

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
ÉCOLE DOCTORALE EEATS

THÈSE CIFRE

PRÉSENTÉE PAR

JORY LAFAYE

LABORATOIRE : INRIA GRENOBLE RHÔNE-ALPES
ENTREPRISE : ALDEBARAN

**Commande des mouvements et de l'équilibre
d'un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles**

Directeur :

Dr. Bernard Brogliato, Inria

Encadrants :

Dr. Pierre-Brice Wieber, Inria

Dr. Cyrille Collette, Aldebaran

Dr. Sebastien Dalibard, Aldebaran

Table des matières

Résumé	5
I Introduction	6
I.1 Contexte d'étude	7
I.2 État de l'art	7
I.2.1 Commande et équilibre des robots à roues	7
I.2.1.1 Les robots à une et deux roues	7
I.2.1.2 Les robots à trois roues et plus	7
I.2.2 Commande et équilibre des robots bipèdes	7
I.2.3 Synthèse et conclusion	7
I.3 Contributions scientifiques	7
I.4 Plate-forme expérimentale	7
I.5 Contributions techniques	7
I.6 Organisation du document	7
II Modélisation du système	8
II.1 Choix du modèle et conséquences	8
II.1.1 Objectifs	8
II.1.2 Avantages du modèle	8
II.1.3 Inconvénients du modèle	9
II.2 Modélisation dynamique	10
II.2.1 Problème de complémentarité mixte	10
II.2.1.1 Géométrie du robot	10

II.2.1.2	Cinématique directe	12
II.2.1.2.a	Notations	12
II.2.1.2.b	Equations cinématiques	13
II.2.1.2.c	Hypothèse d'angles de basculements faibles	14
II.2.1.3	Énergies cinétiques et potentielles	15
II.2.1.3.a	Contraintes sur le basculement du robot	15
II.2.1.3.b	Formulation des énergies cinétiques et potentielles	17
II.2.1.4	Coordonnées généralisées et Lagrangien	18
II.2.1.5	Application du principe de moindre action	19
II.2.1.5.a	Définitions	19
II.2.1.5.b	Équations de la dynamique	20
II.2.1.5.c	Formulation standard	21
II.2.1.6	Contraintes de complémentarité mixte	22
II.2.1.7	Synthèse	23
II.2.2	Cas où les trois roues sont en contact avec le sol	23
II.2.2.1	Modèle dynamique	23
II.2.2.2	Définition du Centre de Pression	25
II.2.2.3	Principe du moment angulaire	25
II.2.2.4	Formulation du Centre de Pression et simplifications	26
II.2.3	Le robot bascule sur deux roues	29
II.3	Modélisation de la dynamique future	33
II.3.1	Nécessité de prédire le futur	33
II.3.2	Choix de la dynamique d'extrapolation	33
II.3.3	Formulation du modèle prédictif	33
III	Commande par modèle prédictif	34
III.1	Principe	34
III.2	Outil mathématique et contraintes associées	34
III.3	Formulation des problèmes d'optimisations	35
III.3.1	Introduction	35
III.3.2	Lorsque les trois roues sont en contact avec le sol	35

III.3.2.1	Formulation des objectifs	35
III.3.2.2	Formulation des contraintes	35
III.3.2.3	Problème quadratique résultant	36
III.3.3	Lorsque le robot bascule sur deux roues	36
III.3.3.1	Formulation des objectifs	36
III.3.3.2	Formulation des contraintes	36
III.3.3.3	Problème quadratique résultant	36
III.3.4	Gestion de la transition entre les deux états	36
III.3.4.1	Formulation des objectifs	36
III.3.4.2	Formulation des contraintes	36
III.3.4.3	Problème quadratique résultant	37
III.4	Gestion des deux modèles dynamiques exclusifs	37
III.4.1	Choix d'un superviseur et conséquences	37
III.4.2	Fonctionnement du superviseur	37
III.4.3	Fonctionnement de l'estimateur d'impact	37
III.5	Vers une modélisation unifiée des deux dynamiques	37
III.5.1	Problème de complémentarité linéaire	37
III.5.2	Méthodes de résolution	38
IV	Mesures et observateurs	39
IV.1	Les différentes valeurs à observer	39
IV.2	Capteurs disponibles	39
IV.3	Méthodes de mesure et conséquences	39
IV.3.1	Mesure de la posture du robot	39
IV.3.2	Observation de la position de la base mobile	40
IV.3.3	Observation des vitesses et accélérations du robot et de la base	40
IV.3.4	Observation de l'angle de basculement et d'inclinaison du sol	40
V	Résultats et expérimentations	41
V.1	Schéma de contrôle en boucle fermée	41
V.2	Expériences en l'absence de perturbation et sur sol horizontal	41
V.2.1	Protocole expérimental	41

V.2.2	Analyse des expériences	42
V.3	Expériences de compensation de perturbations	42
V.3.1	Protocole expérimental	42
V.3.2	Analyse des expériences	42
V.4	Expériences de compensation de l’inclinaison du sol	42
V.4.1	Protocole expérimental	42
V.4.2	Analyse des expériences	43
VI	Synthèse	44
VI.1	Contributions	44
VI.2	Perspectives	44
VI.3	conclusion	44
	Bibliographie	44
	Annexes	45
A	Pepper, un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles	46
B	Optimisation du choix du modèle dynamique	47
C	Résolution d’un problème quadratique	48
D	“MPC-WalkGen”, librairie C++ implémentant la commande par modèle prédictif	49

Table des figures

II.1	Représentation globale du modèle dynamique.	9
II.2	représentation dans le repère \mathcal{R}_w des points de contacts avec le sol et des angles de basculement.	11
II.3	Projection dans le plan (O, \vec{x}, \vec{z}) du modèle du robot. Représentation des variables relatives au corps \bar{c} et à l'angle ψ_f . Celles relatives à \bar{b} , ψ_r et ψ_l ne sont pas représentées, mais correspondent au même schéma.	13

Chapitre I

Introduction

[1]

I.1 Contexte d'étude

I.2 État de l'art

I.2.1 Commande et équilibre des robots à roues

I.2.1.1 Les robots à une et deux roues

I.2.1.2 Les robots à trois roues et plus

I.2.2 Commande et équilibre des robots bipèdes

I.2.3 Synthèse et conclusion

I.3 Contributions scientifiques

I.4 Plate-forme expérimentale

I.5 Contributions techniques

I.6 Organisation du document

Chapitre II

Modélisation du système

II.1 Choix du modèle et conséquences

II.1.1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de présenter une modélisation dynamique d'un robot humanoïde possédant une base mobile à roues omnidirectionnelles. Ce modèle doit apporter un bon compromis entre fidélité vis à vis du comportement du robot réel et complexité, qui impacte de manière directe le temps de calcul. Notamment, on montre qu'il n'est pas nécessaire de modéliser tout les paramètres du robot : représenter uniquement les dynamiques principales suffit à obtenir un contrôle précis du robot. La section V.1 détaillera les méthodes de compensation des éléments non modélisés.

II.1.2 Avantages du modèle

Le choix se porte sur une modélisation dynamique d'un robot rigide multi-corps. Le modèle présenté [Fig. II.1] comporte deux corps. Le premier est attaché à la base mobile, de masse m_b et de position du centre de masse (CoM) \bar{b} . Le second modélise l'ensemble du reste du robot, de masse m_c et de CoM \bar{c} .

