UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Introducción al Cálculo (MAT-070)
Guía para el Certamen 3

Problema 1. Determine el valor del siguiente límite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{4-x}.$$

Problema 2. Sean a y b números reales **positivos**. Considere la función real

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} & \text{, si } x<0,\\ 1 & \text{, si } x=0,\\ \sqrt{x^2-5x+a^2}-x & \text{, si } x>0.\end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
b) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
c) Determine a y b para que f sea continua en $x=0$.

Ayuda: Puede ser útil usar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Problema 3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}A\cos(3\pi x)-Bx & \text{si} \quad x\leq \frac{1}{3}\\ \dfrac{x-\frac{1}{3}}{3x-1} & \text{si} \quad \frac{1}{3}<x\leq 6\\ 3Ax^2+6Bx-5 & \text{si} \quad x>6\end{cases}$$

Determine los valores de A y B, en caso de existir, que permitan que f sea continua en $\mathbb{R}$.

Problema 4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{2}+A & \text{si} \quad x\leq 0\\ \dfrac{\pi x^2-2x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)\sin(3x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} & \text{si} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}\\ Bx+3 & \text{si} \quad x\geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Determine los valores de A y B, en el caso que existan, que permiten que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Problema 5. Determine la derivada de $\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + x^2 \cdot \tan(x)$.

Problema 6. Sea $f(x) = \dfrac{5}{2}x^2 - e^{3x}$. Determine el valor de x para el cual la segunda derivada $f''(x)$ es igual a 0.

Problema 7. Sea $h(x) = f(x)\ln(g(x))$, donde f y g son funciones derivables.

a) Calcule $h'(x)$.

b) Calcule $h'(0)$, si $f(0) = 0$, $g(0) = 2$, $f'(0) = -1$, $g'(0) = 4$.

Problema 8. Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$. En cada caso, determine una expresión para $g'(x)$.

a) $g(x) = xf(xf(2x))$

b) $g(x) = xf\left(xf\left(x^2\right)\right)$

c) $g(x) = \left(f\left(x^2\right)\right)^2 f(f(3x))$

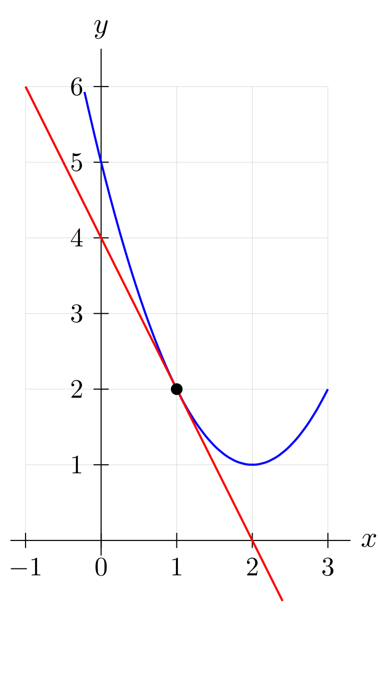
Problema 9. Sea $f(x) = \ln(x^2 + k)$ donde k es una constante real positiva.

Determine el valor de k tal que $(x^2+k)^2 f''(x) + (x^3 + kx)f'(x) = 8$.

Problema 10. Sea $y = 1 + 2\cos(3x) - 4\sin(3x)$

Muestre que $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 9 \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$.

Problema 11. A continuación se muestra parte de la gráfica (en azul) de una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Se define la función $g(x) = (x+1) \cdot f(x^2)$. Responda:

a) Calcule el valor de $g(1)$.

