

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE  
ÉCOLE DOCTORALE EEATS

THÈSE CIFRE

PRÉSENTÉE PAR

JORY LAFAYE

LABORATOIRE : INRIA GRENOBLE RHÔNE-ALPES  
ENTREPRISE : ALDEBARAN

---

**Commande des mouvements et de l'équilibre  
d'un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles**

---

*Directeur :*

Dr. Bernard Brogliato, Inria

*Encadrants :*

Dr. Pierre-Brice Wieber, Inria

Dr. Cyrille Collette, Aldebaran

Dr. Sebastien Dalibard, Aldebaran

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>I Introduction</b>	<b>6</b>
I.1 Contexte d'étude . . . . .	7
I.2 État de l'art . . . . .	7
I.2.1 Commande et équilibre des robots à roues . . . . .	7
I.2.1.1 Les robots à une et deux roues . . . . .	7
I.2.1.2 Les robots à trois roues et plus . . . . .	7
I.2.2 Commande et équilibre des robots bipèdes . . . . .	7
I.2.3 Synthèse et conclusion . . . . .	7
I.3 Contributions scientifiques . . . . .	7
I.4 Plate-forme expérimentale . . . . .	7
I.5 Contributions techniques . . . . .	7
I.6 Organisation du document . . . . .	7
<b>II Modélisation du système</b>	<b>8</b>
II.1 Choix du modèle et conséquences . . . . .	8
II.1.1 Objectifs . . . . .	8
II.1.2 Avantages du modèle . . . . .	8
II.1.3 Inconvénients du modèle . . . . .	9
II.2 Modélisation dynamique . . . . .	10
II.2.1 Problème de complémentarité mixte . . . . .	10
II.2.1.1 Géométrie du robot . . . . .	10

II.2.1.2	Cinématique directe . . . . .	11
II.2.1.2.a	Notations . . . . .	11
II.2.1.2.b	Equations cinématiques . . . . .	12
II.2.1.2.c	Hypothèse d'angles de basculements faibles . . . . .	12
II.2.1.3	Énergies cinétiques et potentielles . . . . .	13
II.2.2	Les trois roues en contact avec le sol . . . . .	22
II.2.3	Le robot bascule sur deux roues . . . . .	24
II.3	Modélisation de la dynamique future . . . . .	28
II.3.1	Nécessité de prédire le futur . . . . .	28
II.3.2	Choix de la dynamique d'extrapolation . . . . .	28
II.3.3	Formulation du modèle prédictif . . . . .	28
<b>III</b>	<b>Commande par modèle prédictif</b>	<b>29</b>
III.1	Principe . . . . .	29
III.2	Outil mathématique et contraintes associées . . . . .	29
III.3	Formulation des problèmes d'optimisations . . . . .	30
III.3.1	Introduction . . . . .	30
III.3.2	Lorsque les trois roues sont en contact avec le sol . . . . .	30
III.3.2.1	Formulation des objectifs . . . . .	30
III.3.2.2	Formulation des contraintes . . . . .	30
III.3.2.3	Problème quadratique résultant . . . . .	31
III.3.3	Lorsque le robot bascule sur deux roues . . . . .	31
III.3.3.1	Formulation des objectifs . . . . .	31
III.3.3.2	Formulation des contraintes . . . . .	31
III.3.3.3	Problème quadratique résultant . . . . .	31
III.3.4	Gestion de la transition entre les deux états . . . . .	31
III.3.4.1	Formulation des objectifs . . . . .	31
III.3.4.2	Formulation des contraintes . . . . .	31
III.3.4.3	Problème quadratique résultant . . . . .	32
III.4	Gestion des deux modèles dynamiques exclusifs . . . . .	32
III.4.1	Choix d'un superviseur et conséquences . . . . .	32

III.4.2	Fonctionnement du superviseur . . . . .	32
III.4.3	Fonctionnement de l'estimateur d'impact . . . . .	32
III.5	Vers une modélisation unifiée des deux dynamiques . . . . .	32
III.5.1	Problème de complémentarité linéaire . . . . .	32
III.5.2	Méthodes de résolution . . . . .	33
<b>IV</b>	<b>Mesures et observateurs</b>	<b>34</b>
IV.1	Les différentes valeurs à observer . . . . .	34
IV.2	Capteurs disponibles . . . . .	34
IV.3	Méthodes de mesure et conséquences . . . . .	34
IV.3.1	Mesure de la posture du robot . . . . .	34
IV.3.2	Observation de la position de la base mobile . . . . .	35
IV.3.3	Observation des vitesses et accélérations du robot et de la base . . . . .	35
IV.3.4	Observation de l'angle de basculement et d'inclinaison du sol . . . . .	35
<b>V</b>	<b>Résultats et expérimentations</b>	<b>36</b>
V.1	Schéma de contrôle en boucle fermée . . . . .	36
V.2	Expériences en l'absence de perturbation et sur sol horizontal . . . . .	36
V.2.1	Protocole expérimental . . . . .	36
V.2.2	Analyse des expériences . . . . .	37
V.3	Expériences de compensation de perturbations . . . . .	37
V.3.1	Protocole expérimental . . . . .	37
V.3.2	Analyse des expériences . . . . .	37
V.4	Expériences de compensation de l'inclinaison du sol . . . . .	37
V.4.1	Protocole expérimental . . . . .	37
V.4.2	Analyse des expériences . . . . .	38
<b>VI</b>	<b>Synthèse</b>	<b>39</b>
VI.1	Contributions . . . . .	39
VI.2	Perspectives . . . . .	39
VI.3	conclusion . . . . .	39

<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>
<b>Annexes</b>	<b>40</b>
<b>A Pepper, un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles</b>	<b>41</b>
<b>B Optimisation du choix du modèle dynamique</b>	<b>42</b>
<b>C Résolution d'un problème quadratique</b>	<b>43</b>
<b>D "MPC-WalkGen", librairie C++ implémentant la commande par modèle prédictif</b>	<b>44</b>

# Table des figures

II.1 Représentation globale du modèle dynamique. . . . .	9
--	---

# **Chapitre I**

## **Introduction**

[1]

## **I.1 Contexte d'étude**

## **I.2 État de l'art**

### **I.2.1 Commande et équilibre des robots à roues**

#### **I.2.1.1 Les robots à une et deux roues**

#### **I.2.1.2 Les robots à trois roues et plus**

### **I.2.2 Commande et équilibre des robots bipèdes**

### **I.2.3 Synthèse et conclusion**

## **I.3 Contributions scientifiques**

## **I.4 Plate-forme expérimentale**

## **I.5 Contributions techniques**

## **I.6 Organisation du document**



# Chapitre II

## Modélisation du système

### II.1 Choix du modèle et conséquences

#### II.1.1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de développer une modélisation dynamique d'un robot humanoïde possédant une base mobile à roues omnidirectionnelles. Ce modèle doit apporter un bon compromis entre fidélité vis à vis du comportement du robot réel et complexité, qui impacte de manière directe le temps de calcul. Notamment, il n'est pas nécessaire de modéliser tout les paramètres du robot : Représenter uniquement les dynamiques principales suffit à obtenir un contrôle précis du robot. La section V.1 détaillera les méthodes de compensation des éléments non modélisés.