Le choix d'un modèle à deux corps permet de prendre en compte la rotation générale du corps du robot autour de la base mobile. Cette modélisation est pertinente dans le cas où les bras du

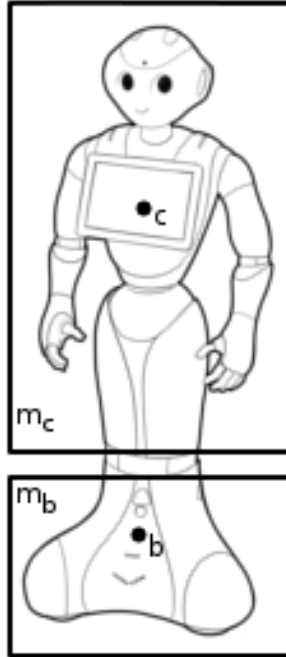


FIGURE II.1 – Représentation globale du modèle dynamique.

robot ne génèrent que peu ou pas de moment angulaire. Dans le cas contraire, nous considérerons que les effets parasites dû aux mouvements des bras pourront être compensés correctement par le schéma de contrôle en boucle fermée présenté en section V.1. Le choix de ce modèle est également conditionné par la répartition massique de la plate-forme expérimentale : Elle est principalement concentré en deux zones, qui correspondent aux corps choisis : la base mobile et le torse du robot.

II.1.3 Inconvénients du modèle

Le choix d'un modèle rigide multi-corps implique que les éléments suivants ne seront pas modélisés :

- Les différentes élasticités. Les technologies d'actionnement utilisées sur la plate-forme expérimentale ne comportent pas d'élasticités notables. Le seul élément compliant est un ensemble de deux bandes élastiques attachées à l'articulation du roulis de la hanche permettant

au robot de maintenir une posture droite en l'absence de contrôle du moteur. Cet élément est négligeable en terme de dynamique car la raideur associée est très faible.

- Les jeux mécaniques présents sur le robot. Ceux-ci sont présents sur la plate-forme expérimentale, du fait de systèmes de réductions présents entre les moteurs et les articulations basés sur un système d'engrenages. Les effets dynamiques parasites apportés par le jeu mécanique ne sont pas négligeables. Cependant, ils peuvent être compensés de manière suffisamment efficace (plus de détails en section V.1) pour que cela soit transparent du point de vue de la commande présentée dans le chapitre III.
- Les glissements pouvant survenir entre les roues du robot et le sol ne sont pas modélisés. Ceux-ci peuvent être néanmoins handicapant, car le système devient en partie non-observable en présence de glissement (plus de détails en section IV.3.2). Une solution a été apportée en section III.3.2.1 afin de limiter leurs possibilités d'apparition ainsi que leurs impacts sur la dynamique du robot.
- Le nombre de corps choisi pour cette modélisation dynamique est nécessairement plus faible que le nombre de corps réels présents sur le robot, pour des raisons de complexité du modèle. Ainsi, tous les effets dynamiques ne pourront pas être représentés. Le choix du nombre de corps, et de leurs propriétés doit permettre de rendre négligeable les dynamiques non modélisées. Le développement d'une solution optimale du choix du nombre de corps et de leurs propriétés est présenté en annexe B.

II.2 Modélisation dynamique

II.2.1 Problème de complémentarité mixte

II.2.1.1 Géométrie du robot

On considère le robot modélisé par deux masses-point \bar{b} et \bar{c} de masse associée m_b et m_c . Ces corps sont en contact avec le sol par l'intermédiaire de trois points p_f , p_r et p_l correspondant aux trois points de contact des roues avec le sol [Fig. II.2]. La roue avant gauche correspond au point p_r , la roue avant droite au point p_l et la roue arrière au point p_f . On considère que le système peut être dans quatre mode dynamique différents :

- Le robot ne bascule pas et les trois roues sont en contact avec le sol.
- Le robot est en rotation vers l'avant autour de l'axe défini par les deux roues avant. On note l'angle de rotation ψ_f . La roue arrière est dans ce cas en l'air.
- Le robot est en rotation vers la gauche autour de l'axe défini par la roue avant gauche et la roue arrière. On note l'angle de rotation ψ_l . La roue avant droite est dans ce cas en l'air.
- Le robot est en rotation vers la droite autour de l'axe défini par la roue avant droite et la roue arrière. On note l'angle de rotation ψ_r . La roue avant gauche est dans ce cas en l'air.

Enfin, on la répartition de la masse de chaque corps est concentrée en un seul point. Ainsi, il n'y a aucune inertie de rotation associée à \bar{b} ou \bar{c}

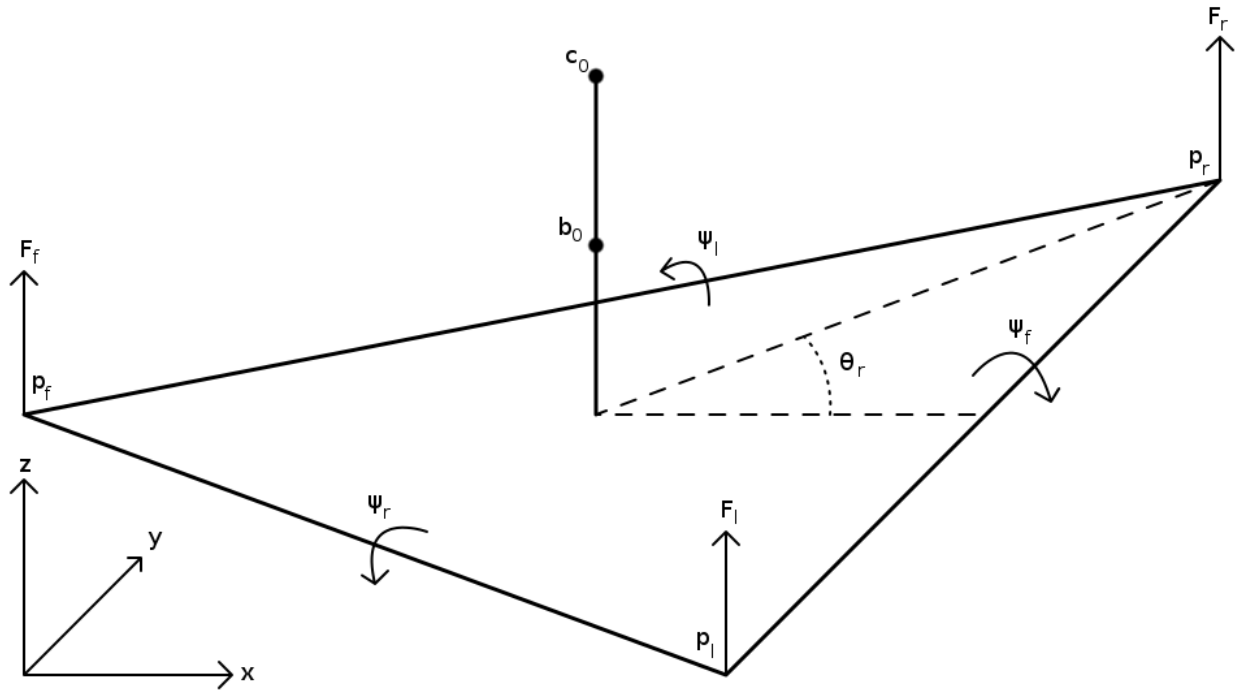


FIGURE II.2 – représentation dans le repère \mathcal{R}_w des points de contacts avec le sol et des angles de basculement.

II.2.1.2 Cinématique directe

II.2.1.2.a Notations

Dans la suite, nous considérerons un repère galiléen fixe orthonormé direct $\mathcal{R}_w(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, \vec{x} étant orienté vers l'avant du robot, \vec{y} vers la gauche, et \vec{z} vers le haut. Ce repère est attaché au sol, \vec{x} et \vec{y} inclus dans le plan, et \vec{z} orthogonal au sol. Celui-ci n'est pas forcément horizontal, ce qui implique que le vecteur gravité ne soit pas forcément orienté selon l'axe \vec{z} .

