|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. Пространство элементарных событий. Классификация случайных событий. Алгебра событий.  **Достоверным** наз. событие, которое обязательно произойдет при данном комплексе условий. **Невозможным** наз. событие, которое при данном комплексе условий заведомо не может произойти. **Случайным** наз. событие, которое при данном комплексе условий может как произойти, так и не произойти.  Мера возможности осуществления случайного события – это и есть его **вероятность**.  События A и B называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же случайном испытании, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании. События A и B называются **совместными**, если они могут появиться вместе в одном испытании.  События A1, A2, ..., An называются **попарно несовместными**, если любые два из них несовместны.  Два события наз. **противоположными**, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию А, обозначают -A.  Несколько событий в испытании наз. **равновозможными**, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. если условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед остальными.  Пусть проводится испытание с конечным числом попарно несовместных равновозможных исходов, образующих полную группу событий. Такие исходы наз. **элементарными исходами**, или **элементарными событиями**. Мн-во всех элементарных исходов также наз. **пространством элементарных исходов**.  Элементарный исход наз. **благоприятствующим** появлению события A, если наступление этого исхода влечет за собой наступление события A. | 2. Статистическое определение вероятности  Классическое определение вероятности неприменимо, если исходы случайного эксперимента не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадения ее различных граней не равновозможны. В таких случаях иногда исп. понятие статистической вероятности.  Пусть при проведении п испытаний событие А появилось в m испытаниях. Отношение w(A) = m/n наз. относительной частотой появления события А в данной серии испытаний.  Относительная частота не является величиной постоянной. Если мы проведем еще одну серию из п или п испытаний, то событие А появится m, раз, причем m1/n1 != m/n, но если n и n1 достаточно велики и условия эксперимента достаточно стабильны, то m1/n1 ~= m/n.  Если относительная частота события обладает свойством статистической устойчивости, т. е. в различных сериях испытаний изменяется незначительно, в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или ее приближенное значение. | 3. Элементы комбинаторики: размещения, сочетания, перестановки.  Комбинаторика изучает, сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества.  Правило произведения: если объект типа Х можно выбрать n способами и при каждом таком выборе объект типа Y можно выбрать m способами, то выбор пары (X,Y) в указанном порядке можно осуществить m\*n способами.  Правило суммы: если объект типа Х можно выбрать n способами, а объект типа Y - m способами, то выбор объекта типа Х или Y можно осуществить m + n способами.  Число Рn всех возможных способов переставить n различных элементов - число перестановок (из n различных элементов) равно Pn = n!.  Число Аnm размещений (упорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам, различающихся либо самими элементами, либо их порядком, равно Аnm = n!/(n - m)!.  Число Сnm сочетаний (неупорядоченных комбинаций) из n раз-  личных элементов по m элементам (порядок выбранных элементов не учитывается) равно Cnm = n!/((n - m)!m!), причем 0!=1. Отметим, что Cnm = Cnn-m; Cn0 = Cnn = 1; Cn1 = Cnn-1 = n.  Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждая упорядоченная комбинация, содержащая m элементов из этих n, наз. размещением из n элементов по m. Число размещений (упорядоченных комбинаций) из п различных элементов по m элементам (местам), отличающихся либо самими элементами, либо их порядком, называется числом размещений из n по m и обозначается А. Можно сказать, что число размещений Аnm - это число способов разместить m из n элементов по m местам.  Пусть имеется мн-во, содержащее n элементов. Неупорядоч. комбинации (порядок не имеет значения), содержащие m эл-тов из данных n, наз. сочетаниями из n элементов по m. Число сочетаний из n по m обозначается Cnm. Т. о., число сочетаний - число способов выбрать m элементов из данных предложений эл-тов (порядок выбранных эл-тов не учитывается). | 4. Классическое определение вероятности  Пусть проводится испытание с конечным числом попарно несовместных равновозможных исходов, образующих полную группу событий. Такие исходы наз. элементарными исходами, или элементарными событиями. Мн-во всех элементарных исходов также наз. пространством элементарных исходов.  Классическое определение вероятности: вероятность P(A) случайного события А равна P(A) = m/n, где m = mA - число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, n - общее число равновозможных элементарных исходов испытания.  Для того, чтобы можно было применить классическое определение вероятности, необходимо, чтобы случайный эксперимент сводился к схеме случаев, т. е.:  1) элементарные исходы эксперимента должны быть равновозможны;  2) элементарные исходы должны образовывать конечное (или счетное) множество. |