#### II.1.2 Avantages du modèle

Le choix se porte donc sur une modélisation dynamique d'un robot rigide multi-corps. Le modèle présenté [Fig. II.1.1] comporte deux corps. Le premier est attaché à la base mobile, de masse  $m_b$  et de position du centre de masse (CoM)  $\bar{b}$ . Le second modélise l'ensemble du reste du robot, de masse  $m_c$  et de CoM  $\bar{c}$ .

Le choix d'un modèle à deux corps permet de prendre en compte la rotation générale du corps du robot autour de la base mobile. Cette modélisation est pertinente dans le cas où les bras du robot ne génèrent que peu ou pas de moment d'inertie. Dans le cas contraire, nous considérerons

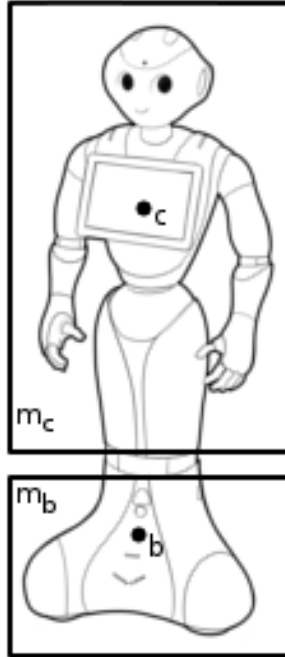


FIGURE II.1 – Représentation globale du modèle dynamique.

que les effets parasites dû aux mouvements des bras pourront être compensés correctement par le schéma de contrôle en boucle fermée présenté en section V.1. Le choix de ce modèle est également conditionné par la répartition massique de la plate-forme expérimentale : Elle est principalement concentré en deux zones, qui correspondent aux corps choisis : la base mobile et le torse du robot.

### II.1.3 Inconvénients du modèle

Le choix d'un modèle rigide multi-corps implique que les éléments suivants ne seront donc pas modélisés :

- Les différentes élasticités. Les technologies d'actionnement utilisés sur la plate-forme expérimentale ne comportent pas d'élasticités notables. Le seul élément compliant est un ensemble de deux bandes élastiques attachés à l'articulation du roulis de la hanche permettant au robot de maintenir une posture droite en l'absence de contrôle du moteur. Cet élément est

négligeable en terme de dynamique car la raideur associée est très faible.

- Les jeux mécaniques présents sur le robot. Ceux-ci sont présents sur la plate-forme expérimentale, du fait de systèmes de réductions présents entre les moteurs et l’articulation basés sur un système d’engrenages. Les effets dynamiques parasites apportés par le jeu mécanique ne sont pas négligeables. Cependant, il peuvent être compensés de manière suffisamment efficace (plus de détails en section V.1) pour que cela soit transparent du point de vue de la commande présentée dans le chapitre III.
- Les glissements pouvant survenir entre les roues du robot et le sols ne sont pas modélisés. Ceux-ci peuvent être néanmoins handicapant, car le système devient en partie non-observable en présence de glissement (plus de détails en section IV.3.2). Une solution a été apportée en section III.3.2.1 afin de limiter leurs possibilités d’apparition ainsi que leurs impacts sur la dynamique du robot.
- Le nombre de corps choisi pour cette modélisation dynamique est nécessairement plus faible que le nombre de corps réels présents sur le robot, pour des raisons de complexité du modèle. Ainsi, tout les effets dynamiques ne pourront pas être représentés. Le choix du nombre de corps, et de leurs propriétés doit permettre de rendre négligeable les dynamiques non modélisées. Le développement d’une solution optimale du choix du nombre de corps et de leurs propriété est présenté en annexe B.

## II.2 Modélisation dynamique

### II.2.1 Problème de complémentarité mixte

#### II.2.1.1 Géométrie du robot

On considère le robot modélisé par deux masses-point  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$  de masse associée  $m_b$  et  $m_c$ . Ces corps sont en contact avec le sol par l’intermédiaire de trois points  $p_{frl}$  correspondant aux trois points de contact des roues avec le sol. La roue avant gauche correspond au point  $p_r$ , la roue avant droite au point  $p_l$  et la roue arrière au point  $p_f$ . On considère que le système peut être dans quatre mode dynamique différents :

- Le robot ne bascule pas et les trois roues sont en contact avec le sol.

- Le robot est en rotation vers l’avant autour de l’axe défini par les deux roues avant. On note l’angle de rotation  $\psi_f$ . La roue arrière dans ce cas en l’air.
- Le robot est en rotation vers la gauche autour de l’axe défini par la roue avant gauche et la roue arrière. On note l’angle de rotation  $\psi_l$ . La roue avant droite dans ce cas en l’air.
- Le robot est en rotation vers la droite autour de l’axe défini par la roue avant droite et la roue arrière. On note l’angle de rotation  $\psi_r$ . La roue avant gauche dans ce cas en l’air.

Enfin, on ne considère aucune inertie associée à chaque corps.

## II.2.1.2 Cinématique directe

### II.2.1.2.a Notations

Dans la suite, on considère un repère galiléen fixe orthonormé direct  $\mathcal{R}_w(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,  $\vec{x}$  étant orienté vers l’avant du robot,  $\vec{y}$  vers la gauche, et  $\vec{z}$  vers le haut. Ce repère est attaché au sol,  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  inclus dans le plan, et  $\vec{z}$  orthogonal au sol.