Premièrement, on considère que la position des corps \bar{c} et \bar{b} correspond à la composition de trois éléments [Fig. II.3] :

- c_0 et b_0 correspondent à la position d'origine de chaque corps par rapport à l'origine. Il est à noter que $c_0^{xy} = b_0^{xy}$.
- δ_c correspond à longueur apportée par l'actionnement des moteurs du robot. On peut noter du fait qu'il n'y a pas d'actionnement possible pour la base mobile, $\delta_b = 0$.
- ψ_f, ψ_r et ψ_l correspondent aux rotations apportées par le basculement du robot sur chaque'un de ses cotés.

Afin de pouvoir écrire les équations cinématiques, nous avons besoin de définir différentes grandeurs dépendantes de la géométrie du robot [Fig. II.3][Fig. II.2].

$\forall i \in \{f, r, l\}$:

- On note θ_i l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{b_0^{xy} p_i^{xy}}$ avec l'axe \vec{x} . On note \vec{n}_i l'axe résultant et l'axe orthogonal $\vec{t}_i = \vec{z} \times \vec{n}_i$. c_0 et b_0 étant verticalement alignés, il en est de même pour le corps \bar{c} . On note \mathcal{R}_i le repère $(O, \vec{n}_i, \vec{t}_i, \vec{z})$.
- On note ϕ_{ib} et ϕ_{ic} les angles que font respectivement les vecteurs $\overrightarrow{b_0^{t_i z} p_i^{t_i z}}$ et $\overrightarrow{c_0^{t_i z} p_i^{t_i z}}$ avec l'axe \vec{z} .
- l_{bi} et l_{ci} correspondent aux normes des vecteurs $\overrightarrow{b_0^{xyz} p_i^{xyz}}$ et $\overrightarrow{c_0^{xyz} p_i^{xyz}}$.
- d_i correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{b_0^{xy} p_i^{xy}}$, qui est la même concernant le corps \bar{c} .
- h_b et h_c correspondent à la composante selon l'axe \vec{z} des vecteurs $\overrightarrow{b_0^{xyz} p_i^{xyz}}$ et $\overrightarrow{c_0^{xyz} p_i^{xyz}}$.

Enfin, on note b et c les positions commandées des corps par rapport à l'origine O :

$$b^{xyz} = b_0^{xyz} \quad (\text{II.1})$$

$$c^{xy} = c_0^{xy} + \delta_c^{xy} = b_0^{xy} + \delta_c^{xy} \quad (\text{II.2})$$

$$c^z = c_0^z + \delta_c^z = b_0^z + h_c + \delta_c^z \quad (\text{II.3})$$

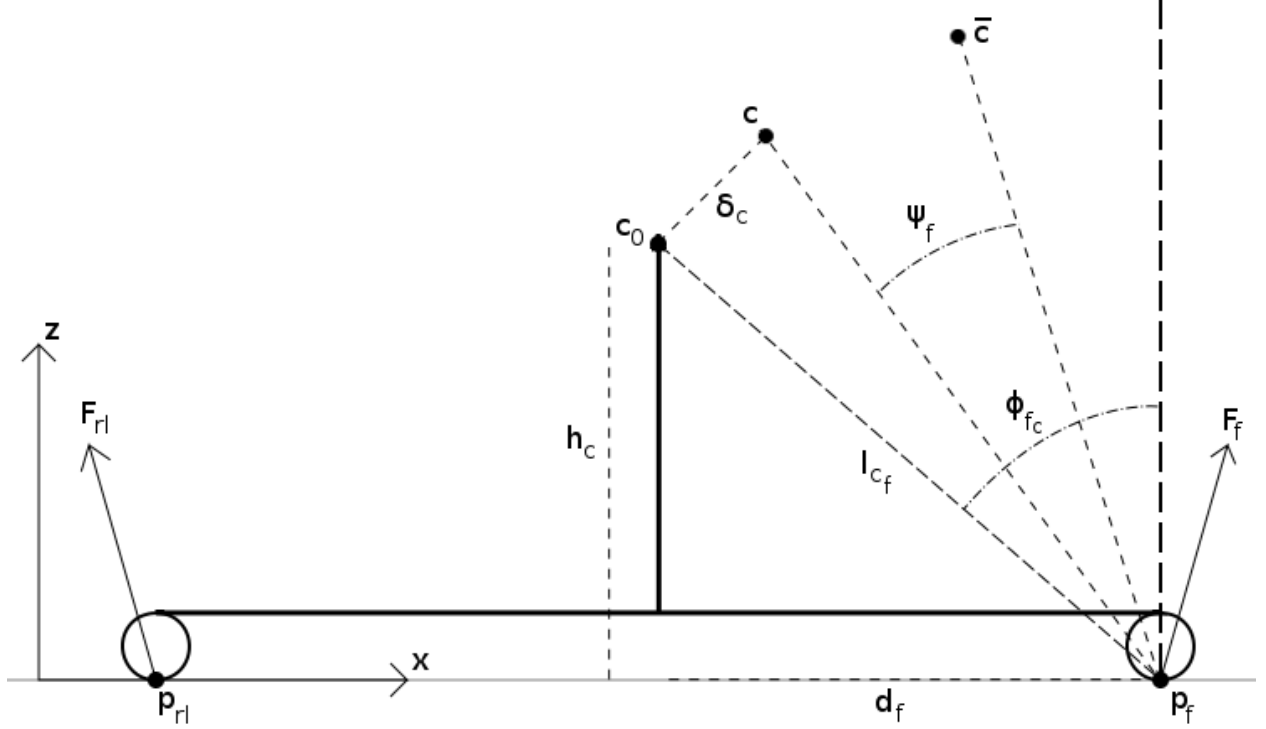


FIGURE II.3 – Projection dans le plan (O, \vec{x}, \vec{z}) du modèle du robot. Représentation des variables relatives au corps \bar{c} et à l'angle ψ_f . Celles relatives à \bar{b} , ψ_r et ψ_l ne sont pas représentées, mais correspondent au même schéma.

II.2.1.2.b Equations cinématiques

Nous pouvons à présent écrire les équations cinématiques des corps \bar{c} et \bar{b} :

$$\bar{c}^x = c^x + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \cos(\theta_i) + l_{c_i} \sin(\phi_{i_c} + \psi_i) \cos(\theta_i) \right) \quad (\text{II.4})$$

$$\bar{c}^y = c^y + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \sin(\theta_i) + l_{c_i} \sin(\phi_{i_c} + \psi_i) \sin(\theta_i) \right) \quad (\text{II.5})$$

$$\bar{c}^z = c^z + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(-h_c + l_{c_i} \cos(\phi_{i_c} + \psi_i) \right) \quad (\text{II.6})$$

$$\bar{b}^x = b^x + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \cos(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \cos(\theta_i) \right) \quad (\text{II.7})$$

$$\bar{b}^y = b^y + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \sin(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \sin(\theta_i) \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\bar{b}^z = b^z + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(-h_b + l_{b_i} \cos(\phi_{i_b} + \psi_i) \right) \quad (\text{II.9})$$