| 5. Геометрическое определение вероятности  Геометрическая вероятность может использоваться, если исходы случайного эксперимента равновозможны, но образуют бесконечное несчетное пространство элементарных исходов, которое можно представить в виде некоторой геометрической фигуры - области на числовой прямой, на плоскости или в пространстве.  Пусть G - геометрическая фигура (область), представляющая пространство элементарных исходов данного эксперимента; g - область, представляющая все элементарные исходы, благоприятствующие событию А. Геометрической вероятностью события А наз. отношение меры области g к мере области G:  P(A) = μ(g)/μ(G)  При этом если G - отрезок или кривая, то μ(G) - длина отрезка или кривой; если G - плоская область, то μ(G) - площадь этой области; если G - пространственное тело, то μ(G) - объем этого тела. | 6. Аксиоматическое построение теории вероятностей  Пусть задано некоторое множество Ω исходов эксперимента, которое мы будем называть пространством элементарных исходов. Пусть ξ - некоторый класс (система, множество) случайных событий, т. е. подмножеств множества Ω.  Класс событий ξ называется с-алгеброй событий, если:  1) Ω € ξ (достоверное событие принадлежат классу);  2) если А, B € ξ, то А + B, AB, A\B € ξ (если А и В являются событиями, то их сумма А + В, произведение АВ и разность А\В также являются событиями);  3) если A1, A2, …, An, … € ξ, то A1 + A2 + … + An + … € ξ; A1A2…An…€ξ (сумма и произведение счетного числа событий также являются событиями).  Вероятностью (или вероятностной мерой) называется числовая функция Р: ξ → [0:1], определенная для каждого события A € ξ и удовлетворяющая след. условиям (аксиомам вероятности):  1. Аксиома неотрицательности: вероятность любого собы-  тия неотрицательна, т. е. P(A)≥0 для любого события A € ξ.  2. Аксиома нормированности: вероятность достоверного со-  бытия равна 1, т. е. Р(Ω) = 1;  3. Аксиома аддитивности: вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е. если события A1, A2, …, An, … € ξ попарно несовместны (AiAk = Ø при всех і != k), то P(A1 + A2 + … + An + …) = P(A1) + P(A2) + … + P(An) + …  Тройка объектов (Ω, ξ, P), где Ω - некоторое мн-во, называемое пространством элементарных исходов; ξ - σ-алгебра событий (подмножеств множества Ω); Р - вероятность (вероятностная мера), определенная на классе событий ξ, наз. вероятностным пространством.  Свойства вероятности:  1. Вероятность невозможного события равна 0: P(Ø) = 0.  2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:  P(A) + P(-A) = 1 для любого события А.  3. Вероятность любого события не меньше 0 и не больше 1:  0 ≤ P(A) ≤ 1 для любого события А. | 7. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.  Условной вероятностью Р(А|В) события А при условии, что произошло событие В (Р(В) != 0), наз. отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события В:  P(A|B) = P(AB)/P(B).  Из определения условной вероятности вытекает следующее утверждение.  Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло: P(AB) = P(A)P(B|A).  Следствие 1. P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).  Событие А наз. независимым от события В, если P(A|B) = P(A).  Иными словами, событие А не зависит от события В, если вероятность его появления не зависит от того, произошло или не произошло событие В.  Т. о., зависимость или независимость событий всегда взаимны, поэтому мы можем говорить, что события А и В независимы.  Для независимых событий теорема умножения вероятностей принимает особенно простой вид.  Следствие 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий). Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: если события А и В независимы, то P(AB) = P(A)P(B). | 8. Формула полной вероятности  Формула полной вероятности. Если событие А может наступить при появлении одного из и попарно несовместных событий (гипотез) Н1, Н2, …, Нn, образующих полную группу событий, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А: P(A)= P(H1)P(A|H1)+ P(H2)P(A|H2)+…+ P(Hn)P(A|Hn).  Доказательство. Гипотезы Н1, H2,… Нn образуют полную группу событий, т. е. они попарно несовместны и H1 + Н2 +…+ Hn = Ω. Тогда событие А можно представить в виде A = ΩA = H1A+H2A+…+ HnA, причем слагаемые попарно несовместны. Следовательно, применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, а затем теорему умножения вероятностей, получим:  P(A) = P(H1A) + P(H2A)+…+ P(HnA)=  =P(H1)P(A|H1)+P(H2)P(A|H2)+…+P(Hn)P(A|Hn). |
| 9. Формула Байеса  Формула Байеса. Если события Н1, Н2, …, Нn образуют полную группу событий, то  P(Hk|A) = (P(Hk)P(A|Hk))/(∑P(Hi)P(A\Hi))  Доказательство. Используя определение условной вероятности, теорему умножения вероятностей и формулу полной вероятности, имеем:  P(Hk|A) = P(HkA)/P(A) = P(Hk)P(A|Hk)/P(A) =  = P(Hk)P(A|Hk)/ (∑P(Hi)P(A|Hi))  Вероятности Р(Нk), известные до проведения опыта, наз. априорными вероятностями гипотез, вероятности P(Hk|A) наз. апостериорными. | 10. Повторение независимых опытов. Формула Бернулли  Пусть проводится п независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможно только два исхода: появление некоторого события А - успех и его непоявление -А - неуспех, причем вероятность наступления успеха в каждом испытании постоянна и равна р. Такая последовательность испытаний называется схемой Бернулли.  