Premièrement, on considère que la position des corps  $\bar{c}$  et  $\bar{b}$  correspond à la composition de trois éléments : Le premier définissant la position du robot par rapport à l’origine  $c_0$  et  $b_0$ . Il est donc à noter que  $c_0^{xy} = b_0^{xy}$ . Le second est contrôlée par les moteurs du robot  $\delta_c$ . La base mobile ne possède pas de degrés de libertés par rapport à  $b_0$ . Le troisième dépendant de la rotation du système autour de ces différents axes.

Afin de pouvoir écrire les équations cinématiques, nous avons besoin de définir différentes grandeurs dépendantes de la géométrie du robot.

$\forall i \in \{f, r, l\}$  :

- On note  $\theta_i$  l’angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{b_0^{xy} p_i^{xy}}$  avec l’axe  $\vec{x}$ . On note  $\vec{n}_i$  l’axe résultant et l’axe orthogonal  $\vec{t}_i = \vec{z} \times \vec{n}_i$ .  $c_0$  et  $b_0$  étant verticalement alignés, il en est de même pour le corps  $\bar{c}$ . On note  $\mathcal{R}_i$  le repère  $(O, \vec{n}_i, \vec{t}_i, \vec{z})$ .
- On note  $\phi_{i_b}$  et  $\phi_{i_c}$  les angles que font respectivement les vecteurs  $\overrightarrow{b_0^{t_i z} p_i^{t_i z}}$  et  $\overrightarrow{c_0^{t_i z} p_i^{t_i z}}$  avec l’axe  $\vec{z}$ .
- $l_{b_i}$  et  $l_{c_i}$  correspondent aux normes des vecteurs  $\overrightarrow{b_0^{xyz} p_i^{xyz}}$  et  $\overrightarrow{c_0^{xyz} p_i^{xyz}}$ .
- $d_i$  correspond à la norme du vecteur  $\overrightarrow{b_0^{xy} p_i^{xy}}$ , qui est la même concernant le corps  $\bar{c}$ .
- $h_b$  et  $h_c$  correspondent à la composante selon l’axe  $\vec{z}$  des vecteurs  $\overrightarrow{b_0^{xyz} p_i^{xyz}}$  et  $\overrightarrow{c_0^{xyz} p_i^{xyz}}$ .

Enfin, on note  $b$  et  $c$  les positions commandées des corps par rapport à l'origine  $O$  :

$$b^{xyz} = b_0^{xyz} \quad (\text{II.1})$$

$$c^{xy} = c_0^{xy} + \delta_c^{xy} = b_0^{xy} + \delta_c^{xy} \quad (\text{II.2})$$

$$c^z = c_0^z + \delta_c^z = b_0^z + h_c + \delta_c^z \quad (\text{II.3})$$

### II.2.1.2.b Equations cinématiques

Nous pouvons à présent écrire les équations cinématiques des corps  $\bar{c}$  et  $\bar{b}$  :

$$\bar{c}^x = c^x + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \cos(\theta_i) + l_{c_i} \sin(\phi_{i_c} + \psi_i) \cos(\theta_i) \right) \quad (\text{II.4})$$

$$\bar{c}^y = c^y + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \sin(\theta_i) + l_{c_i} \sin(\phi_{i_c} + \psi_i) \sin(\theta_i) \right) \quad (\text{II.5})$$

$$\bar{c}^z = c^z + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( -h_c + l_{c_i} \cos(\phi_{i_c} + \psi_i) \right) \quad (\text{II.6})$$

$$\bar{b}^x = b^x + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \cos(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \cos(\theta_i) \right) \quad (\text{II.7})$$

$$\bar{b}^y = b^y + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \sin(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \sin(\theta_i) \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\bar{b}^z = b^z + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( -h_b + l_{b_i} \cos(\phi_{i_b} + \psi_i) \right) \quad (\text{II.9})$$

Nous aurons besoin également des équations cinématiques des points  $p_{f r l}$ .  $\forall i \in \{f, r, l\}$  :

$$p_i^x = b^x + d_i \cos(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \cos(\theta_i) \quad (\text{II.10})$$

$$p_i^y = b^y + d_i \sin(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \sin(\theta_i) \quad (\text{II.11})$$

$$p_i^z = b^z - h_b + l_{b_i} \cos(\phi_{i_b} + \psi_i) \quad (\text{II.12})$$

### II.2.1.2.c Hypothèse d'angles de basculements faibles

Dans la suite, afin de simplifier les formulations des équations de la dynamique, nous allons établir dès maintenant une hypothèse : Les angles  $\psi_{f r b}$  sont considérés proches de 0. Dans le cas où

le robot ne bascule pas, cela est une considition exacte. Dans le cas où le robot bascule, on suppose le fait que l'angle de basculement reste faible ( $< 10^\circ$ ). Nous pouvons donc réécrire les équations cinématiques (II.4)(II.5)(II.6)(II.7)(II.8)(II.9) et (II.10)(II.12)(II.11) en utilisant une approximation du premier ordre :

$$\bar{c}^x = c^x + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.13})$$

$$\bar{c}^y = c^y + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\bar{c}^z = c^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\bar{b}^x = b^x + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\bar{b}^y = b^y + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.17})$$

$$\bar{b}^z = b^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.18})$$

$$p_{frl}^x = b^x - d_{frl} \cos(\theta_{frl}) \quad (\text{II.19})$$

$$p_{frl}^y = b^y - d_{frl} \sin(\theta_{frl}) \quad (\text{II.20})$$

$$p_{frl}^z = b^z - h_b + 2d_{frl} \psi_{frl} \quad (\text{II.21})$$

### II.2.1.3 Énergies cinétiques et potentielles

Afin d'exprimer les équations du mouvement du robot, nous allons utiliser la méthode Lagrangienne. Celle-ci est pertinente dans notre cas car elle est particulièrement adaptée à la formulation sans ambiguïtés de systèmes dynamiques soumis à des forces de contraintes, comme les forces de réactions dues au sol sur les roues. Pour cela, il nous faut dans un premier temps écrire les équations des énergies cinétiques  $T$  et potentielles  $V$  du système :

$$T = \frac{1}{2}m_b(\dot{\bar{b}}^{x^2} + \dot{\bar{b}}^{y^2} + \dot{\bar{b}}^{z^2}) + \frac{1}{2}m_c(\dot{\bar{c}}^{x^2} + \dot{\bar{c}}^{y^2} + \dot{\bar{c}}^{z^2}) \quad (\text{II.22})$$

$$V = m_b g^x \bar{b}^x + m_c g^x \bar{c}^x + m_b g^y \bar{b}^y + m_c g^y \bar{c}^y + m_b g^z \bar{b}^z + m_c g^z \bar{c}^z \quad (\text{II.23})$$

$$(\text{II.24})$$

avec  $g$  le vecteur gravité. Il est à noter que le repère  $\mathcal{R}_w$  étant attaché au sol, le vecteur gravité n'est pas forcément orienté selon la direction verticale  $\vec{z}$ , car le sol peut ne pas être horizontal.