Nous aurons besoin également des équations cinématiques des points p_{frl} . $\forall i \in \{f, r, l\}$:

$$p_i^x = b^x + d_i \cos(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \cos(\theta_i) \quad (\text{II.10})$$

$$p_i^y = b^y + d_i \sin(\theta_i) + l_{b_i} \sin(\phi_{i_b} + \psi_i) \sin(\theta_i) \quad (\text{II.11})$$

$$p_i^z = b^z - h_b + l_{b_i} \cos(\phi_{i_b} + \psi_i) \quad (\text{II.12})$$

II.2.1.2.c Hypothèse d'angles de basculements faibles

Dans la suite, afin de simplifier les formulations des équations de la dynamique, nous allons établir dès maintenant une hypothèse : Les angles ψ_{frb} sont considérés proches de 0. Dans le cas où le robot ne bascule pas, cela est exact. Dans le cas où le robot bascule, on suppose le fait que l'angle de basculement reste faible. Nous pouvons donc réécrire les équations cinématiques (II.4)(II.5)(II.6)(II.7)(II.8)(II.9) et (II.10)(II.12)(II.11) en utilisant une approximation du premier

ordre :

$$\bar{c}^x = c^x + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(\cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.13})$$

$$\bar{c}^y = c^y + h_c \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(\sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\bar{c}^z = c^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\bar{b}^x = b^x + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(\cos(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\bar{b}^y = b^y + h_b \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(\sin(\theta_i) \psi_i \right) \quad (\text{II.17})$$

$$\bar{b}^z = b^z + \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(d_i \psi_i \right) \quad (\text{II.18})$$

$$p_{frl}^x = b^x - d_{frl} \cos(\theta_{frl}) \quad (\text{II.19})$$

$$p_{frl}^y = b^y - d_{frl} \sin(\theta_{frl}) \quad (\text{II.20})$$

$$p_{frl}^z = b^z - h_b + 2d_{frl} \psi_{frl} \quad (\text{II.21})$$

II.2.1.3 Énergies cinétiques et potentielles

II.2.1.3.a Contraintes sur le basculement du robot

Afin d'exprimer les équations du mouvement du robot, nous allons utiliser la méthode Lagrangienne. Celle-ci est pertinente dans notre cas car elle est particulièrement adaptée à la formulation sans ambiguïtés de systèmes dynamiques soumis à des forces de contraintes, comme les forces de réactions dues au sol sur les roues. Pour cela, il nous faut dans un premier temps écrire les équations des énergies cinétiques T et potentielles V du système :

$$T = \frac{1}{2}m_b(\dot{\bar{b}}^{x^2} + \dot{\bar{b}}^{y^2} + \dot{\bar{b}}^{z^2}) + \frac{1}{2}m_c(\dot{\bar{c}}^{x^2} + \dot{\bar{c}}^{y^2} + \dot{\bar{c}}^{z^2}) \quad (\text{II.22})$$

$$V = m_bg^x\bar{b}^x + m_cg^x\bar{c}^x + m_bg^y\bar{b}^y + m_cg^y\bar{c}^y + m_bg^z\bar{b}^z + m_cg^z\bar{c}^z \quad (\text{II.23})$$

$$(\text{II.24})$$

avec g le vecteur gravité. On rappelle que le repère \mathcal{R}_w étant attaché au sol, le vecteur gravité n'est pas forcément orienté selon la direction verticale \vec{z} , car le sol peut ne pas être horizontal.

Nous allons considérer une autre hypothèse à partir de maintenant : Il ne peut pas y avoir plus d'un seul des angles ψ_f , ψ_r et ψ_l non-nul à la fois. Cela correspond à supposer que le robot ne peut basculer que sur deux roues. On ne considère évidemment pas le cas où le robot est en chute libre, ainsi que le cas où il ne bascule que sur une seule roue. On justifie cela par le fait que sa construction mécanique ne permet pas au robot de basculer sur une roue, sauf s'il subit une perturbation extrêmement forte.

On obtient donc la contrainte suivante :

$$\forall (i, j) \in \{f, r, l\}, i \neq j, \psi_i\psi_j = 0 \quad (\text{II.25})$$

II.2.1.3.b Formulation des énergies cinétiques et potentielles

En dérivant les équations cinématiques (II.13)(II.14)(II.15)(II.16)(II.17)(II.18) et en utilisant la contrainte précédente (II.25), nous pouvons exprimer les vitesses des corps \bar{c} et \bar{b} élevés au carré.

$$\dot{\bar{c}}^{x^2} = \dot{c}^{x^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{c}^x \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.26})$$

$$\dot{\bar{c}}^{y^2} = \dot{c}^{y^2} + h_c^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_c \dot{c}^y \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.27})$$

$$\dot{\bar{c}}^{z^2} = \dot{c}^{z^2} + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{c}^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\dot{\bar{b}}^{x^2} = \dot{b}^{x^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{b}^x \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.29})$$

$$\dot{\bar{b}}^{y^2} = \dot{b}^{y^2} + h_b^2 \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i)^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2h_b \dot{b}^y \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i) \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.30})$$

$$\dot{\bar{b}}^{z^2} = \dot{b}^{z^2} + \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i^2 \dot{\psi}_i^2 \right) + 2\dot{b}^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \dot{\psi}_i \right) \quad (\text{II.31})$$

Voici donc la formulation des énergies cinétiques et potentielles en fonction des variables du système :

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}m_b(\dot{b}^x + \dot{b}^y + \dot{b}^z) + \frac{1}{2}m_c(\dot{c}^x + \dot{c}^y + \dot{c}^z) + \frac{1}{2}(m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (\dot{\psi}_i^2) \\
& + \frac{1}{2}(m_c + m_b) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (d_i^2 \dot{\psi}_i^2) + (m_c h_c \dot{c}^z + m_b h_b \dot{b}^z) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (d_i \dot{\psi}_i) \\
& + (m_b h_b \dot{b}^x + m_c h_c \dot{c}^x) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (\cos(\theta_i) \dot{\psi}_i) + (m_b h_b \dot{b}^y + m_c h_c \dot{c}^y) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (\sin(\theta_i) \dot{\psi}_i) \quad (\text{II.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & m_b g^x b^x + m_c g^x c^x + m_b g^y b^y + m_c g^y c^y + m_b g^z b^z + m_c g^z c^z \\
& + (m_b g^x h_b + m_c g^x h_c) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (\cos(\theta_i) \psi_i) + (m_b g^y h_b + m_c g^y h_c) \sum_{i \in \{f, r, l\}} (\sin(\theta_i) \psi_i) \\
& + (m_b + m_c) g^z \sum_{i \in \{f, r, l\}} (d_i \psi_i) \quad (\text{II.33})
\end{aligned}$$

II.2.1.4 Coordonnées généralisées et Lagrangien

L'étape suivante dans la méthode Lagrangienne est d'exprimer l'équation du Lagrangien en fonction des coordonnées généralisées choisies.

Habituellement, le choix des coordonnées généralisées correspondent aux degrés de libertés du système. Afin de faciliter la formulation du modèle, nous allons plutôt utiliser le jeu de coordonnées q suivant :

$$q = \left(b^x \quad b^y \quad b^z \quad c^x \quad c^y \quad c^z \quad \psi_f \quad \psi_r \quad \psi_l \right)^t \quad (\text{II.34})$$

Le choix d'utiliser les trois angles $\psi_{f, r, l}$ pour représenter la rotation du système autour des trois directions possible permettra par la suite d'exprimer plus simplement les équations de la dynamique.

Le Lagrangien L du système est exprimé à partir des énergies cinétiques et potentielles de la façon suivante :

$$L = T - V \quad (\text{II.35})$$

II.2.1.5 Application du principe de moindre action

II.2.1.5.a Définitions

On définit l'action du système comme l'intégrale temporelle du Lagrangien. Le principe de moindre action énonce que, dans le cas d'un système Lagrangien, l'action est stationnaire. Le plus souvent, cela correspond à un minimum, d'où le terme de "moindre action".

