разных верши x_0 и x_1:

$\lambda'_3=\min\{[\lambda'_1+l(x_1,x_3)],[\lambda_0+l(x_0,x_3)]\}=\min\{(2+4),(0+5)\}=5$ (x_o)

Аналогично определяем новые метки для вершин x_4x_5:

$\lambda'_4=\min\{[\lambda'_{1+}l(x_1,x_4)],[\lambda'_3+l(x_3,x_4)]\}=\min\{(2+3),(5+6)\}=5$ (x_1)

$\lambda'_5=\min\{[\lambda'_2+l(x_2,x_5)],[\lambda'_3+l(x_3,x_5)],[\lambda'_4+l(x_4,x_5)]\}=$ (x_4)

$=\min\{(4+7),(5+4),(5+2)\}=7$

В данном случае получили установившиеся метки вершин на втором шаге (на первом шаге полагая $\lambda_0=0$, $\lambda_i=+\infty$). Каждая из меток λ'_i – длина кратчайшего пути из вершин x0 в данную вершину x_j. Длина кратчайшего пути из x_0 в x_5 есть

$$\lambda^*_5=\lambda'_5=7.$$

При подсчете значений λ'_j справа в скобках отмечены вершины, по которым достигается минимум. Так, для x_5 $\lambda'_5=7$, если прийти в эту вершину из вершины x_4, т.е. $\lambda'_5=\lambda'_4+l(x_4,x_5)$. Метка для вершины x_5 примет большее значение, если прийти в x_5 из x_2 или x_3. Следовательно, кратчайший путь в x_5 проходит через вершину x_4 ($P_1=4$ в приведенных выше обозначениях). В x_4 он идет через вершину x_1 ($P_2=1$), в x_1 из x_0 ($P_3=P_4=0$). Итак, кратчайший путь из вершины x_0 в x_5 проходит через вершины x_0,x_1,x_4,x_5. Искомый путь μ есть (x_0,x_1,x_4,x_5); $l(\mu)=7$.

В рассмотренном примере установившиеся метки получили за один шаг, потому что, воспользовавшись формулой (3.3.1), определили кратчайший путь между входом и выходом графа-сети. Заметим, что для графов-сетей кратчайший путь между входом и выходом графов всегда существует. Причем он может быть получен за один шаг без предварительного изменения меток, т.е. алгоритм становится совсем простым, если пользоваться формулой (3.3.1) и правильной нумераций вершин графа, что и было проделано в этой задаче.

Сети. Отношение порядка между вершинами ориентированного графа.

Ориентированный граф без циклов, имеющий одну вершину без входящих дуг (вход графа) и одну вершину без выходящих дуг (выход графа), называется **сетью**.

Отыскание экстремальных путей на графах такого вида используется в различных экономических расчетах. К их числу относятся рассмотренная выше задача, а также задачи сетевого планирования.

В любом ориентированном графе для циклов можно установить отношение порядка между его вершинами.

Вершина x_i предшествует вершине x_j, если существует дуги из x_i в x_j. Это отношение порядка удовлетворяет аксиомам порядка:

1) если x_i предшествует x_j, то x_j не предшествует x_i;

2) если x_i предшествует x_j, x_j предшествует x_k, то x_i предшествует x_k.

"Правильная" нумерация вершин графа заключается в том, что при x_i предшествующему x_j номера i и j должны удовлетворять неравенству $i<j$.

На графе-сети практически это можно сделать, используя распределение вершин по рангам методом вычерчивания дуг. Вычеркиваем дуги, исходящие из входа графа, вершины x_0. Вершины, соответствующие концам этих дуг и не имеющие после этой операции входящих дуг, относим к вершинам I-го ранга. На графе G (рис.3.3.1) вершинами I-го ранга являются вершины x_1 и x_2. Вершины I-го ранга получают первые порядковые номера 1,2. Внутри одного ранга нумерация произвольна.

Затем вычеркиваем дуги, выходящие из вершин I-го ранга. Вершины, соответствующие концам таких дуг и не имеющие после этих операций входящих дуг, относим к вершинам 2-го ранга. Они получают следующие порядковые номера. В нашем примере к вершинам 2-го ранга относится одна вершина x_3.

Процесс вычеркивания дуг продолжается до тех пор, пока все вершины графа не будут занумерованы. Последний порядковый номер получит вершина x_n – выход графа.

В рассмотренном примере все вершины распределены по 4 рангам. К вершинам 3-го ранга принадлежит x_4, а к вершинам 4-го ранга – x_5.

Существуют и другие способы "правильной" нумерации вершин графа, в том числе алгоритм Форда для нумерации вершин графа.

Задача о пути максимальной длины между двумя вершинами ориентированного графа в сетевом планировании.

Постановка задачи.

Задача ставится следующим образом.

Задан конечный ориентированный граф без контура G(X,U).

Каждой дуге графа "u" ставится в соответствие длина дуги l(u).