En dérivant les équations cinétiques (II.13)(II.14)(II.15)(II.16)(II.17)(II.18), nous pouvons exprimer les vitesses des corps  $\bar{c}$  et  $\bar{b}$  élevés au carré :

$$\dot{\bar{c}}^{x^2} = \dot{\bar{c}}^{x^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{\bar{c}}^x \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.25})$$

$$\dot{\bar{c}}^{y^2} = \dot{\bar{c}}^{y^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{\bar{c}}^y \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.26})$$

$$\dot{\bar{c}}^{z^2} = \dot{\bar{c}}^{z^2} + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{\bar{c}}^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.27})$$

$$\dot{\bar{b}}^{x^2} = \dot{\bar{b}}^{x^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{\bar{b}}^x \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\dot{\bar{b}}^{y^2} = \dot{\bar{b}}^{y^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{\bar{b}}^y \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.29})$$

$$\dot{\bar{b}}^{z^2} = \dot{\bar{b}}^{z^2} + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{\bar{b}}^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.30})$$

////////////////////////////////////

Approximation ( $\psi_{f,rb}$  proche de 0) :

$$\bar{c}^x = c^x + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.31})$$

$$\bar{c}^y = c^y + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.32})$$

$$\bar{c}^z = c^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.33})$$

$$\bar{b}^x = b^x + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.34})$$

$$\bar{b}^y = b^y + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.35})$$

$$\bar{b}^z = b^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.36})$$

Dérivation :

$$\dot{\bar{c}}^x = \dot{c}^x + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.37})$$

$$\dot{\bar{c}}^y = \dot{c}^y + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.38})$$

$$\dot{\bar{c}}^z = \dot{c}^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.39})$$

$$\dot{\bar{b}}^x = \dot{b}^x + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.40})$$

$$\dot{\bar{b}}^y = \dot{b}^y + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.41})$$

$$\dot{\bar{b}}^z = \dot{b}^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.42})$$

Mise au carré (en prenant en considération que  $\dot{\psi}_i \dot{\psi}_j = 0, i \neq j$ ) :



$$\dot{\tilde{c}}^{x^2} = \dot{c}^{x^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{c}^x \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.43})$$

$$\dot{\tilde{c}}^{y^2} = \dot{c}^{y^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{c}^y \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.44})$$

$$\dot{\tilde{c}}^{z^2} = \dot{c}^{z^2} + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{c}^z \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.45})$$

$$\dot{\tilde{b}}^{x^2} = \dot{b}^{x^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{b}^x \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.46})$$

$$\dot{\tilde{b}}^{y^2} = \dot{b}^{y^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{b}^y \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.47})$$

$$\dot{\tilde{b}}^{z^2} = \dot{b}^{z^2} + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{b}^z \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.48})$$

linéaire

Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m_b(\dot{\tilde{b}}^{x^2} + \dot{\tilde{b}}^{y^2} + \dot{\tilde{b}}^{z^2}) + \frac{1}{2}m_c(\dot{\tilde{c}}^{x^2} + \dot{\tilde{c}}^{y^2} + \dot{\tilde{c}}^{z^2}) \quad (\text{II.49})$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_b(\dot{b}^{x^2} + \dot{b}^{y^2} + \dot{b}^{z^2}) + \frac{1}{2}m_c(\dot{c}^{x^2} + \dot{c}^{y^2} + \dot{c}^{z^2}) + \frac{1}{2}(m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \dot{\psi}_i^2 \right) \\ & + \frac{1}{2}(m_c + m_b) \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + (m_c h_c \dot{c}^z + m_b h_b \dot{b}^z) \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \dot{\psi}_i \right) \\ & + (m_b h_b \dot{b}^x + m_c h_c \dot{c}^x) \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) + (m_b h_b \dot{b}^y + m_c h_c \dot{c}^y) \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

$$(\text{II.51})$$

Énergie potentielle :

$$V = m_b g^x \bar{b}^x + m_c g^x \bar{c}^x + m_b g^y \bar{b}^y + m_c g^y \bar{c}^y + m_b g^z \bar{b}^z + m_c g^z \bar{c}^z \quad (\text{II.52})$$

$$\begin{aligned} V = & m_b g^x b^x + m_c g^x c^x + m_b g^y b^y + m_c g^y c^y + m_b g^z b^z + m_c g^z c^z \\ & + (m_b g^x h_b + m_c g^x h_c) \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \cos(\theta_i) \psi_i \right) + (m_b g^y h_b + m_c g^y h_c) \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( \sin(\theta_i) \psi_i \right) \\ & + (m_b + m_c) g^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( d_i \psi_i \right) \end{aligned}$$

Variables :

$$q_i = \begin{pmatrix} b^x \\ b^y \\ b^z \\ c^x \\ c^y \\ c^z \\ \psi_f \\ \psi_r \\ \psi_l \end{pmatrix} \quad (\text{II.53})$$