В схеме Бернулли вероятность Pn(k) наступления k успехов в n независимых испытаниях - вероятность того, что в этих испытаниях событие А наступит ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли: Pn(k)=Cnkpkqn-k, где Cnk = n!/(k!(n-k)!); p=P(A) - вероятность успеха в одном испытании; q = 1-р - вероятность неуспеха в одном испытании.  Доказательство. Если в результате n независимых испытаний по схеме Бернулли событие А произошло к раз (неважно в каком порядке), то это означает, что совместно наступили к событий А и (n - k) событий А. Так как все n событий независимы, то по теореме умножения вероятность появления в определенной последовательности k раз события А и (n - k) раз события -А равна pkqn-k.  Однако событие А может появляться ровно k раз в n опытах совершенно в разных комбинациях, чередуясь с противоположным событием -А. Число таких возможных последовательностей совпадает с числом способов, которыми можно выбрать k мест из имеющихся n, не учитывая их порядка. Поэтому это число равно числу сочетаний из п по k, т. е. Cnk. | 11. Закон распределения дискретной случайной величины  Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены.  Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами X,Y, Z, …, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z, … .  Случайная величина называется дискретной (ДСВ), если множество ее возможных значений конечно или счетно (т. е. если все ее значения можно занумеровать).  Дискретными СВ являются: число выпадений герба при n подбрасываниях монеты, число выстрелов до первого попадания в цель, число бракованных изделий в данной партии и т. д. Для того чтобы задать ДCB, достаточно перечислить все ее возможные значения и указать, с какими вероятностями она их принимает.  Закон распределения ДСВ удобно задать в виде таблицы, называемой рядом распределения этой СВ:    Законы: биномиальный, Пуассона, геометрический, гипергеометрический. | 12. Функция распределения случайной величины и её свойства  Под случайной величиной (СВ) будем понимать величину, которая в результате случайного эксперимента принимает одно и только одно возможное значение, которое заранее неизвестно и зависит от случайных причин.  Более строго, под СВ понимают действительно значную функцию ξ, определенную на множестве Ω элементарных событий, связанных с данным случайным экспериментом, и такую, что для любой системы В открытых интервалов, В⊂R, существует  P(ω∈Ω: ξ(ω)∈B) - вероятность того, что СВ примет значение из множества В.  Таким образом, для любой СВ определена функция F(x)=P(ξ<x), x∈R, называемая ее функцией распределения и выражающая вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее х. Под законом распределения СВ будем понимать любое правило, позволяющее найти функцию распределения этой СВ.  Основные свойства функции распределения СВ.  1. 0 ≤ F(x) ≤ 1, F(-∞) = lim(x→-∞)F(x) = 0, F(+∞) = lim(x→+∞)F(x) = 1.  2. F(x) - неубывающая, непрерывная слева функция, т.е. F(x1)≤F(x2) при x1 < x2, и F(x-0)= F(x), x∈R.  3. P(a≤ξ<B)= F(B) - F(a).  4. P(ξ=x0)=F(x0+0)-F(x0). |
| 13. Плотность вероятностей и её свойства  СВ наз. непрерывной, если ее функция распределения непрерывна во всех точках и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек. Принимает все значения из некоторого промежутка (конечного или бесконечного) или объединения промежутков.  Плотностью распределения (или плотностью вероятностей) непрерывной СВ называется производная ее функции распределения: f(x)= F'(x).  Вероятность попадания непрерывной СВ & в промежуток [x; х2) равна интегралу от плотности распределения по этому промежутку:    Доказательство. Функция распр-ия явл. первообразной для плотности распр-ия, поэтому по формуле Ньютона-Лейбница:    Основные свойства плотности распределения:  1. Плотность распределения есть неотрицательная функция:  f(x)≥0 при всех x∈R. Это свойство вытекает из того, что функция распределения F(x) есть неубывающая функция.  2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:    Это следует из формулы (3) и из того, что F(+∞) = 1.  Геометрически эти два свойства означают, что график плотности распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна единице. | 14. Числовые характеристики положения случайной величины  Математическим ожиданием дискретной СВ наз. число, равное сумме произведений всех значений СВ на соответствующие им вероятности: Mξ=∑xkPk =x1P1+x2P2+…+xkPk+… (предполагается, что ряд в правой части этого равенства абсолютно сходится).  Мат. ожиданием непрерывной СВ наз. число, равное:    где f(x) - плотность распределения вероятностей СВ ξ, при условии, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно.  Математическое ожидание Мξ характеризует среднее значение СВ ξ (с учетом ее более и менее вероятных значений).  Свойства мат. ожидания:  1. Мат. ожидание постоянной равно самой этой постоянной.  2. Постоянный множитель можно выносить за знак мат. ожидания: M(cξ) = cMξ, если с = const.  3. Мат. ожидание суммы (разности) двух случайных величин и п равно сумме (разности) их математических ожиданий.  4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин ξ и η равно произведению их математических ожиданий, если и - независимые CВ.  Математическое ожидание определяет положение центра распределения случайной величины. Для функции f(t) (плотность вероятности) обычно определяют медиану и моду.  