Résoudre ce système emmène aux équations d'Euler-Lagrange, équivalentes du principe fondamental de la dynamique de Newton. Dans le cas d'un système contraint par des forces de contact, on écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{i \in \{f, r, l\}}^{k \in \{x, y, z\}} \left(\frac{\partial p_i^k}{\partial q} F_{p_i}^k \right) \quad (\text{II.36})$$

Afin de clarifier l'écriture des équations de la dynamique, on pose :

$$m_{hc} = m_c h_c \quad (\text{II.37})$$

$$m_{hb} = m_b h_b \quad (\text{II.38})$$

$$m_q = m_{hc} h_c + m_{hb} h_b \quad (\text{II.39})$$

$$m_t = m_c + m_b \quad (\text{II.40})$$

$$C_{\theta_i} = \cos(\theta_i) \quad (\text{II.41})$$

$$S_{\theta_i} = \sin(\theta_i) \quad (\text{II.42})$$

II.2.1.5.b Équations de la dynamique

Les éléments de l'équation (II.36) peuvent être calculés à l'aide des équations des énergies (II.32)(II.33) ainsi que des équations cinématiques (II.19)(II.20)(II.21) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{pmatrix} m_b \ddot{b}^x + m_b h_b \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_b \ddot{b}^y + m_b h_b \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_b \ddot{b}^z + m_b h_b \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^x + m_c h_c \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^y + m_c h_c \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(\sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) \\ m_c \ddot{c}^z + m_c h_c \sum_{i \in \{f, r, l\}} \left(d_i \ddot{\psi}_i \right) \\ (m_q + m_t d_f^2) \ddot{\psi}_f + m_{hb} (C_{\theta_f} \ddot{b}^x + S_{\theta_f} \ddot{b}^y - d_f \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_f} \ddot{c}^x + S_{\theta_f} \ddot{c}^y + d_f \ddot{c}^z) \\ (m_q + m_t d_r^2) \ddot{\psi}_r + m_{hb} (C_{\theta_r} \ddot{b}^x + S_{\theta_r} \ddot{b}^y - d_r \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_r} \ddot{c}^x + S_{\theta_r} \ddot{c}^y + d_r \ddot{c}^z) \\ (m_q + m_t d_l^2) \ddot{\psi}_l + m_{hb} (C_{\theta_l} \ddot{b}^x + S_{\theta_l} \ddot{b}^y - d_l \ddot{b}^z) + m_{hc} (C_{\theta_l} \ddot{c}^x + S_{\theta_l} \ddot{c}^y + d_l \ddot{c}^z) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.43})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_f) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_f) g^y + m_t d_f g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_r) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_r) g^y + m_t d_r g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_l) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_l) g^y + m_t d_l g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.44})$$

$$\frac{\partial p_{f_{rl}}^x}{\partial q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_{f_{rl}}^y}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_f^z}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_r^z}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_r \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial p_l^z}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d_l \end{pmatrix} \quad (\text{II.45})$$

II.2.1.5.c Formulation standard

Les équations de la dynamique (II.36) peuvent à présent être réécrites en utilisant la formulation standard utilisée en robotique :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.46})$$

où, en identifiant avec les équations (II.43)(II.44)(II.45) :

$$\lambda = \left(F_{p_l}^x \ F_{p_r}^x \ F_{p_b}^x \ F_{p_l}^y \ F_{p_r}^y \ F_{p_b}^y \ F_{p_l}^z \ F_{p_l}^z \ F_{p_b}^z \right)^t \quad (\text{II.47})$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{bc} & M_{c\psi} \\ M_{c\psi}^t & M_\psi \end{pmatrix}, M_\psi = \begin{pmatrix} m_q + m_t d_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_q + m_t d_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_q + m_t d_l^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.48})$$

$$M_{bc} = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c \end{pmatrix}, M_{c\psi} = \begin{pmatrix} m_{hb}C_{\theta_f} & m_{hb}C_{\theta_r} & m_{hb}C_{\theta_l} \\ m_{hb}S_{\theta_f} & m_{hb}S_{\theta_r} & m_{hb}S_{\theta_l} \\ m_{hb}d_f & m_{hb}d_r & m_{hb}d_l \\ m_{hc}C_{\theta_f} & m_{hc}C_{\theta_r} & m_{hc}C_{\theta_l} \\ m_{hc}S_{\theta_f} & m_{hc}S_{\theta_r} & m_{hc}S_{\theta_l} \\ m_{hc}d_f & m_{hc}d_r & m_{hc}d_l \end{pmatrix}, \quad (\text{II.49})$$

$$(\text{II.50})$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_f) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_f) g^y + m_t d_f g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_r) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_r) g^y + m_t d_r g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_l) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_l) g^y + m_t d_l g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.51})$$

$$J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_l \end{pmatrix} \quad (\text{II.52})$$

II.2.1.6 Contraintes de complémentarité mixte

Afin de compléter la formulation de la dynamique, il reste maintenant à utiliser les *a priori* que l'on dispose sur notre système et formuler les contraintes de complémentarité mixte.

Dans un premier temps, le robot n'a pas la possibilité de pénétrer dans le sol, nous avons donc :

$$\forall i \in \{f, r, l\}, \psi_i \geq 0 \quad (\text{II.53})$$

Aussi, lorsque que le robot bascule sur un des axes ψ_{frl} , la force résultante sur la roue opposée est nulle :

$$\forall i \in \{f, r, l\}, (\psi_i > 0) \Rightarrow F_i^{xyz} = 0 \quad (\text{II.54})$$

Ensuite, lorsque le robot est en contact avec le sol, les forces verticales sur les points de contacts

sont nécessairement positives :

$$\forall i \in \{f, r, l\}, F_i^z \geq 0 \quad (\text{II.55})$$

Enfin, nous avons défini en section (II.2.1.3.a) que le robot ne peut pas basculer sur plus d'un des trois axes à la fois :

$$\forall (i, j) \in \{f, r, l\}, i \neq j, \psi_i \psi_j = 0 \quad (\text{II.56})$$

Nous pouvons donc exprimer les contraintes de complémentarité mixte pour le système :

$$\forall (i, j) \in \{f, r, l\}, i \neq j, \begin{cases} 0 \leq \psi_i \perp \psi_j \geq 0 \\ 0 \leq \psi_i \perp F_i^z \geq 0 \\ \psi_i F_i^x = 0 \\ \psi_i F_i^y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

II.2.1.7 Synthèse

Dans cette section, nous avons dans un premier temps défini les équations cinématiques associées au modèle du robot. Cela nous a permis d'établir une formulation Lagrangienne de la dynamique, puis de l'identifier à la formulation standard des systèmes mécaniques en robotique. Enfin, les *a priori* que nous connaissons concernant le système dynamique nous ont permis d'établir des contraintes de complémentarité mixte sur celui-ci.

Sans ces contraintes, il aurait été possible de résoudre analytiquement les équations temporelles du mouvement. Cependant, la présence de celles-ci imposent une résolution particulière. Une première approche, qui sera développée dans les sections suivantes, est d'énoncer d'autres *a priori* afin de fixer le problème de complémentarité (par exemple, en considérant que le robot n'est pas en possibilité de basculer, ou est en état de basculement sur un axe).

Ces approches ne permettent cependant pas de résoudre le problème complet. Nous détaillerons dans la section (III.5) une méthode de résolution du système complet (II.46)(II.57).

II.2.2 Cas où les trois roues sont en contact avec le sol

II.2.2.1 Modèle dynamique

Lorsque le robot est en situation nominale, ses trois roues sont en contact avec le sol. Les mouvements contrôlés du robot ne doivent également pas le faire basculer sur deux roues. Il est

donc pertinent de modéliser le système dynamique dans le cas où les trois roues sont en contact avec le sol, car en l'absence de forte perturbations, le contrôleur développé en section (III.3.2) assure cette hypothèse.