Требуется определить длиннейший путь, соединяющий две вершины графа x_0 и x_n.

Аналогичные задачи можно ставить для ориентированных графов с контурами, а также неориентированных графов. Но в этом случае во избежание бессодержательности задачи нужно вводить дополнительные условия, исключающие пути бесконечной длины.

Решение задачи состоит как в отыскании пути максимальной длинны между двумя фиксированными вершинами графа, так и в определении величины этого пути.

Одну из основных задач сетевого планирования составляет отыскание путей максимальной длины между входом и выходом графа-сети.

Алгоритм.

Каждая вершина графа получает числовую метку, которая может меняться конечное число раз. Установившаяся метка – величина длиннейшего пути из вершины x_0 в данную вершину x_j. В частности, установившаяся метка вершины x_n есть величина длиннейшего пути из x_0 в x_n.

Чтобы определить искомый путь, нужно рассмотреть последовательность шагов, на каждом из которых ищется одна из дуг длиннейшего пути между x_0 и x_n.

Алгоритм состоит в последовательном проведении следующих этапов:

1. Полагаем $\lambda_0 = 0$; $\lambda_i = -\infty$ $(i = 1,\ldots,n)$.
2. Ищем дугу $(x_i,\ x_j)$ такую, что $\lambda_j - \lambda_i \le l(x_i, x_j)$. Если такой дуги нет, то не существует пути, соединяющего x_0 и x_n. Если такая дуга найдется, то изменяем метку λ_j на $\lambda'_j=\lambda_j + l(x_0,x_j)$.
3. Продолжаем процедуру пункта 2 до тех пор, пока метки вершин x_i не перестанут меняться.

Установленные метки обозначим λ^*_i. При этом могут встретиться два случая:

1) $\lambda^*_n= -\infty$, это соответствует тому, что пути, соединяющего вершины x_0 и x_n, не существует;

2) λ^*_n- конечное число. Оно равно длине пути максимальной длины из x_0 в x_n.

Сам путь находим, отмечая вершины, по которым достигается максимум, т.е. те вершины, для которых

$$\lambda_j^* = \lambda_i^* + l(x_i, x_j).$$

Если между вершинами графа-сети установлено отношение порядка, т.е. они “правильно” занумерованы, то решение задачи можно получить за один шаг, произведя подсчет меток с учетом следующей формулы:

$$\lambda_j = \max_i \{\lambda_i + l(x_i, x_j)\} \quad (3.3.2)$$

Пример.

Определим длиннейший путь на графе, изображенном на рис.3.3.1, а также его длину.

Вначале полагаем для вершины x_0 $\lambda_0=0$ и $\lambda j=-\infty$ для вершин x_i (I=1,…,5).

Затем, т.к. $\lambda_1-\lambda_0=-\infty<l(x_0,x_1)$, меняем метку вершины x_1, т.е. λ_1, на

$$\lambda'_1=\lambda_0+l(x_0,x_1)=2 \qquad (x_0)$$

Аналогично $\lambda'_2=\lambda_0+l(x_0,x_2)=4$.

Чтобы найти метку вершины x_3, пользуясь формулой (3.3.2)

$$\lambda'_3=\max\{[\lambda'_1+l(x_1,x_3)].[\lambda_0+l(x_0,x_3)]\}=\max\{(2+4),(0+5)\}=6 \qquad (x1)$$

Справа в скобочках отмечаем вершины, по которым достигается максимум длины.

Аналогично

$$\lambda'_4=\max\{[\lambda'_1+l(x_1,x_4)],[\lambda'_3+l(x_3,x_4)]\}=\max\{(2+3),(6+6)\}=12 \qquad (x_3)$$

$$\lambda'_5=\max\{[\lambda'_3+l(x_3,x_5)],[\lambda'_4+l(x_4,x_5)],[\lambda'_2+l(x_2,x_5)]= \qquad (x_4)$$

$$=\max\{(6+4),(12+2),(4+7)\}=14$$

Искомый путь имеет длину $l(\mu)=\lambda^*_5=14$. Причем в x_5 он идет из вершины x_4, в x_4 из x_3, в x_3 из x_1, в x_1 из x_0: x_5,x_4,x_3,x_1,x_0. Следовательно $\mu=(x_0,x_1,x_3,x_4,x_5)$.

Путь максимальной длины называют критическим путем. Следовательно, критический путь в рассмотренном примере есть $\mu=(x_0,x_1,x_3,x_4,x_5)$, а его длина $l(\mu)=14$.

Сетевое планирование. Скорейшее время завершения проекта.

Рассмотрим некоторый проект – совокупность операций (работ), составляющий некоторый многошаговый процесс. Примером может служить строительство некоторого объекта. Считаем известными все работы, которые предстоит совершить, их последовательность и время, необходимое для выполнения каждой работы. Проект может быть изображен в виде графа-сети. Зададимся целью определить кратчайший срок завершения проекта.