Медиана делит площадь под кривой f(t) пополам.  Мода непрерывной случайной величины - такое значение t, в котором функция f(t) достигает локального максимума.  Если функция f(t) имеет один максимум, то распределение называется унимодальным. | 15. Числовые характеристики рассеивания случайной величины Дисперсией СВ ξ наз. мат. ожидание квадрата отклонения этой СВ от ее мат. ожидания: Dξ = M(ξ - Mξ)2.  Дисперсия СВ характеризует разброс (рассеяние) значений СВ вокруг ее мат. ожидания.  Дисперсия СВ равна разности мат. ожидания квадрата СВ и квадрата мат. ожидания СВ: Dξ= M(ξ2) -(Mξ)2.  Свойства дисперсии.  1. Dξ ≥ 0.  2. Дисперсия постоянной величины = 0: если P(ξ=c)=1, то Dξ = 0.  3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате: D(cξ)=c2Dξ, если с = const.  4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин ξ и η равна сумме их дисперсий: D(ξ+η) = Dξ+Dη.  5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин ξ и η равна сумме их дисперсий: D(ξ-η) = Dξ+Dη, если ξ и η - независимые СВ.  Для того чтобы получить оценку рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама СВ, вводят понятие стандартного или среднего квадратического отклонения.  Средним квадратическим отклонением СВ ξ наз. квадратный корень из дисперсии этой СВ: σξ=√Dξ. σξ≥0 для любой СВ. | 16. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс  Начальным моментом порядка k случайной величины Х называется математическое ожидание величины Хk: αk = M[Xk].  Для дискретной случайной величины: αk=∑xikpi.  Для непрерывной случайной величины:    Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.  Центральным моментом порядка k случайной величины Х называется мат. ожидание величины (X-mx)k: μk=M[(X-mx)k].  Для дискретной случайной величины: μk=∑(xi-mx)kpi.  Для непрерывной случайной величины: .  Центр. момент I порядка всегда = 0, а центр. момент II порядка равен дисперсии. Центральный момент III порядка характеризует асимметрию распределения.  Отношение центр. момента третьего порядка к среднему квадр. отклонению в третьей степени наз. коэффициентом асимметрии.  ax=μ3/σx3.  Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая эксцессом.  Cx=μ4/σx4-3  Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:  Абсолютный начальный момент: βk=M[|X|k].  Абсолютный центральный момент: νk=M[|X-mx|k]. |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 17. Характеристическая функция  Пусть Y = eitξ, где ξ – случайная величина с известным законом распределения, t – параметр, i = √(−1) .  Характеристической функцией случайной величины ξ наз. мат. ожидание функции Y = eitξ:    Основные свойства характеристической функции:  1. Характеристическая функция величины Z=aξ+b, где ξ – случайная величина с характеристической функций υX(t), равна:  υZ(t) = M[eit(aξ+b)] = eitbυX(at).  2. Начальный момент k-го порядка случайной величины ξ равен:  αk(x)=υX(k)(0)i−k, где υX(k)(0) – значение k-й производной характеристической функции при t = 0.  3. Характеристическая функция суммы Y = ∑Xk независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых: υY(t) = ∏υXi(t).  4. Характеристическая функция нормальной случайной величины с параметрами m и σ равна: υX(t) = e^(itm−(t2σ2)/2). | 18. Биномиальный закон распределения и его числовые характеристики  СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и р, если она принимает значения 0;1; 2;…;n с вероятностями:  P(ξ=k)=Cnkpkqn-k, где q=1-p, k=0;1; 2;…;n.  Ряд распределения биномиальной СВ имеет вид:  Корректность определения следует из формулы бинома Ньютона, так как:  ∑pk = Cnkpkqn-k = qn+npqn-1+…+Cnkpkqn-k+…+ pn=(q+p)n=1.  Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события А (число успехов) при n независимых испытаниях в схеме Бернулли.  Мат. ожидание и дисперсия СВ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и р, равны Mξ=np; Dξ=npq.  Доказательство. Представим СВ ξ, имеющую биномиальное распределение с параметрами n и р, как сумму СВ: ξ=ξ1+ξ2+…+ξn, где:  Тогда P(ξi=1)=p; P(ξi=0)=q, т. е. ξi - бернуллиевские СВ с параметром р. При этом все слагаемые ξ1, ξ2, …, ξn, попарно независимы, поэтому:  Mξ = M(ξ1+ξ2+…+ξn) = Mξ1+Mξ2+…+Mξn = p+p+…+p = np;  Dξ = D(ξ1+ξ2+…+ξn) = Dξ1+Dξ2+…+Dξn = pq+pq+…+pq = npq. | 19. Закон распределения Пуассона  СВ ξ распределена по закону Пуассона с параметром а, если она принимает значения 0; 1; 2; …; k; … с вероятностями  P(ξ=k)=(ake-a)/k!, где k = 0; 1; 2; …  Ряд распределения пуассоновской СВ имеет вид:    Закон распределения Пуассона явл. хорошим приближением для биномиального распределения при больших n и малых p (или 1-p). Поэтому закон распределения Пуассона наз. законом редких явлений.  По закону Пуассона, например, распределены: число вызовов, регистрируемых в call-центре за опред. промежуток времени; число родившихся за определенный период (день, неделю) близнецов; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число альфа-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром а = пр.  Часто закон Пуассона используется в теории массового обслуживания, так как считается, что число требований на обслуживание, поступивших за единицу времени, распределено по закону Пуассона. | 20. Простейший поток событий  Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.  Среди св-в, которыми могут обладать потоки, выделим св-ва стационарности, отсутствия последействия и ординарности.  Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися.  Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, что происходило до начала рассматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Таким образом, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.  Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.  Простейшим наз. поток событий, кот. обладает св-вами стационарности, отсутствия последействия и ординарности. |