On pose :

$$m_{hc} = m_c h_c \quad (\text{II.54})$$

$$m_{hb} = m_b h_b \quad (\text{II.55})$$

$$m_q = m_{hc} h_c + m_{hb} h_b \quad (\text{II.56})$$

$$m_t = m_c + m_b \quad (\text{II.57})$$

$$C_{\theta_i} = \cos(\theta_i) \quad (\text{II.58})$$

$$S_{\theta_i} = \sin(\theta_i) \quad (\text{II.59})$$

Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \begin{pmatrix} m_b \ddot{b}^x + m_b h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_b \ddot{b}^y + m_b h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_b \ddot{b}^z + m_b h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^x + m_c h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^y + m_c h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^z + m_c h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left( d_i \ddot{\psi}_i \right) \\ (m_q + m_t d_f^2) \ddot{\psi}_f + m_{hb} (C_{\theta_f} \ddot{b}^x + S_{\theta_f} \ddot{b}^y - d_f \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_f} \ddot{c}^x + S_{\theta_f} \ddot{c}^y + d_f \ddot{c}^z) \\ (m_q + m_t d_r^2) \ddot{\psi}_r + m_{hb} (C_{\theta_r} \ddot{b}^x + S_{\theta_r} \ddot{b}^y - d_r \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_r} \ddot{c}^x + S_{\theta_r} \ddot{c}^y + d_r \ddot{c}^z) \\ (m_q + m_t d_l^2) \ddot{\psi}_l + m_{hb} (C_{\theta_l} \ddot{b}^x + S_{\theta_l} \ddot{b}^y - d_l \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_l} \ddot{c}^x + S_{\theta_l} \ddot{c}^y + d_l \ddot{c}^z) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.60})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_f) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_f) g^y + m_t d_f g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_r) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_r) g^y + m_t d_r g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_l) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_l) g^y + m_t d_l g^z \end{pmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Equations cinématiques :

$$p_{frl}^x = b^x + d_{frl} \cos(\theta_{frl}) + l_{frl} \sin(\phi_{frlb} + \psi_{frl}) \cos(\theta_{frl}) \quad (\text{II.62})$$

$$p_{frl}^y = b^y + d_{frl} \sin(\theta_{frl}) + l_{frl} \sin(\phi_{frlb} + \psi_{frl}) \sin(\theta_{frl}) \quad (\text{II.63})$$

$$p_{frl}^z = b^z - h_b + l_{frl} \cos(\phi_{frlb} + \psi_{frl}) \quad (\text{II.64})$$

$$(\text{II.65})$$

Approximation ( $\psi_{frib}$  proche de 0) :

$$p_{frl}^x = b^x - d_{frl} \cos(\theta_{frl}) \quad (\text{II.66})$$

$$p_{frl}^y = b^y - d_{frl} \sin(\theta_{frl}) \quad (\text{II.67})$$

$$p_{frl}^z = b^z - h_b + 2d_{frl}\psi_{frl} \quad (\text{II.68})$$

$$(\text{II.69})$$

Forces externes :

$$\frac{\partial p_{frl}^x}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_{frl}^y}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_f^z}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_r^z}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_r \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_l^z}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_l \end{pmatrix}, \quad (\text{II.70})$$

Forces de contrainte :

$$\lambda = \begin{pmatrix} F_{p_l}^x \\ F_{p_r}^x \\ F_{p_b}^x \\ F_{p_l}^y \\ F_{p_r}^y \\ F_{p_b}^y \\ F_{p_l}^z \\ F_{p_l}^z \\ F_{p_b}^z \end{pmatrix} \quad (\text{II.71})$$

Equation de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= F_{p_l}^x \frac{\partial p_l^x}{\partial q_i} + F_{p_l}^y \frac{\partial p_l^y}{\partial q_i} + F_{p_l}^z \frac{\partial p_l^z}{\partial q_i} \\ &+ F_{p_r}^x \frac{\partial p_r^x}{\partial q_i} + F_{p_r}^y \frac{\partial p_r^y}{\partial q_i} + F_{p_r}^z \frac{\partial p_r^z}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

$$+ F_{p_b}^x \frac{\partial p_b^x}{\partial q_i} + F_{p_b}^y \frac{\partial p_b^y}{\partial q_i} + F_{p_b}^z \frac{\partial p_b^z}{\partial q_i} \quad (\text{II.73})$$

Formulation généralisée :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.74})$$

En identifiant :

$$M = \begin{pmatrix} M_{bc} & M_{c\psi} \\ M_{c\psi}^t & M_\psi \end{pmatrix}, M_\psi = \begin{pmatrix} m_q + m_t d_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_q + m_t d_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_q + m_t d_l^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.75})$$

$$M_{bc} = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c \end{pmatrix}, M_{c\psi} = \begin{pmatrix} m_{hb} C_{\theta_f} & m_{hb} C_{\theta_r} & m_{hb} C_{\theta_l} \\ m_{hb} S_{\theta_f} & m_{hb} S_{\theta_r} & m_{hb} S_{\theta_l} \\ m_{hb} d_f & m_{hb} d_r & m_{hb} d_l \\ m_{hc} C_{\theta_f} & m_{hc} C_{\theta_r} & m_{hc} C_{\theta_l} \\ m_{hc} S_{\theta_f} & m_{hc} S_{\theta_r} & m_{hc} S_{\theta_l} \\ m_{hc} d_f & m_{hc} d_r & m_{hc} d_l \end{pmatrix}, \quad (\text{II.76})$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_f) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_f) g^y + m_t d_f g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_r) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_r) g^y + m_t d_r g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_l) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_l) g^y + m_t d_l g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.77})$$

$$J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_l \end{pmatrix} \quad (\text{II.78})$$

contraintes de complémentarité mixte :

$$\forall (i, j) \in \{f, r, l\}, i \neq j, \begin{cases} 0 \leq \psi_i \perp \psi_j \geq 0 \\ 0 \leq \psi_i \perp F_i^z \geq 0 \\ \psi_i F_i^x = 0 \\ \psi_i F_i^y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

## II.2.2 Les trois roues en contact avec le sol

On résout la complémentarité :

$$\psi_{frl} = 0 \quad (\text{II.80})$$

Le modèle dynamique devient :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.81})$$

En identifiant :

$$q_i = \begin{pmatrix} b^x & b^y & b^z & c^x & c^y & c^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.82})$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} F_{p_l}^x & F_{p_r}^x & F_{p_b}^x & F_{p_l}^y & F_{p_r}^y & F_{p_b}^y & F_{p_l}^z & F_{p_l}^z & F_{p_b}^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.83})$$

$$F_{p_l}^z \geq 0 \quad (\text{II.84})$$

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c \end{pmatrix}, f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.85})$$

$$J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.86})$$

Principe du moment angulaire autour de l'axe  $y$  et  $x$  :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^x - m_b(\ddot{b}^x - g^x)b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^x - m_c(\ddot{c}^x - g^x)c^z = \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( p_i^x F_i^z - p_i^z F_i^x \right) \quad (\text{II.87})$$