Пусть данные о строительстве приведены в следующей таблице

Виды работ	Какие работы следуют за перечисленными	Продолжительность работ
1	2,3	2
2	8	3
3	6,7	4
4	6,7	5
5	9	4
6	8	6
7	-	4
8	-	2
9	-	7

Эту информацию о проекте представим в виде графа-сети. Дугами графа будем изображать работы, а вершины графа – некоторые события. Назовем элементарными событиями начало и конец каждой работы, а некоторую совокупность элементарных событий – событием.

Вход графа – событие, заключающееся в начале всего проекта. Оно является событием, стоящим в начале одной или нескольких работ, а именно тех, которые не следуют ни за какими другими, т.е. работ, с которых может быть начато строительство. В нашем примере такими работами являются №1,4,5 (их нет во 2- столбце).

Выходом графа будет являться событие, заключающееся в окончании работ, за которыми не следуют никакие другие работы, т.е. в окончании всего проекта. В данном примере – это работы №7,8,9.

Все другие вершины графа есть события, заключающиеся в окончании одних и начале других работ.

Сетевой граф, соответствующий приведенным в таблице данным, изображен на рис.3.3.2. Номер работы обозначен числом вне кружка. Число, обведенное кружком, есть продолжительность данной работы. Вход графа, вершина x_0 – начало проекта. Выход графа, вершина x_5 – окончание проекта.

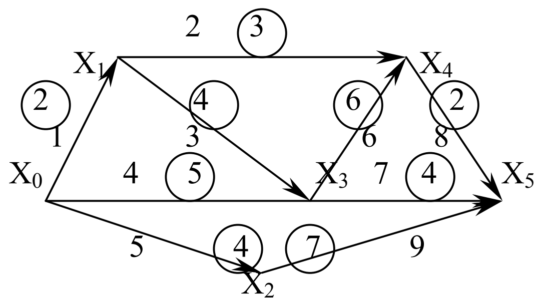


Рис. 3.3.2

Вершины x_1,x_2,x_3,x_4 есть события, заканчивающиеся в начале одних и окончании других работ. Так, например, вершина x_3 есть окончание 3-й и 4-й работ и начало 6-й и 7-й.

Путь максимальной длины из вершины x_0 в x_i есть скорейшее время наступления события x_i. В самом деле, событие x_3, например, соответствующее началу 6-й и 7-й работ, может произойти только после окончания 3-й и 4-й работ, а следовательно, и после окончания 1-й, т.к. для выполнения 3-й работы необходимо окончание 1-й работы. Следовательно, скорейшее время наступления события x_3 есть

$$\max\{5,(2+4)\}=6$$

Скорейшее время наступления события 5 есть скорейшее время окончания проекта в целом и равно длине пути максимальной длины из вершины x_0 в x_5.

Итак, если x_0 и x_n есть вход и выход графа-сети, соответствующего данному проекту, то для определения наиболее раннего срока окончания всех работ нужно найти путь максимальной длины из x_0 в x_n, т.е. критический путь, и определить его длину. Время, соответствующее скорейшему окончанию работ, т.е. скорейшему завершению проекта, называется критическим временем данного проекта. Оно численно совпадает с длиной критического пути из x_0 в x_n.

В приведенном примере критический путь, проходящий через вершины x_0,x_1,x_3,x_4,x_5, имеет длину, равную 14 $l(\mu)=14$, т.е. критическое время данного проекта равно 14.

Работы, составляющие критический путь, называются критическими работами (операциями). От своевременного выполнения критических операций зависит срок завершения проекта. Они не допускают запаздывания в исполнении в отличие от некритичных операций.

С другими параметрами сетевого графа, правилами составления графа-сети, а также вопросами сетевого планирования в целом читатель может ознакомиться по списку литературы.

Литература

1.	Александров П. С.	Введение в теорию множеств и теорию функций. - М.: Наука, 1977 г.
2.	Гаврилов Г. П. Сапоженко А. А.	Задачи и упражнения по курсу «Дискретная математика». - М.: Наука, 1992 г.
3.	Грей П.	Логика, алгебра и базы данных. –М.: Машиностроение, 1989 г.
4.	Гиндикин С. Г.	Алгебра логики в задачах. - М.: Наука, 1972г.
5.	Колмогоров А. Н. Фомин С. В.	Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989 г.
6.	Клини С.	Математическая логика. - М.: Мир, 1973.
7.	Ковалева Л. Ф. Данков О. Ю. Горбовцов Г. Я. Мокеева И. К.	Дискретная математика. - М.: МЭСИ, 1988.
8.	Новиков Н. С.	Элементы математической логики. - М.: Наука, 1973.
9.	Под редакцией Скорнякова Л.А.	Общая алгебра II, М.: Наука, 1990г.
10.	Эдельман С. Л.	Математическая логика. - М.: Высшая школа, 1975.
11.	Яблонский С. В.	Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979.