| 21. Равномерный закон распределения  Непрерывная СВ распределена равномерно на отрезке [а; b], если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю.  Таким образом, плотность распределения имеет вид:  причем значение константы с можно определить из условия нормировки:  , с = 1/(b-a)  Следовательно, плотность распределения имеет вид:    Для того чтобы СВ подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого опред. интервала и были равновероятны внутри этого интервала. Примером равномерно распределенной СВ может служить время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом, или ошибка округления.  Числовые характеристики равномерного распределения: | 22. Показательный закон распределения  Непрерывная СВ ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром λ, если ее плотность распределения имеет вид:    Графики плотности и функции показательного закона распределения приведены на рис.    Показательное распределение является одним из основных в теории массового обслуживания и теории надежности. Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на call-центр, продолжительность безотказной работы приборов, время между двумя авариями на дороге в определенном месте, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т. д.  Числовые хар-ки показательного распределения равны: | 23. Нормальный закон распределения (закон Гаусса)  Нормальное распр-ие играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распр-ия особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распр-ия.  Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других, состоит в том, что он явл. предельным законом, к которому приближаются, при весьма часто встречающихся типичных условиях, многие другие законы распр-ия.  Распр-ие непрерывной СВ ξ наз. нормальным (или распр-ием Гаусса) с параметрами a и σ > 0 (обозначается ξ ~ N (a; σ)), если плотность распределения вероятностей имеет вид:    Проверим корректность определения, т. е. убедимся, что функция f(x) обладает обоими осн. свойствами плотности распределения СВ. Очевидно, f(x)>0 при всех x∈R.      График плотности нормального распределения изображен на рис. и наз. нормальной кривой, или кривой Гаусса. | 24. Функция Лапласа и ее свойства  Т.к. интеграл  не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение ф-ия  , кот. наз. ф-ией Лапласа или интегралом вероятностей. Значения этой функции при различных значениях х посчитаны и приводятся в специальных таблицах.    Функция Лапласа обладает следующими свойствами:  1) Ф(0) = 0;  2) Ф(-х) = - Ф(х);  3) Ф(¥) = 1.  Функцию Лапласа также называют функцией ошибок. Еще используется нормированная функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:    Ниже показан график нормированной функции Лапласа. |
| 25. Правило трех сигм  Если СВ ξ распределена нормально с параметрами а и б, то попадание ее в интервал (а - 3σ, а + 3σ) явл. практически достоверным событием и, стало быть, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.  Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону. Кроме того, нормальный закон распределения явл. предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях, что делает нормальное распределение исключительным в ТВ и ее приложениях. | 26. Системы случайных величин  Двумерной СВ (ξ; η) называется совокупность двух числовых функций, заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов Ω, если для любых действительных чисел x, y существует P(ξ < x, η < y).  Двумерная СВ (ξ; η) называется дискретной, если обе ее составляющие ξ и η являются дискретными СВ.  Двумерная СВ (ξ; η) называется непрерывной, если обе ее составляющие ξ и η являются непрерывными СВ.  Если одна из СВ дискретная, а другая непрерывная, то двумерная СВ относится к смешанному типу.  Универсальным способом задания двумерной СВ явл. функция распределения. Функция распределения двумерной СВ (ξ; η) – это функция двух действительных переменных x и y, которая определяется с помощью равенства: Fξ;η(x;y)=P(ξ<x; η<y).  Свойства функции распределения двумерной СВ:  1. 0 ≤ F(x; y) ≤ 1 при всех (x; y).  2. Функция распределения является неубывающей по каждому  из своих аргументов:  F(x1; y) ≤ F(x2; y), если x1 < x2;  F(x; y1) ≤ F(x; y2), если y1 < y2.  3. F(-∞; y) = F(x; -∞) = F (-∞; -∞) = 0.  4. F(+∞; +∞) = 1.  5. Fξ;η(x; +∞) = Fξ(x) – функция распределения СВ ξ;  Fξ;η(+∞; y) = Fη(y) – функция распределения СВ η.  6. Функция распределения непрерывна слева по каждому изсвоих аргументов. | 27. Закон распределения дискретной системы двух случайных величин  Различают дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) двумерные случайные величины.  Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (т. е. пар чисел) (xi; yi) и их вероятностей p(xi; yj) (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m).  