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^y - m_b(\ddot{b}^y - g^y)b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^y - m_c(\ddot{c}^y - g^y)c^z = \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( p_i^y F_i^z - p_i^z F_i^y \right) \quad (\text{II.88})$$

Equation du mouvement sur l'axe  $z$  :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) = \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( F_i^z \right) \quad (\text{II.89})$$

Equation du CoP  $d^{xy}$  :

$$d^{xy} = \frac{\sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( p^{xy} \times F^{xy} \right)}{\sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( F_i^z \right)} \quad (\text{II.90})$$

$$d^{xy} = \frac{m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^{xy} - m_b(\ddot{b}^{xy} - g^{xy})b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^{xy} - m_c(\ddot{c}^{xy} - g^{xy})c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z)} \quad (\text{II.91})$$

Les variables contrôlées sont directement  $c^{xy}$ ,  $b^{xy}$ .  $b^z$  est constant à la hauteur  $h_b$  et on contraint  $c^z$  à être constant à la hauteur  $h_c$ . De plus, la gravité est considérée selon l'axe  $z$  :  $g = (0, 0, -g)^t$ .

$$d^{xy} = \frac{m_b g b^{xy} - m_b \ddot{b}^{xy} h_b + m_c g c^{xy} - m_c \ddot{c}^{xy} h_c}{(m_b + m_c)g} \quad (\text{II.92})$$

Ce qui peut se réécrire, de façon conventionnelle :

$$d^{xy} = \frac{m_b b^{xy} + m_c c^{xy}}{m_b + m_c} - \frac{m_b h_b \ddot{b}^{xy} + m_c h_c \ddot{c}^{xy}}{(m_b + m_c)g} \quad (\text{II.93})$$



Les trois contraintes  $F_{p_{frl}}^z \geq 0$  impliquent que  $d^{xy}$  est dans le triangle défini par les trois points de contacts :

$$d^{xy} \times (p_r^{xy} - p_f^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.94})$$

$$d^{xy} \times (p_l^{xy} - p_r^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.95})$$

$$d^{xy} \times (p_f^{xy} - p_l^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.96})$$

### II.2.3 Le robot bascule sur deux roues

On résout la complémentarité :

$$\forall (i, j, k) \in \{f, r, l\}, i \neq j \neq k, \psi_{jk} = 0, F_i^{xyz} = 0 \quad (\text{II.97})$$

Le modèle dynamique devient :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.98})$$

En identifiant :

$$q_i = \begin{pmatrix} b^x & b^y & b^z & c^x & c^y & c^z & \psi_i \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.99})$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} F_{p_j}^x & F_{p_k}^x & F_{p_j}^y & F_{p_k}^y & F_{p_j}^z & F_{p_k}^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.100})$$

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{hb}C_{\theta_i} \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{hb}S_{\theta_i} \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & m_{hb}d_i \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 & m_{hc}C_{\theta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & m_{hc}S_{\theta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & m_{hc}d_i \\ m_{hb}C_{\theta_i} & m_{hb}S_{\theta_i} & m_{hb}d_i & m_{hc}C_{\theta_i} & m_{hc}S_{\theta_i} & m_{hc}d_i & m_q + m_t d_i^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.101})$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_i) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_i) g^y + m_t d_i g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.102})$$

$$J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_k \end{pmatrix} \quad (\text{II.103})$$

Principe du moment angulaire autour de l'axe  $y$  et  $x$  :

$$\begin{aligned}
& m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^x + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i \left( b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_b(\ddot{b}^x - g^x)b^z - m_b h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i b^z \\
& + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^x + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i \left( c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_c(\ddot{c}^x - g^x)c^z - m_c h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i c^z \\
& = \sum_{s \in \{j, k\}} \left( p_s^x F_s^z - p_s^z F_s^x \right)
\end{aligned} \tag{II.104}$$

$$\begin{aligned}
& m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^y + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i \left( b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_b(\ddot{b}^y - g^y)b^z - m_b h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i b^z \\
& + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^y + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i \left( c^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_c(\ddot{c}^y - g^y)c^z - m_c h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i c^z \\
& = \sum_{s \in \{j, k\}} \left( p_s^y F_s^z - p_s^z F_s^y \right)
\end{aligned} \tag{II.105}$$

Equation du mouvement sur l'axe  $z$  :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i = \sum_{s \in \{j, k\}} \left( F_s^z \right) \tag{II.106}$$

Equation du CoP  $d^{xy}$  :

$$d^{xy} = \frac{\sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( p^{xy} \times F^{xy} \right)}{\sum_{i \in \{f, r, l\}} \left( F_i^z \right)} \tag{II.107}$$

$$\begin{aligned}
d^x &= \frac{m_b \left( \ddot{b}^z - g^z + h_b d_i \ddot{\psi}_i \right) \left( b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_b \left( \ddot{b}^x - g^x + h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) b^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i} \\
&+ \frac{m_c \left( \ddot{c}^z - g^z + h_c d_i \ddot{\psi}_i \right) \left( c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_c \left( \ddot{c}^x - g^x + h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i}
\end{aligned} \tag{II.108}$$

$$\begin{aligned}
d^y &= \frac{m_b \left( \ddot{b}^z - g^z + h_b d_i \ddot{\psi}_i \right) \left( b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_b \left( \ddot{b}^y - g^y + h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) b^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i} \\
&+ \frac{m_c \left( \ddot{c}^z - g^z + h_c d_i \ddot{\psi}_i \right) \left( c^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_c \left( \ddot{c}^y - g^y + h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i}
\end{aligned} \tag{II.109}$$

Les variables contrôlées sont directement  $c^{xy}$ ,  $b^{xy}$ .  $b^z$  est constant à la hauteur  $h_b$  et on contraint  $c^z$  à être constant à la hauteur  $h_c$ . De plus, la gravité est considérée selon l'axe  $z$  :  $g = (0, 0, -g)^t$ . Enfin, on considère  $d_i = 0$ , ce qui correspond à négliger  $d_i$  devant  $h_b$  et  $h_c$ .