Définir le fait que le robot est en contact avec le sol avec ces trois roues permet de résoudre le problème de complémentarité de la façon suivante :

$$\psi_f = \psi_r = \psi_l = 0 \quad (\text{II.58})$$

Ainsi, le jeu de variables q devient :

$$q = \begin{pmatrix} b^x & b^y & b^z & c^x & c^y & c^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.59})$$

et l'on peut écrire le modèle dynamique correspondant :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.60})$$

avec :

$$q_i = \begin{pmatrix} b^x & b^y & b^z & c^x & c^y & c^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.61})$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} F_{p_l}^x & F_{p_r}^x & F_{p_b}^x & F_{p_l}^y & F_{p_r}^y & F_{p_b}^y & F_{p_l}^z & F_{p_r}^z & F_{p_b}^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.62})$$

$$F_{p_f}^z \geq 0, \quad F_{p_r}^z \geq 0, \quad F_{p_l}^z \geq 0 \quad (\text{II.63})$$

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c \end{pmatrix}, \quad (\text{II.64})$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \end{pmatrix}, \quad J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.65})$$

II.2.2.2 Définition du Centre de Pression

Dans le cas d'un système dont les positions des forces de contact sont définies sur un plan, il est possible de définir une grandeur nommée Centre de Pression d^{xy} (CoP). Le CoP correspond au point dans le plan où le moment angulaire de la résultante des forces de contact est nul. La propriété essentielle du CoP est que celui est toujours défini à l'intérieur du polygone de l'enveloppe convexe définie par la position des forces de contact. Cela est dû aux contraintes de non-pénétration dans le sol des forces de contact (II.63). Lorsque le CoP est strictement à l'intérieur de ce polygone de support, le robot ne peut pas basculer sur deux roues.

Ainsi, l'utilisation du CoP permet de manipuler de façon pertinente la somme des forces de contact afin de permettre au robot de ne jamais basculer de lui-même. Son expression est la suivante :

$$d^{xy} = \frac{\sum_{i \in \{f,r,l\}} \left((p \times F)^{xy} \right)}{\sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(F_i^z \right)} \quad (\text{II.66})$$

II.2.2.3 Principe du moment angulaire

Le modèle de notre robot n'est pas un système fermé. Il n'y a donc pas de conservation du moment angulaire intrinsèque : Le lagrangien n'est pas invariant par rotation. Cependant, notre système est soumis à deux types de forces différentes : La première est due à la gravité, et dérive donc d'un potentiel, les secondes sont dues à des efforts de contacts, qui sont des contraintes concernant le système. Il est possible d'exprimer le principe du moment angulaire dans ce cas là, celui-ci se formule alors :

$$q \times \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) = \sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(p_i \times F \right) \quad (\text{II.67})$$

En utilisant l'équation du modèle dynamique (II.60), on peut donc écrire le principe du moment

angulaire autour des axes \vec{y} et \vec{x} :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^x - m_b(\ddot{b}^x - g^x)b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^x - m_c(\ddot{c}^x - g^x)c^z = \sum_{i \in \{f, r, l\}} (p_i^x F_i^z - p_i^z F_i^x) \quad (\text{II.68})$$

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^y - m_b(\ddot{b}^y - g^y)b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^y - m_c(\ddot{c}^y - g^y)c^z = \sum_{i \in \{f, r, l\}} (p_i^y F_i^z - p_i^z F_i^y) \quad (\text{II.69})$$

II.2.2.4 Formulation du Centre de Pression et simplifications

On rappelle les équations du mouvement sur l'axe \vec{z} (II.60) :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) = \sum_{i \in \{f, r, l\}} (F_i^z) \quad (\text{II.70})$$

En utilisant les équations résultantes du principe du moment angulaire autour des axes \vec{y} et \vec{x} (II.68)(II.69) ainsi que l'équation (II.70), on peut formuler le CoP de la façon suivante :

$$d^{xy} = \frac{m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^{xy} - m_b(\ddot{b}^{xy} - g^{xy})b^z + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^{xy} - m_c(\ddot{c}^{xy} - g^{xy})c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z)} \quad (\text{II.71})$$

Notre objectif va être maintenant de linéariser l'équation (II.71) par rapport aux variables commandées c^{xy} et b^{xy} . Cela va nous permettre d'utiliser un contrôleur basé sur un système linéaire, ce qui est généralement beaucoup plus efficace en terme de temps de calcul qu'un contrôleur basé sur un système non-linéaire.

On peut dans un premier temps noter que b^z est constant à la hauteur h_b , car $b = b_0$. Ensuite, on contraint c^z à être constant à la hauteur h_c . Enfin, on considère la gravité orientée selon l'axe \vec{z} : $g = (0, 0, -g_n)^t$, avec $g_n = \|g\|$, ce qui correspond à un sol horizontal.

En utilisant ces *a priori*, l'équation de la dynamique (II.71) se réécrit :

$$d^{xy} = \frac{m_b g b^{xy} - m_b \ddot{b}^{xy} h_b + m_c g c^{xy} - m_c \ddot{c}^{xy} h_c}{(m_b + m_c)g} \quad (\text{II.72})$$

Enfin, les trois contraintes (II.63) impliquent que d^{xy} est à l'intérieur du triangle défini par les trois points de contacts :

$$d^{xy} \times (p_r^{xy} - p_f^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.73})$$

$$d^{xy} \times (p_l^{xy} - p_r^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.74})$$

$$d^{xy} \times (p_f^{xy} - p_l^{xy}) \geq 0 \quad (\text{II.75})$$

II.2.3 Le robot bascule sur deux roues

On résout la complémentarité :

$$\forall (i, j, k) \in \{f, r, l\}, i \neq j \neq k, \psi_{jk} = 0, F_i^{xyz} = 0 \quad (\text{II.76})$$

Le modèle dynamique devient :

$$M\ddot{q} - f(q) = J^t(q)\lambda \quad (\text{II.77})$$

En identifiant :

$$q_i = \begin{pmatrix} b^x & b^y & b^z & c^x & c^y & c^z & \psi_i \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.78})$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} F_{p_j}^x & F_{p_k}^x & F_{p_j}^y & F_{p_k}^y & F_{p_j}^z & F_{p_k}^z \end{pmatrix}^t \quad (\text{II.79})$$

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{hb}C_{\theta_i} \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{hb}S_{\theta_i} \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & m_{hb}d_i \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 & m_{hc}C_{\theta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & m_{hc}S_{\theta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & m_{hc}d_i \\ m_{hb}C_{\theta_i} & m_{hb}S_{\theta_i} & m_{hb}d_i & m_{hc}C_{\theta_i} & m_{hc}S_{\theta_i} & m_{hc}d_i & m_q + m_t d_i^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.80})$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} m_b g^x \\ m_b g^y \\ m_b g^z \\ m_c g^x \\ m_c g^y \\ m_c g^z \\ (m_{hc} + m_{hb}) \cos(\theta_i) g^x + (m_{hc} + m_{hb}) \sin(\theta_i) g^y + m_t d_i g^z \end{pmatrix}, \quad (\text{II.81})$$

$$J^t(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_k \end{pmatrix} \quad (\text{II.82})$$