Закон распределения двумерной случайной величины может быть задан в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности, а также аналитически, например, в виде функции распределения.  Зная закон распределения двумерной дискретной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих.  Например, события (X=x1, Y=y1), (X=x1, Y=y2), …, (X=x1, Y=ym) несовместны, поэтому  .  Таким образом, вероятность того, что X примет значение xi, равна сумме вероятностей столбца xi. Аналогично, сложив вероятности строки yj, получим вероятность P(Y = yj). | 28. Функция распределения системы двух случайных величин  Универсальным способом задания двумерной СВ явл. функция распределения. Функция распределения двумерной СВ (ξ; η) – это функция двух действительных переменных x и y, которая определяется с помощью равенства: Fξ;η(x;y)=P(ξ<x; η<y).  Свойства функции распределения двумерной СВ:  1. 0 ≤ F(x; y) ≤ 1 при всех (x; y).  2. Функция распределения является неубывающей по каждому  из своих аргументов:  F(x1; y) ≤ F(x2; y), если x1 < x2;  F(x; y1) ≤ F(x; y2), если y1 < y2.  3. F(-∞; y) = F(x; -∞) = F (-∞; -∞) = 0.  4. F(+∞; +∞) = 1.  5. Fξ;η(x; +∞) = Fξ(x) – функция распределения СВ ξ;  Fξ;η(+∞; y) = Fη(y) – функция распределения СВ η.  6. Функция распределения непрерывна слева по каждому изсвоих аргументов. |
| 29. Плотность вероятностей системы двух случайных величин  Функция fξ;η(x;y) наз. плотностью распределения двумерной СВ (ξ;η), если    Следовательно, плотность распределения двумерной СВ (ξ;η) может быть найдена по формуле    Свойства плотности распределения.  1. f(x; y) ≥ 0.  2.  3. Вероятность попадания СВ (ξ;η) в область D равна:    4. Плотности распределения составляющих двумерной СВ (ξ;η):    Если двумерная СВ (ξ;η) имеет плотность распределения, то СВ ξ и η независимы тогда и только тогда, когда их совместнаяплотность распределения представима в виде произведения плотностей распределения этих СВ: fξ;η(x;y) = fξ(x)fη(y) для всех x и y. | 30. Условные законы распределения случайных величин  Условным распределением составляющей X при Y=yj наз. совокупность условных вероятностей P(x1|yj), P(x2|yj), …, P(xn|yj), вычисленных в предположении, что событие Y = yj (j имеет одно и то же значение при всех возможных значениях X) уже наступило.  Аналогично определяется условное распр-ие составляющей Y.  Условный закон распределения X в предположении, что событие Y=y1 уже произошло, может быть найден по следующей формуле:    В общем случае условные законы для составляющей X могут быть представлены в виде формуле    Для составляющей Y условные законы определяются формулой: | 31. Основные числовые характеристики системы двух случайных величин  Основными числовыми характеристиками двумерной СВ (ξ;η) явл. мат. ожидания и дисперсии ее составляющих, т. е. СВ ξ и η, а также корреляционный момент и коэффициент корреляции.  Запишем формулы для вычисления математических ожиданий и дисперсий СВ ξ и η, если известен закон распределения двумерной СВ (ξ;η).  Для дискретной двумерной (ξ;η) с pij = P(ξ = xi; η = yj), 1≤i≤n, 1≤j≤m, мат. ожидания СВ ξ и η равны соответственно  , где    Эти формулы можно обобщить в следующем утверждении.  Для дискретной двумерной СВ (ξ;η) с pij = P(ξ = xi; η = yj) при некоторых ограничениях на функцию g(x;y) для мат. ожидания от функции двух дискретных СВ имеет место формула    Аналогично для непрерывных СВ. Для непрерывной двумерной СВ (ξ;η) с плотностью распределения fξ;η(x;y) при некоторых ограничениях на функцию g(x;y) для мат. ожидания от функции двух непрерывных СВ имеет место формула:    Следовательно,  Дисперсии Dξ и Dη можно найти по формулам Dξ=M(ξ-Mξ)2 или Dξ=M(ξ2)-(Mξ)2.  Математические ожидания Mξ, Mη и дисперсии Dξ, Dη характеризуют среднее значение и рассеяние каждой из составляющих двумерной СВ. | 32. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции и его свойства  Для характеристики степени зависимости двух СВ вводится новая числовая характеристика.  Ковариацией (или корреляционным моментом) двух СВ ξ и η наз. мат. ожидание произведения отклонений этих СВ от их мат. ожиданий: cov(ξ;η) = Kξ;η = M(ξ-Mξ)(η-Mη).  Ковариация двух СВ равна разности мат. ожидания произведения этих СВ и произведения их мат. ожиданий:  cov(ξ;η) = M(ξη)-MξMη.  Следствие 1. M(ξη) = MξMη + cov(ξ;η).  Следствие 2. D(ξ+η) = Dξ + Dη + 2cov(ξ;η).  Если СВ ξ и η независимы, то cov(ξ;η) = 0.  Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно: если cov(ξ;η) = 0, то это не означает, что СВ ξ и η независимы.  Если cov(ξ;η) = 0, то СВ ξ и η наз. некоррелированными.    Т. к. ковариация имеет размерность, равную произведению размерностей СВ ξ и η, то для удобства анализа степени зависимости двух СВ вводят безразмерную характеристику – коэффициент корреляции.  Коэффициентом корреляции двух СВ ξ и η наз. число, равное  rξ;η = cov(ξ;η)/(√DξDη).  Свойства коэффициента корреляции.  1. -1 ≤ r ≤ 1.  2. Если СВ ξ и η независимы, то r = 0. Обратное утверждение неверно: если r = 0, то СВ ξ и η могут быть как зависимыми, так и независимыми.  3. СВ ξ и η связаны линейной зависимостью в том и только том случае, если r = +-1. |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 33. Условные математические ожидания. Линии регрессии  При изучении двумерной СВ рассматриваются не только числовые характеристики одномерных компонент и, но и числовые характеристики условных распределений: условные м.