$$\begin{aligned} d^x = & \frac{m_b g (b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i) + m_c g (c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i)}{(m_b + m_c) g} \\ & - \frac{m_b h_b (\ddot{b}^x + h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i) - m_c h_c (\ddot{c}^x + h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i)}{(m_b + m_c) g} \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

$$\begin{aligned} d^y = & \frac{m_b g (b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i) + m_c g (c^y + h_c \sin(\theta_i) \psi_i)}{(m_b + m_c) g} \\ & - \frac{m_b h_b (\ddot{b}^y + h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i) - m_c h_c (\ddot{c}^y + h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i)}{(m_b + m_c) g} \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

Les deux contraintes  $F_{jk}^z \geq 0$  impliquent que  $d^{xy}$  est dans le segment défini par les deux points de contact. Pour assurer le maximum de robustesse, on choisi de contraindre le CoP au centre du segment :

$$d^x = b^x + d_i \cos(\theta_i) \quad (\text{II.112})$$

$$d^y = b^y + d_i \sin(\theta_i) \quad (\text{II.113})$$

On peut donc réécrire les équations précédente pour faire apparaitre la dynamique de  $\psi_i$  par rapport à celles de  $b$  et  $c$  :

$$\begin{aligned} & (m_b h_b + m_c h_c) g \cos(\theta_i) \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \\ = & m_b h_b \ddot{b}^x + m_c h_c \ddot{c}^x - m_c g (c^x - b^x) - (m_c + m_b) g d_i \cos(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.114})$$

$$\begin{aligned} & (m_b h_b + m_c h_c) g \sin(\theta_i) \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \\ = & m_b h_b \ddot{b}^y + m_c h_c \ddot{c}^y - m_c g (c^y - b^y) - (m_c + m_b) g d_i \sin(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

Un rotation autour de l'axe  $z$  de l'angle  $\theta_i$  fait apparaitre, en combinant les équations (II.114) et (II.115) sous la forme (II.117) =  $\cos(\theta_i)(\text{II.114}) + \sin(\theta_i)(\text{II.115})$  :

$$\begin{pmatrix} c^x \\ c^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^n \\ c^t \end{pmatrix} \quad (\text{II.116})$$

$$(m_b h_b + m_c h_c) g \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \ddot{\psi}_i = m_b h_b \ddot{b}^n + m_c h_c \ddot{c}^n - m_c g (c^n - b^n) - (m_c + m_b) g d_i \quad (\text{II.117})$$

## II.3 Modélisation de la dynamique future

### II.3.1 Nécessité de prédire le futur

- Les contraintes dynamiques sont trop fortes pour autoriser un contrôle sans prédiction du futur à haute accélération.
- Démontrer en calculant les accélérations limites dans différents cas
- Non nécessité d'un modèle dynamique précis dans le futur (feedback, on ne calcule que la première commande)
- Permet d'assurer une stabilité à long terme (quelques secondes)

### II.3.2 Choix de la dynamique d'extrapolation

- Contraintes : Linéarité entre les variables / accélérations continues donc polynome d'ordre 3
- Formulation de l'équation d'état
- Calcul des dérivées

### II.3.3 Formulation du modèle prédictif

- Formulation du modèle prédictif
- Problème de controlabilité dans le cas de basculement.
- Inversions de matrice

# Chapitre III

## Commande par modèle prédictif

### III.1 Principe

- Commande optimale sous contraintes
- Résoudre le problème sur un horizon donné, en utilisant un modèle prédisant le futur
- La solution optimale du système n'est pas connue si l'on ne connaît pas les objectifs et contraintes futures
- Exemple de faire un déplacement triangle
- Utilisation de la commande optimale dans la marche bipède.
- Intérêt lorsque les contraintes sont fortes par rapport aux dynamiques de mandées de mouvement

### III.2 Outil mathématique et contraintes associées

- On veut faire tourner le programme rapidement.
- Il n'existe généralement pas de solution analytique à un problème d'optimisation sous contrainte
- on ne peut guère aller plus compliqué qu'une résolution quadratique sous contrainte linéaire
- On va donc utiliser une formulation de QP

- Ce type d'optimisation nous permet de minimiser une norme 2, ce qui est suffisant. Le temps de calcul ne dépend pas du nombre d'objectifs.
- Il faudra linéariser les contraintes du problème
- Le temps de calcul dépend du nombre de contraintes, il faudra donc choisir un ensemble de contraintes linéaires conservatives suffisamment petit, mais sans restreindre trop le système.
- Lien vers l'annexe pour expliquer comment on résout un qp

### **III.3 Formulation des problèmes d'optimisations**

#### **III.3.1 Introduction**

- On ne peut pas résoudre simplement un problème de complémentarité mixte
- On décide de séparer la résolution du problème en 3 parties
- Expliquer les deux premières, dépendant des dynamiques
- Expliquer le problème avec la transition, et la non gestion de l'impact.
- Un superviseur est écrit permettant de gérer les différents états.

#### **III.3.2 Lorsque les trois roues sont en contact avec le sol**

##### **III.3.2.1 Formulation des objectifs**

- Tracking control
- Robustesse (CoP)
- Stabilité numérique (jerk)

##### **III.3.2.2 Formulation des contraintes**

- Respecter la dynamique : CoP
- Limites vitesses/accélérations de la base
- Respecter la cinématique : C-B

### **III.3.2.3 Problème quadratique résultant**

- Ecrire le problème résultant

## **III.3.3 Lorsque le robot bascule sur deux roues**

### **III.3.3.1 Formulation des objectifs**

- Minimiser l'angle
- Minimiser la vitesse angulaire
- Stabilité numérique

### **III.3.3.2 Formulation des contraintes**

- Contrainte sur l'angle  $> 0$
- Respecter la cinématique : C-B
- Limites vitesses/accélérations de la base

### **III.3.3.3 Problème quadratique résultant**

- Ecrire le problème résultant

## **III.3.4 Gestion de la transition entre les deux états**

### **III.3.4.1 Formulation des objectifs**

- Minimiser la vitesse
- Robustesse (CoP)
- Stabilité numérique (jerk)

### **III.3.4.2 Formulation des contraintes**

- Respecter la dynamique : CoP
- Limites vitesses/accélérations de la base
- Respecter la cinématique : C-B



### **III.3.4.3 Problème quadratique résultant**

- Ecrire le problème résultant

## **III.4 Gestion des deux modèles dynamiques exclusifs**

### **III.4.1 Choix d'un superviseur et conséquences**

- Problème de transitions entre les contrôleurs
- Il faut un superviseur qui gère les différents états
- Parler de l'estimateur d'impact
- Limitations due au superviseur : Détection tardive / inadéquate / Choix non optimal / Oscillations
- Avantages : Gérer de manière simple différents modèles dynamiques

### **III.4.2 Fonctionnement du superviseur**

- Expliquer le fonctionnement du superviseur et des différents états

### **III.4.3 Fonctionnement de l'estimateur d'impact**

- Détailler le fonctionnement de l'estimateur d'impact

## **III.5 Vers une modélisation unifiée des deux dynamiques**

### **III.5.1 Problème de complémentarité linéaire**

- Considérer uniquement un problème de basculement dans une direction
- dire que par la suite, se limiter à ce cas permet de gérer tout les cas, en faisant quelques hypothèses
- Enoncer la dynamique de complémentarité
- Problème : Il y a  $2^n$  états possibles linéaires à la dynamique.