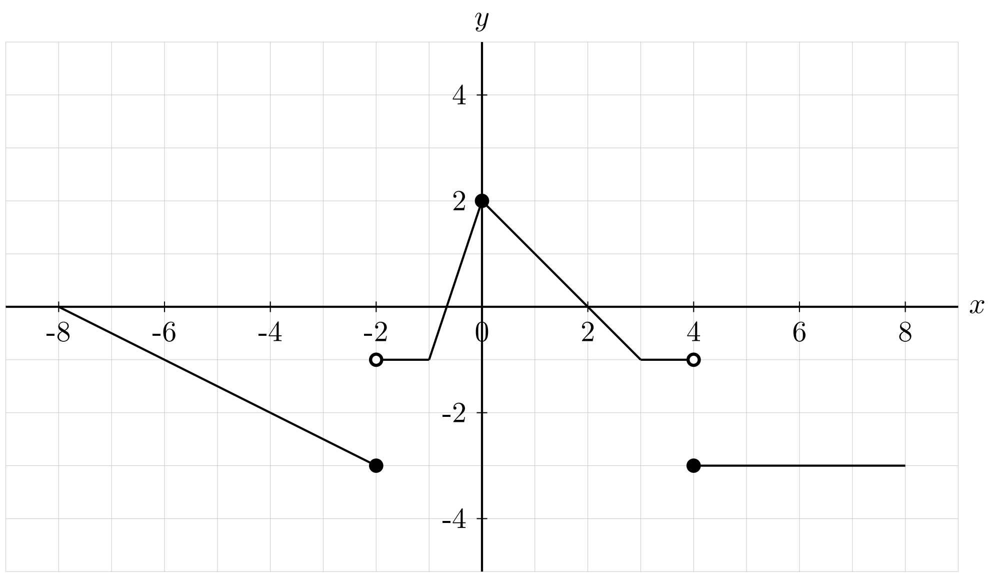
b) Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(1, g(1))$.

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en dicho punto.

d) Usando la información del item anterior, ¿la función g tiene la tendencia a crecer o a decrecer en un entorno de $x = 1$?

e) Bosqueje la grafica de g en un entorno de $x = 1$, incluyendo su recta tangente.

Problema 12. Considere una función $f : [-8, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica viene dada por



Determine si existen las siguientes derivadas en los puntos dados justificando su respuesta:

a) $f'(-6)$. b) $f'(0)$. c) $f'(4)$. d) $f'(6)$.

Problema 13. Una escalera de 5m de longitud descansa contra un muro perpendicular al suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.2 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior cuando éste está a 3 m del suelo? Interprete este resultado.

Problema 14. Un depósito con forma de cono circular recto (con el vértice orientado hacia abajo) tiene una altura de 1 metro y un radio en su base de 0,4 metros. Se vierte agua en el depósito a razón constante de $0{,}2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$.

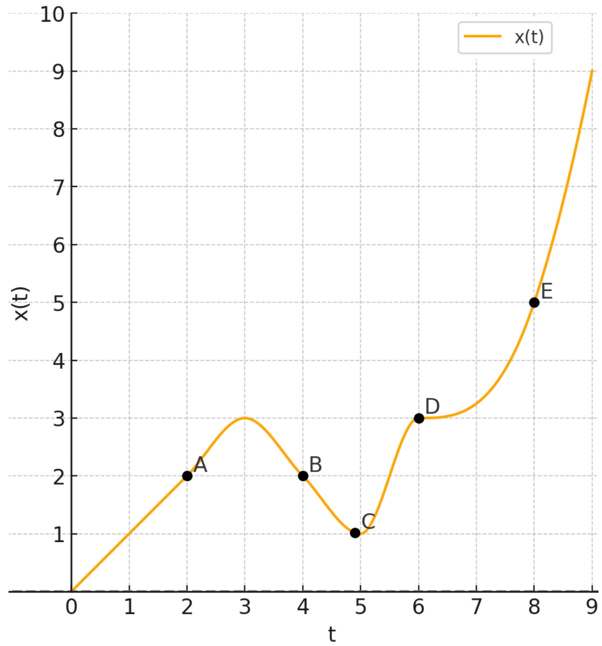
a) ¿Con qué rapidez se eleva el nivel del agua en el depósito cuando la altura alcanzada por el agua es de $0{,}5\,\mathrm{m}$?

b) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se comienza a llenar hasta que el depósito se rebalsa?

Observación: El volumen V de un cono circular recto de radio basal r y altura h está dado por la expresión $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Problema 15. Se tiene el registro del movimiento de un pequeño **vehículo automatizado** que se desplaza sobre una línea recta. La siguiente gráfica muestra la **posición** $x(t)$**, en**

metros, del vehículo respecto a un punto de referencia, durante los **9 primeros segundos** de su recorrido:



Complete la siguiente tabla identificando el **tiempo** y el **punto en la gráfica** donde la **velocidad del vehículo** coincide con los valores indicados:

Velocidad (m/s)	**Tiempo (s)**	**Punto en la gráfica**
$-0{,}3$		
-1		
0		
1		
3		

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede con $x''(t)$ en el instante $t = 6$?

b) ¿Qué se puede concluir respecto a la posición y velocidad entre los segundos $t = 3$ y $t = 5$?

c) ¿Qué puede concluir sobre la posición del vehículo alrededor del instante de tiempo asociado al punto C?