Principe du moment angulaire autour de l'axe y et x :

$$\begin{aligned}
& m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^x + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i \left(b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_b(\ddot{b}^x - g^x)b^z - m_b h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i b^z \\
& + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^x + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i \left(c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_c(\ddot{c}^x - g^x)c^z - m_c h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i c^z \\
& = \sum_{s \in \{j,k\}} \left(p_s^x F_s^z - p_s^z F_s^x \right)
\end{aligned} \tag{II.83}$$

$$\begin{aligned}
& m_b(\ddot{b}^z - g^z)b^y + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i \left(b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_b(\ddot{b}^y - g^y)b^z - m_b h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i b^z \\
& + m_c(\ddot{c}^z - g^z)c^y + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i \left(c^y + h_c \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_c(\ddot{c}^y - g^y)c^z - m_c h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i c^z \\
& = \sum_{s \in \{j,k\}} \left(p_s^y F_s^z - p_s^z F_s^y \right)
\end{aligned} \tag{II.84}$$

Equation du mouvement sur l'axe z :

$$m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_b h_b d_i \ddot{\psi}_i + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + m_c h_c d_i \ddot{\psi}_i = \sum_{s \in \{j,k\}} \left(F_s^z \right) \tag{II.85}$$

Equation du CoP d^{xy} :

$$d^{xy} = \frac{\sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(p^{xy} \times F^{xy} \right)}{\sum_{i \in \{f,r,l\}} \left(F_i^z \right)} \tag{II.86}$$

$$\begin{aligned}
d^x &= \frac{m_b \left(\ddot{b}^z - g^z + h_b d_i \ddot{\psi}_i \right) \left(b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_b \left(\ddot{b}^x - g^x + h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) b^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i} \\
&+ \frac{m_c \left(\ddot{c}^z - g^z + h_c d_i \ddot{\psi}_i \right) \left(c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i \right) - m_c \left(\ddot{c}^x - g^x + h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i}
\end{aligned} \tag{II.87}$$

$$\begin{aligned}
d^y &= \frac{m_b \left(\ddot{b}^z - g^z + h_b d_i \ddot{\psi}_i \right) \left(b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_b \left(\ddot{b}^y - g^y + h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) b^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i} \\
&+ \frac{m_c \left(\ddot{c}^z - g^z + h_c d_i \ddot{\psi}_i \right) \left(c^y + h_c \sin(\theta_i) \psi_i \right) - m_c \left(\ddot{c}^y - g^y + h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i \right) c^z}{m_b(\ddot{b}^z - g^z) + m_c(\ddot{c}^z - g^z) + (m_b h_b + m_c h_c) d_i \ddot{\psi}_i}
\end{aligned} \tag{II.88}$$

Les variables contrôlées sont directement c^{xy} , b^{xy} . b^z est constant à la hauteur h_b et on contraint c^z à être constant à la hauteur h_c . De plus, la gravité est considérée selon l'axe z : $g = (0, 0, -g)^t$. Enfin, on considère $d_i = 0$, ce qui correspond à négliger d_i devant h_b et h_c .

$$d^x = \frac{m_b g (b^x + h_b \cos(\theta_i) \psi_i) + m_c g (c^x + h_c \cos(\theta_i) \psi_i)}{(m_b + m_c)g} - \frac{m_b h_b (\ddot{b}^x + h_b \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i) - m_c h_c (\ddot{c}^x + h_c \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i)}{(m_b + m_c)g} \quad (\text{II.89})$$

$$d^y = \frac{m_b g (b^y + h_b \sin(\theta_i) \psi_i) + m_c g (c^y + h_c \sin(\theta_i) \psi_i)}{(m_b + m_c)g} - \frac{m_b h_b (\ddot{b}^y + h_b \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i) - m_c h_c (\ddot{c}^y + h_c \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i)}{(m_b + m_c)g} \quad (\text{II.90})$$

Les deux contraintes $F_{jk}^z \geq 0$ impliquent que d^{xy} est dans le segment défini par les deux points de contact. Pour assurer le maximum de robustesse, on choisi de contraindre le CoP au centre du segment :

$$d^x = b^x + d_i \cos(\theta_i) \quad (\text{II.91})$$

$$d^y = b^y + d_i \sin(\theta_i) \quad (\text{II.92})$$

On peut donc réécrire les équations précédente pour faire apparaitre la dynamique de ψ_i par rapport à celles de b et c :

$$(m_b h_b + m_c h_c) g \cos(\theta_i) \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \cos(\theta_i) \ddot{\psi}_i = m_b h_b \ddot{b}^x + m_c h_c \ddot{c}^x - m_c g (c^x - b^x) - (m_c + m_b) g d_i \cos(\theta_i) \quad (\text{II.93})$$

$$(m_b h_b + m_c h_c) g \sin(\theta_i) \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \sin(\theta_i) \ddot{\psi}_i = m_b h_b \ddot{b}^y + m_c h_c \ddot{c}^y - m_c g (c^y - b^y) - (m_c + m_b) g d_i \sin(\theta_i) \quad (\text{II.94})$$

Un rotation autour de l'axe z de l'angle θ_i fait apparaitre, en combinant les équations (II.93) et (II.94) sous la forme (II.96) = $\cos(\theta_i)$ (II.93) + $\sin(\theta_i)$ (II.94) :

$$\begin{pmatrix} c^x \\ c^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^n \\ c^t \end{pmatrix} \quad (\text{II.95})$$

$$(m_b h_b + m_c h_c) g \psi_i - (m_b h_b^2 + m_c h_c^2) \ddot{\psi}_i = m_b h_b \ddot{b}^n + m_c h_c \ddot{c}^n - m_c g (c^n - b^n) - (m_c + m_b) g d_i \quad (\text{II.96})$$

II.3 Modélisation de la dynamique future

II.3.1 Nécessité de prédire le futur

- Les contraintes dynamiques sont trop fortes pour autoriser un contrôle sans prédiction du futur à haute accélération.
- Démontrer en calculant les accélérations limites dans différents cas
- Non nécessité d'un modèle dynamique précis dans le futur (feedback, on ne calcule que la première commande)
- Permet d'assurer une stabilité à long terme (quelques secondes)

II.3.2 Choix de la dynamique d'extrapolation

- Contraintes : Linéarité entre les variables / accélérations continues donc polynome d'ordre 3
- Formulation de l'équation d'état
- Calcul des dérivées

II.3.3 Formulation du modèle prédictif

- Formulation du modèle prédictif
- Problème de controlabilité dans le cas de basculement.
- Inversions de matrice

Chapitre III

Commande par modèle prédictif

III.1 Principe

- Commande optimale sous contraintes
- Résoudre le problème sur un horizon donné, en utilisant un modèle prédisant le futur
- La solution optimale du système n'est pas connue si l'on ne connaît pas les objectifs et contraintes futures
- Exemple de faire un déplacement triangle
- Utilisation de la commande optimale dans la marche bipède.
- Intérêt lorsque les contraintes sont fortes par rapport aux dynamiques de mandées de mouvement

III.2 Outil mathématique et contraintes associées

- On veut faire tourner le programme rapidement.
- Il n'existe généralement pas de solution analytique à un problème d'optimisation sous contrainte
- on ne peut guère aller plus compliqué qu'une résolution quadratique sous contrainte linéaire
- On va donc utiliser une formulation de QP

- Ce type d'optimisation nous permet de minimiser une norme 2, ce qui est suffisant. Le temps de calcul ne dépend pas du nombre d'objectifs.
- Il faudra linéariser les contraintes du problème
- Le temps de calcul dépend du nombre de contraintes, il faudra donc choisir un ensemble de contraintes linéaires conservatives suffisamment petit, mais sans restreindre trop le système.
- Lien vers l'annexe pour expliquer comment on résout un qp

III.3 Formulation des problèmes d'optimisations

III.3.1 Introduction

- On ne peut pas résoudre simplement un problème de complémentarité mixte
- On décide de séparer la résolution du problème en 3 parties
- Expliquer les deux premières, dépendant des dynamiques
- Expliquer le problème avec la transition, et la non gestion de l'impact.
- Un superviseur est écrit permettant de gérer les différents états.