### **III.5.2 Méthodes de résolution**

- Considérer que lorsque le robot ne bascule pas, la commande ne le fera pas basculer. On se retrouve dans le cas du premier programme d'optimisation uniquement

- Si un basculement est mesuré, faire un a priori qu'il n'y aura pas de rebond possible. Ainsi, il n'y a qu'une variable à choisir : le temps d'impact.

- On se retrouve avec un problème non-linéaire, qui devient linéaire en choisissant l'état de cette variable.

- Il y a  $n$  choix possibles.

- On peut résoudre  $n$  QP et choisir le plus optimal.

- Ou alors on peut résoudre 3 QP et faire converger l'état de la variable.

- Présenter le problème d'optimisation unifié

# **Chapitre IV**

## **Mesures et observateurs**

### **IV.1 Les différentes valeurs à observer**

- Position / vitesse / accélération base et corps
- angle / vitesse angulaire / accélération angulaire basculement base
- angle de la pente

### **IV.2 Capteurs disponibles**

- mre / imu

### **IV.3 Méthodes de mesure et conséquences**

#### **IV.3.1 Mesure de la posture du robot**

- En utilisant les mre et le modèle théorique du robot
- Nécessite un bon modèle du robot et une bonne calibration

### **IV.3.2 Observation de la position de la base mobile**

- On mesure la vitesse des roues. On en déduit la position de la base en intégrant dans le temps et en utilisant un modèle des roues
- Dérive due à l'intégration. Ne mesure pas les glissements sur le sol

### **IV.3.3 Observation des vitesses et accélérations du robot et de la base**

- Celles-ci sont observées en utilisant la prédiction du mouvement du robot au prochain pas de temps (utilisation de la dynamique d'ordre 3)
- Mieux que dériver la position du robot, moins de sensibilité au bruit (dérivation, quantification, capteur)
- Moins réactif aux erreurs en vitesses et accélérations
- Le robot étant commencé en position pour le corps, et en vitesse pour les roues, cela n'a pas grande importance

### **IV.3.4 Observation de l'angle de basculement et d'inclinaison du sol**

- Système de base non observable. On mesure la somme des deux angles avec les accéléros, et la somme des variations angulaire avec les gyro.
- Pas de capteurs de force sur les roues. On ne sait pas lesquelles sont au sol.
- Il faut faire des hypothèses pour rendre le système observable
- Problèmes : Non-détections et faux-positifs
- Considère que lorsque l'angle est constant, alors on est sur une pente
- Sinon, toute variation de l'angle est considéré comme un push
- Problèmes si on perturbe le robot avec une dynamique lente

# Chapitre V

## Résultats et expérimentations

### V.1 Schéma de contrôle en boucle fermée

- Présenter les asservissements bas niveau (feedback)
- Parler de la cinématique inverse
- feedback en position de mpc
- Extrapolation pour compenser le retard capteur
- Stabilisation en utilisant seulement une partie de sensor
- Rejeter le jeu mécanique (threshold)

### V.2 Expériences en l'absence de perturbation et sur sol horizontal

#### V.2.1 Protocole expérimental

- Trajectoire non réalisable (test de faisabilité)
- Variables : jeu de pondération / nombre de masses pendule / open et close-loop mpc
- Trajectoire réalisable (test de suivi)
- Influence des compensations retard capteur / command sensor / jeu mécanique

## **V.2.2 Analyse des expériences**

- Intérêt du choix des pondérations
- Vers une adaptation automatique des pondérations
- Intérêt d'une boucle fermée plus rapide que l'échantillonnage du mpc
- Utilisation de deux masses au lieu d'une
- Influence de la compensation du retard dans le suivi de trajectoire
- Nécessité de rejeter le jeu mécanique
- Dû aux bruits, ne pas utiliser entièrement sensor

## **V.3 Expériences de compensation de perturbations**

### **V.3.1 Protocole expérimental**

- Faire basculer le robot
- Variable : Durée / puissance push / direction

### **V.3.2 Analyse des expériences**

- Pas de recovery quand il n'y a pas besoin
- Minimisation de la vitesse d'impact (le robot peut reculer)
- Pousser trop fort emmène aux limites physique du robot
- Vers une utilisation des bras pour rééquilibrer

## **V.4 Expériences de compensation de l'inclinaison du sol**

### **V.4.1 Protocole expérimental**

- Faire rouler le robot préalablement sur une pente
- Faire monter / descendre une pente
- Modifier la direction de déplacement
- Modifier la nature du sol

- Push sur pente
- Pente variable

#### **V.4.2 Analyse des expériences**

- Vitesse limitée car roues qui décolle
- Problème de détection push / pente
- Compensation jusqu'à 5 degrés
- Problèmes de glissement au delà
- Cas limite de push pendant une montée de pente

# **Chapitre VI**

## **Synthèse**

### **VI.1 Contributions**

### **VI.2 Perspectives**

### **VI.3 conclusion**



# Bibliographie

- [1] S Miasa, M Al-Mjali, A Al-Haj Ibrahim, and T A Tutunji. Fuzzy control of a two-wheel balancing robot using dspic. In *2010 7th International Multi-Conference on Systems Signals and Devices (SSD)*, pages 1–6, 2010.

## **Annexe A**

### **Pepper, un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles**

## **Annexe B**

### **Optimisation du choix du modèle dynamique**

## **Annexe C**

### **Résolution d'un problème quadratique**

## **Annexe D**

**“MPC-WalkGen”, librairie C++  
implémentant la commande par modèle  
prédictif**