о. и условные дисперсии.  Условным мат. ожиданием одной из случайной величины, входящих в систему наз. её м.о., вычисляемое при условии, что другая СВ приняла опред. значение (или попала в данный интервал). Обозначается: M(Y|X = x) и M(X|Y = y) или M(Y|X) и M(X|Y). Вычисляются соответственно (для ДСВ и для НСВ) по формулам:    где ф(x|y) – условная вероятностная плотность СВ X при Y=y. Зависимость между значениями одной СВ и условным мат. ожиданием другой СВ называется регрессионной, а функции, выражающие эту зависимость, называются функциями регрессии:  M(ξ|η=y) = ψ(y) – функция регрессии ξ на η;  M(η|ξ=x) = φ(x) – функция регрессии η на ξ.  Т.о., если СВ (ξ;η) имеет двумерное нормальное распределение, то обе функции регрессии (ξ на η и η на ξ) являются линейными. | 34. Нормальный закон на плоскости  Нормальным законом распределения на плоскости называется распределение вероятностей двумерной случайной величины (ξ;η), функция плотности которой имеет вид:    Мы видим, что нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: ау, av, стд, ст/у, гху. Можно доказать, что эти параметры имеют следующий вероятностный смысл: ау, а2 — мат. ожидания, ад, ау — средние квадратические отклонения, гху — коэффициент корреляции величин X и Y.  Таким образом, если составляющие нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то плотность совместного распределения системы равна произведению плотностей распределения составляющих, а отсюда и следует независимость составляющих. Справедливо и обратное утверждение.  Итак, для нормально распределенных составляющих двумерной СВ понятия независимости и некоррелированности равносильны. | 35. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд. Статистический ряд. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения и ее свойства  Осн. задачей мат. статистики явл. разработка методов получения вероятностных характеристик случайных явлений на основе результатов эксперимента. Исходными понятиями мат. статистики явл. понятия генеральной и выборочной совокупностей.  Выборочная совокупность – мн-во значений результатов наблюдений над одной и той же случайно величиной при одних и тех же условиях. Генеральной совокупностью наз. мн-во всех возможных наблюдений над случайной величиной при данном комплексе условий.  Вариационным рядом выборки х1, х2, …, хn. наз. способ её записи, при котором её элементы упорядочены (как правило, в порядке не убывания): х1 ≤ х2 ≤ … ≤ хn. Разность ω между максимальным и минимальным элементами называется размахом выборки: ω = xmax – xmin.  Последовательность пар (xi\*;ni), где x1\*, x2\*, …, xk\* - различные выборочные значения, а 𝑛1, 𝑛2, …, 𝑛𝑘 - соответствующие им частоты, называется статическим рядом.  Полигоном частот группированной выборки наз. ломаная с вершинами в точках (xi\*; ni), i = 1, k, а полигон относительных частот – ломаная с вершинами в точках (xi\*; ni/n), i = 1, k.  Гистограммой относительных частот группированной выборки наз. ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна соответствующей данному интервалу относительной частоте. Площадь гистограммы относительных частот равна 1.  Эмпирической функцией распределения наз. функция F\*(x), определяющая для каждого значения x относительную частоту наблюдения значений, меньших х: F\*(x) = ∑(ni/n) | 36. Точечное оценивание параметров распределения. Свойства точечных оценок. Несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.  Точечной оценкой параметра θ наз. любая статистика θn, предназначенная для оценки этого параметра и определяемая одним числом. Подчеркнем, что точечная оценка практически никогда не совпадает с истинным значением параметра, она может только оценивать его с большей или меньшей точностью.  Для любого параметра можно предложить разные оценки. Так, в качестве оценки для мат. ожидания можно использовать первый элемент выборки, среднее арифметическое наибольшего и наименьшего элементов выборки, среднее арифметическое всех элементов выборки и т. д.  Если, имея выборку х1, х2,…, х, значений некоторой случайной величины, повторно провести n независимых наблюдений над этой случайной величиной, то новая выборка х'1, х'2,…, х'n, вообще говоря, не будет совпадать с первоначальной. Поэтому выборочные значения можно рассматривать как случайные величины. Основное предположение математической статистики: выборочные значения х1, х2,…, хn являются независимыми в совокупности одинаково распределёнными случайными величинами. Следовательно, любая статистика и любая оценка θn(х1, х2,…, хn) также являются случайными величинами.  Оценка θ наз. несмещённой, если её мат. ожидание равно оцениваемому параметру: М[θ] = θ. Разность М[θ] - θ наз. смещением.  Выборочное среднее x = (1/n)∑xi характеризует центр распределения (рассеивания) изучаемой случайной величины и явл. несмещённой и состоятельной оценкой, а в случае выборки из нормального распределения также и эффективной оценкой для мат. ожидания наблюдаемой случайной величины.  Выборочная дисперсия Dв характеризует степень разброса (рассеяния) выборочных значений относительно среднего и является состоятельной, но смещённой (дает заниженное значение) оценкой дисперсии изучаемой случайной величины. В связи с этим вместо нее вводится несмещенная оценка дисперсии s2 = (n/(n-1))Dв. |