III.3.2 Lorsque les trois roues sont en contact avec le sol

III.3.2.1 Formulation des objectifs

- Tracking control
- Robustesse (CoP)
- Stabilité numérique (jerk)

III.3.2.2 Formulation des contraintes

- Respecter la dynamique : CoP
- Limites vitesses/accélérations de la base
- Respecter la cinématique : C-B

III.3.2.3 Problème quadratique résultant

- Ecrire le problème résultant

III.3.3 Lorsque le robot bascule sur deux roues

III.3.3.1 Formulation des objectifs

- Minimiser l'angle
- Minimiser la vitesse angulaire
- Stabilité numérique

III.3.3.2 Formulation des contraintes

- Contrainte sur l'angle > 0
- Respecter la cinématique : C-B
- Limites vitesses/accélérations de la base

III.3.3.3 Problème quadratique résultant

- Ecrire le problème résultant

III.3.4 Gestion de la transition entre les deux états

III.3.4.1 Formulation des objectifs

- Minimiser la vitesse
- Robustesse (CoP)
- Stabilité numérique (jerk)

III.3.4.2 Formulation des contraintes

- Respecter la dynamique : CoP
- Limites vitesses/accélérations de la base
- Respecter la cinématique : C-B

III.3.4.3 Problème quadratique résultant

- Ecrire le problème résultant

III.4 Gestion des deux modèles dynamiques exclusifs

III.4.1 Choix d'un superviseur et conséquences

- Problème de transitions entre les contrôleurs
- Il faut un superviseur qui gère les différents états
- Parler de l'estimateur d'impact
- Limitations due au superviseur : Détection tardive / inadéquate / Choix non optimal / Oscillations
- Avantages : Gérer de manière simple différents modèles dynamiques

III.4.2 Fonctionnement du superviseur

- Expliquer le fonctionnement du superviseur et des différents états

III.4.3 Fonctionnement de l'estimateur d'impact

- Détailler le fonctionnement de l'estimateur d'impact

III.5 Vers une modélisation unifiée des deux dynamiques

III.5.1 Problème de complémentarité linéaire

- Considérer uniquement un problème de basculement dans une direction
- dire que par la suite, se limiter à ce cas permet de gérer tout les cas, en faisant quelques hypothèses
- Enoncer la dynamique de complémentarité
- Problème : Il y a 2^n états possibles linéaires à la dynamique.

III.5.2 Méthodes de résolution

- Considérer que lorsque le robot ne bascule pas, la commande ne le fera pas basculer. On se retrouve dans le cas du premier programme d'optimisation uniquement

- Si un basculement est mesuré, faire un a priori qu'il n'y aura pas de rebond possible. Ainsi, il n'y a qu'une variable à choisir : le temps d'impact.

- On se retrouve avec un problème non-linéaire, qui devient linéaire en choisissant l'état de cette variable.

- Il y a n choix possibles.

- On peut résoudre n QP et choisir le plus optimal.

- Ou alors on peut résoudre 3 QP et faire converger l'état de la variable.

- Présenter le problème d'optimisation unifié

Chapitre IV

Mesures et observateurs

IV.1 Les différentes valeurs à observer

- Position / vitesse / accélération base et corps
- angle / vitesse angulaire / accélération angulaire basculement base
- angle de la pente

IV.2 Capteurs disponibles

- mre / imu

IV.3 Méthodes de mesure et conséquences

IV.3.1 Mesure de la posture du robot

- En utilisant les mre et le modèle théorique du robot
- Nécessite un bon modèle du robot et une bonne calibration

IV.3.2 Observation de la position de la base mobile

- On mesure la vitesse des roues. On en déduit la position de la base en intégrant dans le temps et en utilisant un modèle des roues
- Dérive due à l'intégration. Ne mesure pas les glissements sur le sol

IV.3.3 Observation des vitesses et accélérations du robot et de la base

- Celles-ci sont observées en utilisant la prédiction du mouvement du robot au prochain pas de temps (utilisation de la dynamique d'ordre 3)
- Mieux que dériver la position du robot, moins de sensibilité au bruit (dérivation, quantification, capteur)
- Moins réactif aux erreurs en vitesses et accélérations
- Le robot étant commencé en position pour le corps, et en vitesse pour les roues, cela n'a pas grande importance

IV.3.4 Observation de l'angle de basculement et d'inclinaison du sol

- Système de base non observable. On mesure la somme des deux angles avec les accéléros, et la somme des variations angulaire avec les gyro.
- Pas de capteurs de force sur les roues. On ne sait pas lesquelles sont au sol.
- Il faut faire des hypothèses pour rendre le système observable
- Problèmes : Non-détections et faux-positifs
- Considère que lorsque l'angle est constant, alors on est sur une pente
- Sinon, toute variation de l'angle est considéré comme un push
- Problèmes si on perturbe le robot avec une dynamique lente

Chapitre V

Résultats et expérimentations

V.1 Schéma de contrôle en boucle fermée

- Présenter les asservissements bas niveau (feedback)
- Parler de la cinématique inverse
- feedback en position de mpc
- Extrapolation pour compenser le retard capteur
- Stabilisation en utilisant seulement une partie de sensor
- Rejeter le jeu mécanique (threshold)

V.2 Expériences en l'absence de perturbation et sur sol horizontal

V.2.1 Protocole expérimental

- Trajectoire non réalisable (test de faisabilité)
- Variables : jeu de pondération / nombre de masses pendule / open et close-loop mpc
- Trajectoire réalisable (test de suivi)
- Influence des compensations retard capteur / command sensor / jeu mécanique

V.2.2 Analyse des expériences

- Intérêt du choix des pondérations
- Vers une adaptation automatique des pondérations
- Intérêt d'une boucle fermée plus rapide que l'échantillonnage du mpc
- Utilisation de deux masses au lieu d'une
- Influence de la compensation du retard dans le suivi de trajectoire
- Nécessité de rejeter le jeu mécanique
- Dû aux bruits, ne pas utiliser entièrement sensor

V.3 Expériences de compensation de perturbations

V.3.1 Protocole expérimental

- Faire basculer le robot
- Variable : Durée / puissance push / direction

V.3.2 Analyse des expériences

- Pas de recovery quand il n'y a pas besoin
- Minimisation de la vitesse d'impact (le robot peut reculer)
- Pousser trop fort emmène aux limites physique du robot
- Vers une utilisation des bras pour rééquilibrer

V.4 Expériences de compensation de l'inclinaison du sol

V.4.1 Protocole expérimental

- Faire rouler le robot préalablement sur une pente
- Faire monter / descendre une pente
- Modifier la direction de déplacement
- Modifier la nature du sol

- Push sur pente
- Pente variable

V.4.2 Analyse des expériences

- Vitesse limitée car roues qui décolle
- Problème de détection push / pente
- Compensation jusqu'à 5 degrés
- Problèmes de glissement au delà
- Cas limite de push pendant une montée de pente

Chapitre VI

Synthèse

VI.1 Contributions

VI.2 Perspectives

VI.3 conclusion

Bibliographie

- [1] S Miasa, M Al-Mjali, A Al-Haj Ibrahim, and T A Tutunji. Fuzzy control of a two-wheel balancing robot using dspic. In *2010 7th International Multi-Conference on Systems Signals and Devices (SSD)*, pages 1–6, 2010.

Annexe A

Pepper, un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles

Annexe B

Optimisation du choix du modèle dynamique

Annexe C

Résolution d'un problème quadratique

Annexe D

**“MPC-WalkGen”, librairie C++
implémentant la commande par modèle
prédictif**