| 37. Интервальные оценки параметров генеральной совокупности. Доверительная вероятность  Интервальной оценкой параметра 0 наз. интервал, границы кот. θ1 = θ1(x1, х2, …, xn) и θ2 = θ2(х1, х2, … xn) явл. функциями выборочных значений и который с заданной вероятностью γ накрывает истинное значение оцениваемого параметра θ:  P(θ1(x1, x2,…, xn) < θ < θ2(x1, x2,…, xn)) = γ.  Интервал (θ1; θ2) называется доверительным интервалом; число γ - доверительной вероятностью (надёжностью) интервальной оценки; значение α = 1 - γ - уровнем значимости.  В практике важную роль играет величина (длина) доверительного интервала, поскольку чем меньше его длина, тем точнее оценка.  Величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки и от доверительной вероятности γ.  Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения 0,90; 0,95; 0,99; 0,9973, т. е. такие, чтобы получить интервал, который с большой вероятностью накроет истинное значение оцениваемого параметра.  Доверительный интервал для математического ожидания в случае выборки из нормального распределения с известной дисперсией определяется соотношением    С неизвестной дисперсией    С неизвестным мат. ожиданием | 38. Построение доверительного интервала для мат. ожидания нормально распределенной генеральной совокупности  Пусть имеется выборка объема n из нормального распределения с мат. ожиданием а и дисперсией σ2, т. е. x1, x2, …, xn ~ N(а;σ). Тогда статистика -х распределена по нормальному закону с параметрами а и σ/√n, а статистика (-x)-a/(σ/√n) имеет стандартное нормальное распределение:      Это означает, в частности, что -х является более точной, чем одиночное наблюдение, оценкой для мат. ожидания, поскольку чем меньше дисперсия, т. е. разброс значений, тем точнее оценка.  Доверительный интервал для мат. ожидания а в случае выборки из нормального распределения с известной дисперсией определяется соотношением    Квантиль uα определяется по таблице функции Лапласа из соотношения Ф(uα) = (1-α)/2.  Формула (означает, что при достаточно большом количестве выборок одного и того же объема n примерно в 100(1 - α)% выборок интервал накрывает истинное значение мат. ожидания. | 39. Построение доверительного интервала для дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности  Доверительный интервал для дисперсии в случае выборки из нормального распределения с неизвестным мат. ожиданием определяется соотношением    Квантили определяются по таблице распределения X. | 40. Основные понятия теории проверки гипотез. Простая и сложная гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы. Статистический критерий. Область принятия гипотезы и критическая область. Ошибки первого и второго родов. Уровень значимости и мощность критерия. Двусторонняя и односторонняя критические области.      Статистическими методами нельзя доказать правильность гипотезы. |
| 41. Проверка гипотезы о виде закона распределения. Критерий согласия Х2 Пирсона. | 42. Критерии значимости. Проверка гипотез о математических ожиданиях одной и двух независимых нормальных выборок.  Напомним, что статистические критерии, с помощью которых проверяются гипотезы о значениях параметров распределения или о соотношениях между ними в предположении, что тип распределения известен, называются критериями значимости или параметрическими критериями. | 43. Критерии значимости. Проверка гипотез о дисперсиях одной и двух независимых нормальных выборок. | 44. Критерии значимости. Проверка гипотез о математических ожиданиях двух зависимых и независимых нормальных выборок |
| 45. Использование распределения Стьюдента при построениидоверительных интервалов и проверке статистических гипотез | 46. Использование нормального распределения при построениидоверительных интервалов и проверке статистических гипотез  Пусть имеется выборка объема n из нормального распределения с мат. ожиданием а и дисперсией σ2, т. е. x1, x2, …, xn ~ N(а;σ). Тогда статистика -х распределена по нормальному закону с параметрами а и σ/√n, а статистика (-x)-a/(σ/√n) имеет стандартное нормальное распределение:      Это означает, в частности, что -х является более точной, чем одиночное наблюдение, оценкой для мат. ожидания, поскольку чем меньше дисперсия, т. е. разброс значений, тем точнее оценка.  Доверительный интервал для мат. ожидания а в случае выборки из нормального распределения с известной дисперсией определяется соотношением    Квантиль uα определяется по таблице функции Лапласа из соотношения Ф(uα) = (1-α)/2.  Формула (означает, что при достаточно большом количестве выборок одного и того же объема n примерно в 100(1 - α)% выборок интервал накрывает истинное значение мат. ожидания. | 47. Использование Х2 -распределения при построении доверительных интервалов и проверке статистических гипотез  Доверительный интервал для дисперсии в случае выборки из нормального распределения с неизвестным мат. ожиданием определяется соотношением    Квантили определяются по таблице распределения X. | 48. Виды зависимостей между случайными величинами. Основные задачи корреляционного и регрессионного анализа |
| 49. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства | 50. Эмпирическое линейное уравнение регрессии. Метод наименьших квадратов |